Chương I : **ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

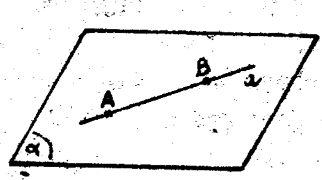
I. Đối tượng cơ bản và tiên đề

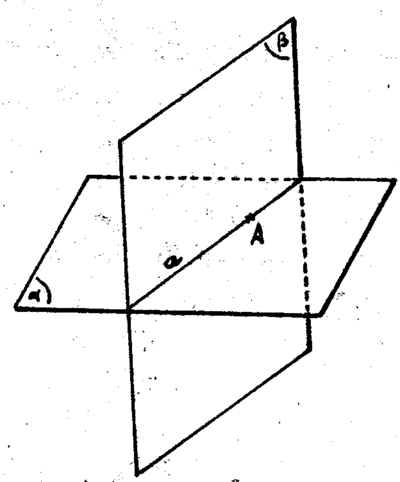
Các đối tượng cơ bản của hình học không gian là điểm, đường thẳng , mặt phẳng. Chúng có những quan hệ với nhau qua các tiên đề.

Tiên đề 1 : Qua 2 điểm phân biệt có một đường thẳng và chỉ một mà thôi.

Tiên đề 2 : Qua 3 điểm không thẳng hàng có một mặt phẳng và chỉ một mà thôi.

Tiên đề 3 : Nếu một đường thẳng có 2 điểm phân biệt nằm trên một mặt phẳng thì đường thẳng đó hoàn toàn nằm trên mặt phẳng.



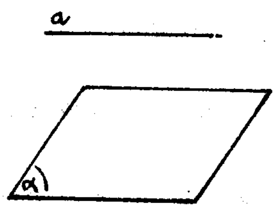


Tiên đề 4 : Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung này gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

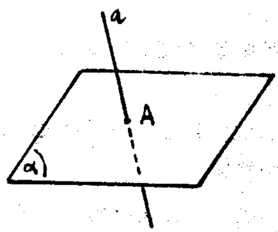
II. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Có ba vị trí tương đối giữa đường thẳng a và mặt phẳng α :

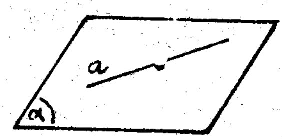
$$a \,//\, \alpha \Leftrightarrow a \cap \alpha = \varnothing$$
$$a \text{ cắt } \alpha \Leftrightarrow a \cap \alpha = \{A\}$$
$$a \subset \alpha \Leftrightarrow a \cap \alpha = a$$



a // α



a cắt α



a ⊂ α

III. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

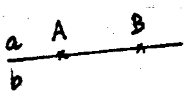
Có bốn vị trí tương đối giữa hai đường thẳng a và b :

a ≡ b ⇔ a và b có 2 điểm chung phân biệt

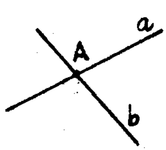
a cắt b ⇔ $a \cap b = \{A\}$

a // b ⇔ a , b đồng phẳng và $a \cap b = \varnothing$

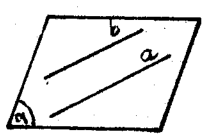
a chéo b ⇔ a , b không đồng phẳng ($a \cap b = \varnothing$)



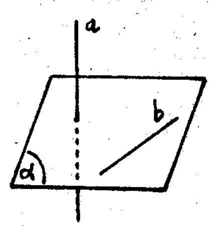
a ≡ b



a cắt b



a // b



a chéo b

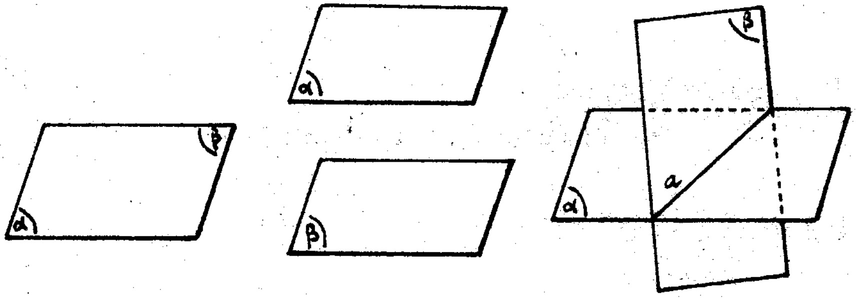
IV. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Có ba vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng α và β :

$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow$ α và β có 3 điểm chung không thẳng hàng.

$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$

α cắt $\beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = a$



$\alpha \equiv \beta$ $\qquad$ $\alpha \parallel \beta$ $\qquad$ α cắt β

V. Cách xác định mặt phẳng

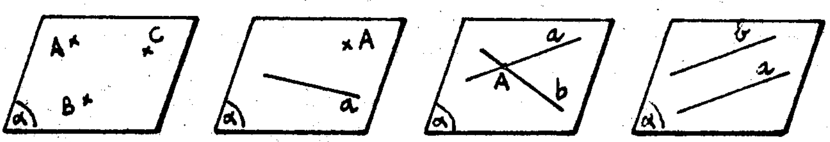
Có bốn cách xác định một mặt phẳng :

a) Ba điểm không thẳng hàng.

b) Một điểm và một đường thẳng không chứa nó.

c) Hai đường thẳng đồng quy.

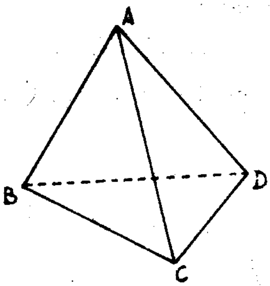
d) Hai đường thẳng song song.

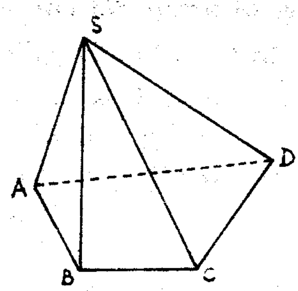


VI. Vài hình thông dụng

a) Tứ diện là hình hợp bởi 4 điểm không đồng phẳng.

b) Hình chóp : cho đa giác lồi $A_1 A_2 \ldots A_n$ và điểm S ở ngoài mặt phẳng đa giác. Hình chóp là hình giới hạn bởi n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1 và đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$.





B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : Cách xác định một mặt phẳng

Xác định :
- ba điểm không thẳng hàng.
- một điểm và một đường thẳng không chứa nó.
- hai đường thẳng đồng quy.
- hai đường thẳng song song.

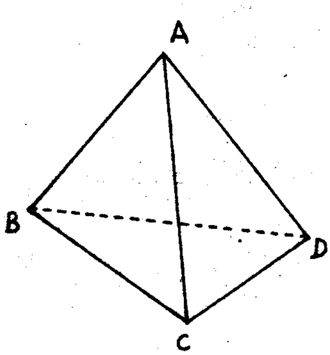
VÍ DỤ 1 :

Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng :

a) Chứng tỏ ba trong bốn điểm này không thẳng hàng – liệt kê các mặt phẳng khác nhau.

b) Hãy nêu các cặp đường thẳng chéo nhau.

Giải



a) Giả sử có 3 điểm B, C, D thẳng hàng thì điểm A và đường thẳng BCD xác định một mặt phẳng. Do đó 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, điều này trái với giả thiết.

Vậy 3 trong 4 điểm A, B, C, D không thẳng hàng.

Suy ra có 4 mặt phẳng khác nhau ABC, ABD, ACD, BCD.

b) Các cặp đường thẳng chéo nhau là AB và CD, AC và BD, AD và BC.

VÍ DỤ 2 :

Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Trên a lấy hai điểm phân biệt A , B và trên b lấy hai điểm phân biệt C, D. Chứng minh AC và BD chéo nhau.

Giải

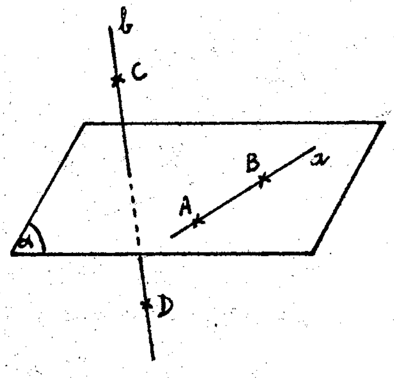
Nếu AC và BD đồng phẳng trong một mặt phẳng α thì ta có :

$A, B \in \alpha \Rightarrow a \subset \alpha$

$C, D \in \alpha \Rightarrow b \subset \alpha$

Điều này trái giả thiết vì a và b chéo nhau.

Vậy AC và BD không đồng phẳng nên AC và BD chéo nhau.



BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ giác lồi ABCD và điểm S không thuộc mặt phẳng của tứ giác.
   a) Liệt kê các mặt phẳng mà ta có được.
   b) Hãy nêu các cặp cạnh chéo nhau.

2. Cho 5 điểm ABCDE trong đó không có 4 điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng.
   a) Chứng tỏ ba trong năm điểm không thẳng hàng.
   b) Hỏi có mấy mặt phẳng xác định bởi 3 trong 5 điểm trên.

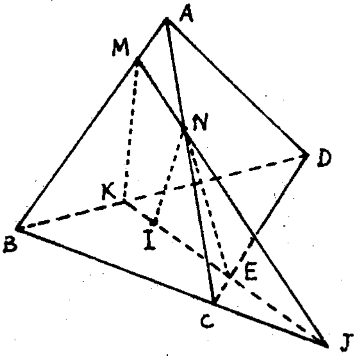
3. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại A. Một đường thẳng a cắt cả hai đường đó. Hỏi cả ba đường thẳng có nằm trong một mặt phẳng không ?

Vấn đề 2 : Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Ta tìm hai điểm chung của chúng.

VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M trên đoạn AB, điểm N trên đoạn AC và I ở trong tam giác BCD. Giả sử MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :



a) (MNI) và (BCD)

b) (MNI) và (ABD)

c) (MNI) và (ACD)

Giải

* MN và BC cùng nằm trong mặt phẳng (ABC) và không song song nên cắt nhau tại J.

Ta có : $J \in MN \Rightarrow J \in (MNI)$

$J \in BC \Rightarrow J \in (BCD)$

Hai mặt phẳng (MNI) và (BCD) có hai điểm chung I và J nên giao tuyến của chúng là IJ.

* Trong mặt phẳng BCD , đường thẳng IJ cắt BD tại K và CD tại E.

Hai mặt phẳng (MNI) và (ABD) có hai điểm chung M và K nên giao tuyến của chúng là đường thẳng MK.

* Hai mặt phẳng (MNI) và (ACD) có hai điểm chung là N và E nên giao tuyến của chúng là NE.

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối không song song và điểm S không thuộc mặt phẳng của tứ giác. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD)

b) (SAB) và (SCD)

c) (SAD) và (SBC)

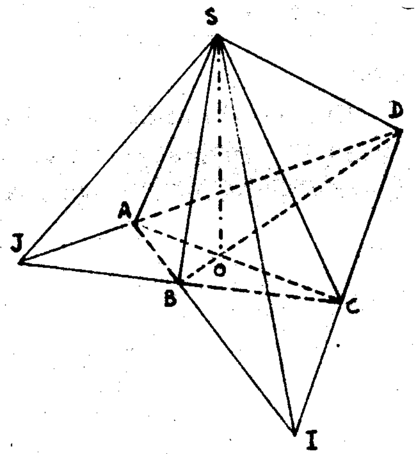
Giải

a) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, ta có :

$O \in AC \Rightarrow O \in (SAC)$

$O \in BD \Rightarrow O \in (SBD)$

Do đó hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung S và O nên giao tuyến của chúng là đường thẳng SO.



b) Theo giả thiết các cạnh đối AB và CD của tứ giác không song song nên cắt nhau tại I. Ta có :

$I \in AB \Rightarrow I \in (SAB)$

$I \in CD \Rightarrow I \in (SCD)$

Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có hai điểm chung S và I nên giao tuyến của chúng là SI.

c) Hai cạnh đối AD và BC không song song nên cắt nhau tại J. Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có hai điểm S và J chung nên giao tuyến của chúng là SJ.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M trên AC, điểm N trên BD và điểm I trên AD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng MNI với các mặt của tứ diện ABCD.
2. Tromg mặt phẳng α cho hai đường thẳng d_1 và d_2 đồng quy tại O. Điểm M không thuộc mặt phẳng α. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M,d_1) và (M,d_2).
3. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm I trên AB, điểm J trong tam giác BCD và điểm K trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng IJK với các mặt của tứ diện.

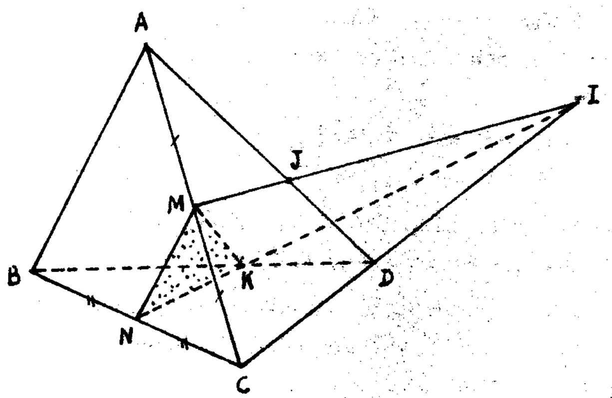
Vấn đề 3 : Dựng giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng

Ta dựng giao điểm của đường thẳng đó với đường thẳng nằm trong mặt phẳng. (Ta dựng giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng chứa đường thẳng)

VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC, và K là điểm trên BD với KD < KB. Dựng giao điểm của CD và AD với mặt phẳng (MNK).

Giải



* NK và CD cùng nằm trong mặt phẳng (BCD) và không song song (vì KD < KB) nên cắt nhau tại I.

Mà : $NK \subset (MNK)$

Vậy CD cắt (MNK) tại I.

* Ta có MI và AD cùng nằm trong mặt phẳng (ACD) và không song song nên cắt nhau tại J.

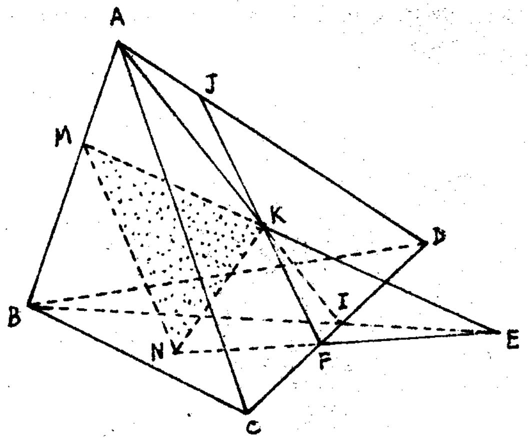
Mà $I \in NK \Rightarrow I \in (MNK) \Rightarrow MI \subset (MNK)$

Vậy : AD cắt (MNK) tại J.

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M trên AB, điểm N trong tam giác BCD và điểm K trong tam giác ACD. Dựng giao điểm của CD và AD với mặt phẳng (MNK).

Giải



* AK và CD cùng nằm trong mặt phẳng (ACD) và không song song nên cắt nhau tại I.

  MK và BI cùng nằm trong mặt phẳng (ABI) và không song song nên cắt nhau tại E.

  Ta có $E \in MK \Rightarrow E \in (MNK)$

  $E \in BI \Rightarrow E \in (BCD)$

  Mặt khác N là điểm chung của 2 mặt phẳng (MNK) và (BCD) theo giả thiết. Do đó hai mặt phẳng (MNK) và (BCD) cắt nhau theo giao tuyến NE.

  Ta có : NE cắt CD tại F, mà $NE \subset (MNK)$

  Vậy : F là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNK).

* Hai mặt phẳng (MNK) và (ACD) có hai điểm chung K và F nên giao tuyến của chúng là KF.

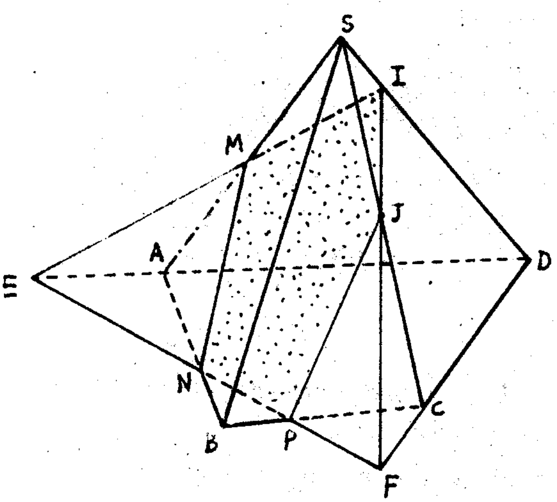
Ta có : KF cắt AD tại J (vì cùng nằm trong (ACD)).

Mà : KF ⊂ (MNK). Vậy J là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNK).

VÍ DỤ 3 :

Cho hình chóp SABCD. Lần lượt lấy trên SA, AB và BC các điểm M, N, P sao cho NP không song song với AD và CD. Dựng giao điểm của SD, SC với mặt phẳng (MNP).

Giải



* Theo giả thiết NP không song song với AD và CD nên NP cắt AD tại E và CD tại F (vì cùng nằm trong mặt phẳng ABCD).

$$E \in AD \Rightarrow E \in (SAD)$$
$$E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$$

Do đó hai mặt phẳng (MNP) và (SAD) có hai điểm chung M và E nên cắt nhau theo giao tuyến ME. Trong mặt phẳng (SAD), ME và SD cắt nhau tại I. Vậy I là giao điểm của SD với (MNP).

* Tương tự hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) có hai điểm chung I và F nên cắt nhau theo giao tuyến IF. Trong mặt phẳng (SCD),

IF cắt SC tại J. Vậy J là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M trên AB và N trong tam giác BCD. Dựng giao điểm của AC với mặt phẳng (MND).
2. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M trên AB và N trên AC, và I ở trong tam giác BCD. Dựng giao điểm của BD, CD với mặt phẳng (IMN).
3. Cho hình chóp SABCD và điểm M ở trên SB. Dựng giao điểm của SC với mặt phẳng (ADM).

Vấn đề 4 : Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Ta chứng minh chúng là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.

VÍ DỤ 1 :

Cho đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại I. Lấy hai điểm A và B trên d và điểm M trong không gian không thuộc d và (α). Giả sử MA và MB lần lượt cắt (α) tại A' và B'. Chứng minh ba điểm I, A' và B' thẳng hàng.

Giải

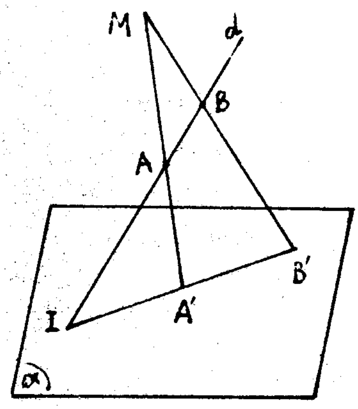
Điểm M và đường thẳng d không chứa nó xác định một mặt phẳng (M,d).

Ta có I, A', B' $\in (\alpha)$ (gt)

Và A' $\in$ MA $\Rightarrow$ A' $\in$ (M,d)

B' $\in$ MB $\Rightarrow$ B' $\in$ (M,d)

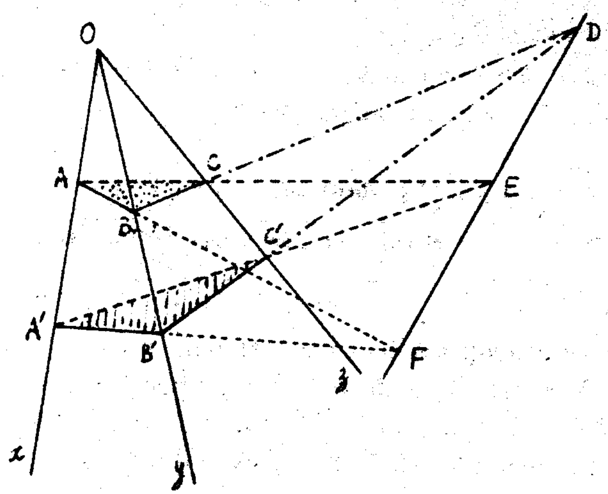
Vậy I, A', B' là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (M,d) nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng này.



VÍ DỤ 2 :

Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Lấy hai điểm phân biệt A, A' trên Ox; hai điểm phân biệt B, B' trên Oy và hai điểm phân biệt C, C' trên Oz sao cho BC cắt B'C' tại D, CA cắt C'A' tại E và AB cắt A'B' tại F. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Giải



$D \in BC \Rightarrow D \in (ABC)$

$D \in B'C' \Rightarrow D \in (A'B'C')$

Tương tự : E,F $\in$ (ABC) và E,F $\in$ (A'B'C')

Như vậy : D,E,F là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (ABC) và (A'B'C') nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng này.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Trong mặt phẳng (α) cho 2 đường thẳng d_1 và d_2. Lấy hai điểm A và B không thuộc (α) sao cho đường thẳng AB cắt (α)

tại I. Mặt phẳng (β) qua AB cắt d_1 tại M và d_2 tại N. Chứng tỏ ba điểm I, M, N thẳng hàng.

