

CHUYÊN ĐỀ: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. PHƯƠNG PHÁP TÁCH HẠNG TỬ

Phương pháp:

- Đa thức $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất
- Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nhân tử là $x-1$
- Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì $f(x)$ có một nhân tử là $x+1$
- Nếu a là nghiệm nguyên của $f(x)$ và $f(1) \neq 0; f(-1) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(1)}{a-1}; \frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên. Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do.

1. Đối với đa thức bậc hai: $ax^2 + bx + c$

Cách 1: Tách hạng tử bậc nhất bx

- Tính ac rồi phân tích ac ra tích của hai thừa số $ac = a_1c_1 = a_2c_2 = \dots$
- Chọn ra hai thừa số có tổng bằng b , chẳng hạn $ac = a_1c_1$ với $a_1 + c_1 = b$
- Tách $bx = a_1x + c_1x$
- Dùng phương pháp nhóm số hạng để phân tích tiếp.

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $3x^2 + 8x + 4$

b. $3x^2 - 8x + 4$

c. $x^2 - 11x + 8$

d. $x^2 + 5x - 24$

e. $x^2 - 5x + 4$

Lời giải

a) Ta có $3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 6$, mà $2 + 6 = 8$ nên ta được $3x^2 + 8x + 4 = 3x^2 + 6x + 2x + 4 = (3x + 2)(x + 2)$

b) **Cách 1:** Tách hạng tử thứ 2:

$$\text{Ta có } 3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2)$$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất:

$$\text{Ta có } 3x^2 - 8x + 4 = (4x^2 - 8x + 4) - x^2 = (x - 2)(3x - 2)$$

c) Ta có $x^2 - 11x + 28 = (x - 4)(x - 7)$

d) Ta có $x^2 + 5x - 24 = (x+8)(x-3)$

e) Ta có $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

Cách 2: Tách hạng tử bậc ax^2

- Ta thường làm xuất hiện hằng đẳng thức: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Bài 2:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử $3x^2 + 8x + 4$

Lời giải

Ta có: $3x^2 + 8x + 4 = (4x^2 + 8x + 4) - x^2 = (2x+2)^2 - x^2 = (x+2)(3x+2)$

Cách 3: Tách hạng tử tự do c

- Ta tách c thành c_1 và c_2 để dùng phương pháp nhóm hạng tử hoặc tạo ra hằng đẳng thức bằng cách c_1 nhóm với ax^2 còn c_2 nhóm với bx

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $3x^2 + 8x + 4$

b) $4x^2 - 4x - 3$

c) $9x^2 + 12x - 5$

Lời giải

a. $3x^2 + 8x + 16 - 12 = (3x^2 - 12) + (x + 16) = (x+2)(3x+2)$

b. $4x^2 - 4x - 3 = (4x^2 - 4x + 1) - 4 = (2x-1)^2 - 2^2 = (2x+1)(2x-3)$

c. $9x^2 + 12x - 5 = (9x^2 + 12x + 4) - 9 = (3x+2)^2 - 3^2 = (3x+5)(3x-1)$

2. Đối với đa thức bậc ba trở lên (dùng phương pháp nhẩm nghiệm)

Cơ sở để phân tích: Xét đa thức $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \dots a_0 \in \mathbb{Z}, n \geq 1$)

+) Nếu $x = a$ là nghiệm của $P(x)$ thì $P(a) = 0$

Hệ Quả: Nếu $P_n(x) = 0$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của a_0

+) Định lý Bezout: Nếu $P_n(x) = 0$ có nghiệm $x = a$ thì $P_n(x) = (x-a) \cdot H(x)$ bậc $(n-1)$

Bài 4:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^3 - x^2 - 4$

Lời giải

Ta nhận thấy nghiệm của $f(x)$ nếu có thì $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Chỉ có $f(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm của $f(x)$ nên $f(x)$ có một nhân tử là $x - 2$. Do đó ta tách $f(x)$ thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là $x = 2$

Cách 1: $x^3 - x^2 - 4 = (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$

Cách 2: $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = (x^3 - 8) - (x^2 - 4) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $x^3 + x^2 + 4$

b. $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Lời giải

a. Ta có các ước của 4 là: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

Nhận thấy $x = -2$ là nghiệm của đa thức vậy đa thức có 1 nhân tử là $x - (-2) = x + 2$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - x^2 + 4 = (x + 2) \underbrace{(x^2 - x + 2)}_{>0}$$

Hoặc $= (x^3 + 8) + (x^2 - 4) = (x + 2)(x^2 - x + 2)$

b. Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của đa thức nên có 1 nhân tử là $x + 1$

$$= (x^3 - x^2) - (4x^2 - 4x) + (4x - 4) = (x - 1)(x - 2)^2$$

*) Chú ý:

+ Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nhân tử là $x - 1$

+ Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì $f(x)$ có một nhân tử là $x + 1$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $2x^2 + 7x + 5$

b. $x^4 + x^3 - x - 1$

c. $x^3 - 19x - 30$

d. $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

e. $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

Lời giải

a. Ta có: $2 + 5 = 7$ nên đa thức có 1 nhân tử là $x + 1$.

Vậy ta có $2x^2 + 7x + 5 = (x + 1)(2x + 5)$

b. Ta có tổng các hệ số bằng 0 và tổng chẵn cũng bằng tổng lẻ nên có nhân tử $x^2 - 1$

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x^4 - 1) + (x^3 - x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x^4 + x^3) - (x - 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

c. Ta có $x = -3$ là nghiệm nên có nhân tử là $x + 3$

$$x^3 - 19x - 30 = x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x - 10x - 30 = (x + 3)(x^2 - 3x - 10) = (x + 3)(x + 2)(x - 5)$$

d. Ta có $x = -1$ là nghiệm của đa thức nên có nhân tử là $x + 1$

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = x^3 + x^2 + 3x^2 + 3x - 10x - 10 = (x + 1)(x - 2)(x + 5)$$

e. Ta có tổng chẵn bằng tổng lẻ nên có nhân tử $x + 1$, sau đó lại tổng chẵn bằng tổng lẻ.

$$2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(2x + 1)$$

Bài 7:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Lời giải

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Bài 8:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + 4a^2 - 29a + 24$

Lời giải

Bấm máy nhận thấy đa thức có ba nghiệm là 1, 3 và -8, nên sẽ có chứa các nhân tử

$(a - 1)$, $(a - 3)$ và $(a + 8)$,

Ta có: $a^3 + 4a^2 - 29a + 24 = (a^3 - a^2) + (5a^2 - 5a) + (-24a + 24)$

$$a^2(a - 1) + 5a(a - 1) - 24(a - 1) = (a - 1)(a^2 + 5a - 24) = (a - 1)(a - 3)(a + 8)$$

Bài 9:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Lời giải

Nhận xét : Tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là: $x + 1$

$$\text{Nhu vậy ta có : } x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = (x + 1)(x + 2)^2$$

Bài 10:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12$

Lời giải

Nhằm thấy đa thức có nghiệm là $x = 2$, hay có 1 nhân tử là: $x - 2$

Ta có: $6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12 = (6a^4 - 12a^3) + (19a^3 - 38a^2) + (a^2 - 2a) - (6a - 12)$

$$6a^3(a-2) + 19a^2(a-2) + a(a-2) - 6(a-2) = (a-2)(6a^3 + 19a^2 + a - 6) = (a-2)(a+3)(2a-1)(3a+2)$$

Bài 11:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

Lời giải

Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

Ta có: $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = (x^4 + x^3) + (5x^3 + 5x^2) + (8x^2 + 8x) + (4x + 4)$

$$= x^3(x+1) + 5x^2(x+1) + 8x(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 4) = (x+1)^2(x+2)^2$$

***) Trường hợp đặc biệt: Đa thức không có nghiệm nguyên.**

Xét đa thức $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \dots a_0 \in \mathbb{Z}, n \geq 1$)

$$+) \text{ Nếu } P_n(x) = 0 \text{ có nghiệm } x = \frac{p}{q} [(p; q) = 1] \Rightarrow \begin{cases} a_n \vdots q \\ a_0 \vdots p \end{cases}$$

Bài 12: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

b. $9x^4 + 15x^3 + 43x^2 + 22x - 40$

c. $6x^4 + x^3 + 19x^2 - 31x - 30$

Lời giải

a. Các ước của 5 là: $\pm 1; \pm 5$. Nhận thấy đa thức không có nghiệm nguyên, ta đi tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức

$$x = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in U(-5) \\ q \in U(3) \end{cases} \text{ ta thấy nghiệm của đa thức là } x = \frac{1}{3} \text{ nên có nhân tử } x - \frac{1}{3} \text{ hay } 3x - 1$$

$$\text{Vậy } 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5)$$

b. Ta thấy đa thức có 1 nhân tử là $x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 2$

$$9x^4 + 15x^3 + 43x^2 + 22x - 40 = (3x - 2)(3x^3 + 7x^2 + 19x + 20)$$

Lại có nhân tử là $3x+4 \Rightarrow (3x-2)(3x^3+7x^2+19x+20) = (3x-2)(3x+4)(x^2+x+5)$

c. $6x^4+x^3+19x^2-31x-30 = (2x-3)(3x+2)(x^2+x+5)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2$

Lời giải

Nhận xét: Tổng các hệ số bằng 0 nên đa thức có một nhân tử là $x-1$, chia đa thức cho $x-1$ ta được $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2 = (x-1)(x^4-x^3+2x^2-2x-2)$

Vì $(x^4-x^3+2x^2-2x-2)$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ nên không phân tích được nữa

Vậy $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2 = (x-1)(x^4-x^3+2x^2-2x-2)$

Bài 2:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4+2017x^2+2016x+2017$

Lời giải

Cách 1: $x^4+2017x^2+2016x+2017 = (x^4+x^2+1) + (2016x^2+2016x+2016) = (x^2+x+1)(x^2-x+2017)$

Cách 2: $x^4+2017x^2+2016x+2017 = (x^4-x) + (2017x^2+2017x+2017) = (x^2+x+1)(x^2-x+2017)$

Bài 3:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2-x+2017.2018$

Lời giải

Ta có: $x^2-x+2017.2018 = x^2+2017x-2018x+2017.2018 = (x+2017)(x-2018)$

Bài 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

Lời giải

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

Và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

Nên ta làm như sau:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 + \frac{-6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right)$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$\text{Đa thức trở thành : } x^2(t^2 + 2 + 6t + 7) = x^2(t^2 + 6t + 9) = x^2(t + 3)^2$$

$$\text{Thay } t \text{ trở lại ta được : } x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 3 \right)^2 = x^2 \left(\frac{x^2 - 1 + 3x}{x} \right)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

