CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 9. Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn

Câu 1. **(HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Tìm x thỏa mãn $|2x+3|+|2x-1|=\dfrac{8}{3(x+1)^2+2}$.

Lời giải

Ta có $|2x+3|+|2x-1|=|2x+3|+|1-2x|\geq|2x+3+1-2x|=|4|=4$ với mọi x.

Lại có $3(x+1)^2+2\geq 2 \Rightarrow \dfrac{8}{3(x+1)^2+2}\leq\dfrac{8}{2}=4$ với mọi x.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+3)(1-2x)\geq 0\\(x+1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $x=-1$.

Câu 2. **(HSG 7 Hưng Hà, Thái Phương, 2022 - 2023)**

Cho $\dfrac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3.$ Tính $x+y$.

Lời giải

$$\frac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3$$

$(x-2022)^2\geq 0\,;\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow (x-2022)^2+2\geq 0+2=2.$

$$\frac{1}{(x-2022)^2+2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{6}{(x-2022)^2+2}\leq\frac{6}{2}=3 \quad (1)$$

$|y-2023|\geq 0\,;\ \forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow |y-2023|+3\geq 0+3=3 \quad (2)$

$\dfrac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3 \quad (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x-2022=0$ và $y-2023=0$

$\Rightarrow x=2022; y=2023.$

Suy ra $x+y=2022+2023=4045.$

Vậy $x+y=4045.$

Câu 3. **(HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thanh Trì 2021 - 2022)**

Tìm các số x, y nguyên thỏa mãn: $|x-8|+|6-x|=\dfrac{24}{5(y+3)^2+12}$.

Lời giải

Ta chứng minh được $|A|+|B|\geq|A+B|$, nên $|x-8|+|6-x|\geq|8-x+6-x|=2$ với mọi x.

Mặt khác $\dfrac{24}{5(y+3)^2+12}\leq 2$ với mọi y.

Từ đó suy ra $y+3=0\Rightarrow y=-3$.

Khi đó $|x-8|+|6-x|=2\Rightarrow 6\leq x\leq 8$, mà x nguyên nên $x\in\{6;7;8\}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ là $(6;-3);(7;-3);(8;-3)$.

Câu 4. **(HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)**

Tìm x biết: $|2022-x|+|2023-x|+|2024-x|=2.$

Lời giải

Ta có $|2022-x|+|2024-x|=|x-2022|+|2024-x|\geq|x-2022+2024-x|=2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow |2022-x|+|2024-x|\geq 2 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (1)$

Dấu "=" xảy ra khi $(x-2022)(2024-x)\geq 0 \quad (*)$

Giải $(*)$:

TH1: $x-2022\geq 0$ và $2024-x\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 2022$ và $x\leq 2024.$

$\Rightarrow 2022\leq x\leq 2024$.

TH2: $x-2022\leq 0$ và $2024-x\leq 0$

hoặc $\Rightarrow x\leq 2022$ và $x\geq 2024$ (loại)

Ta có: $|2023-x|\geq 0 \quad \forall x \quad (2)$

Dấu "=" xảy ra khi $x=2023$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow |2022-x|+|2023-x|+|2024-x| \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy để $|2022-x|+|2023-x|+|2024-x|=2$ thì (1) và (2) xảy ra dấu "$=$" khi:

$2022 \leq x \leq 2024$ và $x=2024 \Rightarrow x=2024.$

Vậy $x=2024$

Câu 5. **(HSG 7 huyện Thuận Thành 2021 - 2022)**

Tìm x biết: $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$

Lời giải

Từ $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$ ta thấy vế trái: $|x+1|+|x+2|+|x+3| \geq 0$ nên vế phải:

$4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$

Với $x \geq 0$ thì $|x+1|=x+1, |x+2|=x+2, |x+3|=x+3$. Do đó ta có

$x+1+x+2+x+3=4x \Rightarrow x=6$ (thỏa mãn).

