

ĐỀ SỐ 15: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8
NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ Với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$ là:

- A. $P = \frac{x - y}{xy}$ B. $P = \frac{-x + y}{xy}$ C. $P = \frac{x + y}{-xy}$ D. $P = \frac{x + y}{xy}$

Câu 2. Cho biết : $A = \frac{1}{2.32} + \frac{1}{3.33} + \dots + \frac{1}{n(n+30)} + \dots + \frac{1}{1979.2009}$ và

$$B = \frac{1}{2.1980} + \frac{1}{3.1981} + \dots + \frac{1}{n(n+1978)} + \dots + \frac{1}{31.2009} . \text{ Ta có:}$$

- A. $A=B$ B. $A>B$ C. $A<B$ D. $A=2B$

Câu 3. Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Giá trị của các biểu thức sau : $C = x^4 + \frac{1}{x^4}$ là:

- A. 18 B. 47 C. 133 D. Một số khác

Câu 4. Một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Thanh Hoá lúc 6 giờ với vận tốc 40 km/h. Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng xuất phát từ điểm khởi hành của xe máy để đi Thanh Hoá với vận tốc 60 km/h và đi cùng tuyến đường với xe máy. Hỏi ô tô đuổi kịp xe máy vào lúc mấy giờ ?

- A. 8 giờ; B. 8,5 giờ; C. 9 giờ; D. 10 giờ

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $|x - 1| + |x - 2| = 1$ là:

- A. $\{1; 2\}$ B. $\{x / 1 \leq x < 2\}$ C. $\{x / 1 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x / 1 < x \leq 2\}$

Câu 6. Các hằng số a, b để đa thức A (x) chia hết cho đa thức B (x) : $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + ax + b$; $B(x) = x^2 + x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ là:

- A. $a=3$; $b=5$ B. $a=-3$; $b=5$ C. $a=-3$; $b=-5$ D. $a=3$; $b=-5$

Câu 7. Tìm đa thức bậc hai P(x), biết: $P(0) = 25, P(1) = 7, P(2) = -9$ là:

- A. $P(x) = x^2 - 19x - 25$ B. $P(x) = -x^2 - 19x + 25$ C. $P(x) = x^2 + 19x + 25$ D. $P(x) = x^2 - 19x + 25$

Câu 8. Giá trị a để đa thức f(x) chia hết cho đa thức g(x) biết $f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a$; $g(x) = x^2 - x + 5$ là:

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

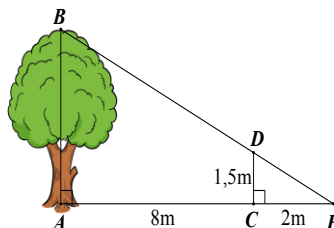
Câu 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ đường vuông góc với đường chéo AC tại H. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AH, BH, CD. Số đo góc BEG là:

- A. 45^0 B. 60^0 C. 90^0 D. 75^0

Câu 10. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, L, K sao cho tứ giác KLMB là hình bình hành. Biết $S_{AML} = 25 \text{ cm}^2$, $S_{KLC} = 36 \text{ cm}^2$. Diện tích tam giác ABC là:

- A. 120 cm^2 B. 121 cm^2 C. 122 cm^2 D. 125 cm^2

Câu 11: Một người cắm một cái cọc vuông góc với mặt đất sao cho bóng của đỉnh cọc trùng với bóng của ngọn cây (như hình vẽ). Biết cọc cao 1,5 m so với mặt đất, chân cọc cách gốc cây 8 m và cách bóng của đỉnh cọc 2 m.



Khi đó, chiều cao AB của cây là:

- A. 13,3 m B. 7,5 m C. 6 m D. 3 m

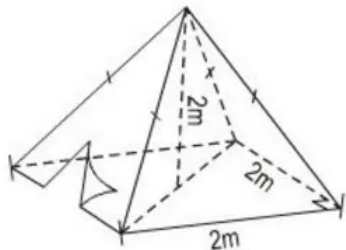
Câu 12. Hình thang ABCD (AB//CD) có AB = 8cm, CD = 12cm. Điểm M thuộc AB sao cho DM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau. Độ dài đoạn BM là:

- A. 2cm B. 2,4cm C. 3cm D. 3,4cm

Câu 13. Diện tích của hình thang có hai đường chéo và đoạn thẳng nối hai trung điểm hai đáy lần lượt là: 6; 8; 5 (cm).