Bài 5:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Lời giải

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích :

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$$

Bài 6:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

Lời giải

Với dạng này, ta chỉ việc lấy số nhỏ nhất nhân với số lớn nhất, để tạo ra những số hạng giống nhau : $(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15 = (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$$\text{Đặt } x^2 + 8x = t \Rightarrow (t+7)(t+15)+15 = t^2 + 22t + 105 + 15 = t^2 + 22t + 120$$

$$= (t+10)(t+12) = (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) = (x^2+8x+10)(x+6)(x+2)$$

Bài 7:

Phân tích đa thức thành nhân tử $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

Lời giải

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$, nên có nhân tử là : $(3x - 1)$

$$\text{nên ta có : } 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5$$

$$= x^2(3x-1) - 2x(3x-1) + 5(3x-1) = (3x-1)(x^2 - 2x + 5)$$

Bài 8:

Phân tích đa thức thành nhân tử $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

Lời giải

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$, nên có nhân tử là $(2x - 1)$

$$\text{Nên ta có : } 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 2x^3 - x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3$$

$$= x^2(2x-1) - 2x(2x-1) + 3(2x-1) = (2x-1)(x^2 - 2x + 3)$$

Bài 9:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3$

Lời giải

Bấm máy tính cho ta nghiệm là $x = \frac{-1}{3}$ nên có 1 nhân tử là $3x + 1$

$$\text{Ta có : } 3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 3x^3 + x^2 - 15x^2 - 5x + 9x + 3$$

$$x^2(3x+1) - 5x(3x+1) + 3(3x+1) = (3x+1)(x^2 - 5x + 3)$$

Bài 10:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Lời giải

Bấm máy tính cho ta nghiệm là $x = -1; x = -2$

$$\text{N như vậy ta có } x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$$

Bài 11:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$$

Bài 12:

Phân tích thành nhân tử: $x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004$

Lời giải

$$\begin{aligned} &= x^4 + 2004x^2 + 2004x - x + 2004 = (x^4 - x) + 2004(x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 - 1) + 2004(x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2004(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2004) \end{aligned}$$

Bài 13:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - x - 2001 \cdot 2002$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^2 - x - 2001(2001 + 1) &= x^2 - x + 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001) \\ &= (x - 2001)(x + 2001) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002) \end{aligned}$$

Bài 14:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12$

Lời giải

Nhầm thấy đa thức có nghiệm là $x = 2$, hay có 1 nhân tử là $x - 2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12 &= (6a^4 - 12a^3) + (19a^3 - 38a^2) + (a^2 - 2a) - (6a - 12) \\ &= 6a^3(a - 2) + 19a^2(a - 2) + a(a - 2) - 6(a - 2) = (a - 2)(6a^3 + 19a^2 + a - 6) = (a - 2)(a + 3)(2a - 1)(3a + 2) \end{aligned}$$

Bài 15:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

Lời giải

Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 &= (x^4 + x^3) + (5x^3 + 5x^2) + (8x^2 + 8x) + (4x + 4) \\ &= x^3(x + 1) + 5x^2(x + 1) + 8x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 4) \\ &= (x + 1)^2(x + 2)^2 \end{aligned}$$

3. Đối với đa thức nhiều biến

Tương tự như phân tích đa thức dạng: $ax^2 + bx + c$

Bài 16: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $2x^2 - 5xy + 2y^2$

b. $2x^2 - 5xy - 3y^2$

c. $a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1$

d. $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

Lời giải

a. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = (2x^2 - 4xy) - (xy - 2y^2) = (x - 2y)(2x - y)$

b. $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 2x^2 - 2xy - 3xy - 3y^2 = (x - 3y)(2x + y)$

c. $a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1 = (a + b)^2 - 2(a + b) + 1 = (a + b - 1)^2$

d. $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = z^2(x-y) + x^2y - x^2z + y^2z - y^2x = z^2(x-y) + xy(x-y) - z(x^2 - y^2)$
 $= (x-y)(y-z)(z-x)$

B. PHƯƠNG PHÁP NHÓM HẠNG TỬ

- Kết hợp các hạng tử thích hợp thành từng nhóm.
- Áp dụng liên tiếp các phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

Bài 1:

Phân tích thành nhân tử $A = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc = a(a^2 + 2ab + b^2) + (ab^2 + a^2b) + (ac^2 + bc^2) \\ &= c(a + b)^2 + ab(a + b) + c^2(a + b) = (a + b)(b + c)(c + a) \end{aligned}$$

Bài 2:

Phân tích thành nhân tử $A = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 3abc$

Lời giải

$$A = (ab^2 + a^2b + abc) + (ac^2 + a^2c + abc) + (bc^2 + b^2c + abc) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Bài 3:

Phân tích thành nhân tử: $A = abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1$

Lời giải

$$A = (abc - bc) - (ab - b) - (ac - c) + (a - 1) = (a - 1)(b - 1)(c - 1)$$

Bài 4:

Phân tích thành nhân tử: $A = 8abc + 4(ab + bc + ca) + 2(a + b + c) + 1$

Lời giải

$$A = (8ab + 4bc) + (4ab + 2b) + (4ac + 2c) + (2a + 1) = (2a + 1)(2b + 1)(2c + 1)$$

Bài 5:

Phân tích thành nhân tử: $A = a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3) + abc(a + b + c)$

Lời giải

Ta có: $A = (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$

C. PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẸNG ĐẲNG THỨC

Cần nắm chắc cách biến đổi các hằng đẳng thức sau:

$$1) (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a-b)^2 + 4ab$$

$$2) (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab$$

$$3) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$4) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$5) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$6) 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$7) (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$8) a^4 + b^4 = (a+b)(a-b)\left[(a+b)^2 - 2ab\right]$$

$$9) a^4 + b^4 = \left[(a+b)^2 - 2ab\right]^2 - 2(ab)^2.$$

$$10) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

$$11) a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

$$12) a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$$

$$13) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

Bài 1: Phân tích thành nhân tử

a. $8 - 27a^3b^6$

b. $x^2 - y^2 + 10x - 6y + 16$

c. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

d. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Lời giải

a. $8 - 27a^3b^6 = 2^3 - (3ab^2)^3 = (2 - 3ab^2)(4 + 6ab^2 + 9a^2b^4)$

b. $x^2 - y^2 + 10x - 6y + 16 = (x+5)^2 - (y+3)^2 = (x+y+8)(x-y+2)$

c.

$$\begin{aligned} &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = (a+b+c)\left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\right] \\ &- 3ab(a+b+c) = (a+b+c)\left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab\right] = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d. &= [(a+b)+c]^3 - a^3 - b^3 - c^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 - (a^3 + b^3) - c^3 \\ &= (a+b)[a^2 + 2ab + b^2 + 3ac + 3bc + 3c^2 - a^2 + ab - b^2] = 3(ab + ac + bc + c^2) = 3(a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích thành nhân tử

a. $x^3 + y^3 - 3xy + 1$

b. $4x^2 + 9y^2 - 12xy + 4x - 6y + 3$

c. $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$

Lời giải

a. $x^3 + y^3 + 3xy(x+y) - 3xy(x+y) - 3xy + 1 = (x+y)^3 + 1 - 3xy(x+y+1) = (x+y+1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)$

b. $= (2x)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + 2(2x - 3y) + 1 - 4 = (2x - 3y)^2 - 2^2 = (2x - 3y - 1)(2x - 3y + 3)$

c.

$$4b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2c^2a^2) = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)$$

Bài 3:

Cho biểu thức: $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

a) Phân tích A thành nhân tử

b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì $A < 0$

Lời giải

a) Ta có: $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2$

$$= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) = (b+c-a)(b+c+a)(b-c-a)(b-c+a)$$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên:

$$b+c-a > 0, b+c+a > 0, b-c-a < 0, b-c+a > 0 \Rightarrow A < 0$$

Bài 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Lời giải

$$x^4 + x^2 + 1 + 2009x^2 + 2009x + 2009 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2009(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010)$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (Sử dụng tách hạng tử)

a. $x^3 - 7x + 6$

b. $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

c. $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$

d. $x^4 - 30x^2 + 31x - 30$

e. $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Lời giải

a. $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$

b. $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$

c. $x^3 - 9x^2 + 6x + 16 = (x+1)(x-2)(x-8)$

d. $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = (x-5)(x+6)(x^2 - x + 1)$

e. $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 = (x^4 - x) + 2010x^2 + 2010x + 2010 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010)$

Bài 2:

Phân tích thành nhân tử: $A = abc - 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 8$

Lời giải

$$A = abc - 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 8 = (a-2)(b-2)(c-2)$$

Bài 3:

Phân tích thành nhân tử: $A = x^3 - 2x^2y + x^2 + x - 2xy - 2y$

Lời giải

$$A = x^3 - 2x^2y + x^2 + x - 2xy - 2y = (x-2y)(x^2 + x + 1)$$

Bài 4:

Phân tích thành nhân tử: $A = ab^3 + bc^3 + ca^3 - a^3b - b^3c - c^3a$

Lời giải

$$A = ab^3 + bc^3 + ca^3 - a^3b - b^3c - c^3a = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

Bài 5:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (dùng hằng đẳng thức)

a. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 12y + 5$

b. $x^8 + 3x^4 + 4$

Lời giải

a. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 12y + 5 = (x + 2y + 1)(x + 2y + 5)$

b. $x^8 + 3x^4 + 4 = (x^4 + x^2 + 2)(x^4 - x^2 + 2)$

D. PHƯƠNG PHÁP THÊM, BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ

- Các đa thức không thể sử dụng các phương pháp như đặt nhân tử chung, nhóm hạng tử và sử dụng hằng đẳng thức cũng như đoán nghiệm,
- Trong các thành phần của đa thức có chứa các hạng tử bậc 4, ta sẽ thêm bớt để đưa về hằng đẳng thức số 3: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Đôi khi thêm, bớt hạng tử để làm xuất hiện nhân tử chung

1. Thêm, bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hằng đẳng thức: $a^2 - b^2$

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- | | | |
|-------------------|-------------------|----------------------|
| a. $a^4 + 4$ | b. $4x^4 + 81y^4$ | c. $x^8 + 98x^4 + 1$ |
| d. $216 - 125x^3$ | e. $x^6 - 64y^6$ | f. $a^4 + 3a^2 + 4$ |

