

SẢN PHẨM MẪU ĐỀ KIỂM TRA
CUỐI HK2 LỚP 12

KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ 2 – LỚP 12

Bài thi môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào sau đây không là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3$.

A. $F(x) = x^2 + 3x$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a)$

B. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$

D. $\int f(x) dx = f(b) - f(a)$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $f(1) = 2, f(3) = 4$. Tính tích phân

$I = \int_1^3 f'(x) dx$

A. $I = 2$

B. $I = 3$

C. $I = 1$

D. $I = 4$

Câu 5. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$

B. $25m$

C. $50m$

D. $16m$

Câu 6. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

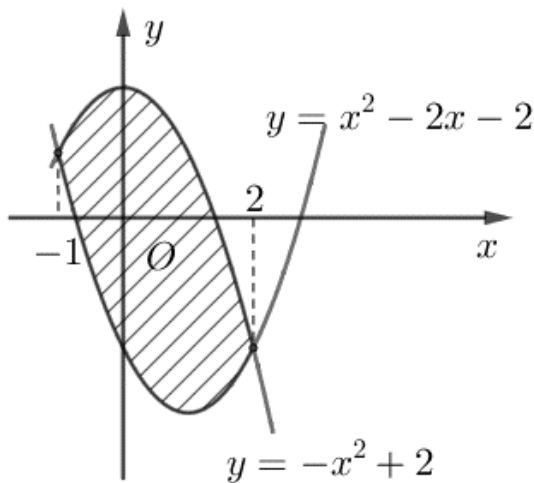
A. $S = \int_0^2 e^x dx$

B. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$

C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$

D. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$

Câu 7. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là

A. $\vec{n}_4 = (-1; 2; -3)$

B. $\vec{n}_3 = (-3; 5; -1)$

C. $\vec{n}_2 = (2; -3; 5)$

D. $\vec{n}_1 = (2; 3; 5)$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$

B. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$

C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$

D. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$

B. $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$

Câu 11. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,3; P(B) = 0,6; P(A \cap B) = 0,2$. Xác suất $P(A|B)$ là

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

Câu 12. Một công ty may có hai chi nhánh cùng sản xuất một loại áo, trong đó có 56% áo ở chi nhánh I và 44% áo ở chi nhánh II. Tại chi nhánh I có 75% áo chất lượng cao và tại chi nhánh II có 68% áo chất lượng cao (kích thước và hình dáng bề ngoài của các áo là như nhau). Chọn ngẫu nhiên 1 áo. Xác suất chọn được áo chất lượng cao là (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. 0,72

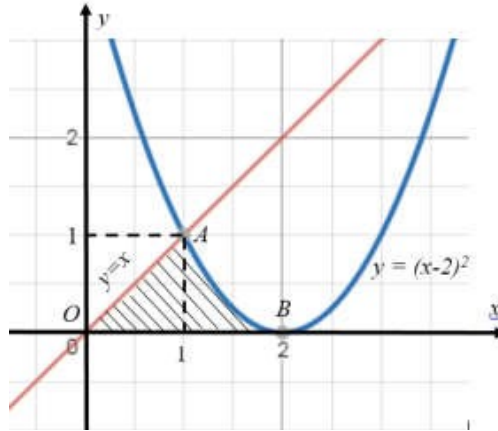
B. 0,35

C. 0,82

D. 0,55

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Đồ thị các đường $y = x$; $y = (x - 2)^2$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x$, trục hoành, $x = 0$; $x = 1$. S_2 diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = (x - 1)^2$, trục hoành, $x = 1$; $x = 2$.



a) $S_1 = \int_0^1 |x| dx$.

b) $S_2 = - \int_1^2 (x - 2)^2 dx$.

c) $S_1 = \int_0^1 |x| dx = \int_0^1 x dx$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x$; $y = (x - 2)^2$ và trục hoành bằng $S = \frac{1}{6}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Đường thẳng d nhận $u = (-1; 2; -3)$ là một vectơ chỉ phương.

b) Điểm $A(2; 3; 1)$ thuộc đường thẳng d .

c) Điểm $B(1; -5; -4)$ không thuộc đường thẳng d .

d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$.

Câu 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là $I(1; -2; -1)$ và $R=3$.

b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1; 3; -1)$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 6 = 0$.

d) Giao tuyến của mặt phẳng $(Q): 2x + 2y + z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

Câu 4. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi vàng, 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai chứa 4 viên bi vàng, 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lấy ra 2 viên bi bất kỳ từ hộp thứ hai.

a) Xác suất để lấy được bi xanh từ hộp thứ nhất là $\frac{3}{8}$.