Vậy $x=6.$

Câu 6. **(HSG 7 huyện Chư Sê 2021 - 2022)**

Chứng minh rằng không tìm được các số nguyên thỏa mãn $|x-y|+|y-z|+|z-x|=2023$

Lời giải

Ta có: $|x-y|+|y-z|+|z-x|=|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên x ta lại có: $|x|+x=\begin{cases}2x & (x \geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

Suy ra $|x|+x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x.

Từ đó ta có: $\begin{cases}|x-y|+(x-y)\\ |y-z|+(y-z)\\ |z-x|+(z-x)\end{cases}$ là các số chẵn với mọi số nguyên x, y, z.

Suy ra $|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z.

Hay $|x-y|+|y-z|+|z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z.

Do đó không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

Câu 7. **(HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)**

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn :

$|x-y|+|y-z|+|z-x|=2017$

Lời giải

Ta có: $|x-y|+|y-z|+|z-x|=|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên x ta lại có $|x|+x=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

Suy ra $|x|+x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

Từ đó ta có: $|x-y|+(x-y)$; $|y-z|+(y-z)$; $|z-x|+(z-x)$ là các số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Suy ra $|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Hay $|x-y|+|y-z|+|z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn: $|x-y|+|y-z|+|z-x|=2017$

Câu 8. **(HSG 7 Hưng Hà, Lý Nam Đế, 2022 - 2023)**

Tìm x biết: $\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{3}\right|+\left|x+\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}.$

Lời giải

Ta có: $\left|x+\frac{1}{4}\right|=\left|-x-\frac{1}{4}\right|\ge -x-\frac{1}{4}$

$\left|x+\frac{1}{3}\right|=0$; $\left|x+\frac{1}{2}\right|\ge x+\frac{1}{2}$

Do đó: $A\ge x+\frac{1}{2}+0-x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi: $x+\frac{1}{4}\le 0$; $\left|x+\frac{1}{3}\right|=0$ và $x+\frac{1}{2}\ge 0$

Suy ra: $x=-\frac{1}{3}.$

Vậy $A=\frac{1}{4}$ khi $x=-\frac{1}{3}$.

Câu 9. **(HSG 7 trường Giao Tân 2016 - 2017)**

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$|x-y|+|y-z|+|z-x|=2017$

Lời giải

Ta có: $|x-y|+|y-z|+|z-x|=|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên x ta lại có $|x|+x=\begin{cases}2x & \text{với } x\ge 0\\ 0 & \text{với } x<0\end{cases}$

Suy ra $|x|+x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

Từ đó ta có: $\begin{cases}|x-y|+(x-y)\\|y-z|+(y-z)\\|z-x|+(z-x)\end{cases}$ là các số chẵn với mọi số nguyên x,y,z

$\Rightarrow |x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$ là một số chẵn với mọi $x,y,z\in\mathbb{Z}$

Hay $|x-y|+|y-z|+|z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x,y,z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x,y,z thỏa mãn: $|x-y|+|y-z|+|z-x|=2017$

Câu 10. **(HSG 7 trường Cự Khê 2013 – 2014; huyện Thanh Oai 2013- 2014)**

Tìm x, biết: $|x-2010|+|x-2012|+|x-2014|=4$

Lời giải

$|x-2010|+|x-2012|+|x-2014|\geq |x-2010+2014-x|+|x-2012|\geq 4(*)$

Mà $|x-2010|+|x-2012|+|x-2014|=4$

nên (*) xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2012=0\\2010\leq x\leq 2014\end{cases}\Rightarrow x=2012$

Vậy $x=2012$.

Câu 11. **(HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Tìm x, thỏa mãn: $|x-1|+|x-5|+|x-2007|=2006$

Lời giải

Ta có:

$|x-1|+|x-5|+|x-2007|=|x-1|+|x-5|+|2007-x|\geq x-1+0+2007-x=2006$

Mà $|x-1|+|x-5|+|x-2007|=2006$

$\Rightarrow \begin{cases}x-1\geq 0\\x-5=0\\2007-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x\geq 1\\x=5\\x\leq 2007\end{cases}\Rightarrow x=5$

Vậy $x=5$.