Lời giải

- a. $a^4 + 4 = a^4 + 2^2 + 2.a^2.2 - 2.2.a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$
- b. $= (2x + 9y)^2 - (6xy)^2 = (2x^2 + 9y^2 - 6xy)(2x^2 + 9y^2 + 6xy)$
- c. $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4 = (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$
 $= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 - 16x^2(x^4 + 1 - 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2 = \dots$
- e. $x^6 - 64y^6 = (x^3)^2 - (8y^3)^2$
- f. $a^4 + 3a^2 + 4 = (a^2 + 2)^2 - a^2 = (a^2 - a + 2)(a^2 + a + 2)$

2. Thêm, bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a. $x^5 + x^4 + 1$ | b. $x^8 + x^7 + 1$ | c. $x^8 + x^4 + 1$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|

Lời giải

- a. $x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 + 1 - x^3 = x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$
- b. $x^8 + x^7 + 1 = x^8 + x^7 + x^6 - x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)[x^6 - (x - 1)(x^3 + 1)] = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$
- c. $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $x^8 + x + 1$ | b. $x^5 + x - 1$ |
| c. $x^4 + x^2 + 1$ | d. $x^7 + x^5 + 1$ |

Lời giải

$$a. x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)]$$

$$b. x^5 + x - 1 = x^5 - x^4 + x^3 + x^4 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^3(x^2 - x + 1) - x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) \\ = (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 - 1)$$

$$\text{Hoặc: } x^5 + x - 1 = x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - x^2 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 - 1)$$

$$c) \text{ Cách 1: } x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{Cách 2: } x^4 + x^2 + 1 = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 + 1 = x^2(x^2 - x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{Cách 3: } x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^3 + x^2 - (x^3 - 1) = x^2(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$$

$$d) \text{ Ta có: } x^7 + x^5 + 1 = (x^7 - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ = (x^2 + x + 1)[(x^5 - x^4 + x^2 - x) + (x^3 - x^2) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$a) 4x^4 + 81$$

$$b) 64x^4 + y^4$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } 4x^4 + 81 = (2x^2)^2 + 9^2 + 2.2x^2.9 - 2.2x^2.9 = (2x^2 + 9)^2 - 36x^2 \\ = (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$$

$$b) \text{ Ta có: } 64x^4 + y^4 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.8x^2.y^2 - 2.8x^2.y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - 16x^2y^2 \\ = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 = (8x^2 + 4xy + y^2)(8x^2 - 4xy + y^2)$$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$a) 4x^4 + y^4$$

$$b) 4x^8 + 1$$

$$c) x^4y^4 + 4$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } 4x^4 + y^4 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.2x^2.y^2 - 4x^2y^2 \\ = (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 + y^2 + 2xy)(2x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$b) \text{ Ta có: } 4x^8 + 1 = (2x^4)^2 + 1^2 + 2.2x^4.1 - 4x^4 = (2x^4 + 1)^2 - (2x^2)^2 = (2x^4 + 2x^2 + 1)(2x^4 - 2x^2 + 1)$$

c) Ta có : $x^4y^4 + 4 = (x^2y^2)^2 + 2^2 = (x^2y^2)^2 + 2^2 + 2.x^2.y^2.2 - 4x^2y^2$
 $= (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 = (x^2y^2 - 2xy + 2)(x^2y^2 + 2xy + 2)$

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^8 + x^4 + 1$

b) $x^7 + x^5 + 1$

Lời giải

a) Ta có: $x^8 + x^4 + 1 = x^8 + x^4 + x^4 + 1 - x^4 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

b) Ta có: $x^7 + x^5 + 1 = x^7 + x^5 + (x^2 + x) + 1 - x^2 - x = (x^7 - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^6 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x) + (x^3 - x^2)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + x^3 - x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1)$

Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^7 + x^2 + 1$

b) $x^5 + x - 1$

c) $x^8 + x + 1$

Lời giải

a) Ta có: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 - x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$

$(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

b) Ta có: $x^5 + x - 1 = (x^5 + x^2) + (-x^2 + x - 1) = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1)$

$= x^2(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

c) Ta có: $x^8 + x + 1 = (x^8 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $64x^4 + y^4$

b) $4x^4 + y^4$

c) $x^4 + 324$

Lời giải

a) Ta có: $64x^4 + y^4 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.8x^2.y^2 - 16x^2.y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2$
 $= (8x^2 + y^2 - 4xy)(8x^2 + y^2 + 4xy)$

b) Ta có: $4x^4 + y^4 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.2x^2.y^2 - 4x^2.y^2$
 $= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 + y^2 - 2xy)(2x^2 + y^2 + 2xy)$

c) Ta có: $x^4 + 324 = (x^2)^2 + (18)^2 = (x^2)^2 + (18)^2 + 2.x^2.18 - 36x^2$
 $= (x^2 + 18)^2 - (6x)^2 = (x^2 + 18 + 6x)(x^2 + 18 - 6x)$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 64$

b) $81x^4 + 4y^4$

c) $x^4 + 4y^4$

Lời giải

a) Ta có: $x^4 + 64 = (x^2)^2 + 8^2 = (x^2)^2 + 8^2 + 2.x^2.8 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$

b) Ta có: $81x^4 + 4y^4 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2.9x^2.2y^2 - 36x^2.y^2$
 $= (9x^2 + 2y^2)^2 - (6xy)^2 = (9x^2 + 2y^2 - 6xy)(9x^2 + 2y^2 + 6xy)$

c) Ta có: $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2.x^2.2y^2 - 4x^2.y^2$
 $= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4y^4 + 4$

b) $4x^4y^4 + 1$

c) $4x^4 + 81$

Lời giải

a) Ta có: $x^4y^4 + 4 = (x^2y^2)^2 + 2^2 = (x^2y^2)^2 + 2^2 + 2.x^2y^2.2 - 4x^2.y^2$
 $= (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 = (x^2y^2 - 2xy + 2)(x^2y^2 + 2xy + 2)$

b) Ta có: $4x^4y^4 + 1 = (2x^2y^2)^2 + 1 = (2x^2y^2)^2 + 1 + 2.2x^2y^2 - 4x^2.y^2$
 $= (2x^2y^2 + 1)^2 - (2xy)^2 = (2x^2y^2 + 1 + 2xy)(2x^2y^2 + 1 - 2xy)$

c) Ta có: $4x^4 + 81 = (2x^2)^2 + 9^2 = (2x^2)^2 + 9^2 + 2.2x^2.9 - 36x^2$
 $= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x)$

Bài 8: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $64x^4 + y^4$

b) $a^4 + 64$

c) $a^4 + 4b^2$

Lời giải

a) Ta có: $64x^4 + y^4 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.8x^2.y^2 - 16x^2y^2$

$$= (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 = (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy)$$

b) Ta có: $a^4 + 64 = (a^2)^2 + 8^2 = (a^2)^2 + 8^2 + 2.a^2.8 - 16a^2$

$$= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a)$$

c) Ta có: $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2.a^2.2b^2 - 4a^2.b^2$

$$= (a^2 - 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2b^2 + 2ab)(a^2 - 2b^2 - 2ab)$$

Bài 9: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $4x^8 + 1$

Lời giải

a) Ta có: $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2 + 2.x^2.2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

b) Ta có: $4x^8 + 1 = (2x^4)^2 + 1^2 + 2.2x^4.1 - 4x^4 = (2x^4 + 1)^2 - (2x^2)^2 = (2x^4 + 1 - 2x^2)(2x^4 + 1 + 2x^2)$

Bài 10: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^{64} + x^{32} + 1$

b) $a^{10} + a^5 + 1$

c) $x^5 - x^4 - 1$

Lời giải

a) Ta có: $x^{64} + x^{32} + 1 = x^{64} + 2.x^{32} + 1 - x^{32} = (x^{32} + 1)^2 - x^{32} = (x^{32} + 1 + x^{16})(x^{32} + 1 - x^{16})$

b) Ta có: $a^{10} + a^5 + 1 = (a^{10} - a) + (a^5 - a^2) + (a^2 + a + 1) = a(a^9 - 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1)$

$$= a((a^3)^3 - 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) = a(a^3 - 1)(a^6 + 2a^3 + 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1)$$

$$= (a^7 + 2a^4 + a)(a - 1)(a^2 + a + 1) + a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)$$

$$= (a^2 + a + 1)[(a^7 + 2a^4 + a)(a - 1) + (a^3 - a^2) + 1]$$

c) Ta có: $x^5 - x^4 - 1 = (x^5 - x^4 + x^3) - (x^3 + 1) = x^3(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)$

E. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1. Dạng $P(x) = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

Đặt $t = x^2$, ta được $G(t) = at^2 + bt + c$. Sau đó dùng phương pháp tách hạng tử

Bài 1:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 - 5x^2 + 4$

Lời giải

Đặt $t = x^2$, ta được: $t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

2. Dạng $A(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) + e$ mà $a+d = b+c$

Cách giải: $A(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) + e = [x^2 + (a+b)x + ab][x^2 + (c+d)x + cd] + e$

Đặt $t = x^2 + (a+b)x + ab \Rightarrow x^2 + (c+d)x + cd = t - ab + cd \Rightarrow G(t) = t(t - ab + cd) + e = t^2 + (cd - ab)t + e$

Bài 2:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) + 1$

Lời giải

Ta có: $(a+1)(a+4)(a+2)(a+3) + 1 = (a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) + 1$

Đặt $a^2 + 5a + 5 = t$, Khi đó đa thức trở thành: $(t-1)(t+1) + 1 = t^2 = (a^2 + 5a + 5)^2$

Bài 3:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Lời giải

Ta có: $(x+2)(x+5)(x+3)(x+4) - 24 = (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24$

Đặt $x^2 + 7x + 11 = t$, khi đó đa thức trở thành

$(t-1)(t+1) - 24 = t^2 - 25 = (t-5)(t+5) = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) = (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)$

Bài 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) - 1680$

Lời giải

$(x-4)(x-7)(x-5)(x-6) - 1689 = (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) - 1689$

Đặt $x^2 - 11x + 29 = t$, khi đó đa thức trở thành $(t-1)(t+1) - 1680 = t^2 - 1681 = (t-41)(t+41)$

Bài 5:

Phân tích đa thức thành nhân tử $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) - 24$

Lời giải

Ta có $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) - 24 = (x-1)(x+4)(x-2)(x+3) - 24$

$(x-2)(x+4)(x-1)(x+3) - 24 = (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 3) - 24$

Đặt $x^2 + 2x = t$, khi đó đa thức trở thành $(t-8)(t-3) - 24 = t^2 - 11t = t(t-11)$

Thay t trở lại ta được $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 11) = x(x+2)(x^2 + 2x - 11)$