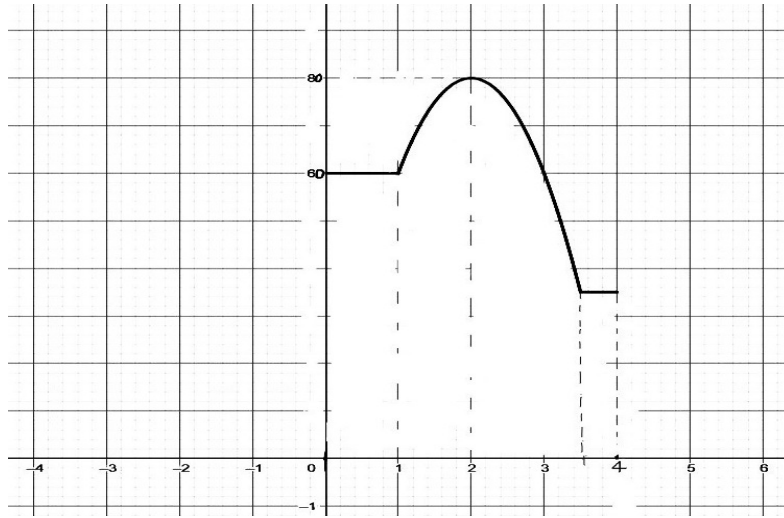
b) Xác suất để lấy được bi vàng từ hộp thứ nhất là $\frac{5}{7}$.

c) Biết rằng lấy được bi màu xanh từ hộp thứ nhất. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu từ hộp thứ hai là $\frac{9}{13}$.

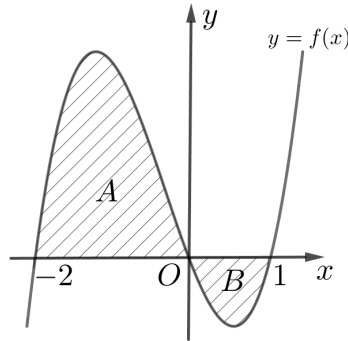
d) Xác suất để lấy được 2 bi vàng từ hộp thứ hai là $\frac{5}{32}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một ô tô đi từ tỉnh A đến D thì phải đi qua đoạn đường BC hết 4,5 giờ. Ô tô đó đi với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian $1h$, ô tô đi từ tỉnh B có đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox và trong $2,5h$ tiếp theo đồ thị ô tô đó chuyển động là một phần của Parabol có đỉnh $I(2; 80)$ và trục đối xứng song song với trục Oy . Khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox . Tính đoạn đường BC



Câu 2. Biết rằng $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ được biểu diễn trong hình bên dưới.



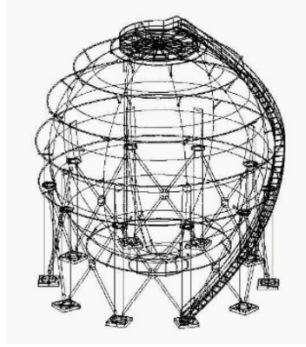
Biết rằng diện tích các phân hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 5, S_B = 2$. Nếu $F(-2) = 1$ thì $F(1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = -2t' \end{cases}$, và mặt phẳng (P) :

$x + y + z + 2 = 0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) , cắt d và d' có phương trình là

$\frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z+2}{c}$ ($0 < a < 5, a, b, c \in \mathbb{Z}$) . Biểu thức $T = \frac{ab}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

Câu 4. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết tâm mặt cầu có tọa độ $I(2; 3; 4)$ và mặt cầu tiếp xúc với nắp đáy là mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-7; 0; 4)$, $B(-\frac{2}{3}; 0; \sqrt{7})$, $C(-\sqrt{2}+1; 0; -\frac{\sqrt{3}}{5})$ như hình vẽ. Đường kính của bồn chứa khí hóa lỏng bằng bao nhiêu?



- Câu 5.** Một lớp có 16 học sinh nữ, còn lại là học sinh nam. Trong giờ giáo dục thể chất thầy giáo khảo sát kết quả rèn luyện thể lực của học sinh bằng cách bốc thăm trong danh sách lớp để chọn hai bạn chạy tiếp sức. Biết xác suất để chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ bằng $\frac{15}{62}$. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?
- Câu 6.** Một đội bắn súng gồm có 8 nam và 2 nữ. Xác suất bắn trúng của các xạ thủ nam là 0,8 còn của các xạ thủ nữ là 0,9. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn một viên đạn và xạ thủ đó đã bắn trúng. Tính xác suất để xạ thủ đó là nữ?