2. Cho hình chóp SABCD trong đó AD và BC không song song. Lấy điểm M trên SB và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

   a) Dựng giao điểm N của SC với mặt phẳng (ADM).
   b) AN và DM cắt nhau tại I. Chứng tỏ 3 điểm S , I , O thẳng hàng.

Vấn đề 5 : Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta có thể chứng minh : * Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm ở trên đường thẳng thứ ba. * Chúng là các đường thẳng không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một (xem ví dụ 2).

VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là 3 điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại J (I khác C và J khác D). Chứng minh CD, IG và JF đồng quy.

Giải

Ta có :

$I \in EF \Rightarrow I \in (EFG)$

$I \in BC \Rightarrow I \in (BCD)$

Vậy IG là giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD).

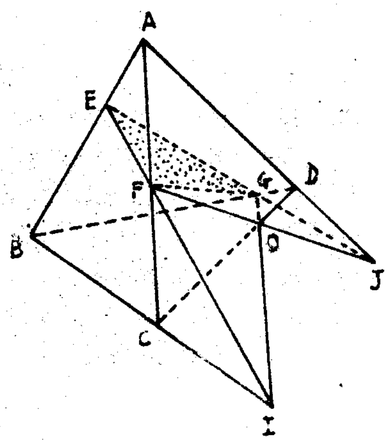
Ta cũng có :

$J \in EG \Rightarrow J \in (EFG)$

$J \in AD \Rightarrow J \in (ACD)$

Vậy JF là giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (ACD).

IG và JF nằm trong (EFG) và không song song.cắt nhau



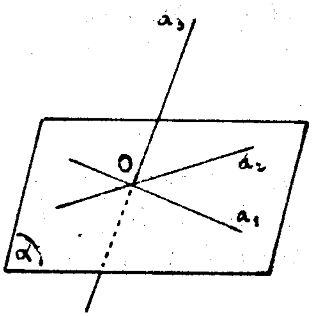
tại O. Do đó $O \in (BCD)$ và $O \in (ACD)$ nên $O \in$ giao tuyến CD.

Vậy ba đường thẳng CD, IG, và JF đồng quy tại điểm chung của ba mặt phẳng phân biệt (EFG), (ACD) và (BCD).

VÍ DỤ 2 :

Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng không đồng phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng này đồng quy tại một điểm.

Giải



Cho d_1, d_2 và d_3 không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một.

Theo giả thiết, d_1 và d_2 cắt nhau tại O nên xác định một mặt phẳng (α). Ta nói d_3 phải qua O vì nếu d_3 cắt d_1 tại A và d_2 tại B khác O thì $d_3 \subset (\alpha)$, điều này trái giả thiết.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABCD. Một mặt phẳng (α) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Chứng minh ba đường thẳng A'C', B'D' và SO đồng quy.
2. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' không cùng nằm trong một mặt phẳng. Giả sử BC cắt B'C', AC cắt A'C' và AB cắt A'B'. Chứng minh ba đường thẳng AA', BB', CC' thường đồng quy tại một điểm.

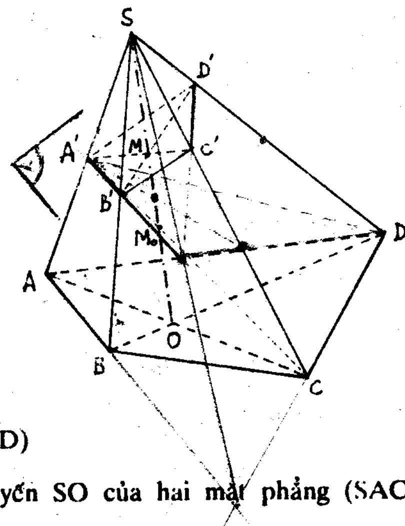
Vấn đề 6 : Tập hợp điểm là giao tuyến (hay một phần của giao tuyến) của hai mặt phẳng

Ta chứng minh điểm đó thuộc hai mặt phẳng cố định.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp SABCD. Một mặt phẳng (α) lưu động qua trung điểm A' và B' của SA, SB và cắt SC, SD lần lượt tại C' và D'. Tìm tập hợp giao điểm M của A'C' và B'D'. (Giả sử (A'B'C) cắt SO).

Giải



* Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\left.\begin{array}{l} A' \in SA \\ C' \in SC \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ A'C' $\subset$ (SAC)

Mà M $\in$ A'C'

$\Rightarrow$ M $\in$ (SAC)

Ta cũng có :

$\left.\begin{array}{l} B' \in SB \\ D' \in SD \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ B'D' $\subset$ (SBD)

và M $\in$ B'D' $\Rightarrow$ M $\in$ (SBD)

Do đó : M thuộc giao tuyến SO của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Khi C' $\equiv$ S thì M $\equiv$ S và khi C' $\equiv$ C thì M $\equiv$ M_0 là giao điểm của SO và A'C.

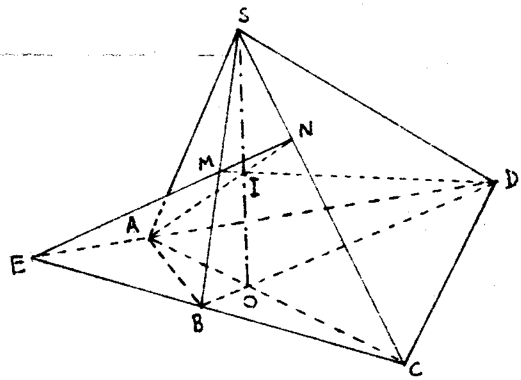
* Đảo lại, lấy điểm M $\in$ SM_0, trong mặt phẳng (SAC) đường thẳng A'M cắt SC tại C'. Trong mặt phẳng (SBD) đường thẳng B'M cắt SD tại D'. Hai đường thẳng A'C' và B'D' đồng quy nên xác định một mặt phẳng (α).

* Vậy : Tập hợp các điểm M là đoạn SM_0 trên giao tuyến của (SAC) và (SBD)

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABCD trong đó AD và BC không song song. Gọi O là giao điểm của AC và BD, E là giao điểm của AD và BC. Điểm M lưu động trên SB, EM cắt SC tại N. Tìm tập hợp giao điểm I của AN và DM.

Giải



– Ta có $\left.\begin{array}{l} I \in AN \\ AN \subset (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SAC)$

$\left.\begin{array}{l} I \in DM \\ DM \subset (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SBD)$

Vậy I ∈ SO, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

– Khi M ≡ S thì I ≡ S

M ≡ B thì I ≡ O

– Vậy I chạy trên đoạn SO khi M chạy trên đoạn SB.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD, H và K lần lượt là trung điểm của SA và SB. Điểm M lưu động trên đoạn SC.

   a) Dựng giao điểm N của SD với mặt phẳng (MHK).

   b) Tìm tập hợp giao điểm I của HN và KM

2. Cho hình chóp SABCD trong đó AB và CD không song song. Mặt phẳng (α) lưu động qua BC cắt SA tại M và SD tại N. Tìm tập hợp giao điểm I của BM và CN.

Vấn đề 7 : Dựng hình trong không gian

> Ta dùng các phép dựng cơ bản sau đây :
> * *Phép dựng 1* : lấy 1 điểm trên một hình đã dựng được.
> * *Phép dựng 2* : dựng mặt phẳng bởi các yếu tố xác định nó.
> * *Phép dựng 3* : dựng đường thẳng bằng cách dựng giao tuyến của hai mặt phẳng.
> * *Phép dựng 4* : dựng các đối tượng trong hình học phẳng.

VÍ DỤ 1 :

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 và điểm A không thuộc hai đường thẳng này. Dựng đường thẳng d qua A cắt d_1 và d_2.

Giải

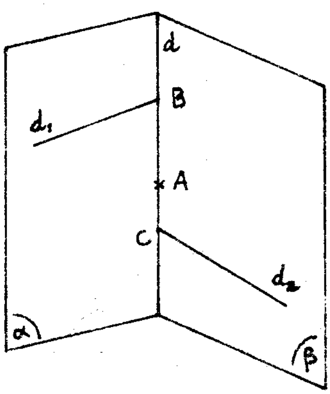
a) *Phân tích*

Giả sử dựng được đường thẳng d qua A và cắt d_1 tại B, cắt d_2 tại C.

Điểm A và đường thẳng d_1 xác định một mặt phẳng α và $d \subset \alpha$.

Điểm B và đường thẳng d_2 xác định mặt phẳng β và $d \subset \beta$.

Vậy d là giao tuyến của α và β.



b) *Cách dựng*

Dựng mặt phẳng α xác định bởi điểm A và đường thẳng d_1 (phép dựng 2).

Dựng mặt phẳng β xác định bởi điểm A và đường thẳng d_2 (phép dựng 2).

Dựng giao tuyến d của α và β (phép dựng 3).

c) *Chứng minh*

A là điểm chung của α và β nên $A \in d$.

Mặt khác d và d_1 cùng nằm trong α nên thường cắt nhau ; d và d_2 cùng nằm trong β nên thường cắt nhau.

d) *Biện luận*

Hai mặt phẳng α và β phân biệt vì d_1 và d_2 chéo nhau.

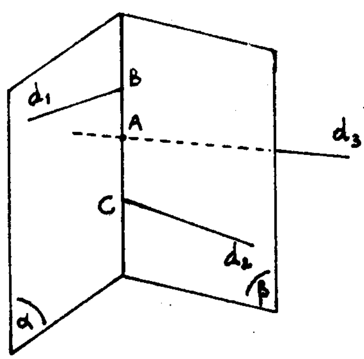
Nếu d không song song với d_1 hay d_2 thì bài toán có một nghiệm hình.

Nếu d song song với d_1 hay song song với d_2 thì bài toán vô nghiệm.

VÍ DỤ 2 :

Cho 3 đường thẳng d_1 và d_2 và d_3 chéo nhau từng đôi một. Chứng tỏ có vô số đường thẳng cắt cả ba đường thẳng này.

Giải



Lấy điểm A trên d_3 (phép dựng 1). Theo ví dụ 1 ta dựng được một đường thẳng d qua A cắt d_1 và d_2.

Mà trên d_3 có thể lấy vô số điểm A nên có vô số đường thẳng d cắt d_1, d_2 và d_3.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho mặt phẳng α, điểm $A \in \alpha$ và đường thẳng a không nằm trong α. Dựng đường thẳng d qua A, nằm trong α và cắt a.

2. Dựng đường thẳng d qua điểm A và vuông góc với đường thẳng a cho trước.

C. TOÁN TỔNG HỢP

1. Cho trong mặt phẳng α hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Hai điểm A và B cố định ở ngoài α sao cho đường thẳng AB cắt α. Một mặt phẳng β lưu động qua AB cắt d_1 tại M và cắt d_2 tại N.

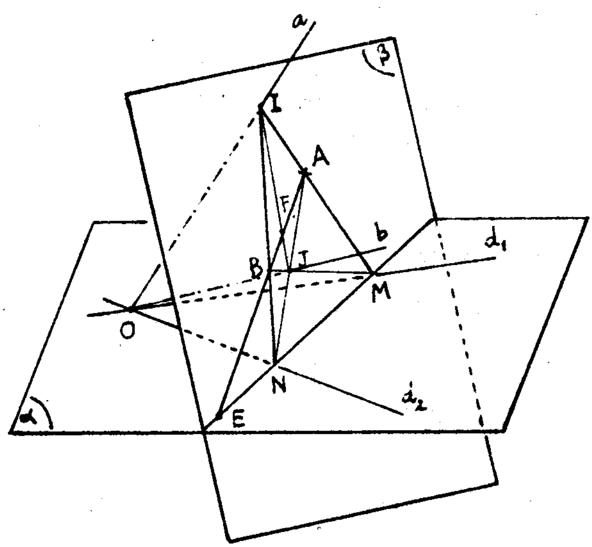
   a) Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

   b) Chứng minh giao điểm I của AM và BN ở trên một đường thẳng cố định.

   c) Chứng minh giao điểm J của AN và BM ở trên một đường thẳng cố định.

   d) Chứng minh đường thẳng IJ đi qua một điểm cố định.

Giải



a) Theo giả thiết, AB cắt α tại E.

Ta có $\quad M, N, E \in \alpha$.

$\quad M, N, E \in \beta \quad$ vì $\quad E \in AB \subset \beta$

Vậy M, N, E thẳng hàng trên giao tuyến của α và β. Suy ra đường thẳng MN luôn qua điểm cố định E.

b) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} I \in AM \\ AM \subset (A,d_1) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (A,d_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} I \in BN \\ BN \subset (B,d_2) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (B,d_2)$$

Vậy I $\in$ a, giao tuyến của hai mặt phẳng cố định (A,d_1) và (B,d_2). Hai mặt phẳng này có điểm O chung nên O $\in$ a.

c) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} J \in AN \\ AN \subset (A,d_2) \end{array}\right\} \Rightarrow J \in (A,d_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} J \in BM \\ BM \subset (B,d_1) \end{array}\right\} \Rightarrow J \in (B,d_1)$$

Vậy J $\in$ b, giao tuyến của hai mặt phẳng cố định (A,d_2) và (B,d_1). Hai mặt phẳng này có điểm O chung nên O $\in$ b.

d) IJ và AB cùng nằm trong mặt phẳng (IMN) nên cắt nhau tại F. Hai đường thẳng a và b đồng quy tại O xác định mặt phẳng (a,b). Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} F \in IJ \\ IJ \subset (a,b) \end{array}\right\} \quad F \in (a,b)$$

Vậy F là giao điểm của AB và mặt phẳng cố định (a,b) nên F cố định, và đường thẳng IJ luôn qua điểm cố định F.

2. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD.

a) Chứng minh AG_1 và BG_2 đồng quy tại một điểm I và tính

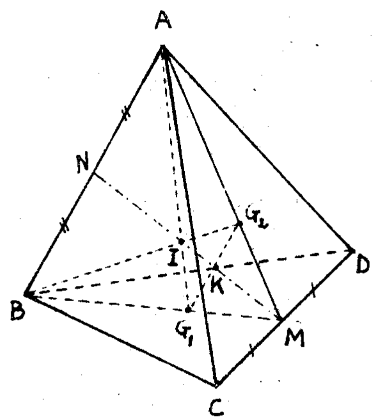
$\frac{\overline{IA}}{\overline{IG_1}}$, $\frac{\overline{IB}}{\overline{IG_2}}$

b) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối AB và CD.

c) Chứng minh các đường thẳng nối từ đỉnh của tứ diện đến trọng tâm của mặt đối diện thì đồng quy.

Giải

a) Gọi M là trung điểm của CD thì BM và AM là đường trung tuyến của các tam giác BCD và ACD nên $G_1 \in BM$ và $G_2 \in AM$.



Do đó hai đường thẳng AG_1 và BG_2 cùng nằm trong tam giác ABM nên cắt nhau tại I.

Theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{\overline{MG_1}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MG_2}}{\overline{MA}} = \frac{1}{3}$ nên G_1G_2 // AB.

Suy ra hai tam giác IG_1G_2 và IAB đồng dạng. Do đó :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IG_1}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IG_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{G_1G_2}}$$

Mặt khác hai tam giác MG_1G_2 và MBA đồng dạng cho :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{G_1G_2}} = -\frac{\overline{MB}}{\overline{MG_1}} = -3$$

Vậy : $$\frac{\overline{IA}}{\overline{IG_1}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IG_2}} = -3.$$

b) Theo tính chất của hình thang ABG_1G_2 thì MI qua trung điểm N của AB và trung điểm K của G_1G_2.

Ta có: $\frac{\overline{IN}}{\overline{IK}} = -3$ và $\frac{\overline{MK}}{\overline{MN}} = \frac{1}{3}$

Suy ra I là trung điểm của MN.

c) Bốn đường thẳng nối từ đỉnh của tứ diện đến trọng tâm của mặt đối cắt nhau từng đôi một (theo câu a) và ba trong bốn đường này không đồng phẳng. Vậy chúng đồng quy tại điểm I (theo ví dụ 2 của vấn đề 5). I là trung điểm của đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện.

BÀI LÀM THÊM

1. Cho hình chóp SABCD trong đó ABCD là hình thang có đáy lớn là AB. Gọi I và J là trung điểm của SA, SB. Điểm M lưu động trên SD.

   a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

   b) Dựng giao điểm K của IM với mặt phẳng (SBC) và giao điểm N của SC với mặt phẳng (IJM).

   c) Chứng tỏ giao điểm H của IN và JM ở trên một đường thẳng cố định.

2. Cho tứ diện SABC. Gọi M, N, P là trung điểm của SA, SB, SC.

   a) Chứng minh 3 mặt phẳng (MBC), (NCA) và (PAB) có chung một điểm I và 3 mặt phẳng (ANP), (BPM), (CMN) có chung một điểm J.

   b) Chứng minh 3 điểm S, I, J thẳng hàng và tính $\frac{SJ}{SI}$.

3. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M trên AB và điểm N trong tam giác BCD.

   a) Dựng giao điểm của AC với mặt phẳng (MDN).

   b) Dựng giao điểm của AN với mặt phẳng (CDM).

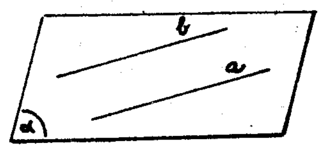
Chương II : **ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG**

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Đường thẳng song song

1. Định nghĩa

$$a \parallel b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset \alpha,\ b \subset \alpha \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$$



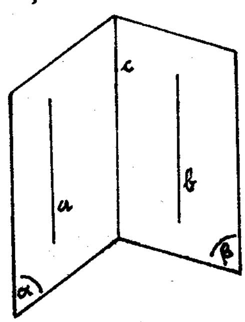
2. Các định lí

a) Từ một điểm ở ngoài đường thẳng ta dựng được một đường thẳng song song với đường thẳng này và chỉ một mà thôi.

b) $\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ \alpha \cap a = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap b = \{B\}$

c) $\left.\begin{array}{l} a \parallel c \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$

d) $\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = c \\ a \subset \alpha \\ b \subset \beta \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel a, b$



3. Góc của hai đường thẳng

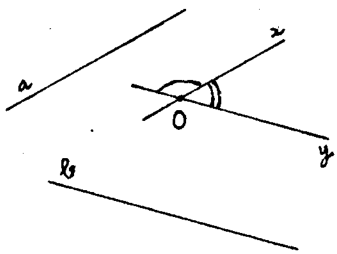
a) Góc có cạnh song song :

* Nếu hai góc có các cạnh song song và cùng chiều thì bằng nhau.

* Nếu hai góc có các cạnh song song và ngược chiều thì bằng nhau.
* Nếu hai góc có hai cạnh song song cùng chiều và hai cạnh song song ngược chiều thì bù nhau.

b) Góc của hai đường thẳng :

* Góc của hai đường thẳng trong không gian là một trong các góc hợp bởi hai đường thẳng lần lượt song song với chúng, phát xuất từ một điểm bất kì.



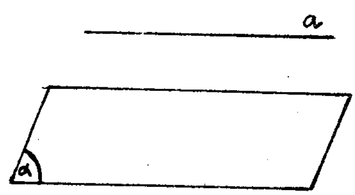
* $a \perp b \Leftrightarrow$ góc $(a,b) = 90^\circ$
* Hệ quả :

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel c \\ a \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp b$$

II. Đường thẳng và mặt phẳng song song

1. Định nghĩa

$a \parallel \alpha \Leftrightarrow a \cap \alpha = \varnothing$



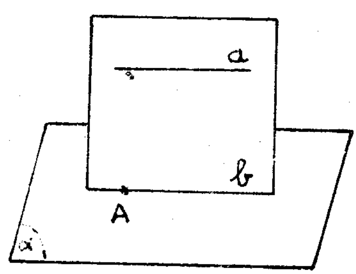
2. Điều kiện cần và đủ

* Cho a không nằm trong α.

Ta có : $a \parallel \alpha \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array}\right.$

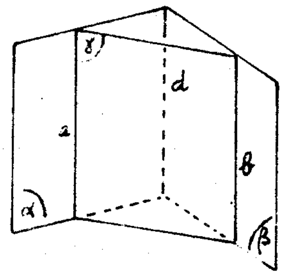
* Các hệ quả :

. Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng nào chứa nó.



. Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng và từ một điểm trong mặt phẳng ta dựng một đường thẳng song song với đường thẳng đó thì đường thẳng này chứa trong mặt phẳng đã cho.