Bài 6:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$

Lời giải

Ta có: $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128 = [x(x+10)][(x+4)(x+6)] + 128 = (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y \Rightarrow (y-12)(y+12) + 128 = y^2 - 144 + 128 = y^2 - 16 = (y+4)(y-4)$

$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x+2)(x+8)(x^2 + 10x + 8)$

Bài 7:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 3$

b. $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$

Lời giải

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 3 = \underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_t \cdot \underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{t+2} - 3 = t^2 + 2t - 3 = (t-1)(t+3)$

$= (x^2 - 5x + 3)(x^2 - 5x + 7)$

b) $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$

Bài 8: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $4(x^2 + 15x + 50)(x^2 + 18x + 72) - 3x^2$

b) $(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3) + 9$

Lời giải

$$\text{a) } 4(x^2 + 15x + 50)(x^2 + 18x + 72) - 3x^2 = 4(x+5)(x+10)(x+6)(x+12) - 3x^2$$

$$= 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) - 3x^2$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 16x + 60 \Rightarrow x^2 + 17x + 60 = t + x \Rightarrow 4[(t+x).t] - 3x^2 = 4t^2 + 4tx - 3x^2 = (2t+x)^2 - (2x)^2$$

$$= (2t-x)(2t+3x) = (2x^2 + 31x + 120)(2x^2 + 25x + 120) = (x+8)(2x+15)(2x^2 + 35x + 120)$$

$$\text{b) } (2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3) + 9 = (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 9) + 9 = t^2 - 10t + 9 = x(2x-3)(2x^2 - 3x - 8)$$

3. Dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{a+b}{2} \Rightarrow x = t - \frac{a+b}{2} \Rightarrow G(t) = \left(t - \frac{a+b}{2} + a\right)^4 + \left(t - \frac{a+b}{2} + b\right)^4 = \left(t - \frac{b-a}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{b-a}{2}\right)^4 \\ = \dots = ct^4 + dt^2 + e \quad (\text{dạng 1})$$

Bài 9: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $(x+3)^4 + (x+5)^4 - 2$

b. $(x+3)^4 + (x+1)^4 - 16$

c. $(x+3)^4 + (x+5)^4 - 16$

Lời giải

a. Đặt $t = x+4 \Rightarrow x = t-4 \Rightarrow (t-1)^4 + (t+1)^4 - 2$

$$= \left[(t-1)^2 + (t+1)^2 \right]^2 - 2 = 2t^4 + 12t^2 = 2t^2(t^2 + 6) = 2(x+4)^2 \left[(x+4)^2 + 6 \right]$$

b. Đặt $t = x+2 \Rightarrow (t+1)^4 + (t-1)^4 - 16 = 2(t^4 + 6t^2 - 7) = 2(y^2 + 6y - 7)(y = t^2) = \dots$

c. $(x+3)^4 + (x+5)^4 - 16 = 2(x+3)(x+5) \left[(x+4)^2 + 7 \right]$

4. Dạng $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \left[\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2 \right] (a \neq 0)$

Cách giải: $P(x) = x^2 \left[\left(ax^2 + \frac{e}{x^2}\right) + \left(bx + \frac{d}{x}\right) + c \right] = x^2 \left[a \left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + b \left(x + \frac{d}{bx}\right) + c \right]$

Đặt $t = x + \frac{d}{bx} \Rightarrow t^2 = x^2 + 2\frac{d}{b} + \left(\frac{d}{b}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \dots$

Bài 10: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $P(x) = 2x^4 - 21x^3 - 30x^2 - 105x + 50$

b. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$

c. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 (x \neq 0)$

Lời giải

a. $P(x) = 2x^4 - 21x^3 - 30x^2 - 105x + 50$

$$P(x) = x^2 \left(2x^2 - 30 - 21x - \frac{105}{x} + \frac{50}{x^2} \right) = x^2 \left[2 \left(x^2 + \frac{25}{x^2} \right) - 21 \left(x + \frac{5}{x} \right) - 30 \right]$$

Đặt $t = x + \frac{5}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{25}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$

$$G(t) = 2(t^2 - 10) - 21t - 30 = 2t^2 - 21t - 50 = (t + 2)(2t - 25)$$

$$P(x) = x^2 \left[2 \left(x + \frac{5}{x} \right) - 25 \right] \left[\left(x + \frac{5}{x} \right) + 2 \right] = (2x^2 - 25x + 10)(2x^2 + 2x + 5)$$

b. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 \left[\left(\frac{d}{b}\right)^2 = \left(\frac{3}{-3}\right)^2 = 1 = \frac{e}{a} \right]$

$$P(x) = x^2 \left(x^2 - 3x - 6 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 3 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 6 \right]$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$; $G(t) = t^2 + 2 - 3t - 6 = t^2 - 3t - 4 = (t + 1)(t - 4)$

$$P(x) = x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x - \frac{1}{x} - 4 \right) = (x^2 + x - 1)(x^2 - 4x - 1)$$

c. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 (x \neq 0)$

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right]$$

Đặt $y = x - \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2 \Rightarrow A = x^2 (y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2 (y + 3)^2 = (xy + 3x)^2$

$$= \left[x \left(x - \frac{1}{x} \right) + 3x \right]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

Bài 11:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 6x + 1$

Lời giải

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau, nên ta làm như sau:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 7 \right)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Đa thức trở thành :

$$x^2 (t^2 - 2 + 6t + 7) = x^2 (t^2 + 6t + 5) = x^2 (t+1)(t+5)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 5 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 + 1 + x}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 1 + 5x}{x} \right) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

Bài 12:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1$

Lời giải

$$x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = x^2 \left(x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 10 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 26 \right)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ Đa thức trở thành :

$$x^2 (t^2 - 2 + 10t + 26) = x^2 (t^2 + 10t + 24) = x^2 (t+4)(t+6)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 4 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 6 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 6x + 1}{x} \right) = (x^2 + 4x + 1)(x^2 + 6x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = (x^2 + 4x + 1)(x^2 + 6x + 1)$$

Bài 13:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$

Lời giải

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = x^2 \left(x^2 - 7x + 14 + \frac{-7}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 14 \right)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

$$\text{Đa thức trở thành } x^2(t^2 - 2 - 7t + 14) = x^2(t^2 - 7t + 12) = x^2(t-3)(t-4)$$

Thay t trở lại ta được:

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 3 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x} \right) = (x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 1)$$

Bài 14:

Phân tích đa thức thành nhân tử $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$

Lời giải

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = x^2 \left(x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + \left(x + \frac{1}{x} \right) - 4 \right)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\text{Đa thức trở thành } x^2(t^2 - 2 + t - 4) = x^2(t^2 + t - 6) = x^2(t-2)(t+3)$$

$$\text{Thay } t \text{ trở lại ta được } x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 3 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x} \right) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 3x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x-1)^2(x^2 + 3x + 1)$$

Bài 15:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2$

Lời giải

$$\text{Ta có } 4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10) - 3x^2 = 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) - 3x^2$$

$$x^2 \left[4 \left(x + 17 + \frac{60}{x} \right) \left(x + 16 + \frac{60}{x} \right) - 3 \right], \text{ Đặt : } x + \frac{60}{x} = t, \text{ khi đó đa thức trở thành}$$

$$x^2 [4(t+17)(t+16)-3] = x^2 (4t^2 + 132t + 1085) = x^2 (2t+31)(2t+35)$$

$$= x^2 \left(2x + \frac{120}{x} + 31 \right) \left(2x + \frac{120}{x} + 35 \right) = (2x^2 + 31x + 120)(2x^2 + 35x + 120)$$

Bài 16:

Phân tích đa thức thành nhân tử $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

Lời giải

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1.

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau, nên ta làm như sau:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 + \frac{-6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right)$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$\text{Đa thức trở thành } x^2 (t^2 + 2 + 6t + 7) = x^2 (t^2 + 6t + 9) = x^2 (t+3)^2$$

$$\text{Thay } t \text{ trở lại ta được: } x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 3 \right)^2 = x^2 \left(\frac{x^2 - 1 + 3x}{x} \right)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

Lời giải

$$\text{Đặt } x^2 + x = t, \text{ khi đó đa thức trở thành } (t+1)(t+2) - 12 = t^2 + 3t - 10 = (t-2)(t+5)$$

$$\text{Thay } t \text{ trở lại đa thức ta được } (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5) = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 5)$$

Bài 2:

Phân tích đa thức thành nhân tử $(x^2 - 4)(x^2 - 10) - 72$

Lời giải

Đặt $x^2 - 4 = t$, khi đó đa thức trở thành

$$t(t-6) - 72 = t^2 - 6t - 72 = (t-12)(t+6) = (x^2-16)(x^2+2) = (x-4)(x+4)(x^2+2)$$

Bài 3:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) - 4$

Lời giải

$$(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1) - 4 = (12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) - 4$$

Đặt $12x^2 + 11x = t$, khi đó đa thức trở thành $(t+2)(t-1) - 4 = t^2 + t - 6 = (t-2)(t+3)$

$$(12x^2 + 11x - 2)(12x^2 + 11x + 3)$$

Bài 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) - 5$

Lời giải

Đặt $x^2 + 3x = t$, khi đó đa thức trở thành

$$(t+1)(t-3) - 5 = t^2 - 2t - 8 = (t+2)(t-4) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) = (x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$$

Bài 5:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x$

Lời giải

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2, \text{ đặt } (x^2 + x - 2)^{100} + (x^2 + 1 - x)^{2017} \Rightarrow (y+x)(y+2x)$$

Bài 6:

Phân tích đa thức thành nhân tử $(x^2 + 2x + 7) - (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 3)$

Lời giải

Đặt $x^2 + 2x = t$, khi đó đa thức trở thành

$$(t+7) - (t+4)(t+3) = t+7 - t^2 - 7t - 12 = -t^2 - 6t - 5 = -(t+1)(t+5),$$

Thay t trở lại ta được $-(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 5) = -(x+1)^2(x^2 + 2x + 5)$

Thay t trở lại đa thức ta được $(x^2 - 11x - 12)(x^2 - 11x + 70) = (x-12)(x+1)(x^2 - 11x + 70)$

Bài 7:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

Lời giải

Ta có $A = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2 = [(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)](x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx)^2$

Đặt $x^2 + y^2 + z^2 = a; xy + yz + zx = b \Rightarrow A = (a + b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2$

Bài 8:

Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$$

Lời giải

Đặt $x^4 + y^4 + z^4 = a; x^2 + y^2 + z^2 = b; x + y + z = c$ ta được:

$$A = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b)^2 + (b - c^2)^2$$

Lại có: $a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2); b - c^2 = -2(xy + yz + zx)$

$$\text{Do đó: } A = -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2 = -4x^2y^2 - 4y^2z^2 - 4z^2x^2 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4z^2x^2 + 8x^2yz + 8xy^2z + 8xyz^2 = 8xyz(x + y + z)$$

Bài 9:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (a + b + c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$

Lời giải

$$\text{Đặt } a + b = m, a - b = n \Rightarrow 4ab = m^2 - n^2; a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab] = m\left(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow A = (m + c)^3 - 4 \cdot \frac{m^3 + 3mn^2}{4} - 4c^3 - 3c(m^2 - n^2) = 3(-c^3 + mc^2 - mn^2 + cn^2)$$

$$= 3(m - c)(c - n)(c + n) = 3(a + b + c)(c + a - b)(c - a + b)$$

F. Đối với đa thức bậc cao có dạng $x^{3m+1} + x^{3m+2} + 1$ luôn luôn có nhân tử chung là bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu, nên ta thêm bớt để làm xuất hiện bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu:

Bài 1:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (x^7 + x^5 + x^3) + (x^4 + x^2 + 1) = x^3(x^4 + x^2 + 1) + (x^4 + x^2 + 1) \\ & = (x^4 + x^2 + 1)(x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \\ & = (x^2 - x + 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Bài 2:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^{11} + x^{10} + x^9 + \dots + x^2 + x + 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^{11} + x^{10} + x^9 + \dots + x^2 + x + 1 = (x^{11} + x^{10} + x^9) + (x^8 + x^7 + x^6) + \dots + (x^2 + x + 1) \\ & = x^9(x^2 + x + 1) + x^6(x^2 + x + 1) + \dots + (x^2 + x + 1) \\ & = (x^2 + x + 1)(x^9 + x^6 + x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Bài 3:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^8 + 14x^4 + 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^8 + 2x^4 + 1 + 12x^4 = (x^4 + 1)^2 + 12x^4 = (x^4 + 1)^2 + 2.(x^4 + 1).2x^2 + 4x^4 - 4x^2(x^4 + 1) + 8x^4 \\ & = (x^4 + 1 + 2x^2)^2 - (2x^3 - 2x)^2 \\ & = (x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^3 + 2x)(x^4 + 1 + 2x^2 + 2x^3 - 2x) \end{aligned}$$

Bài 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^8 + 98x^4 + 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x^4 + 1)^2 + 2(x^4 + 1)^2 . 8x^2 + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$$

$$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^4 + 1 - 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2$$

Bài 5:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3 = 2x^5 - 2x^4 - x^4 + x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 3$$

$$= 2x^4(x-1) - x^3(x-1) + 5x^2(x-1) - 3(x^2-1)$$

$$= (x-1)^2(x^2+3)(2x+1)$$

G. ĐỐI VỚI ĐA THỨC ĐA ẨN

Bài 1:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (z^2 + 2z + 1) = (x + y)^2 - (z + 1)^2 \\ &= (x + y + z + 1)(x + y - z - 1)\end{aligned}$$

Bài 2:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1 &= (x^2 - 2xz + z^2) - (y^2 - 2y + 1) = (x - z)^2 - (y - 1)^2 \\ &= (x - z + y - 1)(x - z - y + 1)\end{aligned}$$

Bài 3:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3 &= x(x^5 - 2x^3 - x^2y^3 + 2y^3) \\ &= x[x^3(x^2 - 2) - y^3(x^2 - 2)] = x(x^3 - y^3)(x^2 - 2) = x(x - y)(x^2 - 2)(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

Bài 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 &= x^2(x^4 - x^2 - 9x + 9) \\ &= x^2[x^2(x^2 - 1) - 9(x - 1)] = x^2[x^2(x - 1)(x + 1) - 9(x - 1)] = x^2(x - 1)(x^3 + x^2 - 9)\end{aligned}$$

Bài 5:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 - 4b^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac) - 4b^2$$

$$= (2a^2 + 2c^2 - 2b^2 + 4ac) = 2(a^2 + 2ac + c^2 - b^2) = 2[(a+c)^2 - b^2] = 2(a+c+b)(a+c-b)$$

Bài 6:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & ab^2 - ac^2 - bc^2 + a^2b + a^2c - b^2c = a^2(b+c) + b^2(a-c) - c^2(a+b) \\ &= a^2(b+c) + b^2[(a+b) - (b+c)] - c^2(a+b) = a^2(b+c) + b^2(a+b) - b^2(b+c) - c^2(a+b) \\ &= (b+c)(a^2 - b^2) + (a+b)(b^2 - c^2) = (b+c)(a-b)(a+b) + (a+b)(b-c)(b+c) \\ &= (a+b)(b+c)(a-b+b-c) = (a+b)(b+c)(a-c) \end{aligned}$$

Bài 7:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(x+z) + 3xyz$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } &= [xy(x+y) + xyz] + [yz(y+z) + xyz] + [zx(x+z) + xyz] \\ &= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z) = (x+y+z)(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Bài 8:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z-x)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } &= xy(x+y) - yz(y+z) - zx[(y+z) - (x+y)] \\ &= xy(x+y) - yz(y+z) - zx(y+z) + zx(x+y) = x(x+y)(y+z) - z(y+z)(x+y) = (x+y)(y+z)(x-z) \end{aligned}$$

Bài 9:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^4(y-z) + y^4[-(y-z) - (x-y)] + z^4(x-y) \\ &= x^4(y-z) - y^4(y-z) - y^4(x-y) + z^4(x-y) = (y-z)(x^4 - y^4) - (x-y)(y^4 - z^4) \\ &= (y-z)(x-y)(x+y)(x^2 + y^2) - (x-y)(y-z)(y+z)(y^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-y)(y-z)\left[(x+y)(x^2+y^2)-(y+z)(y^2+z^2)\right] \\
&= (x-y)(y-z)(x^3+xy^2+x^2y+y^3-y^3-yz^2-y^2z-z^3) \\
&= (x-y)(y-z)(x^3-z^3+y^2(x-z)+y(x^2-z^2)) \\
&= (x-y)(y-z)\left[(x-z)(x^2+xz+z^2)+y^2(x-z)+y(x-z)(x+z)\right] \\
&= (x-y)(y-z)(x-z)(x^2+xz+z^2+y^2+xy+yz)
\end{aligned}$$

Bài 10:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc \\
&= (a^2b+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc)+a^2c+ca^2 = ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+c) \\
&= b(a+b+c)(a+c)+ac(a+c) = (a+c)(ab+b^2+bc+ac) = (a+c)(b+c)(a+b)
\end{aligned}$$

Bài 11:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &(a+b+c)^3-\left[(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3\right] \\
&\begin{cases} x=a+b-c \\ y=b+c-a \Rightarrow x+y+z=a+b+c \\ z=c+a-b \end{cases} \\
&= (x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3 \\
&= 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3.2a.2b.2c = 24abc
\end{aligned}$$

Bài 12:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &a^2(b-c)+b^2[-(b-c)-(a-b)]+c^2(a-b) \\
&= a^2(b-c)-b^2(b-c)-b^2(a-b)+c^2(a-b) = (b-c)(a-b)(a+b)-(a-b)(b-c)(b+c)
\end{aligned}$$

$$= (b-c)(a-b)(a+b-b-c) = (a-b)(b-c)(a-c)$$

Bài 13:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & xy^3 - xz^3 + yz^3 - x^3y + x^3z - y^3z = x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) \\ &= x^3(z-y) + y^3[-(z-y) - (y-x)] + z^3(y-x) = x^3(z-y) - y^3(z-y) - y^3(y-x) + z^3(y-x) \\ &= (z-y)(x^3 - y^3) + (y-x)(z^3 - y^3) = (z-y)(x-y)(x^2 + xy + y^2) + (y-x)(z-y)(z^2 + yz + y^2) \\ &= (z-y)(x-y)(x^2 + xy + y^2 - z^2 - yz - y^2) \\ &= (z-y)(x-y)(x^2 - z^2 + xy - yz) = (z-y)(x-y)(x-z)(x+y+z) \end{aligned}$$

Bài 14:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x^2 + y^2 + z^2)[(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)] + (xy + yz + zx)^2$$

Đặt: $x^2 + y^2 + z^2 = a, xy + yz + zx = b$ khi đó đa thức:

$$a(a+2b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2$$

Bài 15:

Phân tích đa thức thành nhân tử

$$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (x+y+z)^4$$

Lời giải

$$\text{Đặt: } x^4 + y^4 + z^4 = a, x^2 + y^2 + z^2 = b, x+y+z = c,$$

$$\text{Khi đó ta có: } 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2,$$

$$\text{Lại có: } a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \text{ và } b - c^2 = -2(xy + yz + zx),$$

$$\text{Thay vào ta được: } -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2 = 8xyz(x+y+z)$$

Bài 16:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $-c^2(a-b)+b^2(a-c)-a^2(b-c)$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } & -c^2(a-b)+b^2[(a-b)+(b-c)]-a^2(b-c) = -c^2(a-b)+b^2(a-b)+b^2(b-c)-a^2(b-c) \\ & = (a-b)(b-c)(b+c)+(b-c)(b-a)(b+a) = (a-b)(b-c)(b+c-a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

Bài 17:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y)z^3+(y-z)x^3+(z-x)y^3$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } & z^3(x-y)+x^3[-(x-y)-(z-x)]+y^3(z-x) \\ & = z^3(x-y)-x^3(x-y)+y^3(z-x)-x^3(z-x) = (x-y)(z^3-x^3)+(z-x)(y^3-x^3) \\ & = (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2)+(z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2) \\ & = (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2) = (x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)\end{aligned}$$

Bài 18:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $ab(a+b)-bc(b+c)-ac(c-a)$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } & ab(a+b)-bc[(a+b)+(c-a)]-ac(c-a) = ab(a+b)-bc(a+b)-bc(c-a)-ac(c-a) \\ & = b(a+b)(a-c)-c(c-a)(b+a) = (a+b)(b+c)(a-c)\end{aligned}$$

Bài 19:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y)-x^3(1-y)+y^3(1-x)$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } & (x-y)-x^3[(x-y)+(1-x)]+y^3(1-x) = (x-y)-x^3(x-y)-x^3(1-x)+y^3(1-x) \\ & = (x-y)(1-x^3)-(1-x)(x^3-y^3) = (x-y)(1-x)(1+x+x^2)-(1-x)(x-y)(x^2+xy+y^2) \\ & = (x-y)(1-x)(1+x+x^2-x^2-xy-y^2) = (x-y)(1-x)(1-y)(x+y+1)\end{aligned}$$