ĐÁP ÁN ĐỀ MẪU

PHẦN I

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	A	B	B	A	A	A	A	C	C	A	B	A

PHẦN II

Điểm tối đa của 01 câu hỏi là 1 điểm.

- ☞ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm.
- ☞ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được 0,25 điểm.
- ☞ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được 0,50 điểm.
- ☞ Thí sinh lựa chọn chính xác cả 04 ý trong 1 câu hỏi được 1 điểm.

Câu	Câu	Câu	Câu
a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ
b) S	b) S	b) Đ	b) S
c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ
d) S	d) S	d) Đ	d) S

PHẦN III.

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	248,3	4	1	6	32	0,22

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào sau đây không là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3$.

A. $F(x) = x^2 + 3x$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

Lời giải

Ta có $F(x) = x^2 + 3x \Rightarrow F'(x) = 2x + 3$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Lời giải

Ta có $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a)$

B. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$

D. $\int f(x) dx = f(b) - f(a)$

Lời giải

Ta có $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $f(1) = 2, f(3) = 4$. Tính tích phân

$I = \int_1^3 f'(x) dx$

A. $I = 2$

B. $I = 3$

C. $I = 1$

D. $I = 4$

Lời giải

Ta có $I = \int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1) = 2$

Câu 5. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$

B. $25m$

C. $50m$

D. $16m$

Lời giải

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$

$$S = 3 \cdot 10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + 25 = 55m$$

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là

Câu 6. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 e^x dx$

B. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$

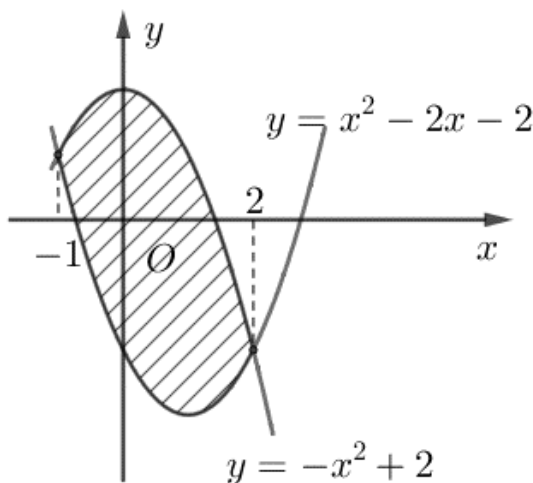
C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$

D. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là: $S = \int_0^2 e^x dx$.

Câu 7. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_1^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

B. $\int_1^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

C. $\int_1^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$

D. $\int_1^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$$\int_1^2 [(-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)] dx = \int_1^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là

A. $\vec{n}_4 = (-1; 2; -3)$

B. $\vec{n}_3 = (-3; 5; -1)$

C. $\vec{n}_2 = (2; -3; 5)$

D. $\vec{n}_1 = (2; 3; 5)$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$

B. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$

C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$

D. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$

B. $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$

Lời giải

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 0 + 4 + 1 = 6 > 0$.

Đáp án B vì không có số hạng y^2 .

Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$.

Đáp án D loại vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 1 + 4 - 8 = -2 < 0$.

Câu 11. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,3; P(B) = 0,6; P(A \cap B) = 0,2$. Xác suất $P(A|B)$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$$

Theo định nghĩa xác suất có điều kiện ta có:

Câu 12. Một công ty may có hai chi nhánh cùng sản xuất một loại áo, trong đó có 56% áo ở chi nhánh I và 44% áo ở chi nhánh II. Tại chi nhánh I có 75% áo chất lượng cao và tại chi nhánh II có 68% áo chất lượng cao (kích thước và hình dáng bề ngoài của các áo là như nhau). Chọn ngẫu nhiên 1 áo. Xác suất chọn được áo chất lượng cao là (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. 0,72

B. 0,35

C. 0,82

D. 0,55

Lời giải

Gọi A là biến cố áo được chọn là áo chất lượng cao. B là biến cố áo được chọn ở chi nhánh I và $\bar{B}$ là biến cố áo được chọn ở chi nhánh II.