3. Các định lí

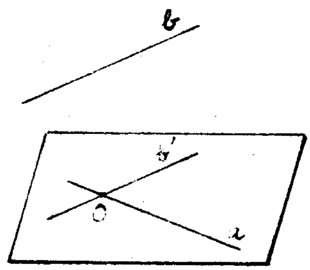


a) $\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = d \,//\, \gamma \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b\end{array}\right\} \Rightarrow d \,//\, a \,//\, b$

b) $\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = b \\ a \,//\, \alpha \\ a \,//\, \beta\end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b$

c) Từ một điểm ta dựng được một mặt phẳng song song với hai đường thẳng chéo nhau và chỉ một mà thôi.

Đặc biệt cho hai đường thẳng chéo nhau, qua đường thẳng này ta dựng được một mặt phẳng song song với đường thẳng kia và chỉ một mà thôi.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : Chứng minh hai đường thẳng song song

- Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng và dùng phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong hình học phẳng.
- Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- Dùng tính chất : hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng này.

VÍ DỤ 1 :

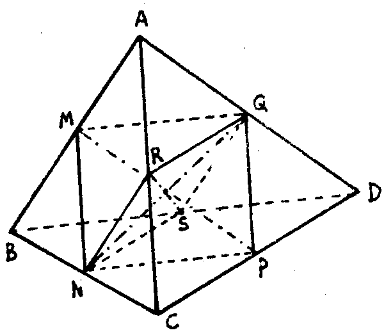
Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC và BD.

a) Chứng minh MNPQ là hình bình hành. Suy ra MP, NQ và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

b) Giả sử tam giác BCD cố định và điểm A lưu động trên mặt phẳng α qua BC sao cho NSQR là hình thoi. Chứng tỏ điểm A lưu động trên một đường tròn cố định.

Giải

a) Trong tam giác ABC ta có :



$$MN \parallel AC \text{ và } MN = \frac{AC}{2}$$

Trong tam giác ACD ta có :

$$PQ \parallel AC \text{ và } PQ = \frac{AC}{2}$$

Do đó $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$.

Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Suy ra hai đường chéo MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Tương tự $RN \parallel QS \parallel AB$ và $RN = QS = \dfrac{AB}{2}$

Do đó tứ giác RNSQ là hình bình hành.

Suy ra hai đường chéo RS và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Vậy : MP, NQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

b) Nếu NSQR là hình thoi thì ta có $RN = RQ$.

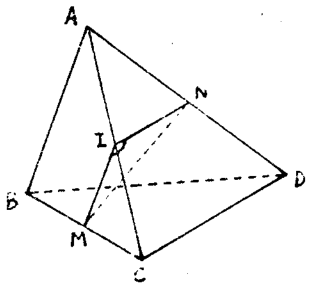
Mà : $AB = 2RN$ và $CD = 2RQ$

Do đó : $BA = CD =$ hằng số.

Vậy A chạy trên đường tròn tâm B bán kính CD ở trong mặt phẳng α.

AD và AC. Cho AB = 2a, CD = $2a\sqrt{2}$ và MN = $a\sqrt{5}$. Tính góc của AB và CD.

Giải



Ta có IM // AB và IM = $\frac{AB}{2} = a$ (vì IM là đường trung bình của tam giác ABC).

Tương tự IN // CD và IN = $\frac{CD}{2} = a\sqrt{2}$.

Vậy góc (AB,CD) = $\widehat{MIN}$.

Áp dụng hệ thức cosin trong tam giác IMN ta có :

$$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2\,IM.IN\cos\widehat{MIN}$$

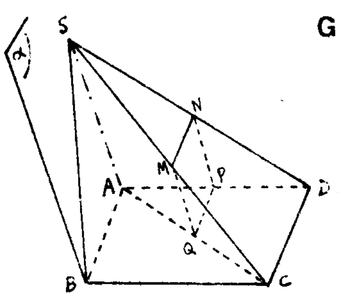
Do đó $\cos\widehat{MIN} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM\,.\,IN} = \frac{a^2 + 2a^2 - 5a^2}{2\,.\,a\,.\,a\sqrt{2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MIN} = 135^o$$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình bình hành ABCD và mặt phẳng cố định α qua AB. Điểm S lưu động trên α. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SC, SD, AD và AC. Giả sử MNPQ là hình chữ nhật. Chứng tỏ S lưu động trên một đường thẳng cố định.

Giải



Ta có MN // PQ (cùng song song với CD).

NP // MQ (cùng song song với SA).

Theo giả thiết MN ⊥ MQ nên SA ⊥ CD ⇒ SA ⊥ AB.

Vậy S chạy trên đường thẳng vuông góc với AB tại A trong mặt phẳng α.

VÍ DỤ 3 :

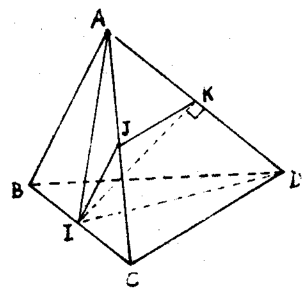
Cho tứ diện ABCD có các cạnh đều bằng a. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CA và AD. Tính IK. Suy ra các cặp cạnh đối của tứ diện vuông góc nhau.

Giải

* Ta có : $IA = JD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của các tam giác đều ABC và DBC cạnh a).

Do đó : tam giác IAD cân, suy ra trung tuyến IK cũng là đường cao.

Tam giác vuông AIK cho :



$$IK^2 = AI^2 - AK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Ta cũng có : $IJ = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

và $JK = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$

Do đó : $JI^2 + JK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = IK^2$

Vậy tam giác IJK vuông cân tại J.

Mặt khác :

AB // JI và CD // JK nên góc $(AB,CD) = \widehat{IJK} = 90^o$

Vậy AB vuông góc với CD. Tương tự : $BC \perp AD$ và $AC \perp BD$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABCD ; ABCD là hình bình hành và SA = SB, SC = SD. Chứng minh rằng : góc (SA,BC) = góc (SB,AD).

2. Cho tứ diện ABCD với AB vuông góc với CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD và AD. Chứng tỏ :

$$MP = NQ.$$

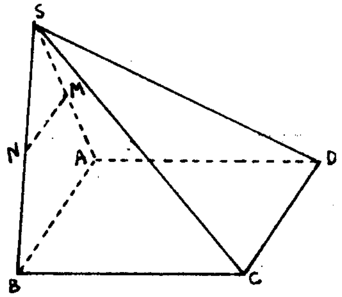
Vấn đề 3 : Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Ta chứng minh đường thẳng đó song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng.

VÍ DỤ 1 :

Cho điểm S ở ngoài mặt phẳng hình bình hành ABCD. Gọi M và N là trung điểm của SA và SB. Chứng tỏ MN song song với mặt phẳng (SCD).

Giải



Ta có MN // AB (đường trung bình của ΔSAB).

Mà : CD // AB , nên
MN // CD ⊂ (SCD)

Vậy : MN // (SCD).

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ diện SABC. Gọi M và N là trung điểm của AB và SB. Chứng tỏ SA song song với mặt phẳng CMN. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (CMN) với mặt phẳng (SAC).

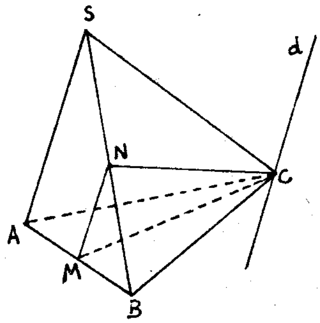
Giải

Ta có : SA // MN (đường trung bình của ΔSAB).

Mà : MN $\subset$ (CMN)

nên : SA // (CMN).

Hai mặt phẳng (CMN) và (SAC) có điểm C chung và lần lượt chứa MN // SA nên giao tuyến là đường thẳng d qua C và song song với SA.



BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng tỏ G_1G_2 song song với mặt phẳng (CAB).

Vấn đề 4 : Dựng thiết diện song song với một đường thẳng

Ta có thể dùng các tính chất :

* Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với giao tuyến của mặt phẳng này và một mặt phẳng nào đó chứa nó.
* Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung và lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng này.

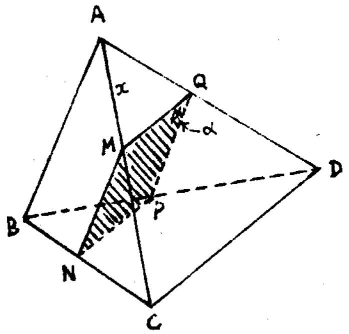
VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện ABCD. Từ điểm M trên AC ta dựng một mặt phẳng α song song với AB và CD. Mặt này lần lượt cắt BC, BD, AD, tại N, P và Q.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì ?

b) Giả sử AB $\perp$ CD thì MNPQ là hình gì ? Tính diện tích của MNPQ biết AM = x, AB = AC = CD = a. Tính x để diện tích này lớn nhất.

Giải



a) Mặt phẳng α song song với AB nên α cắt hai mặt chứa AB là (ABC) và (ABD) theo hai giao tuyến

$$MN \parallel PQ \parallel AB.$$

Tương tự : $\alpha \parallel CD \Rightarrow \alpha$ cắt (ACD) và (BCD) theo $MQ \parallel NP \parallel CD$.

Vậy MNPQ là hình bình hành.

b) Nếu $AB \perp CD$ thì $MN \perp MQ$. Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

$$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow MN = CM = a - x$$

(vì AB = AC)

$$MQ \parallel CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow MQ = AM = x$$

(vì CD = AC)

Vậy : $S_{MNPQ} = MN.MQ = x(a - x)$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$x(a - x) \leq \left(\frac{x + a - x}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

Vậy : $S_{max} = \dfrac{a^2}{4}$ và dấu = xảy ra khi $x = a - x$

hay $x = \dfrac{a}{2}$.

VÍ DỤ 2 :

Cho điểm S ở ngoài mặt phẳng hình bình hành ABCD. Gọi M và N là trung điểm của AD và BC. Mặt phẳng α qua MN và song song với SD cắt hình chóp SABCD theo hình gì ?

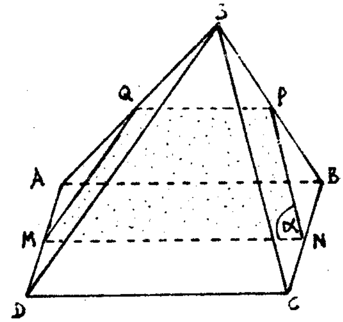
Giải

Mặt phẳng α // SD nên α cắt (SAD) theo MQ // SD.

Hai mặt phẳng α và (SAB) có điểm Q chung và lần lượt chứa MN và AB song song nên giao tuyến của chúng là

PQ // AB // MN.

Thiết diện MNPQ là hình thang.



VÍ DỤ 3 :

Cho điểm S ở ngoài mặt phẳng hình thoi ABCD cạnh a sao cho tam giác SAD là tam giác đều. Từ điểm M trên đoạn AB ta dựng mặt phẳng α song song với SA và BC. Mặt phẳng α lần lượt cắt CD, SC, SB tại N, P, Q.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì ?

b) Tính diện tích của MNPQ theo a và x = AM.

c) Tìm tập hợp giao điểm I của MQ và NP khi M di chuyển từ A đến B.

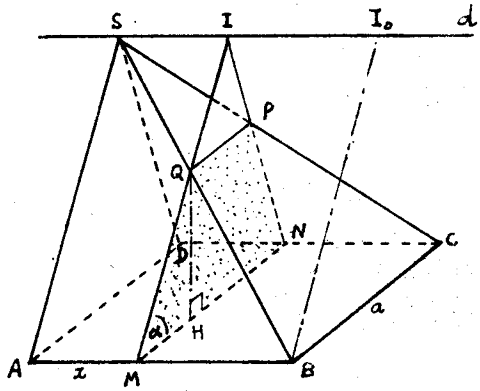
Giải

a) Mặt phẳng α qua M và song song với SA nên cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến MQ // SA.

Mặt phẳng α song song với BC nên cắt hai mặt phẳng chứa BC là (ABCD) và (SBC) theo hai giao tuyến :

MN // PQ // BC

Hơn nữa ta có : $\dfrac{CN}{CD} = \dfrac{BM}{BA}$ (vì MN // BC // AD)



$$\frac{CP}{CS} = \frac{BQ}{BS} \qquad \text{(vì PQ // BC)}$$

mà : $$\frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} \qquad \text{(vì MQ // SA)}$$

Do đó : $$\frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} \Rightarrow NP \parallel SD.$$

Vậy : $\widehat{NMQ} = \widehat{DAS} = 60^o$

$\widehat{PNM} = \widehat{SDA} = 60^o$

Suy ra tứ giác MNPQ là hình thang cân.

b) Ta có : MN = BC = a

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{SQ}{SB} \\ \dfrac{SQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow PQ = AM = x$$

Kẻ đường cao QH ⊥ MN ta có :

$$MH = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{a - x}{2} \qquad \text{(hình thang cân)}$$

Tam giác vuông MQH có $\widehat{M} = 60^o$ nên :

$$QH = MH.tg60^o = \frac{(a - x)\sqrt{3}}{2}$$

Vậy : dt MNPQ $= \frac{1}{2}(MN + PQ).QH$

$$= \frac{1}{2}(a + x)\frac{(a - x)\sqrt{3}}{2} = \frac{(a^2 - x^2)\sqrt{3}}{4}$$

c) Ta có : $\left.\begin{array}{l} I \in MQ \\ MQ \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SAB)$

$\left.\begin{array}{l} I \in NP \\ NP \subset (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SCD)$

Vậy : $I \in d = (SAB) \cap (SCD)$

Mà : AB // CD , nên d qua S và // AB và CD.

Khi $M \equiv A$ thì $I \equiv S$

$M \equiv B$ thì $I \equiv I_o$ với BI_o // SA.

Suy ra tập hợp các điểm I là đoạn SI_o của giao tuyến d. (Phần đảo độc giả tự chứng minh).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của CA và CB. Điểm M lưu động trên đoạn BD. Mặt phẳng (IJM) cắt AD tại N.

a) Chứng minh IJMN thông thường là hình thang. Định vị trí của điểm M để IJMN là hình bình hành.

b) Tìm tập hợp giao điểm K của IM và JN khi M di động từ B đến D.

c) Giả sử các cạnh của tứ diện đều bằng a và đặt BM = x ($0 \leq x \leq a$). Tính diện tích của IJMN theo a và x.

2. Cho tứ giác ABCD trong đó AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F. Điểm S ở ngoài mặt phẳng của tứ giác. Một mặt phẳng α qua điểm M trên đoạn SA lần lượt cắt SB, SC, SD tại N, P, Q.

a) Chứng minh rằng nếu α song song với SE hay SF thì MNPQ là hình thang.

b) Nếu α song song với SE và SF thì MNPQ là hình gì ?

C. TOÁN TỔNG HỢP

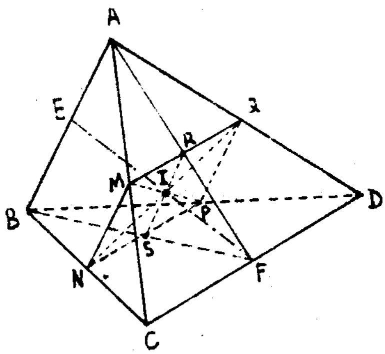
1. Cho tứ diện ABCD. Từ điểm M trên cạnh AC ta dựng một mặt phẳng α song song với AB và CD, mặt phẳng này lần lượt cắt BC, BD và AD tại N, P, Q. cho AB = a, CD = b, AC = c và MN = x.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính chu vi của nó.

b) Khi M lưu động trên AC, tìm hệ thức giữa a và b sao cho chu vi MNPQ không đổi.

c) Tìm tập hợp giao điểm I của MP và NQ khi M di chuyển từ A đến C.

Giải



a) α // AB ⇒ α cắt (ABC) và (ABD) theo 2 giao tuyến MN // PQ // AB.

α // CD ⇒ α cắt (ACD) và (BCD) theo 2 giao tuyến MQ // NP // CD.

Vậy MNPQ là hình bình hành.

$$MQ \parallel CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC}$$

Mà : $$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{CA - CM}{CA} = \frac{a - x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{a - x}{a}$$

Do đó : $$\frac{MQ}{CD} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow MQ = \frac{b(a - x)}{a}$$

Vậy : chu vi MNPQ $= 2(MN + MQ) = 2\left[x + \dfrac{b(a-x)}{a}\right]$

$$= \frac{2[(a-b)x + ab]}{a}$$

b) Chu vi MNPQ không đổi khi $a - b = 0$ hay $a = b$.

c) Gọi E và F là trung điểm của AB và CD.

MQ // CD nên AF cắt MQ tại trung điểm R của MQ.

NP // CD nên BF cắt NP tại trung điểm S của NP.

Do đó : RS // MN // AB và I là trung điểm của RS , nên I chạy trên đường trung tuyến FE của tam giác ABF.

Đảo lại, lấy điểm I trên FE, dựng đường song song với AB cắt AF và BF tại R và S. Từ R và S ta dựng đường song song với CD ta được mặt phẳng α.

Vậy : Tập hợp điểm I là đoạn EF nối trung điểm hai cạnh AB,CD.

2. Cho tứ diện ABCD và điểm M ở trong tam giác BCD.

a) Dựng đường thẳng qua M song song với hai mặt phẳng (ABC) và (ABD). Đường thẳng này cắt mặt phẳng (ACD) tại B'. Chứng minh AB', BM và CD đồng quy tại một điểm.

b) Chứng minh $\dfrac{MB'}{BA} = \dfrac{dt\,MCD}{dt\,BCD}$.

c) Tương tự đường thẳng song song với hai mặt phẳng (ACB) và (ACD) kẻ từ M cắt (ABD) tại C' và đường thẳng song song với hai mặt phẳng (ADC) và (ADB) kẻ từ M cắt (ABC) tại D'. Chứng minh rằng $\dfrac{MB'}{BA} + \dfrac{MC'}{CA} + \dfrac{MD'}{DA} = 1$.

Giải

a) Đường thẳng MB' qua M và song song với hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) nên song song với giao tuyến AB của hai mặt phẳng này.

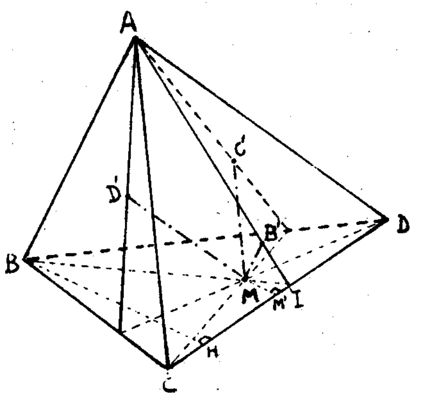
AB và MB' song song xác định một mặt phẳng và AB', BM cắt nhau tại I.

Ta có : $I \in AB' \Rightarrow I \in (ACD)$

$I \in BM \Rightarrow I \in (BCD)$

Vậy : $I \in CD = (ACD) \cap (BCD)$. Nói cách khác, ba đường AB', BM và CD đồng quy tại I.

b) $MB' \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{MB'}{AB} = \dfrac{IM}{IB}$



Kẻ $MM' \perp CD$ và $BH \perp CD$ ta có :

$MM' \,//\, BH \Rightarrow$

$$\frac{IM}{IB} = \frac{MM'}{BH}$$

Mặt khác :

$$\frac{dt\,MCD}{dt\,BCD} = \frac{\frac{1}{2}CD\,.\,MM'}{\frac{1}{2}CD\,.\,BH} = \frac{MM'}{BH}$$

Vậy : $\dfrac{MB'}{BA} = \dfrac{dt\,MCD}{dt\,BCD}$.

c) Tương tự ta có : $\dfrac{MC'}{CA} = \dfrac{dt\,MBD}{dt\,BCD}$ và $\dfrac{MD'}{DA} = \dfrac{dt\,MBC}{dt\,BCD}$

Vậy : $$\frac{MB'}{BA} + \frac{MC'}{CA} + \frac{MD'}{DA} = \frac{dt\,MCD + dt\,MBD + dt\,MBC}{dt\,BCD} = 1$$

3. Cho mặt phẳng α và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt α tại A và B. Đường thẳng d lưu động song song với α cắt d_1 tại M và d_2 tại N. Đường thẳng d_3 qua N và song song với d_1 cắt α tại N'.

a) Tứ giác AMNN' là hình gì ?

b) Chứng minh đường thẳng NN' ở trong một mặt phẳng cố định. Tìm tập hợp các điểm N'.

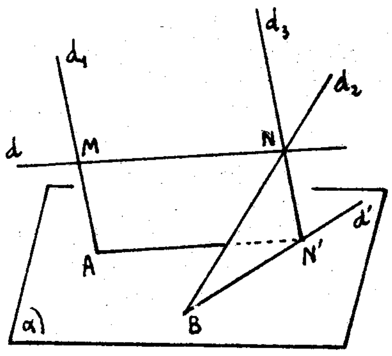
c) Xác định vị trí của d sao cho độ dài MN nhỏ nhất.