Câu 12. **(HSG 7 huyện Trực Ninh 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên x, y biết $-x^2+x+1=|y-5|$.

Lời giải

$-x^2+x+1=|y-5|$ (1)

$-x^2+x+2=|y-5|+1$

$-x^2-x+2x+2=|y-5|+1$

$-x(x+1)+2(x+1)=|y-5|+1$

$(x+1)(2-x)=|y-5|+1$

Ta có $|y-5|+1>0,\ \forall y$ nên $(x+1)(2-x)>0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)<0$

Mà $x+1>x-2$ nên $\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\end{cases}\Rightarrow -1<x<2$

Vì x nguyên nên $x=0$ hoặc $x=1$

+ Với $x=0$ thì $|y-5|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y-5=1\\y-5=-1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=6\\y=4\end{array}\right.$

+ Với $x=1$ thì $|y-5|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y-5=1\\y-5=-1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=6\\y=4\end{array}\right.$

Vậy các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn là $(0;4),(0;6),(1;4),(1;6)$.

Câu 13. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Tân Tiến 2022 - 2023)**

Tìm x,y,z biết: $|7-3x|+2|x^2+2|=2x^2+3x-3$

Lời giải

$|7-3x|+2|x^2+2|=2x^2+3x-3 \qquad (1)$

Với mọi x ta có: $x^2\ge 0\Rightarrow 2x^2\ge 0\Rightarrow 2x^2+3\ge 3\Rightarrow |2x^2+3|=2x^2+3$

Khi đó (1) trở thành:

$|7-3x|+2(x^2+2)=2x^2+3x-3$

$\Rightarrow |3x-7|+2x^2+4=2x^2+3x-3$

$\Rightarrow |3x-7|=3x-7$

$\Rightarrow 3x-7\ge 0\Rightarrow 3x\ge 7\Rightarrow x\ge\frac{7}{3}$

$x\ge\frac{7}{3}$

Vậy

Câu 14. **(HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $|x+2|+|x-1|=3-(y+2)^2$.

Lời giải

Vì: $|x+2|+|1-x|\ge|x+2+1-x|=3$

Mặt khác: $3-(y+2)^2\le 3$

Để $|x+2|+|x-1|=3-(y+2)^2\Rightarrow\begin{cases}|x+2|+|x-1|=3\\3-(y+2)^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x\le 1\\y=-2\end{cases}$

$\Rightarrow (x;y)\in\{(-2;-2),(-1;-2),(0;-2),(1;-2)\}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là: $(-2;-2)$, $(-1;-2)$, $(0;-2)$, $(1;-2)$.

Câu 15. **(HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn $\left||x-2022|+|x-2023|+3(x-y)^2\right|=2(x-y)^2+1$.

Lời giải

Ta có: $2(x-y)^2+1\ge 1$ với mọi $x,y.$

Có $|x-2022|\ge 0;|x-2023|\ge 0;\ 3(x-y)^2\ge 0.$

Suy ra: $|x-2022|+|x-2023|+3(x-y)^2\ge 0$ với mọi $x;y$.

$\Rightarrow\left||x-2022|+|x-2023|+3(x-y)^2\right|=|x-2022|+|x-2023|+3(x-y)^2.$

Kết hợp với bài ra ta có: $|x-2022|+|x-2023|+3(x-y)^2=2(x-y)^2+1$

$\Rightarrow |x-2022|+|x-2023|+(x-y)^2=1$

Sử dụng bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối $|a+b|\ge|a-b|$, ta có:

$|x-2022|+|x-2023|\ge|x-2022-x+2023|=1;(x-y)^2\ge 0$ với mọi $x;y$.

$\Rightarrow |x-2022|+|x-2023|+(x-y)^2\ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi: $x=y$ và $2022\le x\le 2023$.