$$P(B) = 0,56 \quad P(A|B) = 0,75 \quad P(\bar{B}) = 0,44 \quad P(A|\bar{B}) = 0,68$$

Từ giả thiết ta có

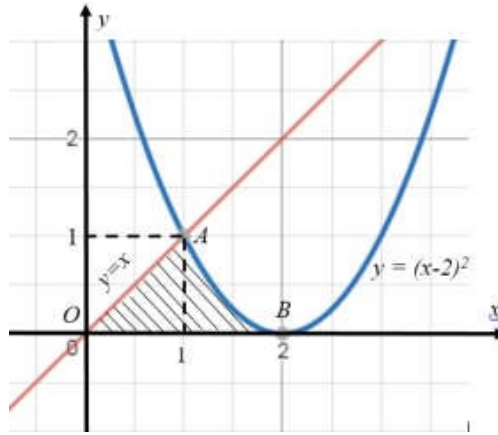
Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B}) = 0,56.0,75 + 0,44.0,68 = 0,7192 \approx 0,72$$

Vậy xác suất chọn được áo chất lượng cao là 0,72.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Đồ thị các đường $y = x$; $y = (x - 2)^2$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x$, trục hoành, $x = 0$; $x = 1$. S_2 diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = (x - 2)^2$, trục hoành, $x = 1$; $x = 2$.



a) $S_1 = \int_0^1 |x| dx$

b) $S_2 = - \int_1^2 (x - 2)^2 dx$

c) $S_1 = \int_0^1 |x| dx = \int_0^1 x dx$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x$; $y = (x - 2)^2$ và trục hoành bằng $S = \frac{1}{6}$.

Lời giải

$$S_1 = \int_0^1 |x| dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_1^2 |(x - 2)^2| dx = \int_1^2 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3},$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x$; $y = (x - 2)^2$ và trục hoành là: $S = S_1 + S_2 = \frac{5}{6}$

$$d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t, \\ z = 2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Đường thẳng d nhận $u = (-1; 2; -3)$ là một vectơ chỉ phương.

b) Điểm $A(2; 3; 1)$ thuộc đường thẳng d .

c) Điểm $B(1; -5; -4)$ không thuộc đường thẳng d .

d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$.

Lời giải

a) Ta có véc tơ $\vec{u}_1 = (-1; 2; -3)$ cùng phương với véc tơ chỉ phương $u = (-1; 2; -3)$ nên $\vec{u}_1 = (-1; 2; -3)$ cũng là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d .

b) Thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$d: \begin{cases} 2 = 3 + t \\ 3 = 1 - 2t \\ 1 = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra $A \notin d$.

c) Thay tọa độ điểm B vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$d: \begin{cases} 1 = 3 + t \\ -5 = 1 - 2t \\ -4 = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$$

Suy ra $B \notin d$.

d) Rút tham số t từ phương trình tham số của d ta có phương trình chính tắc của đường thẳng

$$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$$

Câu 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.

b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1; 3; -1)$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 6 = 0$.

- d) Giao tuyến của mặt phẳng $(Q): 2x + 2y + z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

Lời giải

- a) Mặt cầu (S) có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$.

Suy ra, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 3$.

- b) Thay tọa độ điểm $A(1; 3; -1)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta có:
 $1^2 + 3^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$. Vậy, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1; 3; -1)$.

- c) Khoảng cách từ tâm $I(-1; 2; 1)$ đến mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 6 = 0$ là:

$$d_{(I;P)} = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 = R$$

Suy ra, Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 6 = 0$.

- d) Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(-1; 2; 1)$ trên mặt phẳng $(Q): 2x + 2y + z + 5 = 0$.

$$\text{Khi đó, } d_{(I;Q)} = IH = \frac{|2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{8}{3}.$$

Giả sử, giao tuyến của mặt phẳng $(Q): 2x + 2y + z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) là một đường tròn có bán kính bằng r .

$$\text{Khi đó, } r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Câu 4. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi vàng, 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai chứa 4 viên bi vàng, 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lấy ra 2 viên bi bất kỳ từ hộp thứ hai.