Giải

a) Ta có d // α (giả thiết) nên mặt phẳng (d_1,d_3) cắt α theo giao tuyến AN' // MN.

Ta có : AM // NN' (giả thiết).

Vậy : AMNN' là hình bình hành.



b) * Đường thẳng NN' tựa trên d_2 cố định và song song với d_1 cố định nên NN' nằm trong mặt phẳng cố định qua d_2 và song song với d_1.

* . Ta có : N' chạy trên giao tuyến d' của hai mặt phẳng α và (d_2,d_3).

. Đảo lại, lấy N' $\in$ d' và kẻ N'N // d_1 và NM // AN' thì MN // α.

. Vậy : Tập hợp các điểm N' là đường d'.

c) Ta có MN = AN'.

A cố định và N' chạy trên d' nên AN' ngắn nhất khi AN' $\perp$ d'.

Dựng AH $\perp$ d', HN // d_1 và NM // AH thì MN có độ dài ngắn nhất.

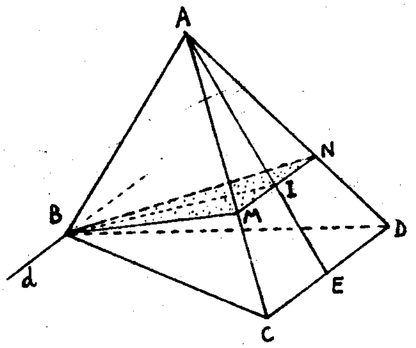
4. Cho tứ diện ABCD. Gọi AE là trung tuyến của tam giác ACD và I là một điểm trên đoạn AE. Một mặt phẳng α qua BI và song song với CD, cắt AC tại M và AD tại N.

a) Chứng minh MN // CD.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và (BCD).

c) Chứng minh giao tuyến này cố định khi I di chuyển trên AE.

Giải



a) Mặt phẳng α và mặt phẳng ACD có I chung và α // CD nên α cắt (ACD) theo MN qua I và // CD.

b) Hai mặt phẳng (BMN) và (BCD) có B chung và lần lượt chứa MN và CD song song nên giao tuyến của chúng là d qua B và // CD.

c) d qua B cố định và // CD cố định nên d cố định.

BÀI LÀM THÊM

1. Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 cắt mặt phẳng α tại A và B. Dựng đoạn thẳng MN song song với α cắt d_1 tại M và d_2 tại N sao cho MN = l, độ dài cho trước.

   Hướng dẫn : Chiếu MN xuống α theo phương d_1

2. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax và By. Điểm M di động trên Ax, điểm N di động trên By.

   a) Dựng mặt phẳng α qua By và song song với Ax.

   b) Kẻ MM' // AB và MM' cắt α tại M'. Chứng tỏ khi M di động trên Ax thì M' di động trên nửa đường thẳng cố định.

   c) Giả sử AM = BN. Chứng tỏ NM' song song với mặt phẳng cố định.

   d) Lấy điểm I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các điểm I.

3. Cho hình vuông ABCD cạnh a và điểm S ở ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho tam giác SAB đều. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SA, SB và điểm M trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a) Chứng minh HK // MN.

b) Tìm tập hợp giao điểm I của HM và KN khi M di động từ A đến D.

c) Cho $\widehat{SAD} = \widehat{SBC} = 60^\circ$ và AM = x ($0 \le x \le a$). Tứ giác HKMN là hình gì ? Tính diện tích hình này theo a và x. Tính x để diện tích nhỏ nhất.

4. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 trong mặt phẳng α. Trên đường thẳng d cắt α tại O ta lấy hai điểm A và B khác O. Một mặt phẳng β lưu động qua d cắt d_1 tại M và d_2 tại N.

a) Chứng tỏ MN qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm I của AM và BN và giao điểm J của AN và BM.

c) Chứng tỏ đường thẳng IJ qua một điểm cố định.

d) Dựng mặt phẳng β để MN = l, độ dài cho sẵn.

Hướng dẫn :

b) Xét mặt phẳng β_o cố định qua d cắt d_1, d_2 tại M_o, N_o. AM_o cắt BN_o tại I_o. I nằm trên đường thẳng qua I_o và song song với d_1, d_2.

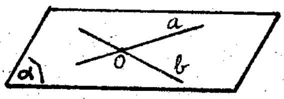
c) Giao điểm của IJ và d.

d) Ta chỉ cần dựng đường thẳng qua O cắt d_1 , d_2 tại M , N sao cho MN = l.

Chương III : **MẶT PHẲNG SONG SONG**

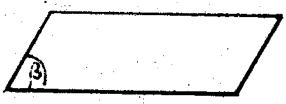
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Định nghĩa



$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$

II. Điều kiện cần và đủ



$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset \alpha \\ a \text{ cắt } b \\ a \parallel \beta \text{ và } b \parallel \beta \end{cases}$$

III. Dựng mặt phẳng song song với mặt phẳng cho sẵn

1. Định lí

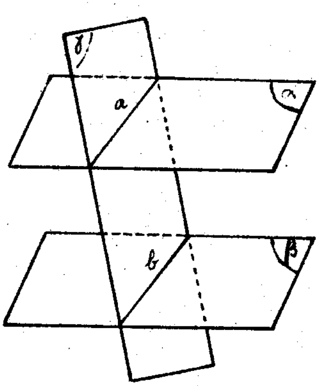
Từ một điểm ngoài mặt phẳng ta dựng được một mặt phẳng song song với mặt phẳng cho sẵn và chỉ một mà thôi.

2. Hệ quả

a) $\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \gamma \\ \beta \parallel \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

b) $\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \beta \cap \gamma = b$ và $a \parallel b$.



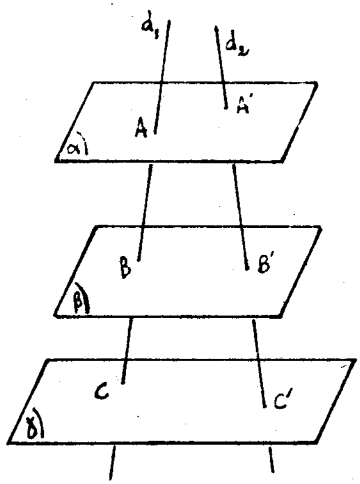
c) Tập hợp các đường thẳng qua một điểm O và song song với mặt phẳng α là mặt phẳng β qua O và song song với α.

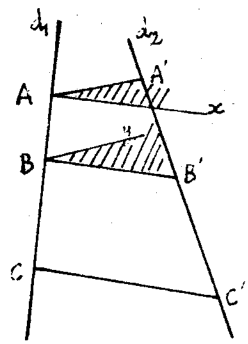
Suy ra : Nếu hai mặt phẳng song song thì đường thẳng nào cắt mặt phẳng thứ nhất cũng cắt mặt phẳng thứ hai.

5. Định lí Talet trong không gian

1. *Định lí mở đầu* : Những đoạn song song kèm giữa hai mặt phẳng song song thì bằng nhau.

2. *Định lí thuận* : Những mặt phẳng song song định trên hai cát tuyến những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.





3. *Định lí đảo* : Nếu ba đường thẳng định trên hai cát tuyến những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì chúng cùng song song với một mặt phẳng (hay đường thẳng này song song với một mặt phẳng song song với hai đường thẳng kia).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

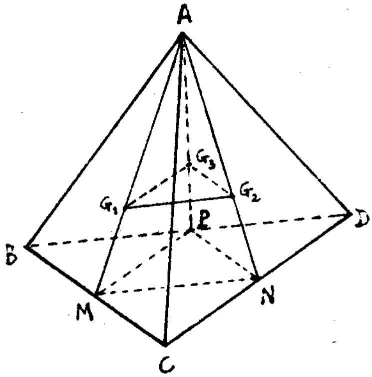
Vấn đề 1 : **Chứng minh hai mặt phẳng song song**

Ta chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng đồng quy song song với hai đường thẳng đồng quy trong mặt phẳng kia.

VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, và ABD. Chứng minh hai mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ và (BCD) song song.

Giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và BD.

Theo tính chất trọng tâm ta có:

$$\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow G_1G_2 \,//\, MN$$

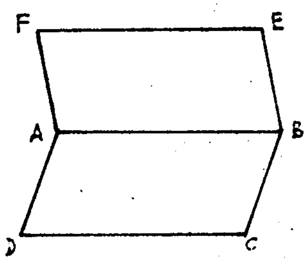
và $$\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_3}{AP} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow G_1G_3 \,//\, MP$$

Vậy : $(G_1G_2G_3) \,//\, (BCD)$.

VÍ DỤ 2 :

Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh (ADF) // (BCE).



Giải

Ta có : AD // BC

(cạnh đối của hình bình hành)

và AF // BE (tương tự)

Vậy : (ADF) // (BCE).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho 3 nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz và không đồng phẳng. Trên Ax, By, Cz ta lần lượt lấy các điểm

A', B', C' sao cho AA' = BB' = CC'.
Chứng minh (ABC) // (A'B'C').

2. Cho hình bình hành ABCD. Từ A và C kẻ Ax và Cy song song cùng chiều và không nằm trong mặt phẳng ABCD. Chứng minh (BAx) // (DCy).

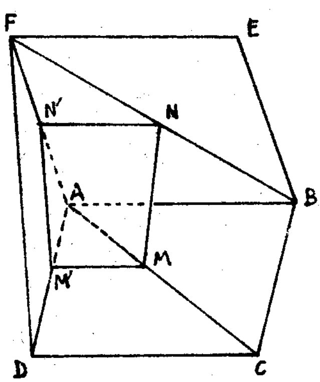
Vấn đề 2 : Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

- Ta chứng minh đường thẳng đó nằm trong một mặt phẳng song song với mặt phẳng này.
- Dùng định lí đảo của định lí Talet.

VÍ DỤ 1 :

Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB kẻ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh MN // mặt phẳng (DEF).

Giải



Hai hình vuông ABCD và ABEF bằng nhau nên AC = BF.

Ta có :

$$MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$$

$$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$$

Mà AM = BN (giả thiết)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$$

Do đó : $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \,//\, DF$

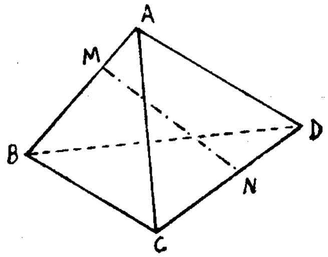
Vậy : $\left.\begin{matrix} MM' \,//\, EF \\ M'N' \,//\, DF \end{matrix}\right\} \Rightarrow (MM'NN') \,//\, (DEF)$

Mà : $MN \subset (MM'NN')$ nên $MN \,//\, (DEF)$.

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ diện ABCD sao cho AB = CD. Gọi M và N là hai điểm lưu động trên AB và CD sao cho AM = DN. Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Giải



Theo giả thiết AB = CD và AM = DN nên ta có :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$$

Vậy theo định lí đảo của định lí Talet thì MN song song với mặt phẳng chứa AD và song song với BC.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF}$. Chứng minh MN // (DEF).

2. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax và By. Điểm M chuyển động trên Ax , điểm N chuyển động trên By sao cho AM = BN. Chứng minh MN song song với mặt phẳng cố định.

Vấn đề 3 : Chúng minh hai đuòng thẳng song song

Ta chứng minh hai đường thẳng này là hai giao tuyến của một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song.

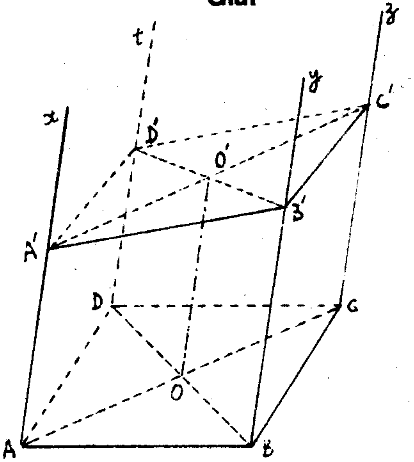
VÍ DỤ 1 :

Từ các đỉnh của hình bình hành ABCD ta kẻ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song và cùng chiều, không nằm trong mặt phẳng ABCD. Một mặt phẳng α cắt bốn nửa đường thẳng này lần lượt tại A', B', C', D'.

a) Tứ giác A'B'C'D'là hình gì ?

b) Gọi O và O' là tâm các hình bình hành ABCD và A'B'C'D'. Chứng minh AA' + CC' = BB' + DD'.

Giải



a) Ta có : $\left.\begin{array}{l} Ax \,//\, Dt \\ AB \,//\, CD \end{array}\right\} \Rightarrow (Ax,By) \,//\, (Cz,Dt).$

Do đó mặt phẳng α cắt hai mặt phẳng song song này theo hai giao tuyến song song : A'B' // C'D'

Tương tự : $\left.\begin{array}{l} Ax \,//\, By \\ AD \,//\, BC \end{array}\right\} \Rightarrow (Ax,Dt) \,//\, (By,Cz)$

Vậy α cắt hai mặt này theo A'D' // B'C'.

Suy ra A'B'C'D' là hình bình hành.

b) Ta có : $OO' = \dfrac{AA' + CC'}{2}$ (đường trung bình của hình thang ACC'A')

và : $OO' = \dfrac{BB' + DD'}{2}$ (đường trung bình của hình thang BDD'B')

Vậy : $AA' + CC' = BB' + DD'$.

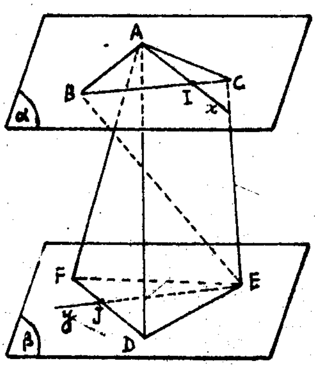
VÍ DỤ 2 :

Cho hai mặt phẳng α và β song song với nhau, tam giác ABC nằm trong α và tam giác DEF nằm trong β.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng α và (ADF), giao tuyến của hai mặt phẳng β và (BCE).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ADF) và (BCE).

Giải



a) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \,//\, \beta \\ (ADF) \cap \beta = DF\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$(ADF) \cap \alpha = Ax \,//\, DF$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \,//\, \beta \\ (BCE) \cap \alpha = BC\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$(BCE) \cap \beta = Ey \,//\, BC$$

b) Giả sử Ax cắt BC tại I và Ey cắt DF tại J, ta có :

$I \in BC \Rightarrow I \in (BCE)$

$I \in Ax \Rightarrow I \in (ADF)$

$J \in DF \Rightarrow J \in (ADF)$

$J \in Ey \Rightarrow J \in (BCE)$

Vậy : IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (BCE) và (ADF).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình bình hành ABCD, kẻ các nửa đường thẳng Bx, Cy, Dz song song và cùng chiều và không nằm trong mặt phẳng ABCD. Một mặt phẳng α qua A lần lượt cắt ba nửa đường thẳng này tại B', C', D'.

   a) Tứ giác AB'C'D' là hình gì ?

   b) Cho BB' = b và CC' = c, tính DD'.

2. Cho hai mặt phẳng α và β song song với nhau. Tam giác ABC vuông tại A nằm trong α. Hai điểm D và E trong mặt phẳng β.

   a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng β và (DAB) và hai mặt phẳng β và (ACE).

   b) Hai giao tuyến này cắt nhau tại A'. Chứng minh tam giác A'DE vuông.

Vấn đề 4 : Tập hợp điểm là mặt phẳng hay tập con của mặt phẳng

* Dùng định lí đảo Talet.

VÍ DỤ 1 :

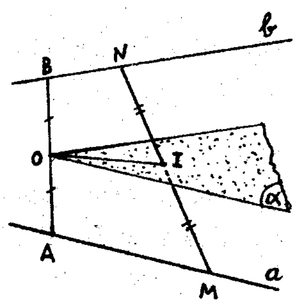
Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Điểm M lưu động trên a và điểm N lưu động trên b. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

Giải

Lấy điểm A cố định trên a và B cố định trên b. Gọi O là trung điểm của AB ta có:

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -1$$

Vậy theo định lí đảo Talet thì OI nằm trong mặt phẳng α qua O song song với a và b. Độc giả tự xét phần đảo.



VÍ DỤ 2 :

Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax và By. Điểm M lưu động trên Ax, điểm N lưu động trên By sao cho AM = BN. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

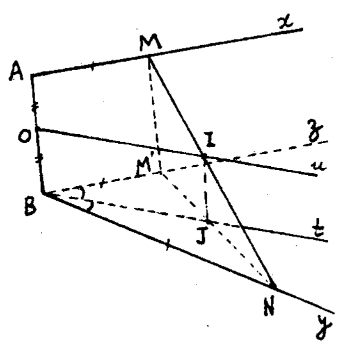
Giải

Theo ví dụ trên thì I thuộc mặt phẳng α qua O và song song với Ax và By.

Mặt khác, kẻ Bz // Ax và MM' // AB cắt Bz tại M', ta có :

$$\left.\begin{aligned} AM &= BN \text{ (gt)} \\ BM' &= AM \end{aligned}\right\} \Rightarrow BN = BM'$$

Do đó tam giác BNM' cân nên trung tuyến BJ cũng là phân giác của $\widehat{yBz}$. Vậy J di động trên phân giác Bt cố định.



Mà : IJ // MM' và

$$IJ = \frac{MM'}{2}$$

nên : IJ // OB và

IJ = OB.

Vậy I thuộc mặt phẳng (ABt).

Suy ra J chạy trên giao tuyến Ou của hai mặt phẳng α và (ABt) và ta có Ou // Bt.

Độc giả tự chứng minh phần đảo.

Chú ý : Có thể dùng phép tịnh tiến $\overrightarrow{BO}$ trong chương 6.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện ABCD. Điểm M di động trên cạnh AB và điểm N di động trên cạnh CD. Chứng tỏ trung điểm I của MN thuộc một mặt phẳng cố định.

2. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax và By. Điểm M di

động trên Ax và điểm N di động trên By sao cho AM = 2BN. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn của đoạn MN.

Hướng dẫn : Kẻ Bz // Ax và MM' // AB cắt Bz tại M'. Ta chứng minh M'N // một đường thẳng cố định.

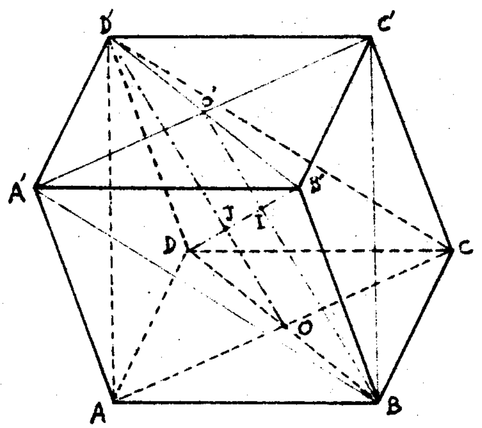
C. TOÁN TỔNG HỢP

1. Từ các đỉnh của hình bình hành ABCD ta kẻ các vectơ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ không nằm trong mặt phẳng ABCD.

   a) Chứng minh rằng (BA'C') // (ACD').

   b) Xác định giao điểm I và J của B'D với các mặt phẳng (BA'C') và (ACD'). Chứng minh B'I = IJ = JD.

Giải



a) Ta có AA' // CC' và AA' = CC' nên tứ giác ACC'A' là hình bình hành.

Do đó : AC // A'C'

Tương tự ABC'D' là hình bình hành nên BC' // AD'

Vậy : (BA'C') // (ACD').

b) * Gọi O và O' là tâm các hình bình hành ABCD và A'B'C'D'.

Trong hình bình hành BDD'B', đường chéo B'D cắt BO' tại I,

Mà : $BO' \subset (BA'C')$ nên $\{ I \} = B'D \cap (BA'C')$.

Tương tự, đường chéo B'D cũng cắt D'O tại J.

Mà : $D'O \subset (D'AC)$ nên $\{ J \} = B'D \cap (D'AC)$

* Mặt khác, ta có OB // O'D' và OB = O'D' nên tứ giác OBO'D' là hình bình hành. Do đó BO' // D'O.

Ta có : O là trung điểm của BD nên J là trung điểm DI, và O' là trung điểm của B'D' nên I là trung điểm B'J.

Vậy : B'I = IJ = JD.

2. Cho điểm S ở ngoài mặt phẳng của hình bình hành ABCD với AB = a, AD = 2a, và tam giác SAB vuông cân đỉnh A. Điểm M di động trên AD với AM = x. Mặt phẳng α qua M song song với (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Tính diện tích của MNPQ theo a và x. Tính x để diện tích này bằng $\frac{3a^2}{8}$.

c) Tìm tập hợp giao điểm I của MQ và NP khi M chạy từ A đến D.