Vì x,y nguyên nên ta tìm được các cặp giá trị $(x;y)$ là $(2022;2022);(2023;2023).$

Câu 16. **(HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)**

Tìm x,y biết: $\dfrac{6}{(x-1)^2+2}=|y-1|+|y-2|+|y-3|+1$

Lời giải

$\dfrac{6}{(x-1)^2+2}=|y-1|+|y-2|+|y-3|+1$

+ Ta có: $(x-1)^4\ge 0$ với mọi $x\Rightarrow (x-1)^4+2\ge 2$

$\Rightarrow \dfrac{6}{(x-1)^4+2}\le 3$ với mọi x hay $VT\le 3$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

+ Ta có: $|y-1|+|y-2|+|y-3|+1=|y-1|+|y-3|+|y-2|+1$

$\geq y-1+3-y+0+1=3$ hay $VP\geq 3$

Dấu "=" xảy ra khi $\hat{U}\begin{cases}y\geq 1\\ y\leq 3\\ y=2\end{cases}$

Do đó $\frac{6}{(x-1)^2+2}=|y-1|+|y-2|+|y-3|+1$

$\Rightarrow x=1;y=2$

Vậy $x=1;y=2$.

Câu 17. **(HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)**

Tìm x biết: $|x-2020|+|x-2021|+|x-2022|+|x-2023|=4.$

Lời giải

Ta có: $|x-2020|+|x-2021|+|x-2022|+|x-2023|$

$=|x-2020|+|x-2021|+|2022-x|+|2023-x|$

$\geq|x-2020+2023-x|+|x-2021+2022-x|=4.$

Dấu "=" xảy ra khi: $(x-2020)(2023-x)\geq 0$ và $(x-2021)(2022-x)\geq 0$

$\Rightarrow 2020\leq x\leq 2023$ và $2021\leq x\leq 2022\Rightarrow 2021\leq x\leq 2022$.

Vậy $2021\leq x\leq 2022$.

Câu 18. **(HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)**

Tìm các số nguyên a,b,c thỏa mãn $|a-b|+|b-c|+|c-a|=2021^a+2022^a$

Lời giải

Ta có $|a-b|+(a-b)+|b-c|+(b-c)+|c-a|+(c-a)=2021^a+2022^a$ (*)

Nhận thấy $|x-y|+(x-y)$ luôn là số chẵn với mọi x,y

Nên vế trái của (*) là số chẵn

- Nếu $a>0\Rightarrow 2021^a+2022^a$ luôn là số lẻ. Nên không xảy ra (*)

- Nếu $a<0\Rightarrow 0<2021^a+2022^a<1$ Nên không Nên không xảy ra (*) do $a,b,c\in\mathbb{Z}$

Do đó $a=0\Rightarrow|b|+|b-c|+|c|=0\Rightarrow b=c=0$

Vậy $a=b=c=0$

Câu 19. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Duyên Hải 2022 - 2023)**

Tìm $x; y$ biết: $\left[(x-2)^2+4\right]^2+\sqrt{(x+2y-6)^2+9}=19$

Lời giải

$\left[(x-2)^2+4\right]^2+\sqrt{(x+2y-6)^2+9}=19$

Ta có: $(x-2)^2\geq 0$ với mọi $x \Rightarrow (x-2)^2+4\geq 4 \Rightarrow \left[(x-2)^2+4\right]^2\geq 4^2=16$ (1)

$(x+2y-6)^2\geq 0$ với mọi $x; y \Rightarrow \sqrt{(x+2y-6)^2+9}\geq\sqrt{9}=3$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\left[(x-2)^2+4\right]^2+\sqrt{(x+2y-6)^2+9}\geq 16+3=19$

Vậy biểu thức: $\left[(x-2)^2+4\right]^2+\sqrt{(x+2y-6)^2+9}=19$ khi $\begin{cases}(x-2)^2=0\\(x+2y-6)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\\x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

Vậy $x=2; y=2$

Câu 20. **(HSG 7 Nga Sơn, Thanh Hóa, 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x+y)^4=40x+41$.