- a) Xác suất để lấy được bi xanh từ hộp thứ nhất là $\frac{3}{8}$.
- b) Xác suất để lấy được bi vàng từ hộp thứ nhất là $\frac{5}{7}$.
- c) Biết rằng lấy được bi màu xanh từ hộp thứ nhất. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu từ hộp thứ hai là $\frac{9}{13}$.

d) Xác suất để lấy được 2 bi vàng từ hộp thứ hai là $\frac{5}{32}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố lấy được bi xanh từ hộp thứ nhất

a) Ta có: $P(A) = \frac{3}{8}$.

b) Ta có $\bar{A}$ là biến cố lấy được bi vàng từ hộp thứ nhất, ta có: $P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$.

c) Gọi B_1 là biến cố lấy được 2 bi khác màu từ hộp thứ hai. Ta có:

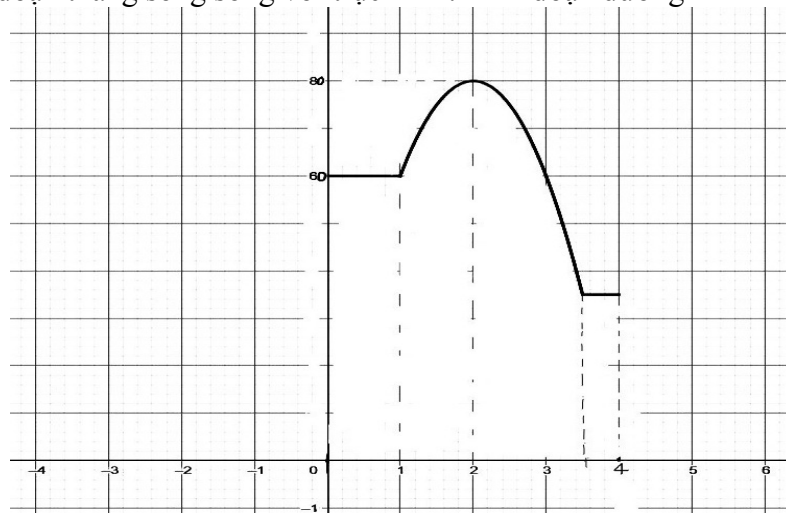
$$P(B_1 | A) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_6^1}{C_{13}^2} = \frac{9}{13}$$

d) Gọi B_2 là biến cố lấy được 2 bi vàng từ hộp thứ hai. Ta có:

$$P(B_2) = P(A) \cdot P(B_2 | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B_2 | \bar{A}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{C_4^2}{C_{13}^2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{C_5^2}{C_{13}^2} = \frac{17}{156}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một ô tô đi từ tỉnh A đến D thì phải đi qua đoạn đường BC hết $4,5$ giờ. Ô tô đó đi với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian $1h$, ô tô đi từ tỉnh B có đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox và trong $2,5h$ tiếp theo đồ thị ô tô đó chuyển động là một phần của Parabol có đỉnh $I(2; 80)$ và trục đối xứng song song với trục Oy . Khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox . Tính đoạn đường BC



Lời giải

Theo bài ra trong khoảng thời gian từ $1 \rightarrow 3,5h$ vận tốc ô tô là: $v(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$)

Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} v(1)=60 \\ \frac{-b}{2a}=2 \\ v(2)=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=60 \\ 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-20 \\ b=80 \\ c=0 \end{cases}$$

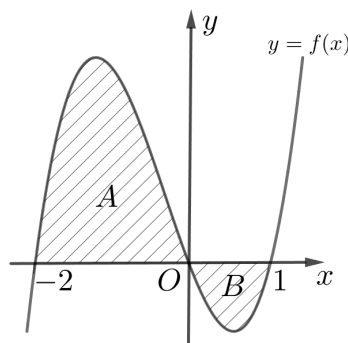
$$\Rightarrow v(t) = -20t^2 + 80t$$

$$v(1) = -20(1)^2 + 80 \cdot 1 = 60$$

$$v(3,5) = -20(3,5)^2 + 80 \cdot 3,5 = 35$$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 60 dt + \int_1^{3,5} (-20t^2 + 80t) dt + \int_{3,5}^4 35 dt = 248,3(km)$$

Câu 2. Biết rằng $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ được biểu diễn trong hình bên dưới.