Bài 20:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(c-b)-4c^2a^2(2a+c)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } & 4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2[(2a+c)-(2a+b)]-4c^2a^2(2a+c) \\
 = & 4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(2a+c)-b^2c^2(2a+b)-4c^2a^2(2a+c) \\
 = & b^2(2a+b)(4a^2-c^2)+c^2(2a+c)(b^2-4a^2) \\
 = & b^2(2a+b)(2a-c)(2a+c)-c^2(2a+c)(2a-b)(2a+b) \\
 = & (2a+c)(2a+b)(2ab^2-b^2c-2ac^2+bc^2) \\
 = & (2a+c)(2a+b)(b-c)(2ab+2ac-bc)
 \end{aligned}$$

Bài 21:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } & z^3(x-y)+x^3[-(x-y)-(z-x)]+y^3(z-x) \\
 = & z^3(x-y)-x^3(x-y)+y^3(z-x)-x^3(z-x) \\
 = & (x-y)(z^3-x^3)+(z-x)(y^3-x^3) \\
 = & (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2)+(z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2) \\
 = & (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2)=(x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)
 \end{aligned}$$

Bài 22:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } & bc(ab-ac+bd-dc)-ac(ab-bc+ad-dc)+ab(ac-bc+ad-bd) \\
 = & bc(ab-ac+bd-dc)-ac[(ab-ac+bd-dc)+(ac-bc+ad-bd)]+ab(ac-bc+ad-bd) \\
 = & (ab-ac+bd-dc)(bc-ac)-(ac-bc+ad-bd)(ac-ab) \\
 = & (a+d)(b-c)c(b-a)-(c+d)(a-b)a(c-b)
 \end{aligned}$$

$$= (b-c)(b-a)(ac+dc-ca-ad) = (b-c)(b-a)(c-a).d$$

Bài 23:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & y^3(a-x) - x^3[(a-x) + (x-y)] + a^3(x-y) = y^3(a-x) - x^3(a-x) - x^3(x-y) + a^3(x-y) \\ & = (a-x)(y^3 - x^3) - (x-y)(x^3 - a^3) = (x-a)(x-y)(x^2 + xy + y^2) - (x-y)(x-a)(x^2 + xa + a^2) \\ & = (x-a)(x-y)(x^2 + xy + y^2 - x^2 - xa - a^2) = (x-a)(x-y)(y-a)(y+a+x) \end{aligned}$$

Bài 24:

Phân tích thành nhân tử: $x^2y + xy^2 + xz^2 + yz^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$

Lời giải

$$\text{Ta có: } = xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x+y)^2 = (x+y)(xy + z^2 + xz + yz) = (x+y)(y+z)(z+x)$$

F. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

- Chú ý: Hai đa thức bằng nhau khi hệ số của mỗi lũy thừa tương ứng trong hai đa thức bằng nhau

- Phương pháp này dùng cho đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

b. $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

c. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 20x + 14$

d. $R(x) = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

e. $H(x, y) = 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$

f. $T(x, y) = 2x^2 - 7xy + 6y^2 + 9x - 13y - 5$

Lời giải

a. Ta nhận thấy đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ

Giả sử $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$

Đồng nhất các hệ số ta được:
$$\begin{cases} a+c = -6 \\ ac+b+d = -14 \\ ad+bc = -14 \\ bd = 3 \Rightarrow b \in \{\pm 1; \pm 3\} \end{cases}$$

+) $b = 3 \Rightarrow \begin{cases} a+c = -6 \\ ac = 8 \\ a+3c = -14 \end{cases} \Rightarrow c = -4; a = -2(tm) \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

b. Cách 1: Ta nhận thấy đa thức có 1 nhân tử là $x+1$

$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x+1)(2x^3 + ax^2 + bx + c) = 2x^4 + (a+2)x^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$

$$\begin{cases} a+2 = -3 \\ a+b = -7 \\ b+c = 6 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 - x - 4)$$

Cách 2: Giả sử $Q(x) = (2x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 2x^4 + (2c+a)x^3 + (2d+ac+b)x^2 + (ad+bc)x + bd$

Đồng nhất các hệ số:
$$\begin{cases} 2c+a = -3 \\ 2d+ac+b = -7 \\ ad+bc = 6 \\ bd = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ d = -4 \\ a = c = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = (2x^2 - x - 4)(x+1)(x-2)$$

$$c. \begin{cases} 2b + n = -7 \\ 2c + p + bn = 17 \\ cn + bp = -20 \\ cp = 14 \Rightarrow c = 2; p = 7(tm) \Rightarrow b = -2; n = -3 \end{cases}$$

$$d. = (2x^2 + x + 1)^2$$

$$e. \text{ Giả sử } H(x, y) = (ax + by + c)(dx + ey + f) = adx^2 + (af + cd)x + bey^2 + (ce + bf)y + cf + (bd + ac)xy$$

$$\begin{cases} ad = 12 \\ af + cd = 5 \\ be = -12 \\ ce + bf = 12 \\ cf = -3 \Rightarrow c = 1; f = -3 \Rightarrow a = -3; d = -4; b = -2; e = 6 \end{cases} \Rightarrow H(x; y) = (-3x - 2y + 1)(-4x + 6y - 3)$$

$$f. T(x, y) = (2x + by + c)(x + ny + p) \Rightarrow n = -2, b = -3, c = -1, p = 5$$

Bài 2:

Phân tích đa thức thành nhân tử $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2xy^3 + 2x^3y - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2xy - z^2) = (x^2 + y^2)[(x + y)^2 - z^2] = (x^2 + y^2)(x + y + z)(x + y - z) \end{aligned}$$

Bài 3:

Phân tích đa thức thành nhân tử $81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2 &= 81x^4(z^2 - y^2) - (z^2 - y^2) \\ &= (z^2 - y^2)(81x^4 - 1) = (z - y)(z + y)(9x^2 - 1)(9x^2 + 1) \\ &= (z - y)(z + y)(3x + 1)(3x - 1)(9x^2 + 1) \end{aligned}$$

Bài 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6 \\
= & x^6 - y^6 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^3)^2 - (y^3)^2 + (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\
= & (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) + (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) \\
= & (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) \\
= & (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 - y^2 + 1)
\end{aligned}$$

Bài 5:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 8x + 63$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^4 + 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta có: } x^4 + 8x + 63 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 9)$$

Bài 6:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & (x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 = (x+1)^4 + [x(x+1) + 1]^2 \\
= & (x+1)^4 + x^2(x+1)^2 + 2x(x+1) + 1 = (x+1)^2[(x+1)^2 + x^2] + (2x^2 + 2x + 1) \\
= & (2x^2 + 2x + 1)[(x+1)^2 + 1] = (x^2 + 2x + 2)(2x^2 + 2x + 1)
\end{aligned}$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $x^7 + x^5 + 1$

b. $x^7 + x^2 + 1$

c. $x^{4n} + 8x^{2n} + 15$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{a. } & x^7 + x^5 + 1 = x^7 + x^6 + x^5 - x^6 + 1 = x^5(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1)(x^3 + 1) = x^5(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) \\
= & (x^2 + x + 1)[x^5 - (x - 1)(x^3 + 1)]
\end{aligned}$$

$$\text{b. } x^7 + x^2 + 1 = (x^7 - x) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

$$c. x^{4n} + 8x^{2n} + 15 = a^2 + 8a + 15 (x^{2n} = a) = (a+3)(a+5) = (x^{2n} + 3)(x^{2n} + 5)$$

Bài 2:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)^2$

b. $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

c. $(x^3 - y^3)^3 + (y^3 + z^3)^3 - (z^3 + x^3)^3$

d. $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 8(a + b + c)^3$

e. $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$

Lời giải

a. Ta có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

Đặt $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ xy + yz + zx = b \end{cases} \Rightarrow A = a(a + 2b). 3b^2 = a^2 + 2ab - 3b^2 = (a - b)(a + 3b)$

$$\Rightarrow A = (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)[(x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx))]$$

b. Ta đã biết: Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Đặt $\begin{cases} x - y = a \\ y - z = b \\ z - x = c \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow B = a^3 + b^3 + c^3 \Rightarrow B = 3abc = 3(x - y)(y - z)(z - x)$

c. Tương tự câu

b. $\begin{cases} x^3 - y^3 = a \\ y^3 + z^3 = b \\ -x^3 - z^3 = c \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow B = a^3 + b^3 + c^3 \Rightarrow B = 3abc = 3(x^3 - y^3)(y^3 + z^3)(-z^3 - x^3)$

d. Đặt $\begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ c + a = z \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 2(a + b + c) \Rightarrow (x + y + z)^3 = 8(a + b + c)^3 ; D = x^3 + y^3 + z^3 - (x + y + z)^3$

Ta có: $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) \Rightarrow D = -3(x + y)(y + z)(z + x) = -3....$

e. Đặt $\begin{cases} m = a + b - c \\ n = b + c - a \\ p = c + a - b \end{cases} \Rightarrow a + b + c = m + n + p \Rightarrow E = (m + n + p)^3 - m^3 - n^3 - p^3 = 3(m + n)(n + p)(p + m)$

$$\Rightarrow E = 3.2b.2c.2a = 24abc$$

Bài 3:

Cho x, y, z thuộc $\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $S = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là số chính phương

Lời giải

Ta có: $S = (x+y)(x+4y)(x+2y)(x+3y) + y^4 = (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

$$S_t = t(t+2y^2) + y^4 = (t+y^2)^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 \text{ (dpcm)}$$

Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4$

b. $2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8$

c. $2x^3 - 3x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)^3$

d. $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4$

Lời giải

a. $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 4(x^4 + 1) - 8x(x^2 + 1) + 3x^2 = 4(x^2 + 1)^2 - 8x(x^2 + 1) - 5x^2 = 4y^2 - 8xy - 5x^2$
 $= 4y^2 + 2xy - 10xy - 5x^2 = (2y + x)(2y - 5x) = (2x^2 + x + 2)(2x^2 - 5x + 2) = (2x^2 + x + 2)(x - 2)(2x - 1)$

b.

$$2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8 = 2(x^4 + 4) - 15x(x^2 + 2) + 35x^2 = 2(x^2 + x)^2 - 15(x^2 + 2) + 27x^2 = 2y^2 - 15y + 27x^2$$

$$= (y - 3x)(2y - 9x) = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 - 9x + 4) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)(2x - 1)$$

c. $2x^3 - 3x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)^3 = 2x^3 - 3x^2y + y^3 = 2x^2(x - y) - y(x - y)(x + y) = (x - y)(2x^2 - y^2 - xy)$
 $= (x - y)(x - y)(2x + y) = (x - y)^2(2x + y)$

d. $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(2x - 1)(2x^2 + 3x + 2)$