Giải

a) * $\left.\begin{array}{l} \alpha \,//\, SAB \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} (ABCD) \cap \alpha = MN \\ MN \,//\, AB \end{array}$

Tương tự : $\alpha \cap (SAD) = MQ \,//\, SA$.
$\alpha \cap (SBC) = NP \,//\, SB$.

Do đó : $SA \perp AB \Rightarrow MQ \perp MN$

* Mặt khác α chứa MN // CD nên α cắt (SCD) theo PQ // MN // CD.

Vậy : MNPQ là hình thang vuông.

b) * Ta có : MN = AB = a.

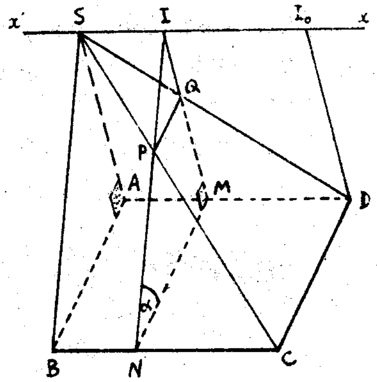
. PQ // CD $\Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD}$

Mà : $\frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{2a}$,

nên : $\frac{PQ}{CD} = \frac{x}{2a} \Rightarrow PQ = \frac{x}{2}$

. MQ // SA $\Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA}$

$\Rightarrow MQ = \frac{(2a - x)a}{2a} = \frac{2a - x}{2}$



. Vậy : Dt (MNPQ) $= \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{2a - x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(4a^2 - x^2).$$

* Dt(MNPQ) $= \frac{3a^2}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8}(4a^2 - x^2) = \frac{3a^2}{8}$

$\Leftrightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a.$

c) . Ta có : $\left.\begin{array}{l} I \in MQ \\ MQ \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SAD)$

$\left.\begin{array}{l} I \in NP \\ NP \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SBC)$

Vậy I thuộc giao tuyến x'Sx của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Mà AD // BC nên x'Sx // AD và BC.

. Khi M ≡ A thì I ≡ S

M ≡ D thì I ≡ I_0 với SI_0 = AD

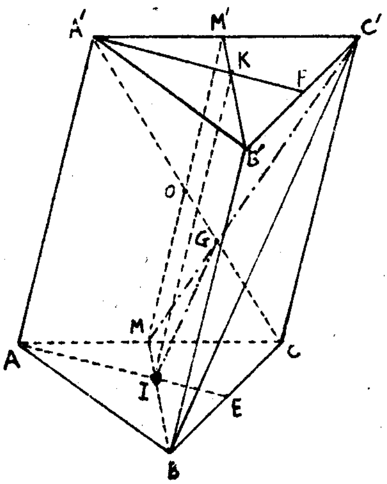
. Độc giả tự chứng minh phần đảo.

♦ 3. Từ các đỉnh của tam giác ABC ta kẻ các đoạn thẳng AA', BB', CC' song song cùng chiều, bằng nhau và không nằm trong mặt phẳng của tam giác. Gọi I, G, K là trọng tâm các tam giác ABC, ACC' và A'B'C'.

a) Chứng minh (IGK) // (BB'C'C).

b) Chứng minh (A'GK) // (AIB').

Giải



a) Gọi M và M' là trung điểm của AC và A'C', ta có :

$I \in BM$, $G \in C'M$,

$K \in B'M'$

Và theo tính chất trọng tâm ta có :

. $\dfrac{MI}{MB} = \dfrac{MG}{MC'} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow IG \,//\, BC'$

. $\dfrac{MI}{MB} = \dfrac{M'K}{M'B'} = \dfrac{1}{3}$ và

$MM' // BB' \Rightarrow IK \,//\, BB'$.

Vậy : (IGK) // (BB'C'C).

b) . Gọi E và F là trung điểm của BC và B'C', O là tâm của hình bình hành ACC'A'.

A, I, E thẳng hàng nên (AIB') là (AEB').

A', G, C thẳng hàng (G ở trên trung tuyến CO của tam giác ACC') nên (A'GK) là (A'CF).

. Ta có : B'E // CF vì EC // B'F và EC = B'F

và : AE // A'F

Vậy : (AIB') // (A'GK).

Những bài tập có ghi dấu ♦ là bài khó, dành cho học sinh khá.

BÀI LÀM THÊM

1. Cho tứ diện ABCD với AB = AC = AD. Chứng minh các phân giác ngoài của các góc BAC, CAD và DAB đồng phẳng.

2. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau. Trên Ax lấy điểm M, trên By lấy điểm N sao cho AM = BN. Gọi α là mặt phẳng chứa By và song song với Ax.

   a) Dựng mặt phẳng α.

   b) Đường thẳng qua M song song với AB cắt α tại P. Chứng minh NP song song với mặt phẳng cố định. Suy ra MN song song với mặt phẳng cố định.

   c) Gọi O, I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, MP, NP, MN. Chứng minh (OIK) // α.
   Tìm tập hợp các điểm I, J, K.

3. Từ các đỉnh của hình bình hành ABCD ta kẻ các đoạn AA', BB', CC', DD' song song cùng chiều bằng nhau và không nằm trong mặt phẳng ABCD. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, C'D' và AA'.

   a) Chứng minh (ACB') // (A'C'D).

   b) Dựng giao điểm E của BD' với mặt phẳng (AMB'). Chứng minh $BE = \frac{1}{4}$ BD'.

   c) Dựng giao điểm F của DB' với (MNP). Chứng minh F là điểm giữa của DB' và là trọng tâm của tam giác MNP.

Chương IV : **ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC**

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Định nghĩa

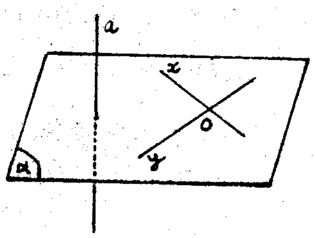
Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng khi nó vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng đó.

$$a \perp \alpha \Leftrightarrow a \perp \text{mọi } d \text{ trong } \alpha$$

2. Định lí cơ bản

Điều kiện ắt có và đủ để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng là đường thẳng ấy vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong mặt phẳng đó.

$$a \perp \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \perp Ox \text{ trong } \alpha \\ a \perp Oy \text{ trong } \alpha \end{cases}$$



Hệ quả :

- $\left.\begin{matrix} a \mathbin{//} a' \\ a \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a' \perp \alpha$

- $\left.\begin{matrix} \alpha \mathbin{//} \beta \\ a \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \beta.$

3. Các định lí khác

Định lí 1 : Từ 1 điểm, ta dựng được một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho sẵn.

Định lí 2 : Từ 1 điểm ta dựng được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho sẵn.

Hệ quả :

* $\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta.$

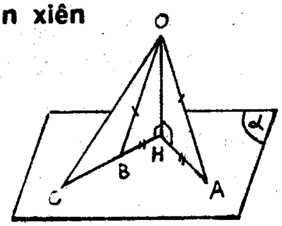
* $\left.\begin{array}{l} d \perp a \\ d \text{ qua } O \end{array}\right\} \Rightarrow$ d trong α qua O và vuông góc a.

* $\left.\begin{array}{l} d \perp a \\ \alpha \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow d \,//\, \alpha.$

* $\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b$

II. Đoạn vuông góc và đoạn xiên

1. So sánh đoạn vuông góc và đoạn xiên

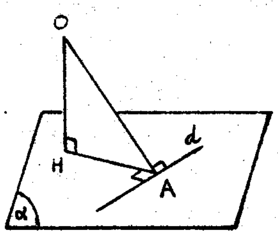


. Đoạn vuông góc OH là đoạn ngắn nhất.

. OA = OB ⇔ HA = HB

. OA < OC ⇔ HA < HC

2. Định lí 3 đường vuông góc



$\begin{cases} \text{OA là đường xiên.} \\ \text{HA là hình chiếu của OA xuống } \alpha. \\ \text{d trong } \alpha. \end{cases}$

Ta có :

$OA \perp d \quad \Leftrightarrow \quad HA \perp d.$

3. Khoảng cách

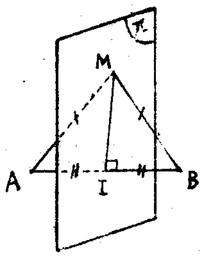
* $\left.\begin{array}{r} OH \perp a \\ H \in a \end{array}\right\} : \quad OH = d(O,a)$

* $\left.\begin{array}{r} OH \perp \alpha \\ H \in \alpha \end{array}\right\} : \quad OH = d(O,\alpha)$

* $\left.\begin{matrix} a \parallel \alpha \\ \forall O \in a \end{matrix}\right\}$: $d(a,\alpha) = d(O,\alpha)$

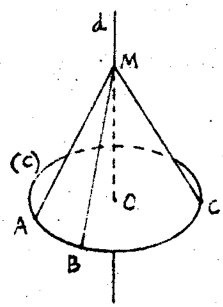
* $\left.\begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ \forall O \in \alpha \end{matrix}\right\}$: $d(\alpha,\beta) = d(O,\beta)$

4. Mặt phẳng trung trực
– Trục của đường tròn



a) Mặt phẳng trung trực (π) của đoạn AB là mặt phẳng vuông góc với AB tại trung điểm I của nó.

$M \in (\pi) \Leftrightarrow MA = MB.$



b) Trục d của đường tròn (C) là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng của (C) tại tâm O của nó.

$M \in d \Leftrightarrow MA = MB = MC$
$(A,B,C \in (C))$

5. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

* Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là mặt cầu qua các đỉnh của hình chóp.
* Tâm của mặt cầu ngoại tiếp là điểm cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp.
* Nếu 1 hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp thì đáy là 1 đa giác nội tiếp được. Đây cũng là điều kiện đủ để hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp.

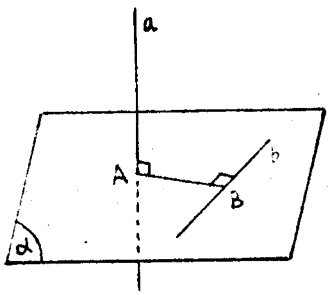
6. Góc của đường thẳng và mặt phẳng

* Góc (a,α) = góc (a,a') ; a' : là hình chiếu của a xuống α.
* $a \perp \alpha$: góc $(a,\alpha) = 90^\circ$.

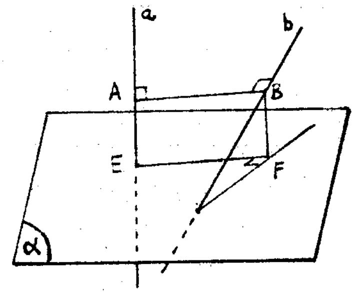
III. Đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau

* AB là đoạn vuông góc chung của a và b $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ $AB \perp a$ và $AB \perp b$; $A \in a$ và $B \in b$.
* $AB \leq MN$, $\forall M \in a$ và $\forall N \in b$.
* *Cách dựng* :

. $a \perp \alpha$, b trong α : AB là đoạn vuông góc chung



. $a \perp \alpha$, b cắt α : AB là đoạn vuông góc chung.
(b' : hình chiếu của b xuống α)



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

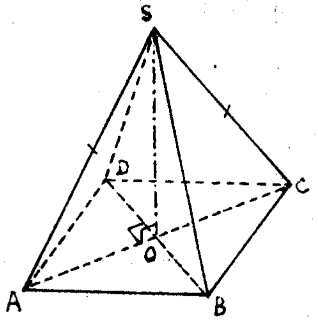
Vấn đề 1 : Chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng

CÁCH 1 :

Ta chỉ cần chứng minh đường thẳng vuông góc với hai đường cắt nhau nằm trong mặt phẳng đó.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là hình thoi và SA = SC. Chứng minh rằng AC vuông góc với mặt phẳng SBD.



Giải

Ta có :

$AC \perp BD$ (1) (đường chéo của hình thoi)

Gọi O là tâm của hình thoi ABCD, ta có :

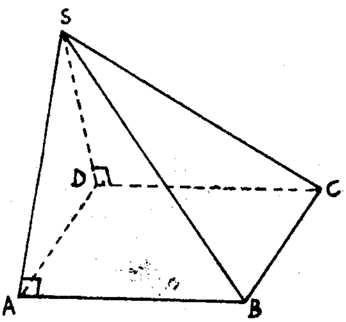
$AC \perp SO$ (2) (tam giác SAC cân nên trung tuyến cũng là đường cao)

(1) và (2) cho :

$AC \perp (SBD)$ (BD và SO cắt nhau và nằm trong (SBD)).

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là hình bình hành và tam giác SAB vuông tại A ; tam giác SCD vuông tại D. Chứng minh rằng AB vuông góc với mặt phẳng SAD.



Giải

Ta có :

$AB \perp SA$ (1)

Ta cũng có :

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp SD \\ CD \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp SD \quad (2)$$

(1) và (2) cho : $AB \perp (SAD)$.

♦ **VÍ DỤ 3 :**

Cho tứ diện ABCD có $HK \perp (DBC)$ (H, K là trực tâm tam giác ABC và DBC). Chứng minh rằng $DA \perp (ABC)$.

Giải

* AH cắt BC tại E. Ta có :

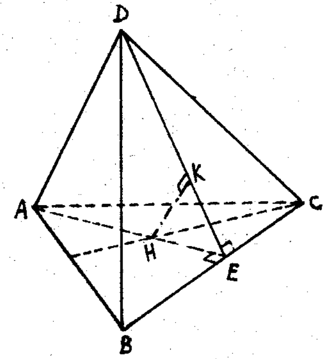
$BC \perp HK$ (vì $HK \perp (DBC)$)

$BC \perp AH$ (vì H là trực tâm)

Vậy : $BC \perp (AHK)$

$\Rightarrow$ $BC \perp EK$

(vì EK nằm trong AHK)



Mà K là trực tâm nên EK chính là đường cao của tam giác DBC, nghĩa là KE qua D.

Do đó : $BC \perp DA$ (1)

(vì DA nằm trong (AHK))

* Vì H là trực tâm tam giác ABC nên :

$$\overline{EH}.\overline{EA} = -\overline{EB}.\overline{EC}.$$

Tương tự, K là trực tâm tam giác DBC nên :

$$\overline{EK}.\overline{ED} = -\overline{EB}.\overline{EC}$$

Do đó : $\overline{EK}.\overline{ED} = \overline{EH}.\overline{EA}$ $\Rightarrow$ ADHK nội tiếp được.

Ta lại có : $\widehat{HKD} = 90^o$ (vì $HK \perp DE$)

nên $\widehat{DAH} = 90^o$ (góc đối của $\widehat{HKD}$)

hay $DA \perp AE$ (2)

(1) và (2) cho : $DA \perp (ABC)$.

Ghi chú :

Ta có thể chứng minh $DB \perp (CHK)$ $\Rightarrow$ $DB \perp CH$

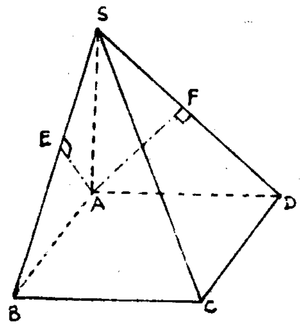
$\Rightarrow$ $CH \perp (ABD)$ $\Rightarrow$ $AD \perp CH$.

VÍ DỤ 4 :

Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. AE, AF là đường cao của các tam giác SAB và SAD. Chứng minh rằng $SC \perp (AEF)$.

Giải

. Ta có : $AE \perp SB$ (1)



Ta cũng có :

BC $\perp$ AB (ABCD là hình chữ nhật)

BC $\perp$ SA (vì SA $\perp$ (ABCD))

Vậy : BC $\perp$ (SAB)

Suy ra : BC $\perp$ AE (2)

(vì AE nằm trong (SAB))

(1) và (2) cho :

AE $\perp$ (SBC) $\Rightarrow$ AE $\perp$ SC

. Chứng minh tương tự : AF $\perp$ SC.

. Vậy : SC $\perp$ (AEF).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp S.ABCD , ABCD là hình bình hành tâm O ; SA = SC và SB = SD. Chứng minh rằng SO $\perp$ (ABCD).

2. Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình chữ nhật và SA = SB. Chứng minh rằng :

   CD $\perp$ (SIJ) (I, J là trung điểm của AB và CD)

3. Cho hình chóp S.ABC ; ABC là tam giác vuông tại A ; SH $\perp$ (ABC) và H thuộc cạnh AC thỏa : SH^2 = HA.HC. Chứng minh rằng : SC $\perp$ (SAB).

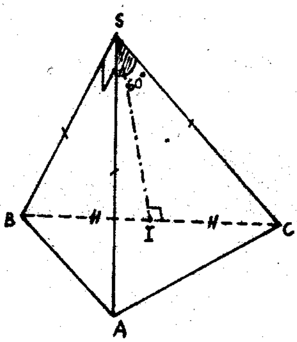
CÁCH 2 :

Muốn chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng, ta có thể chứng minh rằng đường thẳng này là trục của đường tròn qua 3 điểm nằm trên mặt phẳng. Khi đó đường thẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABC có : $\widehat{BSC} = 120^o$; $\widehat{CSA} = 60^o$; $\widehat{ASB} = 90^o$ và SA = SB = SC = a. Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông và SI vuông góc với (ABC) (I là trung điểm của BC).

Giải



* Tam giác SAC đều nên (vì là tam giác cân có 1 góc bằng 60^o):

$$AC = SA = SC = a$$

* Tam giác SAB vuông cân nên :

$$AB = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2}$$

* SI là trung tuyến, cũng là phân giác, đường cao của tam giác cân nên :

$$\widehat{BSI} = 60^o$$

Suy ra, tam giác BSI là nửa tam giác đều nên :

$$BI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2BI = a\sqrt{3}$$

Do đó $BC^2 = 3a^2 = AB^2 + AC^2$

Vậy : tam giác ABC vuông tại A.

* Như thế : $IA = IB = IC$

mà : $SA = SB = SC$

Do đó $I, S \in$ trục d của đường tròn ABC.

Vậy $SI \equiv d$ và $SI \perp (ABC)$.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình vuông ABCD, cạnh a. Vẽ các đoạn AA', CC' cùng vuông góc với (ABCD) và ở về một phía đối với (ABCD) với AA' = CC' = a. Chứng minh rằng : $A'C \perp (BDC')$.

Giải

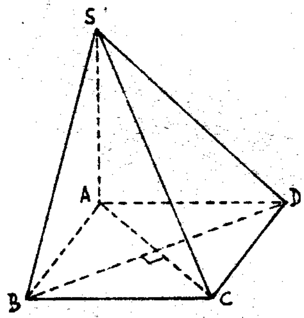
Ta có :

$A'B = a\sqrt{2}$ (cạnh huyền của tam giác vuông cân A'AB)

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình thoi và SA ⊥ (ABCD). Chứng minh rằng BD ⊥ SC.

Giải



Ta có :

BD ⊥ AC (đường chéo hình thoi)

BD ⊥ SA (vì SA ⊥ (ABCD))

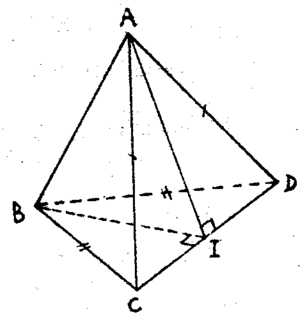
Do đó : BD ⊥ (SAC).

Vậy : BD ⊥ SC.

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ diện ABCD có AC = AD và BC = BD. Chứng minh rằng AB ⊥ CD.

Giải



Gọi I là trung điểm của CD, ta có :

BI ⊥ CD (tam giác BCD cân, trung tuyến cũng là đường cao)

AI ⊥ CD (tương tự)

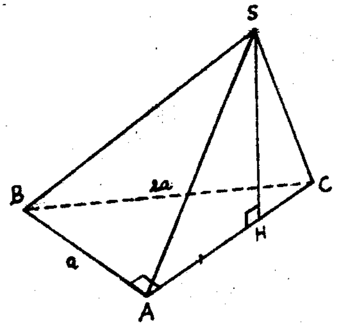
Do đó : CD ⊥ (ABI)

Vậy : CD ⊥ AB.

VÍ DỤ 3 :

Cho tam giác ABC vuông tại A với AB = a , BC = 2a và điểm H trên đoạn AC với HA = 2HC . SH ⊥ (ABC) và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Chứng minh rằng các mặt của của tứ diện SABC đều là tam giác vuông.

Giải



* Tam giác ABC vuông tại A (giả thiết).
* Ta có :

$AB \perp AC$ (giả thiết)

$AB \perp SH$ (vì $SH \perp (ABC)$)

Do đó : $AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp SA$

Vậy tam giác SAB vuông tại A.

* Ta có :

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$$

Do đó : $\quad HA.HC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a^2}{3}$

mà : $\quad SH^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{3}$

nên : $\quad SH^2 = HA.HC$

Vậy tam giác SAC vuông tại S.