Biết rằng diện tích các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 5, S_B = 2$. Nếu $F(-2) = 1$ thì $F(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Theo đề bài ta có:

$$S_A = \int_{-2}^0 f(x) dx = F(0) - F(-2) = 5 \quad ; \quad S_B = \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 2$$

Từ đó suy ra : $S_A - S_B = F(1) - F(-2) = 3 \Leftrightarrow F(1) = 4$.

$$d: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = -2t' \end{cases}, \text{ và mặt phẳng } (P):$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$x + y + z + 2 = 0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) , cắt d và d' có phương trình là

$$\frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z+2}{c} \quad (0 < a < 5, a, b, c \in \mathbb{Z}) \quad T = \frac{ab}{c}$$

. Biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất bằng

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n(1,1,1)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $A = \Delta \cap d$ có $A \in d$ nên $A(-1-2t; t; -1+3t)$, có $B = \Delta \cap d \rightarrow B \in d$ nên $B(2+t'; -1+2t'; -2t')$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (t' + 2t + 3; 2t' - t - 1; -2t' - 3t + 1)$.

Do $\Delta \perp (P)$ nên $\overrightarrow{AB}, n$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{t' + 2t + 3}{1} = \frac{2t' - t - 1}{1} = \frac{-2t' - 3t + 1}{1}$

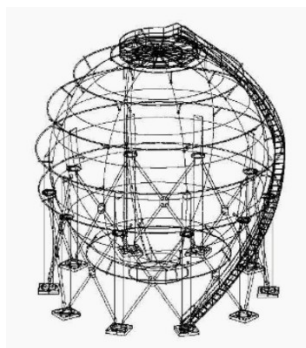
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t - t' = -4 \\ 2t + 4t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -1; -4) \\ B(3; 1; -2) \end{cases}$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm B và có vector chỉ phương $n = (1; 1; 1)$ nên có phương trình

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Suy ra $\text{Min} T = 1$.

Câu 4. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết tâm mặt cầu có tọa độ $I(2; 3; 4)$ và mặt cầu tiếp xúc với nắp đáy là mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-7; 0; 4)$, $B\left(-\frac{2}{3}; 0; \sqrt{7}\right)$, $C\left(-\sqrt{2}+1; 0; -\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ như hình vẽ. Đường kính của bồn chứa khí hóa lỏng bằng bao nhiêu?



Lời giải

Vì ba điểm A, B, C đều có tung độ bằng 0 nên nắp đáy là mặt phẳng có phương trình $(P): y = 0$.

$$R = d(I, (P)) = |3| = 3$$

Đường kính của bồn chứa khí hóa lỏng là $2.3 = 6$.

Câu 5. Một lớp có 16 học sinh nữ, còn lại là học sinh nam. Trong giờ giáo dục thể chất thầy giáo khảo sát kết quả rèn luyện thể lực của học sinh bằng cách bốc thăm trong danh sách lớp để chọn hai bạn chạy tiếp sức. Biết xác suất để chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ bằng $\frac{15}{62}$. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?

Lời giải

Gọi A là biến cố: “Lần thứ nhất chọn được bạn nữ”

Gọi B là biến cố: “Lần thứ hai chọn được bạn nữ”

Gọi C là biến cố: “Chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ”

Theo đề bài ta có $C = AB \Rightarrow P(C) = P(AB) = \frac{15}{62}$

Gọi số học sinh của lớp là $x, x \in \mathbb{N}, x > 16$

Theo đề bài ta có: $P(A) = \frac{16}{x}, P(B|A) = \frac{15}{x-1}$

Do $P(AB) = P(BA) = P(B|A).P(A) \Leftrightarrow \frac{15}{62} = \frac{16}{x} \cdot \frac{15}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 992 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = -31 \end{cases}$

Vậy số học sinh của lớp là 32 học sinh.

Câu 6.

Một đội bắn súng gồm có 8 nam và 2 nữ. Xác suất bắn trúng của các xạ thủ nam là 0,8 còn của các xạ thủ nữ là 0,9. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn một viên đạn và xạ thủ đó đã bắn trúng. Tính xác suất để xạ thủ đó là nữ?

Lời giải

Gọi A là biến cố “Xạ thủ được chọn là nữ”, suy ra $\bar{A}$ là biến cố “xạ thủ được chọn là nam”

Gọi B là biến cố “xạ thủ được chọn bắn trúng”

Theo giả thiết ta có:

$$P(A) = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

$$P(B|A) = 0,9$$

$$P(B|\bar{A}) = 0,8$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5}.0,9 + \frac{4}{5}.0,8 = 0,82$$

Xác suất để xạ thủ được chọn ra bắn trúng đó là nữ là $P(A|B)$

Theo công thức Bayes, ta có

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}.0,9}{0,82} = \frac{9}{41} \approx 0,22$$

Vậy xác suất để xạ thủ bắn trúng đó là nữ là $0,22$.