- A. 35 cm² B. 24 cm² C. 30 cm² D. 12 cm²

Câu 14: Một cái lều ở trại hè của học sinh có dạng hình chóp tứ giác đều kèm theo các kích thước như hình vẽ. Tính diện tích vải bạt cần thiết để dựng lều (không tính đến đường viền, nếp gấp), biết chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của chiếc lều là 2,24m và lều này không có đáy.

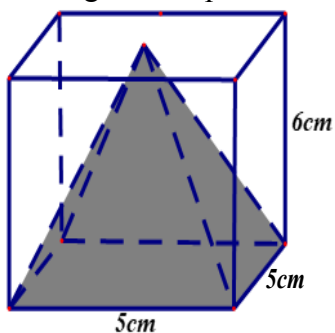


- A. 4,48m² ; B. 17,92m²; C. 8,96m² ; D. 13,44m²

Câu 15. Cho tứ giác ABCD. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Ta có:

- A. Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật B. Tứ giác MNPQ là hình vuông C. Tứ giác MNPQ là hình bình hành D. Tứ giác MNPQ là hình thoi

Câu 16. Tính thể tích của hình chóp ở bên trong hình hộp chữ nhật với kích thước như hình vẽ.



- A. 35(cm³) B. 25(cm³) C. 30(cm³) D. 50(cm³)

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm):

a.Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6.

b.Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Câu 2 (3,0 điểm): a. Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

b. Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x + 4$ thì dư 9, còn $f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12$ được thương là $x^2 + 3$ và còn dư.

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = CM.

a.Chứng minh : $\triangle OEM$ vuông cân.

b.Chứng minh : $ME \parallel BN$.

c.Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1$; $b \geq 1$.

$$\text{Chứng minh : } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	B	B	C	C	D	D	C	C	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	B	B	C	C	D				

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ Với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$

Với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$ ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x + y) - xy^2}{xy(x + y)} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\
 &= \frac{2}{x} - \frac{xy(x - y) - (x - y)(x + y)^2}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2}{x} + \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\
 &= \frac{2}{x} + \frac{x - y}{xy} = \frac{x + y}{xy}
 \end{aligned}$$

Câu 2. Tính $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{2.32} + \frac{1}{3.33} + \dots + \frac{1}{n(n+30)} + \dots + \frac{1}{1979.2009}$
 $B = \frac{1}{2.1980} + \frac{1}{3.1981} + \dots + \frac{1}{n(n+1978)} + \dots + \frac{1}{31.2009}$.

Giải:

Với các số nguyên dương n và k ta có $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{n+k}{n(n+k)} - \frac{n}{n(n+k)} = \frac{k}{n(n+k)}$.

Với $k = 30$ ta có:

$$\begin{aligned}
 30A &= \frac{30}{2.32} + \frac{30}{3.33} + \dots + \frac{30}{1979.2009} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} + \frac{1}{3} - \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{1979} - \frac{1}{2009} = \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1979} \right) - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{2009} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{31} \right) - \left(\frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \dots + \frac{1}{2009} \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Với } k = 1978 \text{ ta có: } 1978B &= \frac{1978}{2.1980} + \frac{1978}{3.1981} + \dots + \frac{1978}{31.2009} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1980} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1981} + \dots + \frac{1}{31} - \frac{1}{2009} \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{31} \right) - \left(\frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \dots + \frac{1}{2009} \right) \quad (2).
 \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 30A = 1978B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1978}{30} = \frac{989}{15}.$$

Câu 3. Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau: **C** $= x^4 + \frac{1}{x^4}$; **d** $= x^5 + \frac{1}{x^5}$.

$$a) A = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7 ;$$

$$b) B = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18 ;$$

$$c) C = x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 49 - 2 = 47 ;$$

$$d) A.B = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} = D + 3 \Rightarrow D = 7.18 - 3 = 123.$$