Lời giải

Do x, y nguyên dương nên $40x<41x,\ 41\leq 41y$. Khi đó, ta có :

$(x+y)^4=40x+41<41x+41y=41(x+y)$

$\Rightarrow (x+y)^3<41<64=4^3\Rightarrow x+y<4.$ (1)

Do x nguyên dương nên $40x+41\geq 40.1+41=81\Rightarrow (x+y)^4\geq 81\Rightarrow x+y\geq 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x+y=3$ mà $x, y\in\mathbb{N}^*$ nên $(x;y)\in\{(1;2),(2;1)\}$.

Thử lại được : $x=1; y=2.$

Vậy $x=1; y=2.$

Câu 21. **(HSG 7 huyện, tỉnh, Trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)**

Tìm các số tự nhiên $x, y, z\neq 0$ thoả mãn điều kiện: $x+y+z=xyz$

Lời giải

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử $x\leq y\leq z$

Vì x, y, z là các số tự nhiên khác 0 $\Rightarrow 1\leq x\leq y\leq z$

Ta có $x+y+z=xyz$ (*)

$\Rightarrow \frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$

$\Rightarrow 1 \le \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{x^2}$

$\Rightarrow x^2 \le 3 \Rightarrow x=1$

Thay vào (*) ta được $1+y+z=yz$

$\Rightarrow (y-1)(z-1)=2 \Rightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y,z)=(1;2;3)$

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên các bộ số (x,y,z) thoả mãn bài toán là :
$(1;2;3);(1;3;2);(2;1;3);(2;3;1);(3;1;2);(3;2;1)$

Câu 22. **(HSG 7 thành phố Vũng Tàu 2021 - 2022)**

Tìm các số nguyên x thỏa mãn: $(x+2022)^2=64(x+2015)^3$.

Lời giải

Vì $(x+2022)^2 \ge 0$ với mọi x

Do đó $64(x+2015)^3 \ge 0$

Suy ra $x+2015 \ge 0 \Rightarrow x \ge -2015$

Mà với $x=-2015$ không thỏa mãn

Suy ra $x \ge -2014 \Rightarrow x+2015 \ge 1$

Khi đó $(x+2022)^2=64(x+2015)^3 \ge 64(x+2015)^2$

Suy ra $x+2022 \ge 8(x+2015)$

Suy ra $x \le -2014$

Suy ra $x=-2014$

Thử lại $x=-2014$ thỏa mãn bài toán

Vậy $x=-2014$.

Câu 23. **(HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)**

Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho: $2^m+2015 \vdots |n+2016|+n-2016$

Lời giải

+) Với $x \ge 0$ thì $|x|+x=2x$

+) Với $x<0$ thì $|x|+x=0$

Do đó $|x|+x$ luôn chẵn với mọi x là số nguyên.

Khi đó: $|n+2016|+n-2016$ là số chẵn với $n-2016 \in Z$

Suy ra 2^m+2015 là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Rightarrow m=0$

Ta có $|n+2016|+n-2016=2016$

+) Nếu $n<2016$ ta có $-(n-2016)+n-2016=2016 \Leftrightarrow 0n=2016$ (vô lý)

+) Nếu $n\geq 2016$ ta có $2(n-2016)=2016 \Leftrightarrow n=3024$ (thỏa mãn)

Vậy $m=0; n=3024$.

Câu 24. **(HSG 7 đề 255, 2017 - 2018)**

Tìm tất cả các số nguyên a biết: $|a|\leq 4$

Lời giải

$0\leq|a|\leq 4$ và a nguyên $\Rightarrow |a|=0;1;2;3;4$

+ Nếu $|a|=0\Rightarrow a=0$

+ Nếu $|a|=1\Rightarrow a=\pm 1$

$|a|=2\Rightarrow a=\pm 2$

+ Nếu

+ Nếu $|a|=3\Rightarrow a=\pm 3$

Vậy $a\in\{0;\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4\}$.