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A(x) = 2x^4 - 19x^3 + 2002x^2 - 9779x + 11670$

b. $B(x) = 3x^6 - 10x^5 + 34x^4 - 47x^3 + 52x^2 + 8x - 40$

Lời giải

a. Ta nhận thấy đa thức có hai nhân tử là $x - 2$ và $x - 3$

$$A(x) = (x - 2)(x - 3)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow a = 2; c = 1945; b = -9 \Rightarrow A(x) = (x - 2)(x - 3)(2x^2 - 9x + 1945)$$

b. Nhận thấy đa thức có 2 nhân tử là $x - 1$ và $3x + 2$

$$B(x) = (x - 1)(3x + 2)(x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 14x + 20) = (x - 1)(3x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 - x + 5)$$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A = ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

b. $B = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

$$c. C = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$

$$d. D = (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5$$

Lời giải

$$\text{Đặt } x = a-b; y = b-c \rightarrow x+y = a-c$$

$$a. A = abx + bcy - ca(x+y) = ax(b-c) - cy(a-b) = axy - cxy = xy(a-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$b. B = x^3 + y^3 - (x+y)^3 = x^3 + y^3 - x^3 - 3xy(x+y) - y^3 = -3xy(x+y) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$C = ay^3 - b(x+y)^3 + cx^3 = ay^3 - b[x^3 + y^3 + 3xy(x+y)] + cx^3 = y^3(a-b) - x^3(b-c) - 3bxy(x+y)$$

$$c. = xy^3 - x^3y - 3bxy(x+y) = xy(y^2 - x^2) - 3bxy(x+y) = xy(x+y)(y-x-3b) = xy(x+y)(b-c-a+b-3b) \\ = -xy(x+y)(a+b+c) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

d. Ta có:

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)^4 = (x+y)(x^2 + 2xy + y^2)^2 = (x+y)(x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 2x^2y^2) \\ = (x+y)(x^4 + y^4) + (x+y)(4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3) = x^5 + y^5 + xy(x^3 + y^3) + xy(x+y)(4x^2 + 6xy + 4y^2) \\ = x^5 + y^5 + xy(x+y)(5x^2 + 5xy + 5y^2) = x^5 + y^5 + 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2) \\ \rightarrow D = x^5 + y^5 - (x+y)^5 = x^5 + y^5 - [x^5 + y^5 + 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)] = -5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2) \\ = 5(a-b)(b-c)(c-a)[(a-b)^2 + (a-b)(b-c) + (b-c)^2] = 5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Bài 7:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$a. A = a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$$

$$b. B = a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$$

Lời giải

$$x = a^3 - b^3; y = b^3 - c^3 \Leftarrow x+y = a^3 - c^3 \rightarrow A = ay - b(x+y) + cx = y(a-b) - x(b-c)$$

$$a. \text{Đặt } = (b^3 - c^3)(a-b) - (a^3 - b^3)(b-c) = (b-c)(a-b)(b^2 + bc + c^2 - a^2 - ab - b^2) \\ = (b-c)(a-b)(bc - ab + c^2 - a^2) = (b-c)(a-b)(c-a)(a+b+c)$$

$$b. \text{Đặt } x = a^2 - b^2; y = b^2 - c^2 \rightarrow x+y = a^2 - c^2$$

$$B = a^3y - b^3(x+y) + c^3x = y(a^3 - b^3) - x(b^3 - c^3) = (b^2 - c^2)(a^3 - b^3) - (a^2 - b^2)(b^3 - c^3) \\ = (b-c)(a-b)[(b+c)(a^2 + ab + b^2) - (a+b)(b^2 + bc + c^2)] = b(a^2 + ab + b^2 - b^2 - bc - c^2) \\ + (a^2c + abc + b^2c - ab^2 - abc - ac^2) = b(a-c)(a+b+c) + [ac(a-c) - b^2(a-c)] \\ = (a-c)(ab + b^2 + bc + ac - b^2) = (a-c)(ab + bc + ca) \rightarrow B = (a-b)(b-c)(a-c)(ab + bc + ca)$$

Bài 8:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$a. A = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

$$b. B = x(x+2y)^3 - y(y+2x)^3$$

c. $C = x^4 + (x+y)^4 + y^4$

d. $D = a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Lời giải

a. Đặt $m = a + b + c \rightarrow A = m^3 - a^3 - (b^3 + c^3) = (m-a)(m^2 + ma + a^2) - (b+c)(b^2 - bc + c^2)$
 $= (b+c)(m^2 + ma + a^2 - b^2 + bc - c^2) = (b+c)[(m^2 - b^2) + (a^2 - c^2) + (ma + bc)]$
 $= (b+c)[(m-b)(m+b) + (a-c)(a+c) + (a+b)(a+c)] = (b+c)(a+c)(m+b+a-c+a+b)$
 $= 3(b+c)(c+a)(a+b)$

b. Đặt $m = x + y$

$B = x(m+y)^3 - y(m+x)^3 = x[m^3 + 3my(m+y) + y^3] - y[m^3 + 3mx(m+x) + x^3]$
 $= m^3(x-y) - xy(x^2 - y^2) - 3mxy(m+x-m-y) = (x-y)(m^3 - xy(x+y) - 3mxy)$
 $= m(x-y)(m^2 - 4xy) = m(x-y)[(x+y)^2 - 4xy] = m(x-y)^3 = (x+y)(x-y)^3$

c. Đặt $m = x + y$

$C = (m-y)^4 + m^4 + y^4 = m^4 - 4m^3y + 6m^2y^2 - 4my^3 + y^4 + m^4 + y^4 = 2(m^4 + 2m^2y^2 + y^4) - 4my(m^2 + y^2) + 2m^2y^2$
 $= 2(m^2 + y^2 - my)^2 = 2[(x+y)^2 + y^2 - (x+y)y]^2 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$

d. Đặt $m = a^2 + b^2 + c^2$

$D = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = m^2 - 4[b^2(a^2 + c^2) + c^2a^2] = m^2 - 4[b^2(m - b^2) + c^2a^2]$
 $= (m - 2b^2)^2 - (2ca)^2 = (m - 2b^2 - 2ca)(m - 2b^2 + 2ca) = (a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2 - 2ca)(a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2 + 2ca)$
 $= [(a-c)^2 - b^2][(a+c)^2 - b^2] = (a-c-b)(a-c+b)(a+c-b)(a+b+c)$

Bài 9:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a. $A = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

b. $B = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$

c. $C = ab(a+b) + b(b+c) + ca(c+a) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc$

Lời giải

a. Đặt $m = x + y + z; a + b - c = x; b + c - a = y; c + a - b = z \rightarrow 2a = y + z; 2b = z + x; 2c = x + y$

$2A = (y+z)x^2 + (x+z)y^2 + (y+x)z^2 + 2xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$
 $= xy(m-z) + yz(m-x) + zx(m-y) + 2xyz = m(xy + yz + zx) - xyz = (x+y)(y+z)(z+x) = 8abc \Rightarrow A = 4abc$

b. Đặt $a + b - c = z; b + c - a = x; c + a - b = y \rightarrow x + y + z = a + b + c$

$B = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3 \cdot 2c \cdot 2a \cdot 2b = 24abc$

c. Đặt $a+b-c=z; b+c-a=x; c+a-b=y \rightarrow 2a=y+z; 2b=x+z; 2c=x+y$

Ta có: $4C = 4a^2(b+c-a) + 4b^2(c+a-b) + 4c^2(a+b-c) - 8abc = (y+z)^2x + (z+x)^2y + (x+y)^2z - (x+y)(y+z)(z+x)$

$= xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) - (x+y)(y+z)(z+x) + 6xyz = xy(x+y) + yz(x+y) + zx(x+y)$

$+ z^2(x+y) - (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz = (x+y)(xy + yz + zx + z^2) - (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz$

$= (x+y)(y+z)(z+x) - (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz = 4xyz \rightarrow C = xyz = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. Ứng dụng 1: Dùng để rút gọn biểu thức

Bài 1:

Cho $a+b+c=0$. Rút gọn $A=a^3+b^3+c(a^2+b^2)-abc$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } A &= a^3+b^3+c(a^2+b^2)-abc = a^3+b^3+a^2c+b^2c-abc = (a^3+a^2c)+(b^3+b^2c)-abc \\ &= a^2(a+c)+b^2(b+c)-abc\end{aligned}$$

$$\text{Vì } a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases} \Rightarrow A = a^2(-b)+b^2(-a)-abc = -ab(a+b+c) = 0.$$

B. Ứng dụng 2: Dùng để chứng minh

Bài 2:

Cho $a^2+b^2=1; c^2+d^2=1, ac+bd=0$. CMR: $ab+cd=0$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } ab+cd &= ab.1+cd.1 = ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2) = abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd \\ &= (abc^2+a^2cd)+(abd^2+b^2cd) \\ &= ac(bc+ad)+bd(ad+bc) = (ad+bc)(ac+bd) = 0(ac+bd=0)\end{aligned}$$

Bài 3:

Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là 1 số chính phương.

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2, n+3 (n \in \mathbb{N}^*)$

$$\begin{aligned}\text{Theo bài ra ta có: } n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (k-1)(k+1)+1 = k^2 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \quad (\text{đpcm})\end{aligned}$$

Bài 4:

Chứng minh rằng số $A = (n+1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho 1 SCP khác 1 với mọi n nguyên dương.