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình sau $\frac{1}{3}(x-1) \geq x+2$ là:

Bài giải

$$c) \frac{1}{3}(x-1) \geq x+2 \Leftrightarrow x-1 \geq 3(x+2) \Leftrightarrow x-1 \geq 3x+6 \Leftrightarrow 3x-x \leq -1-6 \Leftrightarrow 2x \leq -7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

$$\left\{x/x < \frac{7}{2}\right\}$$

Câu 5. Giải phương trình $|x-1|+|x-2|=1$

$$x < 1 \text{ pt} \Leftrightarrow 1-x+2-x=1 \Leftrightarrow x=1 \quad (\text{không thỏa mãn}) \quad (1 \text{ đ})$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ pt} \Leftrightarrow x-1+2-x=1 \Leftrightarrow 0x=0 (\text{đúng } \forall x | 1 \leq x \leq 2) \quad (1 \text{ đ})$$

$$x > 2 \text{ pt} \Leftrightarrow x-1+x-2=1 \Leftrightarrow x=2 \quad (\text{không thỏa mãn})$$

Vậy nghiệm của pt : $1 \leq x \leq 2$

Câu 6. Tìm các hằng số a, b để đa thức A (x) chia hết cho đa thức B (x) :

$$A(x) = 2x^3 + 7x^2 + ax + b ; \quad B(x) = x^2 + x - 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{Q}.$$

Thực hiện phép chia A (x) cho B (x) ta được số dư là

$$(a-3)x + b + 5.$$

Để đa thức A(x) : B(x) khi (a-3)x + b + 5 là đa thức 0

$$\Rightarrow a-3=0 \Rightarrow a=3$$

$$\text{và } b+5=0 \Rightarrow b=-5$$

Vậy để đa thức A(x) chia hết cho đa thức B(x) thì $a=3$; $b=-5$

Câu 7. Tìm đa thức bậc hai P(x), biết: $P(0)=25, P(1)=7, P(2)=-9$.

Giải

$$\text{Đặt } P(x) = b_0 + b_1x + b_2x(x-1) \quad (I)$$

$$b_0 = 25$$

$$\text{Thay } x \text{ lần lượt bằng } 0; 1; 2 \text{ vào } (I) \text{ ta được: } 7 = 25 + b_1 \Leftrightarrow b_1 = -18$$

$$-9 = 25 - 18.2 + b_2.2.1 \Leftrightarrow b_2 = 1$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng:

$$P(x) = 25 - 18x + x(x-1) \Leftrightarrow P(x) = x^2 - 19x + 25.$$

Câu 8. Tìm a để đa thức f(x) chia hết cho đa thức g(x)

$$f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a ; \quad g(x) = x^2 - x + 5$$

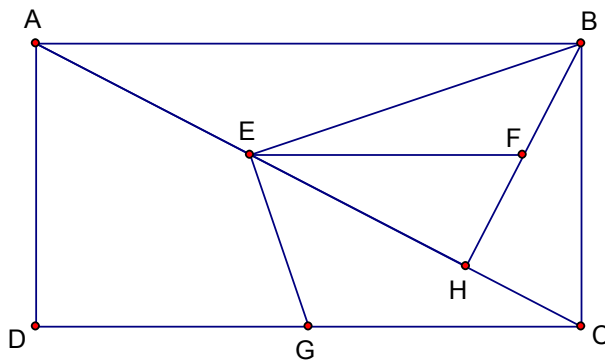
thực hiện phép chia, ta có :

$$(x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a) : (x^2 - x + 5) = (x^2 + 1) \text{ dư } (a-5)$$