* Ta cũng có : $\quad SC \perp SA$ (chứng minh trên)

$SC \perp AB$ (vì $AB \perp (SAC)$)

Do đó : $\quad SC \perp (SAB) \Rightarrow SC \perp SB$.

Vậy tam giác SBC vuông tại S.

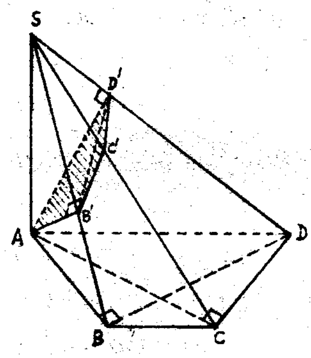
Chú ý : Ta cũng có thể tính các cạnh và suy ra các tam giác SAC, SBC vuông.

VÍ DỤ 4 :

Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là nửa lục giác đều $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A và vuông góc với SD tại D' cắt SB, SC tại B', C'. Chứng minh tứ giác AB'C'D' nội tiếp được.

Giải

Ta đã biết ABCD nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AD nên ta sẽ thử chứng minh AB'C'D' nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AD' , nghĩa là AB' ⊥ B'D' ; AC'⊥ C'D'.



* Ta có :

$$\left.\begin{matrix} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAB).$$

$\Rightarrow$ BD ⊥ AB' ⊂ (SAB) (1)

Ta lại có :

AB' ⊥ SD (2)

(vì SD ⊥ (AB'C'D'))

(1) và (2) cho :

AB' ⊥ (SBD) ⇒ AB' ⊥ B'D'.

Chứng minh tương tự : AC' ⊥ C'D'.

Vậy : AB'C'D' nội tiếp trong đường tròn đường kính AD'.

VÍ DỤ 5 :

Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng :

$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

Giải

Gọi O là trung điểm của CD.

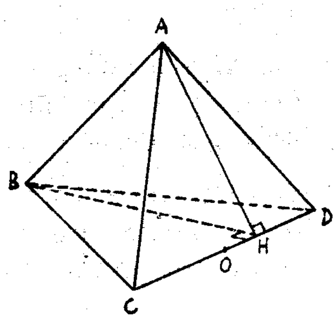
a) Chứng minh : AB ⊥ CD ⇒ $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

Vẽ : AH ⊥ CD (H ∈ CD)

Mà : AB ⊥ CD (gt)

nên : CD ⊥ (ABH)

⇒ CD ⊥ BH.



Trong tam giác ACD, ta có :

$AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{OH}$

(công thức về hiệu số bình phương 2 cạnh của 1 tam giác)

Tương tự, trong tam giác BCD, ta có :

$$BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{OH}$$

Vậy $\quad AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2.$

b) Chứng minh $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 \Rightarrow AB \perp CD.$

Vẽ : $\quad AH \perp CD\ (H \in CD)$

$\quad BH' \perp CD\ (H' \in CD)$

Trong tam giác ACD, ta có : $AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{OH}$

Trong tam giác BCD, ta có : $BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{OH'}$

Mà : $\quad AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

nên : $\quad 2\overline{CD}.\overline{OH} = 2\overline{CD}.\overline{OH'}$

$\Rightarrow \quad \overline{OH} = \overline{OH'}\ \ (H \equiv H')$

Như thế : $\left.\begin{array}{l} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABH)$

Vậy : $\quad CD \perp AB.$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện đều ABCD (tất cả các cạnh bằng nhau). Chứng minh rằng $AB \perp CD$.
2. Cho tứ diện ABCD có : $AB \perp (BCD)$; $\widehat{BCD} = 90^\circ$. BH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác BHD vuông.
3. Cho tứ diện ABCD có : $AB \perp (BCD)$; BCD là tam giác đều ; I là trung điểm của BD và CH là đường cao của tam giác ACD ($H \in AD$). Chứng minh rằng tứ giác ABIH nội tiếp được.
4. Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình chữ nhật. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B',C',D'. Chứng minh tứ giác AB'C'D' nội tiếp được.

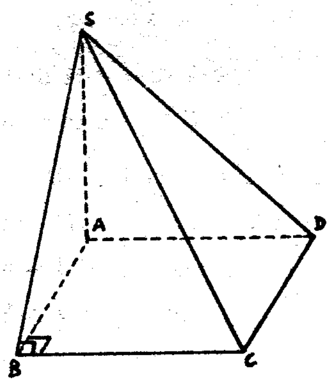
CÁCH 2 :

Muốn chứng minh một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng, ta có thể sử dụng định lí 3 đường vuông góc. Cần chú ý chỉ rõ đường xiên và hình chiếu của nó xuống mặt phẳng.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là hình chữ nhật, SA ⊥ (ABCD). Chứng minh rằng 4 tam giác SAB, SBC, SCD và SDA đều là tam giác vuông.

Giải



* Ta có :

$\left.\begin{array}{l} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{array}\right\}$ (vì SA ⊥ (ABCD))

Vậy, hai tam giác SAB và SAD vuông tại A.

* Ta có :

AB ⊥ BC (BC trong (ABCD)) và AB là hình chiếu của đường xiên SB xuống (ABCD)

nên : SB ⊥ BC (định lí 3 đường vuông góc).

Vậy tam giác SBC vuông tại B.

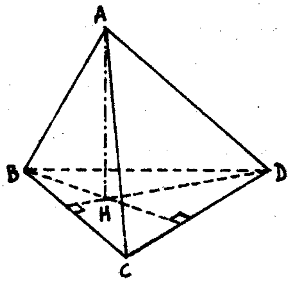
Tương tự, tam giác SCD vuông tại D.

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ CD và AC ⊥ BD. H là hình chiếu (vuông góc) của A xuống (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và AD ⊥ BC.

Giải

* *Chứng minh H là trực tâm tam giác BCD*



Ta có : AH ⊥ (BCD) (vì H là hình chiếu của A xuống (BCD)) nên BH là hình chiếu của AB xuống (BCD) (AB là đường xiên).

Mà AB ⊥ CD (gt)

Vậy : HB ⊥ CD (định lí 3 đường vuông góc)

Do đó : BH là đường cao trong tam giác BCD.

Tương tự, CH là đường cao trong tam giác BCD.

Vậy H là trực tâm tam giác BCD.

* *Chứng minh : AD ⊥ BC*

Ta có : DH ⊥ BC (vì H là trực tâm tam giác BCD)

mà DH là hình chiếu của AD xuống (BCD)

nên AD ⊥ BC (định lí 3 đường vuông góc).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chữ nhật ABCD ; Cx và Dy cùng vuông góc với ABCD. Một mặt phẳng qua AB cắt Cx và Dy tại E và F. Chứng minh rằng ABEF là hình chữ nhật.

2. Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là hình chữ nhật và SH ⊥ (ABCD), H ∈ (ABCD) ; SK và SL là đường cao của các tam giác SAB và SCD (K ∈ AB ; L ∈ CD). Chứng minh rằng H, K, L thẳng hàng.

Vấn đề 3 : Tính khoảng cách từ một điểm O đến một mặt phẳng (α)

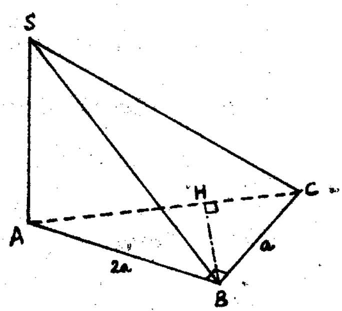
Ta thường phải thực hiện các công việc sau :

+ Xác định đoạn vuông góc OH. ($OH \perp \alpha$; $H \in \alpha$)
  (xem thêm về bài toán này ở chương mặt phẳng vuông góc).
+ Tính đoạn OH.
  Để tính OH, ta có thể xem :
  . Nếu OH là đoạn thẳng của một tam giác vuông : sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.
  . Nếu OH là đoạn thẳng của một tam giác thường : sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác thường.
  . Nếu OH là một đoạn thẳng song song với một đoạn thẳng khác: sử dụng định lí Talét hay tam giác đồng dạng.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABC ; ABC là tam giác vuông tại B (AB = 2a ; BC = a) ; SA ⊥ (ABC). Tính khoảng cách từ B đến (SAC).

Giải



Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$)

Ta có : $BH \perp SA$
(vì $SA \perp (ABC)$)

Suy ra : $BH \perp (SAC)$.

Vậy BH là khoảng cách từ B đến (SAC).

Trong tam giác vuông ABC, BH là đường cao nên :

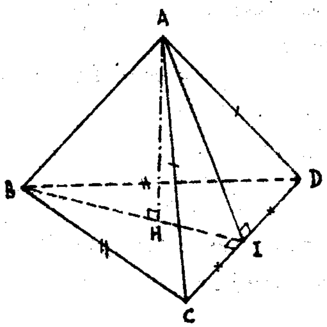
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

Vậy : $d[B,(SAC)] = BH = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 6a$; $BC = BD = 5a$; $AC = AD = a\sqrt{73}$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Chứng minh rằng H nằm trên trung tuyến BI của tam giác BCD. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

Giải



* Ta có : $AH \perp (BCD)$

Mà $AC = AD$

nên : $HC = HD$ (đường xiên bằng nhau nên hình chiếu bằng nhau).

Vậy : $H \in BI$ là trung trực của CD , cũng là trung tuyến của tam giác cân BCD.

* Ta lại có :

$$BI = \sqrt{BC^2 - CI^2} = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$$

$$AI = \sqrt{AC^2 - CI^2} = \sqrt{73a^2 - 9a^2} = 8a.$$

Ta nhận thấy AH là đường cao của tam giác ABI, nên :

$$S_{ABI} = \frac{1}{2}AH.BI$$

mà $S_{ABI} = \sqrt{p(p - BI)(p - IA)(p - AB)}$

(với $p = \frac{1}{2}(BI + IA + AB) = 9a$)

$$= \sqrt{9a.5a.a.3a} = 3a^2\sqrt{15}$$

Vậy :

$$d[A,(BCD)] = AH = \frac{2S_{ABI}}{BI} = \frac{6a^2\sqrt{15}}{4a} = \frac{3a\sqrt{15}}{2}.$$

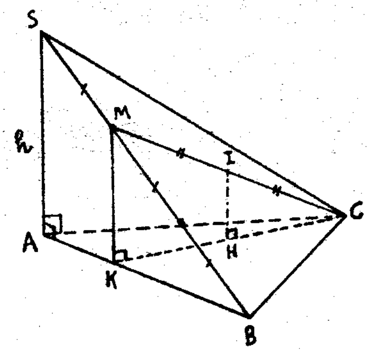
VÍ DỤ 3 :

Cho hình chóp S.ABC có SA = h và SA $\perp$ (ABC) ; M thuộc đoạn SB và $\frac{MS}{MB} = \frac{1}{2}$. I là trung điểm của CM. Tính khoảng cách từ I đến (ABC).

Giải

Kẻ : MK $\perp$ (ABC)

IH $\perp$ (ABC)



Ta có : MK // IH // SA

(vì cùng vuông góc với (ABC))

Do đó : K $\in$ AB và ta có :

$$\frac{MK}{SA} = \frac{BM}{BS} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad MK = \frac{2}{3}SA = \frac{2}{3}h$$

Mà : $IH = \frac{1}{2}MK$

(đường trung bình trong ΔCMK)

nên : $IH = d[I,(ABC)] = \frac{1}{3}h$.

VÍ DỤ 4 :

Cho tam giác ABC có trọng tâm G và 1 mặt phẳng α. Chứng minh rằng $d_G = \frac{1}{3}(d_A + d_B + d_C)$; d_G, d_A, d_B, d_C lần lượt là khoảng cách từ G, A, B, C đến α.

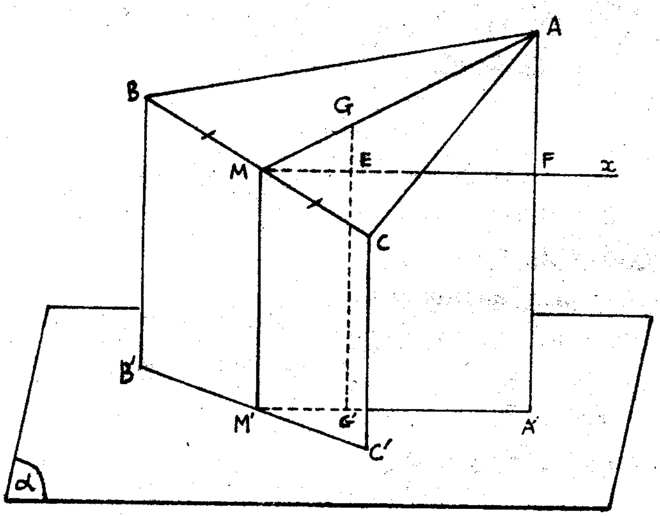
Giải

Ta có thể giả sử α không cắt tam giác ABC và $d_A > d_B \geq d_C$.

Vẽ các đoạn AA' , BB' , CC' , GG' , MM' cùng vuông góc với α (M là trung điểm của BC). Ta có :

AA' // BB' // CC' // GG' // MM'.

$$d_M = MM' = \frac{BB' + CC'}{2} = \frac{d_B + d_C}{2}$$



Vẽ Mx // M'A' và Mx cắt GG' tại E, AA' tại F. Ta có :

$$GE = \frac{1}{3} AF = \frac{1}{3} (d_A - d_M)$$

$$\left(\text{vì } \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}, \text{ tính chất trọng tâm}\right)$$

Suy ra : $d_G = d_M + \frac{1}{3}(d_A - d_M)$

$$\Rightarrow \quad d_G = \frac{2}{3} d_M + \frac{1}{3} d_A = \frac{2}{3} \cdot \frac{d_B + d_C}{2} + \frac{1}{3} d_A.$$

Vậy : $d_G = \frac{1}{3}(d_A + d_B + d_C).$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp S.ABC ; ABC là tam giác đều cạnh a và SA ⊥ (ABC). Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

2. Cho hình chóp S.ABC ; ABC là tam giác đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC) và SA = h. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

3. Cho hai điểm A, B và mặt phẳng α. Đường AB cắt α tại I. Chứng minh rằng $\dfrac{d_A}{d_B} = k \Leftrightarrow \dfrac{IA}{IB} = k$. (d_A, d_B là khoảng cách từ A và B đến α).

4. Cho hình chóp S.ABCD có : SA = SB = SD = 3a ; $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^o$; $\widehat{BAD} = 60^o$ và BD = 2a. Tính khoảng cách từ S đến (ABCD).

Vấn đề 4 : Tính khoảng cách giữa đường thẳng b (hay mặt phẳng β) và mặt phẳng α (b // α hay β // α)

> Ta thường chọn một điểm thuận lợi trên b (hay β) và tính khoảng cách từ điểm này đến α (xem vấn đề 3).

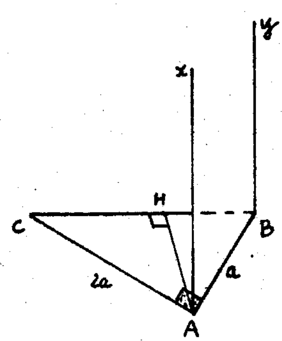
VÍ DỤ 1 :

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB = a ; AC = 2a) ; Ax và By cùng vuông góc với (ABC). Tính khoảng cách giữa By và (CAx) ; giữa Ax và (CBy).

Giải

Để ý rằng By // (CAx) (vì By // Ax) nên :

$$d[By,(CAx)] = d[B,(CAx)].$$



* Ta có :

$$\begin{cases} BA \perp AC \text{ (gt)} \\ BA \perp Ax \text{ (vì } Ax \perp (ABC)) \end{cases}$$

$\Rightarrow BA \perp (CAx)$.

Vậy BA = a là khoảng cách giữa By và (CAx).

* Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$

mà $AH \perp By$ (vì $By \perp (ABC)$)

nên $AH \perp (CBy)$

Vậy $AH = d[A,(CBy)] = d[Ax,(CBy)]$

Trong tam giác vuông ABC, ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Do đó : $d[Ax,(CBy)] = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

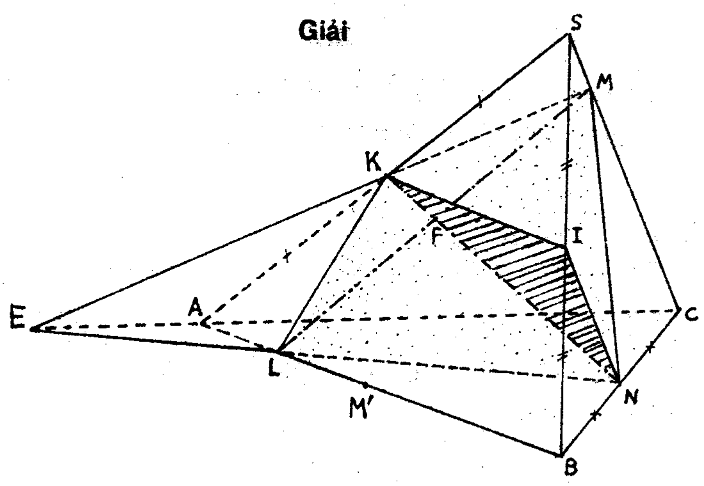
♦ **VÍ DỤ 2 :**

Cho tứ diện S.ABC. K, N, I lần lượt là trung điểm của SA, BC và SB. $M \in SC$ và không phải là trung điểm của SC.

a) M' là điểm bất kì trên AB. Chứng minh rằng mặt phẳng (KIN) cách đều M và M'.

b) Mặt phẳng (KMN) cắt tứ diện theo 1 thiết diện. Chứng minh rằng KN chia thiết diện này thành 2 phần có diện tích bằng nhau.

Giải



a) Chứng minh $d[M,(KIN)] = d[M',(KIN)]$

Ta có : SC // IN (đường trung bình ΔBSC)

nên SC // (KIN).

Do đó : d[M,(KIN)] = d[S,(KIN)].

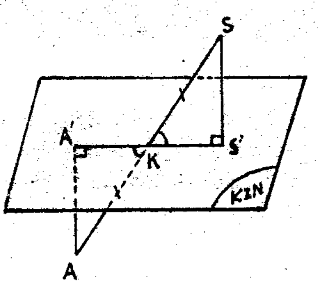
Tương tự :

d[M',(KIN)] = d[A,(KIN)] (vì AB // (KIN))

mà : d[S,(KIN)] = d[A,(KIN)]

(vì 2 tam giác vuông SKS' và AKA' bằng nhau)

Vậy : d[M,(KIN)] = d[M',(KIN)]



*b) * Dựng thiết diện*

KM cắt AC tại E và EN cắt AB tại L. Thiết diện là tứ giác KLNM.

** Chứng minh KN chia thiết diện thành 2 phần tương đương*

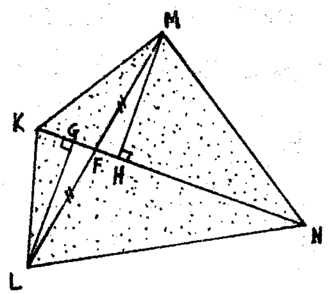
KN cắt ML tại F. F cũng là giao điểm của ML và mặt phẳng (KIN).

Kẻ MP ⊥ (KIN) ; LQ ⊥ (KIN). Theo câu a, ta có :

MP = LQ

⇒ ΔMFP = ΔLFQ

⇒ FM = FL



Trong tứ giác KLNM kẻ các đoạn MH ⊥ KN ; LG ⊥ KN (H, G ∈ KN). Ta có :

ΔFMH = ΔFLG

⇒ MH = LG.

Vậy : $S_{MKN} = S_{LKN}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

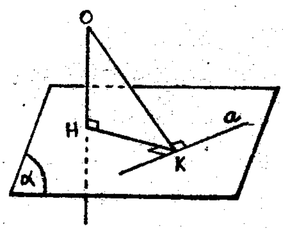
1. Cho hình thoi ABCD cạnh a và diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$. Ax và By cùng vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (DAx) và (CBy).

2. Cho tứ diện ABCD và M ∈ đoạn BD với MD = 2MB. α là mặt phẳng qua M và song song với AD và BC. I ∈ AD và J ∈ BC. IJ cắt α tại O. Chứng minh rằng OJ = 2OI.

3. Cho 2 mặt phẳng song song α và β. Trong α là tam giác đều ABC cạnh 3a. M là 1 điểm trên β thỏa MA = MB = MC = = 2a. Tính khoảng cách giữa α và β.