Lời giải

Ta có: $A = [(n+1)^2]^2 + n^4 + 1 = (n^2 + 2n + 1)^2 - n^2 + (n^4 + n^2 + 1) = (n^2 + 3n + 1)(n^2 + n + 1) + (n^4 + n^2 + 1)$
 $= (n^2 + 3n + 1)(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = (n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n + 1) = 2(n^2 + n + 1)^2 \text{ (dpcm)}$

Bài 5:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên x , ta có $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15:(x+6)$

Lời giải

Dùng phương pháp đặt ẩn phụ ta được:

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15:(x+6) = (x^2 + 8x + 10)(x+2)(x+6)$$

Bài 6:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , biểu thức $A = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{3} + \frac{n^3}{6}$ là số nguyên

Lời giải

a. $A = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{3} + \frac{n^3}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \forall n \in \mathbb{Z}$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a. $a^2b^2(a-b) - c^2b^2(c-b) + a^2c^2(c-a)$
- b. $2bc(b+2c) + 2ac(c-2a) - 2ab(a+2b) - 7abc$
- c. $ab(b-a) - bc(b-c) - ac(c-a)$
- d. $3bc(3b-c) - 3ac(3c-a) - 3ab(3a+b) + 28abc$
- e*. $a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) - 2abc - a^3 - b^3 - c^3$

Lời giải

a. Ta nhận thấy nếu $b=c$ thì $A=0$. Vậy đa thức có 1 nhân tử là $b-c$

$$\begin{aligned} a^2b^2(a-b) - c^2b^2(c-b) + a^2c^2(c-a) &= a^2b^2(a-c+c-b) - c^2b^2(c-b) + a^2c^2(c-a) \\ &= a^2b^2(a-c) + a^2b^2(c-b) - c^2b^2(c-b) + a^2c^2(c-a) = (c-b)b^2(a-c)(a+c) + a^2(a-c)(b^2-c^2) \\ &= (a-c)(c-b)[b^2(a+c) - a^2(b+c)] = (a-c)(c-b)(ab^2 - a^2b + b^2c - a^2c) \\ &= (a-b)(c-b)(a-c)(a-b)(-ab-bc-ca) \end{aligned}$$

b. Nhận thấy nếu $c=2a$ thì $B=0$. Vậy đa thức có nhân tử là $c-2a$

$$\begin{aligned} &= 2ac(c-2a) + 2b^2c + 4bc^2 - 2a^2b - 4ab^2 - 7abc = 2ac(c-2a) + 2b^2(c-2a) + 4bc(c-2a) + 8abc - 2a^2b - 7abc \\ &= 2ac(c-2a) + 2b^2(c-2a) + 4bc(c-2a) + 8abc - 2a^2b - 7abc = 2ac(c-2a) + 2b^2(c-2a) \\ &\quad + 4bc(c-2a) + ab(c-2a) \\ &= (c-2a)(2ac + 2b^2 + 4bc + ab) = (c-2a)[2a(a+2b) + b(a+2b)](c-2a)(a+2b)(b+2c) \end{aligned}$$

c. Nhận thấy $a=b$ nên có nhân tử $a-b$

$$\begin{aligned} ab(b-a) - bc(b-c) - ac(c-a) &= ab(b-a) - b^2c + bc^2 - ac^2 + a^2c = ab(b-a) - c(b^2 - a^2) + c^2(b-a) \\ &= (b-a)(ab - cb - ca + c^2) = (b-a)(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

d. Dự đoán $c=3b$, vậy đa thức có nhân tử là $3b-c$

$$\begin{aligned} &= 3bc(3b-c) - 9ac^2 + 3a^2c - 9a^2b - 3ab^2 + 28abc = 3bc(3b-c) + 9ac(3b-c) - 27abc - 3a^2(3b-c) - 3ab^2 + 28abc \\ &= 3bc(3b-c) + 9ac(3b-c) - 3a^2(3b-c) - abc(3b-c) = (3b-c)(3bc + 9ac - 3a^2 - ab) = (3b-c)(3a+b)(3c-a) \end{aligned}$$

e. Ta không nhằm được nghiệm của đa thức

$$\begin{aligned}
&= a(b^2 + c^2 - 2bc - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = a[(b-c)^2 - a^2] + b(c^2 + a^2 - 2ac - b^2) \\
&\quad + c(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) \\
&= a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a+b)^2 - c^2] \\
&= a(b-c-a)(b-c+a) + b[(c-a-b)(c-a+b) + c(a+b-c)(a+b+c)] \\
&= (a+b-c)[a(b-c-a)(c-a+b) + c(a+b+c)] = (a+b+c)[-a(c+a-b) - bc + ab - b^2 + ac + bc + c^2] \\
&= (a+b-c)[-a(a+c-b) + b(a+c-b) + c(a+c-b)] = (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)
\end{aligned}$$

Bài 2: HSG Long Biên Hà Nội, năm học 2015

a. Phân tích $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$ thành nhân tử

b. Dựa vào kết quả hãy chứng minh $A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n : 210 \forall n \in \mathbb{N}$

Lời giải

a. $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = x(x^3 - 7x + 6)(x^3 - 7x - 6) = x(x+1)(x+2)(x-3)(x-1)(x-2)(x+3)$

b. Ta có A là tích của 7 số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow A : 2, 3, 5, 7 \Rightarrow A : 210$

Bài 3: HSG Bắc Giang, năm học 2013

a. $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

b. $(x+y)(y+z)(z+x) + xyz$

Lời giải

a. $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 = (x^4 - x) + 2013(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)$

b. $\begin{aligned} &= (xy + xz + y^2 + yz)(x+z) + xyz = (xyz + x^2y + x^2z) + (xyz + xz^2 + yz^2) + (xyz + xy^2 + zy^2) \\ &= x(xy + yz + zx) + z(xy + yz + zx) + y(xy + yz + zx) = (x+y+z)(xy + yz + zx) \end{aligned}$

Bài 4: HSG Bắc Giang, năm học 2014

a. $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1$

b. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$

c. $6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$

Lời giải

a. $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1 = (x^2 + 2x)[(x^2 + 2x) + 2] + 1 = (x^2 + 2x + 1)^2 = (x+1)^4$

b. $= (x-y)^2 + 4(x-y) + 4 - 9 = (x-y+2)^2 - 9 = (x-y+5)(x-y-1)$

c. $\begin{aligned} &= 6x^3 + 6x^2 + 7x^2 + 7x - 3x - 3 = 6x^2(x+1) + 7x(x+1) - 3(x+1) = (x+1)(6x^2 + 7x - 3) \\ &= (x+1)(3x-1)(2x+3) \end{aligned}$

CÔNG THỨC KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

A. Công thức

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Trong đó: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($k = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow k = \overline{0, n}$); $n! = 1.2.3 \dots n$

+) Quy ước: $0! = 1$

$$+) C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1; C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1; C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n; C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = n$$

+) Bảng tam giác Pascal

n = 2	1	2	1						
n = 3	1	3	3	1					
n = 4	1	4	6	4	1				
n = 5	1	5	10	10	5	1			
n = 6	1	6	15	20	15	6	1		
n =									

B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

Phân tích thành nhân tử: $A = (a+b)^5 - a^5 - b^5$

Lời giải

$$A = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 - a^5 - b^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4$$

$$= 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)$$

$$= 5ab[(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - (a^2b + ab^2)] = 5ab[(a+b)^3 - ab(a+b)] = 5ab(a+b)[(a+b)^2 - ab]$$

$$= 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

Bài 2:

Cho $a+b+c=0$. **CMR:** $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab+bc+ca)$

Lời giải

Từ: $a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b) \Rightarrow VP = a^5 + b^5 - (a+b)^5 = -5ab(a+b)[(a+b)^2 - ab] = -5ab(-c)[(a+b)c-ab]$
 $= -5abc(ab+bc+ca) = VP(dpcm)$

Bài 3:

Cho $a+b+c=0$. CMR: $\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5}$

Lời giải

Ta có: $VP = \frac{-5abc(ab+bc+ca)}{5} = -abc(ab+bc+ca)(1); \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{3abc}{3} = abc$

Lại có: $(a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca) \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = -(ab+bc+ca)$

$VT = -abc(ab+bc+ca)(2) \cdot (1)(2) \Rightarrow VT = VP$

Bài 4:

CMR: $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} \cdot \frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{3} = \frac{(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5}{5}$

Lời giải

Ta có: $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

Đặt $x=a-b; y=b-c; z=c-a \Rightarrow x+y+z=0$

Ta cần chứng minh: $\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{3} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5}$

Bài 5:

Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng số sau là số chính phương $A = (a+b)^4 + a^4 + b^4$

Lời giải

$A = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + a^4 + b^4 = a^4 + b^4 + 3a^2b^2 + 2ab(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)^2 + (ab)^2 + 2ab(a^2 + b^2)$
 $= (a^2 + b^2 + ab)^2 (dpcm)$

Bài 6:

Giải phương trình $(x+2)^6 + (x-2)^6 = 2x^6 + 128(*)$

Lời giải

Ta có: $(x+2)^6 = x^6 + 6x^5 \cdot 2 + 15x^4 \cdot 2^2 + 20x^3 \cdot 2^3 + 15x^2 \cdot 2^4 + 6x \cdot 2^5 + 2^6$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

$$(x-2)^6 = [x+(-2)]^6 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$$

$$VT = 2x^6 + 120x^4 + 480x^2 + 128 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 120x^4 + 480x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 7:

Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng $(a+b)^7 - a^7 - b^7 : 7$

Lời giải

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \Rightarrow (a+b)^7 - a^7 - b^7 \\ = 7(a^6b + 3a^5b^2 + 5a^4b^3 + 5a^3b^4 + 3a^2b^5 + ab^6) : 7 \text{ (dpcm)}$$

Bài 8:

Chứng minh rằng $A = 16^n - 15n - 1 : 225 \forall n \in \mathbb{N}$

Lời giải

$$+) n=0 \Rightarrow 16^0 - 15 \cdot 0 - 1 = 0 : 225 = 15^2$$

$$+) n=1 \Rightarrow A = 0 : 225 = 15^2$$

$$+) n=2 \Rightarrow A = 225 : 225 = 15^2$$

$$+) n \geq 3 \Rightarrow 16^n = (15+1)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \dots C_n^n + 15^n = (1+15n + BS(225))$$

$$\Rightarrow (16^n - 15n - 1) = BS(225) : 225 \forall n$$

Bài 9:

Chứng minh rằng $A = (n^2 + 1)^2 - (n+1)^{n^2} : n^3 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

$$+) n=1; n=2 \text{ thì thỏa mãn}$$

$$+) n \geq 3 \Rightarrow (n^2 + 1)^n = (1+n^2)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot n^2 + C_n^2 \cdot n^4 + \dots + C_n^n \cdot n^{2n} = 1 + n^3 + BS(n^3) \quad (1)$$

Lại có:

$$(1+n)^{n^2} = C_{n^2}^0 + C_{n^2}^1 \cdot n + C_{n^2}^2 \cdot n^2 + \dots C_{n^2}^{n^2} = 1 + n^3 + \frac{n^2(n^2-1)}{2} \cdot n^2 + BS(n^3)$$

$$= 1 + n^3 + n^3 \left[\frac{n(n^2-1)}{2} \right] + BS(n^3) \quad (2) = 1 + BS(n^3)$$

Từ (1)(2) ta có điều phải chứng minh.