để đa thức f(x) chia hết cho đa thức g(x) khi : $a-5=0$

$$\Leftrightarrow a=5. \text{ Vậy : } a=5$$

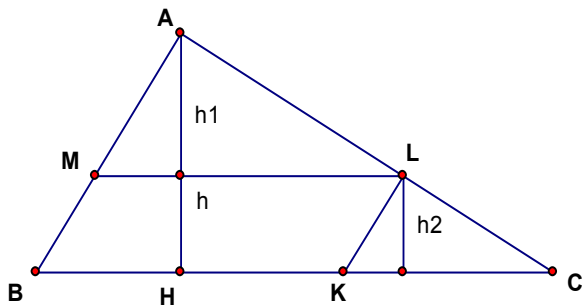
Câu 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ đường vuông góc với đường chéo AC tại H. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AH, BH, CD. Số đo góc BEG là:



Chứng minh tứ giác EFCG là hình bình hành
Chứng minh F là trực tâm tam giác BEC

$$\Rightarrow BEG = 90^\circ$$

Câu 10. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, L, K sao cho tứ giác KLMB là hình bình hành. Biết $S_{AML} = 25 \text{ cm}^2$, $S_{KLC} = 36 \text{ cm}^2$. Hãy tính diện tích tam giác ABC



Đặt diện tích AML là S_1 , diện tích KLC là S_2 , diện tích ABC là S

$$+ \triangle AML \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{h_1}{h}$$

$$+ \triangle LKC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{h_2}{h}$$

+Suy ra:

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$$

Thay số $S = 121 \text{ cm}^2$

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm các đường phân giác.

a. Biết $AB = 5 \text{ cm}$, $IC = 6 \text{ cm}$. Tính độ dài BC.

b. Biết $IB = \sqrt{5} \text{ cm}$, $IC = \sqrt{10} \text{ cm}$. Tính độ dài AB và AC.

Giải

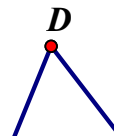
a. Kẻ $BH \perp BI$ tại H, CH cắt BA tại D.

Ta có tam giác BCD cân nên $CH = HD$. Đặt $BC = x$ thì $AD = x - 5$,

Tam giác CHI vuông cân có :

$$\angle CIH = 45^\circ \Rightarrow CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow DC = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác ACD vuông tại A ta có :



$$AD^2 + AC^2 = DC^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (x^2 - 25) = 72$$

Rút gọn được $(x-9)(x+4)=0$. Đáp số $BC=9$ cm

b. Kẻ $CH \perp BI$. Ta có tam giác CHI vuông cân nên

$$\angle CIH = 45^\circ \Rightarrow CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow BH = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông BHC:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 20 + 5 = 25 \text{ Nên } BC = 5 \text{ cm}$$

Ta có tam giác BCD cân tại B Suy ra $BC = BD = 5$ cm ;

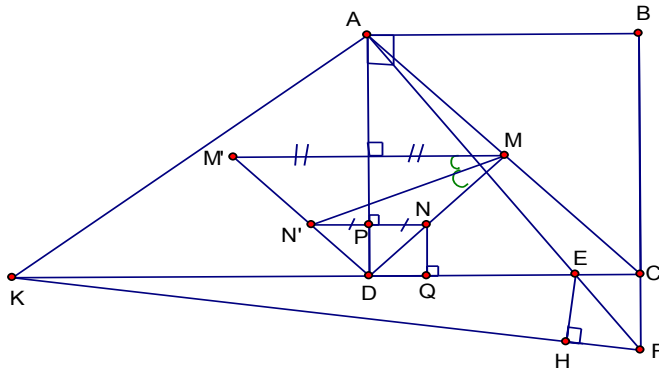
$$CD = 2CH = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$2S_{BCD} = BH \cdot CD = AC \cdot BD. \text{ Suy ra } AC = \frac{BH \cdot CD}{BD} = \frac{BH \cdot CD}{BC}$$

$$\text{Thay số } AC = 4 \text{ cm}, AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ cm}$$

Câu 12.