Câu 25. **(HSG 7 huyện Mỹ Đức 2022 - 2023)**

Tìm các số tự nhiên a,b thỏa mãn: $25-b^2=8(a-2023)^2$

Lời giải

$25-b^2=8(a-2023)^2$

Vì $b^2\geq 0$ suy ra:

$8(a-2023)^2\leq 25\Rightarrow 8(a-2023)^2+b^2=25\Rightarrow (a-2023)^2\leq\frac{25}{8}.$

Mặt khác $(a-2023)^2$ là số chính phương nên $(a-2023)^2=0$ hoặc $(a-2023)^2=1$.

Nếu $(a-2023)^2=0\Rightarrow a=2023.$

Khi đó: $25-b^2=8(a-2023)^2\Rightarrow 25-b^2=8.0\Rightarrow b^2=25\Rightarrow b=5$ (do $b\in\mathbb{N}$).

Nếu $(a-2023)^2=1\Rightarrow a-2023=1$ hoặc $a-2023=-1$

$\Rightarrow a=2024$ hoặc $\Rightarrow a=2022$.

Khi đó: $25-b^2=8(a-2023)^2\Rightarrow 25-b^2=8.1\Rightarrow b^2=17$ (không thỏa mãn).

Vậy $a=2023$ và $b=5$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 26. **(HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)**

Tìm số tự nhiên $x;\ y$ biết: $7(x-2023)^2=23-y^2$.

Lời giải

Vì $x;\ y$ là các số tự nhiên nên $(x-2023)^2;\ y^2$ là các số chính phương nên không âm

do đó $23-y^2\le 23\Rightarrow 0\le 7(x-2023)^2\le 23$

Do đó $\begin{cases}(x-2023)^2=0\\(x-2023)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2023\\x=2024\end{cases}$

+ Với $x=2023$ thì không có giá trị của y tự nhiên thỏa mãn.

+ Với $x=2024$ thì $y^2=16\Rightarrow y=4$.

Vậy $(x;y)=(2024;4)$.

Câu 27. **(HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023; huyện Tam Dương 2017 - 2018)**

Tìm các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a^3+3a^2+5=5^b$ và $a+3=5^c$

Lời giải

Do $a\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow 5^b=a^3+3a^2+5>a+3=5^c$

Vậy $5^b>5^c\Rightarrow b>c\Rightarrow 5^b\vdots 5^c$

Hay $(a^3+3a^2+5)\vdots(a+3)\Leftrightarrow\left[a^2.(a+3)+5\right]\vdots(a+3)$

Mà $a^2(a+3)\vdots(a+3)\Rightarrow 5\vdots(a+3)\Rightarrow a+3\in U(5)$

Hay $a+3\in\{\pm1;\pm5\}$, do $a\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow a+3\ge 4$

Từ (1) và (2) suy ra $a+3=5\Rightarrow a=2$

Từ đó tính được $5^b=2^3+3.2^2+5=25=5^2\Rightarrow b=2$

Và $5^c=a+3=2+3=5\Rightarrow c=1$

Vậy $a=2,\ b=2,\ c=1$.

Câu 28. **(HSG 7 huyện Quốc Oai- 2016 - 2017)**

Tìm các số tự nhiên x,y thỏa mãn $2x^2+3y^2=77$

Lời giải

$2x^2+3y^2=77\Rightarrow 3y^2=77-2x^2\le 77\Rightarrow y^2\le\frac{77}{3}\Rightarrow y^2\le 25$

Mà $2x^2$ chẵn; 77 lẻ $\Rightarrow 3y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2\in\{1;9;25\}$

+ Nếu $y^2=1 \Rightarrow 2x^2=77-3=74 \Rightarrow x^2=37$ (không thỏa mãn)

+ Nếu $y^2=9 \Rightarrow 2x^2=77-27=50 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=5;y=3$ (thỏa mãn)

+ Nếu $y^2=25 \Rightarrow 2x^2=77-75=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1;y=5$ (thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên x,y thỏa mãn $2x^2+3y^2=77$ là $(x;y)=(5;3);(1;5)$