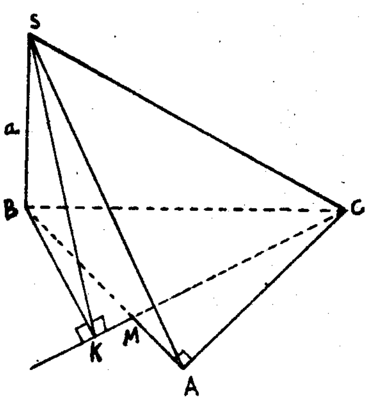
Vấn đề 5 : Tính khoảng cách từ một điểm O đến một đường thẳng a trong α

Để tính OK = d[O,a] ta thường phải sử dụng định lí 3 đường vuông góc và tính các khoảng cách OH = d[O,α] và d[H,a] = HK.



VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABC ; ABC là tam giác vuông cân (AB = AC = a) ; SB ⊥ (ABC) và SB = a. Tính khoảng cách từ S đến CM với M ∈ đoạn AB và AM = $\frac{a}{3}$.



Giải

* Kẻ SK ⊥ CM (K ∈ CM)

Mà : BK = hc.SK/ABC

nên : BK ⊥ CM

(định lí 3 đường vuông góc).

* Hai tam giác vuông CAM và BKM đồng dạng, ta có :

$$\frac{BK}{AC} = \frac{BM}{CM}$$

Mà : $CM = \sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$

$BM = \frac{2a}{3}$

nên : $BK = \frac{CA.BM}{CM} = \frac{a\cdot\frac{2a}{3}}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{10}}$

Tam giác vuông SBK cho :

$$SK = \sqrt{SB^2 + BK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{10}} = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}}$$

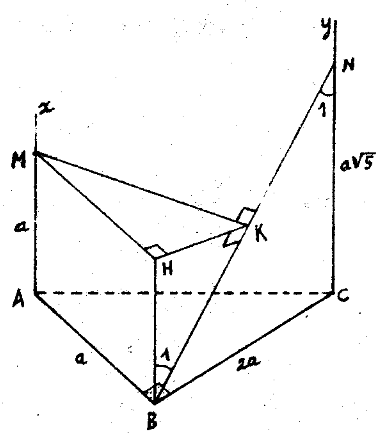
$$= \frac{a\sqrt{140}}{10} = \frac{a\sqrt{35}}{5}$$

Vậy : $d[S,CM] = SK = \frac{a\sqrt{35}}{5}$

VÍ DỤ 2 :

Cho tam giác ABC vuông tại B (AB = a ; BC = 2a). Ax và Cy cùng vuông góc với (ABC) và ở về một phía. Lấy M ∈ Ax và N ∈ Cy với AM = a , CN = $a\sqrt{5}$. Chứng minh rằng AB ⊥ (BCy). Tính khoảng cách từ M đến BN.

Giải



* *Chứng minh AB ⊥ (BCy)*

Ta có :

$\begin{cases} AB \perp Cy \text{ (vì } Cy \perp (ABC)) \\ AB \perp BC \text{ (giả thiết)} \end{cases}$

Vậy : AB ⊥ (BCy)

* *Tính d[M,BN]*

Kẻ MH ⊥ (BCy), H ∈ (BCy) (MH // AB và MH = AB = a vì Ax // (BCy))

MK ⊥ BN , K ∈ BN

Suy ra : HK $\perp$ BN (định lí 3 đường vuông góc).

Để ý rằng BH // Ax // Cy (vì MHBA là hình chữ nhật) nên 2 tam giác vuông BKH và NCB đồng dạng (vì có $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$). Do đó :

$$\frac{HK}{BC} = \frac{BH}{NB} \Rightarrow HK = \frac{BC.BH}{NB}$$

Mà : $BH = AM = a$

$$BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{4a^2 + 5a^2} = 3a$$

do đó : $HK = \dfrac{2a.a}{3a} = \dfrac{2a}{3}$

Tam giác MHK vuông tại H (vì MH $\perp$ (BCy) nên MH $\perp$ HK) cho :

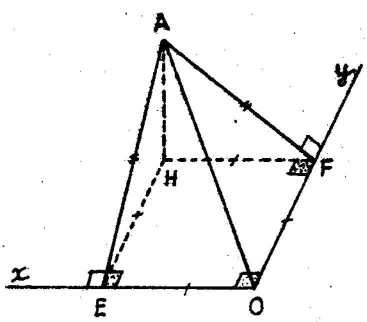
$$MK^2 = MH^2 + HK^2 = a^2 + \frac{4a^2}{9} = \frac{13a^2}{9}$$

Vậy : $d[M,BN] = MK = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

VÍ DỤ 3 :

Cho góc vuông xOy và 1 điểm A ở ngoài mặt phẳng xOy. Khoảng cách từ A đến Ox, Oy đều bằng a, và $AO = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (xOy).

Giải



Kẻ : AH $\perp$ (xOy) (H $\in$ xOy)

và : AE $\perp$ Ox

thì ta có : HE $\perp$ Ox (HE // Oy)

(định lí 3 đường vuông góc).

Tương tự, kẻ AF $\perp$ Oy

$\Rightarrow$ HF $\perp$ Oy (HF // Ox)

Ta lại có : HE = HF

(vì AE = AF = a) nên OEHF là hình vuông $\Rightarrow$ EH = OE .

Tam giác vuông OAE cho :

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{4} - a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác vuông AEH cho :

$$AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp S.ABC có AB = a ; SA ⊥ (ABC) và SA = 2a. Bx là nửa đường thẳng trong mặt phẳng (ABC) và $\widehat{ABx} = 60^\circ$. Tính khoảng cách từ S đến Bx.

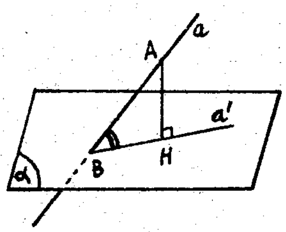
2. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Bx và Cy là hai nửa đường thẳng cùng chiều, vuông góc với (ABC) . Lấy M ∈ Bx và N ∈ Cy với BM = a ; CN = 2a . Chứng minh rằng : AI ⊥ (Bx,Cy) và tính khoảng cách từ A đến MN. (I là trung điểm của BC) .

Vấn đề 6 : Góc của đường thẳng a và mặt phẳng α

Ta phải xác định hình chiếu a' của a xuống α . Khi đó :

góc [a,α] = góc [a,a']

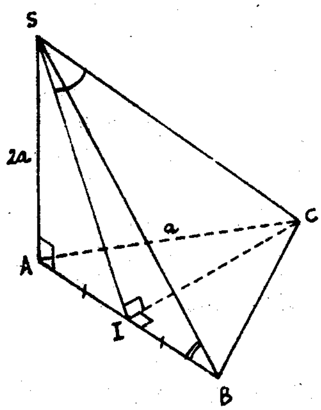
Để xác định a', ta thường xác định giao điểm B của a và α ; đoạn vuông góc AH , H ∈ α và A ∈ a : a' ≡ BH.
(Xem thêm ở chương mặt phẳng vuông góc).



VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABC ; có SA ⊥ (ABC) và SA = 2a ; ABC là tam giác đều cạnh a . Tính các góc : góc [SB,(ABC)] và góc [SC,(SAB)] .

Giải



* *Góc [SB,(ABC)]*

Ta có AB là hình chiếu của SB xuống (ABC) nên :

$$\widehat{SBA} = \text{góc } [SB,(ABC)]$$

Tam giác vuông SAB cho :

$$\text{tg}\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Vậy $\widehat{SBA} = \text{arctg}2.$

* *Góc [SC,(SAB)]*

Kẻ : $CI \perp AB$ (I là trung điểm của AB vì ΔABC đều)

Mà : $SA \perp CI$ (vì $SA \perp (ABC)$)

nên $CI \perp (SAB)$.

Do đó SI là hình chiếu của SC xuống SAB.

Vậy : $\widehat{CSI} = \text{góc } [SC,(SAB)]$

Ta có : $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều)

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Tam giác vuông SCI cho :

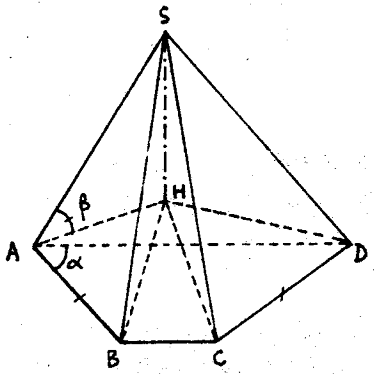
$$\sin\widehat{CSI} = \frac{CI}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

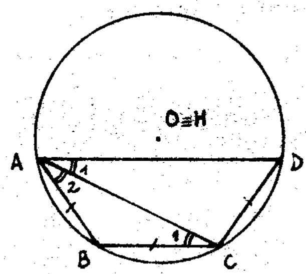
Vậy : $\widehat{CSI} = \arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang cân (BC // AD; AB = BC = CD = a ; $\widehat{BAD} = \alpha$ nhọn) ; các đoạn SA, SB, SC, SD đều tạo với (ABCD) 1 góc β. Tính khoảng cách từ đỉnh S đến (ABCD).

Giải





* Kẻ SH ⊥ (ABCD) , H ∈ (ABCD).

Ta có HA là hình chiếu của SA xuống (ABCD) nên :

$$\beta = \widehat{SAH} = \text{góc } [SA,(ABCD)].$$

Tương tự : $\widehat{SBH} = \widehat{SCH} = \widehat{SDH} = \beta$.

Suy ra : $\Delta SAH = \Delta SBH = \Delta SCH = \Delta SDH$

Do đó : $HA = HB = HC = HD$.

Vậy : H trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp ABCD.

* Ta lại có :

$$d[S,(ABCD)] = SH = HA\operatorname{tg}\beta.$$

Ta phải tính HA, là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABCD.

Ta có : $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (solc trong)

$\widehat{A}_2 = \widehat{C}_1$ (tam giác ABC cân)

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\alpha}{2}$$

Áp dụng định lí hàm số sin vào tam giác ABC, ta có :

$$\frac{AB}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2HA \Rightarrow HA = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Vậy : $d[S,(ABCD)] = SH = \dfrac{a\,tg\beta}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. B, C là 2 điểm trên α ; A ở ngoài α và AB, AC tạo với BC những góc bằng nhau. Chứng minh rằng AB và AC tạo với α những góc bằng nhau.

2. Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$; AC = b ; SA ⊥ (ABC). M, N là trung điểm của SA và BC. MN tạo với (ABC) một góc α và tạo với (SAB) một góc β. Tính các cạnh của hình chóp S.ABC theo b, α, β.

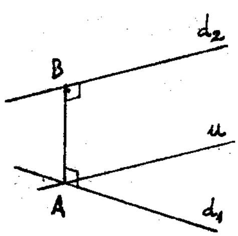
3. Cho đoạn AB = 2a và A, B ở 2 bên mặt phẳng α. Tổng các khoảng cách từ A và B đến α bằng a. Tính góc của AB và α.

Vấn đề 7 : Bài toán về đoạn vuông góc chung

Cho AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2. Trong các bài toán về đường vuông góc chung ta thường kẻ thêm Au // d_2 và sử dụng các hệ quả :

$\widehat{uAd_1}$ = góc (d_1,d_2)

AB ⊥ (Au,d_1)



VÍ DỤ 1 :

Ax và By là 2 đường thẳng chéo nhau và vuông góc , nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung. Lấy M ∈ Ax; N ∈ By; và đặt AM = x , BN = y. Định hệ thức giữa a , x , y để MN = AM + BN.

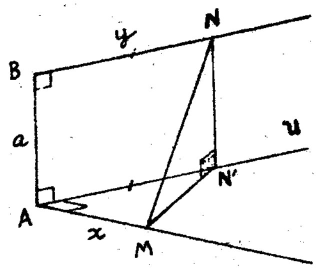
Giải

* Kẻ Au // By, ta có :

$\widehat{xAu} = 90^o$ (vì Ax ⊥ By)

AB ⊥ (Ax,Au)

(vì AB ⊥ Ax và AB ⊥ Au).



* Kẻ NN' // AB (N' ∈ Au) , ta có :

NN' ⊥ (Ax,Au)

(vì AB ⊥ (Ax,Au))

Suy ra : AN' = BN = y (vì ABNN' là hình chữ nhật)

NN' ⊥ N'M (vì NN' ⊥ (Ax,Au))

ΔNN'M cho : $MN^2 = NN'^2 + MN'^2 = a^2 + x^2 + y^2$

Do đó : $MN = AM + BN = x + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 = a^2 + x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow xy = \dfrac{a^2}{2}.$

♦ **VÍ DỤ 2 :**

Ax và By là 2 đường thẳng chéo nhau và vuông góc , nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung. Lấy M ∈ Ax và N ∈ By; và đặt AM = x , BN = y. Kẻ OH ⊥ MN (O là trung điểm AB và H ∈ đoạn MN). Giả thiết rằng MN = AM + BN.

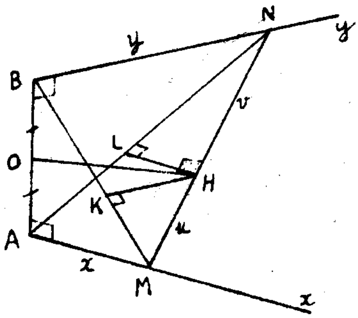
a) Chứng minh rằng HM = AM và HN = BN. Suy ra khoảng cách từ O đến MN.

b) Tính theo x, y khoảng cách từ H đến 2 mặt phẳng (BAx) và (ABy) và kiểm lại rằng H cách đều 2 mặt phẳng này.

Giải

a) Chứng minh HM = AM ; HN = BN.

Đặt HM = u ; HN = v.



Ta có : $u + v = x + y$ (1)
(vì $MN = x + y$)

Ta cũng có :

$$u^2 = OM^2 - OH^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 - OH^2$$

$$v^2 = ON^2 - OH^2 = \frac{a^2}{4} + y^2 - OH^2$$

Do đó : $u^2 - v^2 = x^2 - y^2$ (2)

(1) và (2) cho : $u - v = x - y$ (3)

(1) và (3) cho : $u = x$; $v = y$.

Vậy $HM = AM$ và $HN = BN$.

Tính OH

Hai tam giác vuông OAM và OHM bằng nhau (có cạnh huyền chung và 1 cạnh góc vuông bằng nhau)

Vậy $OH = OA = \dfrac{a}{2}$.

b) Tính d[H,(BAx)]

Ta có : $BN \perp (ABx)$ (vì $BN \perp AB$ và $BN \perp Ax$)

Kẻ $HK \perp (ABx)$ ($HK \parallel BN$ và $K \in MB$)

Ta có : $\dfrac{HK}{BN} = \dfrac{MH}{MN} = \dfrac{x}{x + y}$

Vậy : $HK = d[H,(BAx)] = \dfrac{xy}{x + y}$

Tương tự : $HL = d[H,(ABy)] = \dfrac{xy}{x + y}$

Vậy : H cách đều 2 mặt phẳng (ABy) và (BAx).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Ax và By tạo với nhau 1 góc 60° và nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Lấy M $\in$ Ax và M $\in$ By sao cho BN = 2AM. Chứng minh rằng MN $\perp$ Ax.

2. Ax và By vuông góc với nhau và nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Lấy M $\in$ Ax và N $\in$ By. Chứng minh rằng tứ diện ABMN có 4 mặt đều là tam giác vuông.

♦3. Ax và By tạo với nhau 1 góc α và nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung. Lấy M $\in$ Ax và N $\in$ By sao cho AN $\perp$ BM. Đặt AM = x ; BN = y. Chứng minh : $xy = \dfrac{a^2}{\cos\alpha}$.

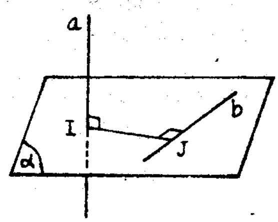
Hướng dẫn : Vẽ thêm AH $\perp$ BM. Ta có : NH $\perp$ BM.

Vấn đề 8 : Xác định đoạn vuông góc chung

Trường hợp 1 : Xác định đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b với a vuông góc b.

– Dựng mpα chứa b và vuông góc với a tại I.

– Chiếu I trên b thành J. IJ là đoạn vuông góc chung.



Trường hợp 2 : Hai đường thẳng a, b không vuông góc nhau.

– Dựng mpα vuông góc với a tại O.

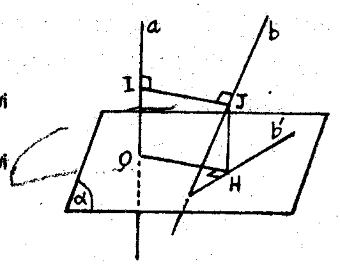
– Chiếu b trên α thành b'.

– Chiếu O trên b' thành H.

– Từ H vẽ đường thẳng song song với a cắt b tại J.

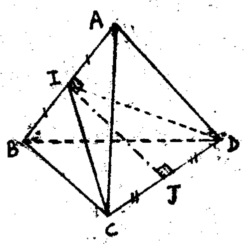
– Từ J vẽ đường thẳng song song với OH cắt a tại I.

IJ là đoạn vuông góc chung.



Trường hợp 3 : Xác định đoạn vuông góc chung của AB, CD khi AC = BD và AD = BC

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có IJ là đoạn vuông góc chung. (Xem chứng minh ở phần b của ví dụ 1)



Trường hợp 4 :

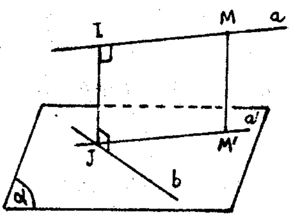
– Dựng mpα chứa b và song song với a

– Lấy M ∈ a, chiếu M trên mpα thành M'.

– Qua M' dựng đường thẳng a' song song với a cắt b tại J .

– Từ J dựng đường thẳng song song với MM' cắt a tại I.

IJ là đoạn vuông góc chung.



Ghi chú :

Nếu chỉ cần tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a và b thì đó là :

$$h = d(a,\alpha)$$

với mpα chứa b và song song với a.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc ABCD, SA = a. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các đường thẳng :

a) BD và SC.

b) AB và SC.

Giải

a) *Đoạn vuông góc chung của BD và SC*

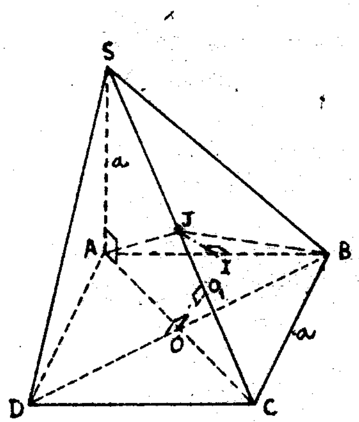
Ta để ý thấy BD ⊥ SC , dùng trường hợp 1.

* **Xác định mặt phẳng chứa SC và vuông góc BD :**

Ta có $BD \perp SA$ và

$BD \perp AC$

nên $BD \perp (SAC)$ tại giao điểm O của BD và AC.



* . **Dựng đoạn vuông góc chung :**

Chiếu O lên SC thành O_1, ta có :

$$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OO_1$$

Như vậy, OO_1 là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

* **Tính đoạn vuông góc chung :**

Hai tam giác vuông SAC và OO_1C có góc C chung nên đồng dạng

$$\frac{OO_1}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OO_1 = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

b) Đoạn vuông góc chung của AB và SC .

Ta để ý thấy : SA = BC , AC = SB . Áp dụng trường hợp 3.

* . Gọi I, J là trung điểm AB, SC. Ta có :

$SA = BC = a$; $AC = SB = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC = \Delta CBS$ (c.c.c)

Do đó : $AJ = BJ \Rightarrow \Delta AJB$ cân tại J $\Rightarrow$ $IJ \perp AB$.

. Tương tự, ΔSIC cân tại I nên : $IJ \perp SC$.

. Vậy : IJ là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

* Ta có : $AJ = \frac{1}{2} SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

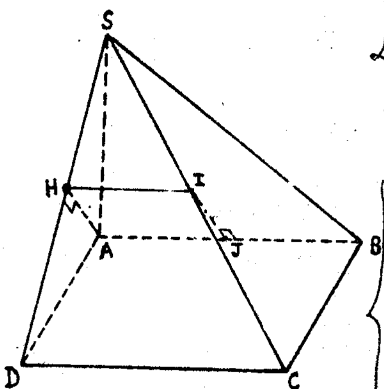
$$IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABCD có SA vuông góc với ABCD và ABCD là hình chữ nhật. Dựng đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Giải

Dùng trường hợp 4 :



* <u>Xác định mặt phẳng chứa SC và song song với AB</u> :

Ta có : CD // AB nên (SCD) // AB.

* <u>Chiếu A lên (SCD)</u> :

Ta có : $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$ và

nên CD ⊥ (SAD)

Kẻ AH ⊥ SD , ta có :

$\left.\begin{array}{l} AH \perp SD \\ \text{và : } AH \subset (SAD) \perp CD \end{array}\right\}$

⇒ AH ⊥ (SCD)

Do đó H là hình chiếu của A trên (SCD).