Câu 13. Cho hình vuông ABCD, có độ dài cạnh bằng a. E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K. Ta có:



Học sinh c/m: $\triangle ABF = \triangle ADK$ (g.c.g) suy ra $AF = AK$

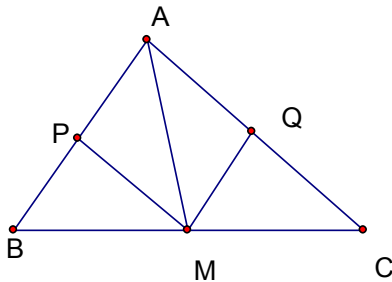
Trong tam giác vuông: KAE có AD là đường cao nên:

$$\frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} \text{ hay } \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} \text{ (không đổi)}$$

Câu 14. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB ở P. Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở Q.

a/ Tứ giác APMQ là hình gì? Vì sao?

b/ ABC cần điều kiện gì thì APMQ là hình chữ nhật, hình thoi?



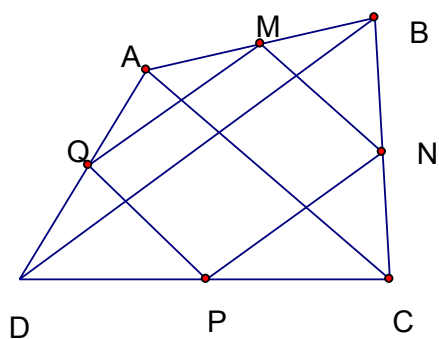
a/ Theo đề bài ta có :

$AP \parallel MQ, AQ \parallel PM$ nên APMQ là hình bình hành.

Câu 15. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì? Vì sao?

b) Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để tứ giác MNPQ là hình vuông?



a/ Ta có $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$,

$PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{1}{2} \cdot AC$,

Do đó tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b/ Ta có MNPQ là hình bình hành, để MNPQ là hình vuông thì $MN = MQ$, mà $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$, $MQ = \frac{1}{2} \cdot BD$ nên

$AC = BD$.

Khi đó MNPQ là hình thoi.

Để MNPQ là hình vuông thì góc M bằng 90° , vậy $AC \perp BD$.

Vậy để MNPQ là hình vuông thì $AC = BD$ và $AC \perp BD$.

Câu 16. Bốn bạn Xuân, Hạ, Thu, Đông có tất cả 61 viên bi. Xuân có số bi ít nhất, Đông có số bi nhiều nhất và là số lẻ, Thu có số bi gấp 9 lần số bi của Hạ. Hãy cho biết mỗi bạn có bao nhiêu viên bi ?

Bài giải:

+ Số bi của Thu gấp 9 lần số bi của Hạ nên tổng số bi của Thu và Hạ là một số chẵn. Tổng số bi của bốn bạn là số lẻ, số bi của Đông là số lẻ, tổng số bi của Hạ và Thu là số lẻ ; do đó số bi của Xuân phải là số chẵn.

+ Số bi của Hạ phải là số bé hơn 4 vì nếu số đó là 4 thì số bi của Thu là $4 \times 9 = 36$. Khi đó ít nhất Đông có số bi là 37 thì chỉ riêng tổng số bi của Thu và Đông đã vượt quá tổng số bi của bốn bạn ($36 + 37 = 73 > 61$).

+ Nếu số bi của Xuân là 2 thì số bi của Hạ là 3, số bi của Thu là 27

($3 \times 9 = 27$)

Số bi của Đông là :

$61 - (2 + 3 + 27) = 29$ (viên).

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,0 điểm): a.Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6.

b.Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

$a^3 + 5a = a^3 - a + 6a$
$= a(a^2 - 1) + 6a$
$= (a-1)a(a+1) + 6a$
* $(a-1)a(a+1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên tồn tại 1 bội của 2 suy ra chia hết cho 2
* $(a-1)a(a+1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên tồn tại 1 bội của 3 suy ra chia hết cho 3
Vì $(2,3) = 1$ nên $(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 6
* $6a$ chia hết cho 6
Vậy $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

$x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$	
$\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2013x - 2013y - 2013 = 1$	
$\Leftrightarrow x(x+y+1) - 2013(x+y+1) = 1 \Leftrightarrow (x-2013)(x+y+1) = 1$	
$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} x - 2013 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases}$
	$\begin{cases} x - 2013 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} x = 2014 \\ y = -2014 \end{cases}$
	$\begin{cases} x = 2012 \\ y = -2014 \end{cases}$

Câu 2 (4,0 điểm): a. Cho $a+b+c=0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\
 P &= \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\
 &= \frac{1}{b^2 + c^2 - (b+c)^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - (a+c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a+b)^2} \\
 &= \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{a+b+c}{-2abc} = 0
 \end{aligned}$$

b. Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x+4$ thì dư 9, còn $f(x)$ chia cho x^2+x-12 được thương là x^2+3 và còn dư.