Câu 29. **(HSG 7 huyện Hoằng Hóa 2016 - 2017)**

Tìm tất cả các số tự nhiên a,b sao cho: $2^a+37=|b-45|+b-45$

Lời giải

Nhận xét: với $x \geq 0$ thì $|x|+x=2x$

Với $x<0$ thì $|x|+x=0.$

Do đó $|x|+x$ luôn là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2^a+37$ là số chẵn khi và chỉ khi 2^a lẻ $\Rightarrow a=0$

Khi đó $|b-45|+b-45=38$

+ Nếu $b<45$, ta có: $-(b-45)+b-45=38 \Rightarrow 0=38$ (vô lý)

+ Nếu $b \geq 45$, ta có: $2(b-45)=38 \Rightarrow b=64$ (thỏa mãn)

Vậy $(a,b)=(0;64)$.

Câu 30. **(HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)**

Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn $6x^2+5y^2=74$

Lời giải

$6x^2+5y^2=74 \Rightarrow 6x^2=74-5y^2 \leq 74 \Rightarrow x^2 \leq \frac{37}{3} \Rightarrow x^2 \leq 13$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \{0;1;4;9\}$

+ Nếu $x^2=0 \Rightarrow x=0$. Khi đó $5y^2=74 \Rightarrow y^2=\frac{74}{5}$ (không thỏa mãn do $y \in \mathbb{Z}$)

+ Nếu $x^2=1 \Rightarrow x=1$ do $x \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $6+5y^2=74 \Rightarrow y^2=\frac{68}{5}$ (không thỏa mãn do $y \in \mathbb{Z}$)

+ Nếu $x^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$ do $x \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $6.4+5y^2=74 \Rightarrow y^2=10$ (không thỏa mãn do $y \in \mathbb{Z}$)

+ Nếu $x^2=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$ do $x \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $6.9+5y^2=74 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right.$ (do $y \in \mathbb{Z}$)

Vậy $(x,y) \in \{(3;2),(-3;2),(3;-2),(-3;-2)\}$.

Câu 31. **(HSG 7 Tp Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên dương (x,y) thoả mãn: $(x+y)^2=4x+5$

Lời giải

Do $x,y \in \mathbb{N}^*$, ta có $x \geq 1$; $y \geq 1 \Rightarrow 4x+5=(x+y)^2 \geq (1+x)^2$

Điều này chỉ xảy ra khi $x \leq 5$.

Thật vậy nếu $x \geq 6$, ta có: $(x+1)^2 \geq (6+1)(x+1)=7x+7>4x+5$ (mâu thuẫn).

Khi đó ta có: $1 \leq x \leq 5$

+) Với $x=1 \Rightarrow 4x+5=9 \Rightarrow (1+y)^2=9 \Rightarrow 1+y=3 \Rightarrow y=2$ (thoả mãn)

+) Với $x=2 \Rightarrow 4x+5=13 \Rightarrow (2+y)^2=13$ (không là số chính phương $\Rightarrow$ Loại)

+) Với $x=3 \Rightarrow 4x+5=17 \Rightarrow (3+y)^2=17$ (Loại)

+) Với $x=4 \Rightarrow 4x+5=21 \Rightarrow (4+y)^2=21$ (Loại)

+) Với $x=5 \Rightarrow 4x+5=25 \Rightarrow (5+y)^2=25 \Rightarrow 5+y=5 \Rightarrow y=0$ (Loại)

Vậy cặp số nguyên dương $x;y$ cần tìm là: $(x;y)=(1;2)$

Câu 32. **(HSG 7 huyện Mỏ Cày, 2017 - 2018)**

Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $3^x+4^x=5^x$

Lời giải

Với $x=0$, $x=1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x=2$ thay vào ta được $3^2+4^2=5^2$ (luôn đúng), vậy $x=2$ thỏa mãn

+) $x>2$, ta có: $3^x+4^x=5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$

Với $x>2$ ta có: $\left(\frac{3}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \Rightarrow x>2$ (không thỏa mãn)

Vậy $x=2$.Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
https://www.vnteach.com