Lời giải

Ta có: $f(x) = (x-3)A(x) + 2$ (1)

$f(x) = (x+4)B(x) + 9$ (2)

$f(x) = (x^2 + x - 12)C(x) + ax + b$
 $= (x^2 + x - 12)(x^2 + 3) + ax + b$ (3)

Thay $x = 3$ vào (1) ta có: $f(3) = 2$ (4)

Thay $x = -4$ vào (2) ta có: $f(-4) = 9$ (5)

Từ (3) ta có: $f(x) = (x-3)(x+4)(x^2+3) + ax + b$ (6)

Từ (4) và (6): $3a + b = 2$ (7)

Từ (5) và (6): $-4a + b = 9$ (8)

Từ (7) và (8) ta có: $a = -1, b = 5$

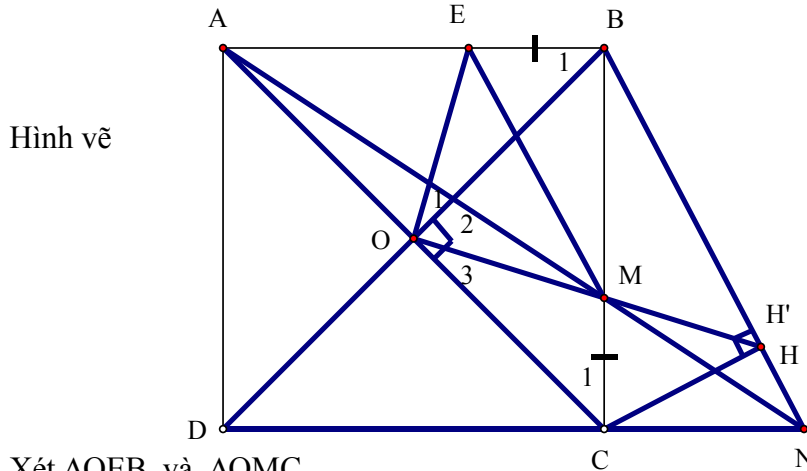
Vậy $f(x) = (x^2 + x - 12)(x^2 + 3) - x + 5$.

Câu 3 (4,0 điểm): Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = CM.

a) Chứng minh : $\triangle OEM$ vuông cân.

b) Chứng minh : $ME \parallel BN$.

Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.



Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì ABCD là hình vuông nên ta có $OB = OC$

Và $B_1 = C_1 = 45^\circ$

$BE = CM$ (gt)

Suy ra $\triangle OEB = \triangle OMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OE = OM$ và $O_1 = O_3$

Lại có $O_2 + O_3 = \angle BOC = 90^\circ$ vì tứ giác ABCD là hình vuông

$O_2 + O_1 = \angle EOM = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

Từ (gt) tứ giác ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$ và $AB \parallel CD$

+ $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (Theo ĐL Ta-lét) (*)

Mà $BE = CM$ (gt) và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*)

Ta có : $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$ (theo ĐL đảo của đl Ta-lét)

Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \angle OME = \angle OH'E$ (cặp góc so le trong)

Mà $\angle OME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O

$\Rightarrow \angle MH'B = 45^\circ = C_1$

$\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH'$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}$, kết hợp $\angle OMB = \angle CMH'$ (hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH' \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle OBM = \angle MH'C = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } \angle BH'C = \angle BH'M + \angle MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$$

Mà $CH \perp BN$ ($H \in BN$) $\Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

Câu 4 (1,0 điểm): Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$.

$$\text{Chứng minh : } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

$$= \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)}$$

$$= \frac{a(b-a)(1+b^2) + b(a-b)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}$$

$$= \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}$$

$$\text{Do } a \geq 1; b \geq 1 \text{ nên } \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \quad \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Hết