* <u>Dựng đoạn vuông góc chung</u> :

Đường thẳng qua H và song song với CD cắt SC tại I. Đường thẳng qua I và song song với AH cắt AB tại J .

CM

Ta có : IJ // AH ⇒ IJ ⊥ (SCD) ⇒ IJ ⊥ SC

IJ ⊥ (SCD) ⇒ IJ ⊥ CD ⊂ (SCD) ⇒ IJ ⊥ AB.

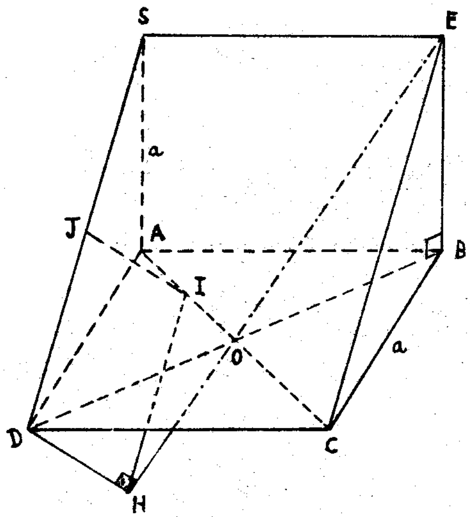
Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

VÍ DỤ 3 :

Cho hình chóp SABCD có SA vuông góc (ABCD), SA = a và ABCD là hình vuông cạnh a. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của AC và SD.

Giải

CÁCH 1 : (Dùng trường hợp 4)



* <u>Xác định mặt phẳng chứa AC và song song SD</u> :

Vẽ $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ta có : SD // CE

Do đó : (ACE) // SD

* <u>Chiếu D trên (ACE)</u> :

Ta có : EB // SA

$\Rightarrow$ EB $\perp$ (ABCD)

$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp EB \end{cases}$ và

$\Rightarrow$ AC $\perp$ (BDE)

Gọi H là hình chiếu của D trên OE. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} DH \subset (BDE) \perp AC \\ DH \perp OE \end{array}\right\} \Rightarrow DH \perp (ACE)$$

Do đó H là hình chiếu của D trên (ACE).

* <u>Dựng đoạn vuông góc chung</u> :

Đường thẳng qua H và song song CE cắt AC tại I. Đường thẳng qua I và song song DH cắt SD tại J .

Ta có : DH $\perp$ (ACE) $\Rightarrow$ DH $\perp$ AC,CE

Mà : IJ // DH và CE // SD nên : IJ $\perp$ AC và IJ $\perp$ SD

Vậy : IJ là đoạn vuông góc chung của AC và SD.

* <u>Tính đoạn vuông góc chung</u> :

Ta có : $OE^2 = OB^2 + BE^2 = \dfrac{6a^2}{4} \Rightarrow OE = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

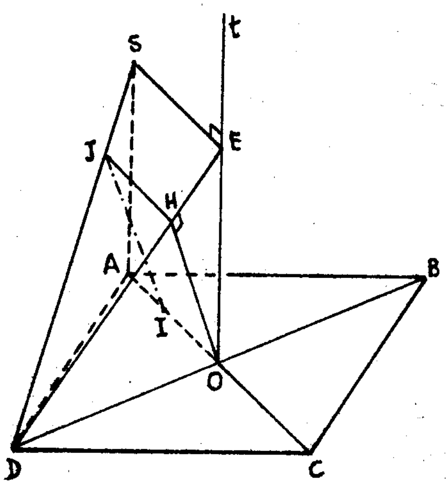
Hai tam giác ODH, OEB đồng dạng nên :

$$\frac{DH}{BE} = \frac{OD}{OE}$$

Suy ra : $$DH = \frac{BE.OD}{OE} = \frac{a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy : $$IJ = DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

CÁCH 2 : (Dùng trường hợp 2)



* Xác định mặt phẳng vuông góc với AC :

Từ giao điểm O của AC và BD vẽ Ot // SA.

Ta có : $Ot \perp (ABCD)$.

$AC \perp BD$ và $AC \perp Ot$

$\Rightarrow AC \perp (BD,Ot)$.

* Chiếu SD trên mp(BD,Ot):

Đường thẳng qua S và song song AC cắt Ot tại E.

$SE \,//\, AC \Rightarrow SE \perp (BD,Ot)$.

Do đó đường thẳng DE là hình chiếu của SD trên mp(BD,Ot).

* Dựng đoạn vuông góc chung :

Chiếu O trên DE thành H. Từ H vẽ đường thẳng song song với AC cắt SD tại J. Từ J vẽ đường thẳng song song với OH cắt AC tại I.

Ta có : $AC \perp (BD,Ot) \Rightarrow AC \perp OH \Rightarrow AC \perp IJ$.

$$\left.\begin{array}{l} DE \perp OH \\ SE \perp OH \subset (BD, OI) \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (SDE) \Rightarrow OH \perp SD$$

$$\Rightarrow IJ \perp SD.$$

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AC và SD.

* <u>Tính đoạn vuông góc chung</u> :

Ta có : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{a^2}{3}$$

Do đó : $IJ = OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

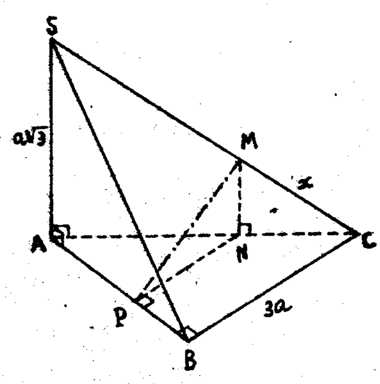
VÍ DỤ 4 :

Cho tứ diện SABC có SA : vuông góc (ABC) , $SA = a\sqrt{3}$, ABC là tam giác vuông tại B, AB = 2a, BC = 3a. Lấy điểm M trên đoạn SC với MC = x . Gọi N, P lần lượt là hình chiếu của M trên AC và của N trên AB.

a) Tính MP theo a và x. Định x để MP nhỏ nhất.

b) Với x vừa tìm hãy nêu ý nghĩa hình học của đoạn MP tương ứng.

Giải



a) * ***Tính MP***

Ta có : $AC = a\sqrt{13}$,

$SC = 4a$

$MN \,//\, SA \Rightarrow \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{CM}{CS}$

$$\Rightarrow MN = \frac{SA.CM}{CS}$$

$$MN = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

$$NP \parallel BC \quad \Rightarrow \quad \frac{NP}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{SM}{SC}$$

$$\Rightarrow \quad NP = \frac{BC.SM}{SC} = \frac{3}{4}(4a - x).$$

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $MN \perp (ABC)$. Suy ra : $MN \perp NP$.

Do đó : $$MP^2 = MN^2 + NP^2 = \frac{3x^2}{16} + \frac{9}{16}(4a - x)^2$$

$$= \frac{3}{4}(x^2 - 6ax + 12a^2)$$

Vậy : $MP = \frac{1}{2}\sqrt{3(x^2 - 6ax + 12a^2)}$ với $0 \leq x \leq 4a$

* *Định x để MP nhỏ nhất*

Ta có : $x^2 - 6ax + 12a^2 = (x - 3a)^2 + 3a^2 \geq 3a^2$

Do đó : MP nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $x = 3a$.

b) *Ý nghĩa hình học của MP*

Ta có : $AB \perp NP$ và $MN \perp (ABC)$ nên $AB \perp MP$

(định lí 3 đường vuông góc).

Khi $x = 3a$ thì $MP^2 = \frac{9a^2}{4}$

Ta có : $\frac{AP}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{SM}{SC} = \frac{a}{4a} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{1}{4}AB = \frac{a}{2}$

$$SP^2 = SA^2 + AP^2 = \frac{13a^2}{4}$$

$$SM^2 + MP^2 = a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$$

Do đó : $SP^2 = SM^2 + MP^2$ nên $MP \perp SC$.

Vậy : MP là đoạn vuông góc chung của AB, SC.

Ghi chú : Ở câu b ta có MP nhỏ nhất khi $x = 3a$. Khi đó ta chưa kết luận được MP là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC vì M và P di động lần lượt trên hai đoạn SC và AB theo điều kiện của giả thiết.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Xác định và tính đoạn vuông góc chung của AB và CD.

2. Cho hình chóp SABCD ; ABCD là hình thang vuông tại A và B , AB = 2a ; BC = a ; AD = 3a , SA = $a\sqrt{2}$, SA $\perp$ (ABCD). Dựng và tính đoạn vuông góc chung của :
   a) AB và SD.
   b) AD và SC.

3. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, ΔSAB đều, I là trung điểm AB, SI $\perp$ (ABCD). Dựng và tính đoạn vuông góc chung của :
   a) SI và AC.
   b) SA và BC.

4. Cho hai hình vuông ABCD , ABEF cạnh a , BC $\perp$ (ABEF). Dựng và tính đoạn vuông góc chung của :
   a) AB và CF .
   b) AC và BF .

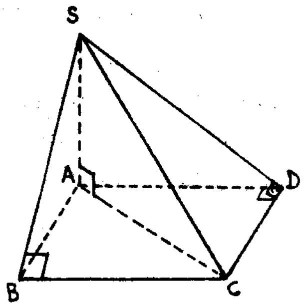
Vấn đề 9 : Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp S.ABCD

CÁCH 1 :
Ta chỉ cần chứng minh các đỉnh của hình chóp nhìn 1 đoạn chung EF dưới 1 góc vuông. Khi đó, mặt cầu đường kính EF là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là hình chữ nhật và SA $\perp$ (ABCD). Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



* Ta có : SA $\perp$ AC (vì SA $\perp$ (ABCD))

* Ta cũng có :

$\begin{cases} AB \perp BC & \text{(ABCD là hình chữ nhật)} \\ SA \perp (ABCD) \end{cases}$

nên : SB $\perp$ BC (định lí 3 đường vuông góc).

Tương tự : SD $\perp$ DC.

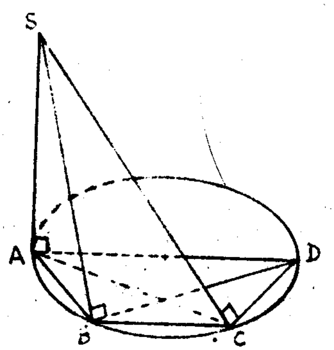
Tóm lại $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^o$.

Vậy mặt cầu đường kính SC là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp S.ABC có : BC = a ; $\widehat{BAC} = 60^o$, SA $\perp$(ABC) và SA = 2a. Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có :

AB $\perp$ DB (góc nội tiếp trong nửa đường tròn)

Do đó : SB $\perp$ BD (định lí 3 đường vuông góc)

Tương tự : SC $\perp$ CD.

Ta cũng có : SA $\perp$ AD vì SA $\perp$ (ABC).

Tóm lại $\widehat{SAD} = \widehat{SBD} = \widehat{SCD} = 90^o$.

Vậy mặt cầu đường kính SD là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

Ta có : $\dfrac{BC}{\sin A} = AD$ (định lí hàm số sin)

Vậy $AD = \dfrac{a}{\sin 60^o} = \dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

ΔSAD cho : $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{4a^2}{3}}$

$= \sqrt{\dfrac{16a^2}{3}} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

Vậy, tâm O của mặt cầu ngoại tiếp SABC là trung điểm của SD và bán kính là : $R = \dfrac{1}{2} SD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Ax, By là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc, và nhận AB làm đoạn vuông góc chung. $M \in Ax$ và $N \in By$. Định tâm mặt cầu ngoại tiếp ABMN.

2. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là nửa lục giác đều, $SA \perp (ABCD)$.
   a) Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.
   b) Gọi H, K, L là chân đường cao vẽ từ A trong các tam giác SAB, SAC, SAD. Chứng minh rằng 7 điểm A, B, C, D, H, K, L nằm trên 1 mặt cầu.

CÁCH 2 :

Muốn định tâm mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp, ta sử dụng tính chất cách đều của trục đường tròn, đường trung trực, mặt phẳng trung trực.

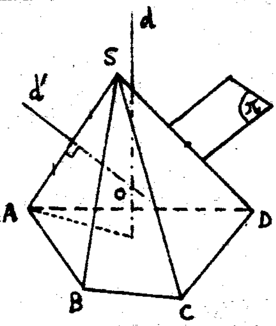
* Dựng trục d của đường tròn (ABCD).
* a) Nếu một cạnh bên của hình chóp (giả sử là SA) và trục d cùng ở trong một mặt phẳng (P) dựng đường trung trực d' của SA (trong (P)). Giao điểm của d' và d là tâm O mặt cầu ngoại tiếp.
  b) Nếu không có cạnh bên nào của hình chóp cùng trong 1 mặt phẳng với trục d, dựng mặt phẳng trung trực π của một cạnh bên, giao điểm của π và d là tâm O của mặt cầu ngoại tiếp.

Chú ý : Trong trường hợp b), ta có thể định tâm O như sau :

. Chứng minh rằng O nằm trên 1 đường thẳng d.

. Trên d, chọn 1 điểm I làm gốc và 1 chiều dương, tâm O sẽ được xác định bởi hoành độ $\overline{IO} = x$.

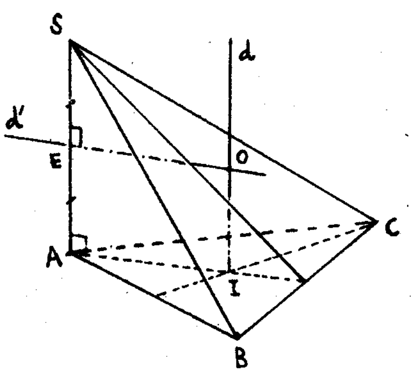
(Xem ví dụ 3)



VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABC ; ABC là tam giác đều cạnh a ; SA ⊥ (ABC) và SA = 2a. Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



. Dựng trục d của đường tròn (ABC) (d qua tâm I và vuông góc với (ABC) nên d // SA).

. Trong mặt phẳng (SA,d), dựng đường trung trực d' của SA (d' qua trung điểm E của SA và d' // AI vì AI ⊥ SA).

. d' cắt d tại O và ta có :

OA = OB = OC (vì O ∈ d)

OA = OS (vì O ∈ d')

⇒ OA = OB = OC = OS

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

* Bán kính mặt cầu bằng :

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2}$$

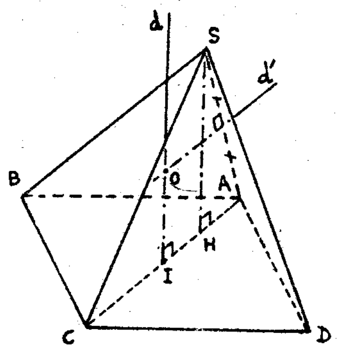
Với $OI = \frac{1}{2}SA = a$; $AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, ta có :

$$R = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình vuông ABCD cạnh $a\sqrt{2}$. Lấy H ∈ đoạn AC và $AH = \frac{a}{2}$. Vẽ $Hx \perp (ABCD)$ và lấy $S \in Hx$ sao cho : $\widehat{ASC} = 45^o$. Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.

Giải



* . Dựng trục d của đường tròn (ABCD) : d qua tâm I của hình vuông và vuông góc với (ABCD).

Do đó : d // SH và các cạnh SA, SC cùng trong 1 mặt phẳng với d.

. Dựng đường trung trực d' của SA (trong mặt phẳng (SAC)) : d' cắt d tại O là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD (cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp SAC).

* Áp dụng định lí hàm số sin vào tam giác SAC, ta có :

$$2R_{(SAC)} = \frac{AC}{\sin\widehat{ASC}}$$

Mà : $AC = (a\sqrt{2})\sqrt{2} = 2a$ và $\sin\widehat{ASC} = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$

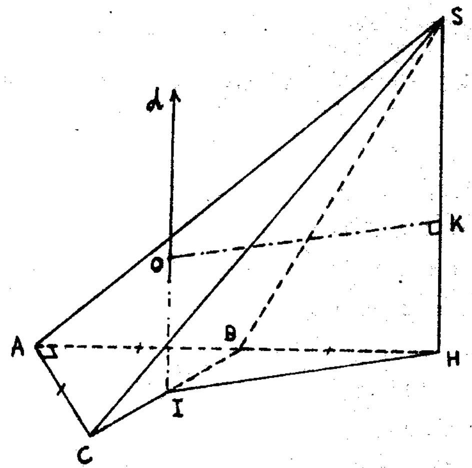
Vậy : Bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD là :

$$R = R_{(SAC)} = \frac{2a}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = a\sqrt{2}.$$

VÍ DỤ 3 :

Cho hình chóp S.ABC : ABC là tam giác vuông cân (AB = AC = a) và SH ⊥ (ABC) với H là điểm đối xứng của A qua B. Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABC khi SH = 3a.

Giải



* Dựng trục d của đường tròn (ABC) : d qua tâm I và vuông góc với (ABC), nghĩa là d // SH .

  Ta nhận thấy không có một cạnh bên nào của hình chóp cùng nằm trong một mặt phẳng với d.

* Tâm O của mặt cầu ngoại tiếp phải nằm trên d. Chọn I làm gốc, chiều dương là chiều $\overrightarrow{HS}$ và đặt $\overline{IO} = x$.

  . Ta có : $OB^2 = OI^2 + IB^2 = x^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

  . Ta lại có : $OS^2 = OK^2 + SK^2$

  với $OK^2 = IH^2$ (vì OKHI là hình chữ nhật)

$$IH^2 = IB^2 + BH^2 - 2IB.BH\cos 135^\circ$$

(định lí hàm số cosin)

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 - 2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2a^2$$

và : $SK = |3a - x|$

* Vì O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp SABC nên :

$$OB^2 = OS^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (3a - x)^2$$

$$\Leftrightarrow 6ax = 11a^2$$

Vậy : $x = \dfrac{11a}{6}$

* Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là :

$$R = OB = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{11a^2}{6}\right)^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{139}}{6}$$

Tóm lại, mặt cầu ngoại tiếp SABC có tâm O ở trên trục d, định bởi $\overline{IO} = \dfrac{11a}{6}$ và bán kính bằng $\dfrac{a\sqrt{139}}{6}$.

VÍ DỤ 4 :

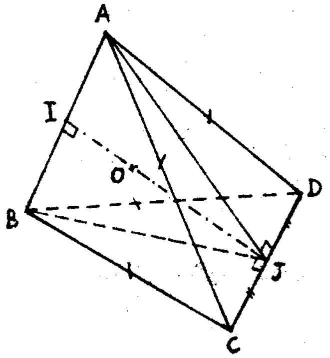
Cho tứ diện ABCD có AC = AD = BC = BD ; AB = 2a ; CD = 2b ; IJ = c. (I, J là trung điểm của AB và CD). Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCD nằm trên IJ. Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp ABCD.

Giải

* *Chứng minh tâm O của mặt cầu ngoại tiếp nằm trên IJ*

Để ý rằng : $\left.\begin{array}{l} AJ \perp CD \\ BJ \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABJ)$

$\Rightarrow$ (ABJ) là mặt phẳng trung trực của CD.



Tương tự, (CDI) là mặt phẳng trung trực của AB.

Ta lại có :

$OA = OB \Leftrightarrow O \in (CDI)$

$OC = OD \Leftrightarrow O \in (ABJ)$

Vậy $O \in IJ$ là giao tuyến của (CDI) và (ABJ)

* Trên IJ, chọn I làm gốc, chiều dương là chiều $\overrightarrow{IJ}$ và đặt $\overline{IO} = x$. Ta có :

$$OA^2 = OD^2 \qquad (1)$$

Với : $OA^2 = OI^2 + IA^2 = x^2 + a^2$

$OD^2 = OJ^2 + JD^2 = (c - x)^2 + b^2$

(1) thành : $x^2 + a^2 = (c - x)^2 + b^2$

hay $2cx = b^2 + c^2 - a^2$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Bán kính mặt cầu là :

$$R = OA = \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{1}{2c}\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)^2 + 4a^2c^2}$$

CÁCH 3 :
Tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp có thể là giao điểm của hai trục.

VÍ DỤ :

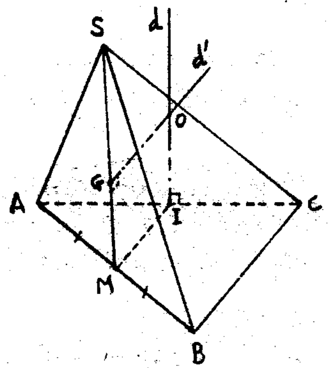
Cho tam giác ABC vuông cân tại B với AB = a. Từ trung điểm M của AB ta dựng đường thẳng vuông góc với (ABC), trên đó lấy điểm S sao cho tam giác SAB đều. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Giải

* . Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện. Ta có :

$OA = OB = OC \Leftrightarrow$ O $\in$ trục d của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà ΔABC vuông tại B nên d $\perp$ (ABC) tại trung điểm I của AC.



. Mặt khác :

$OA = OB = OS \Leftrightarrow O \in d'$ trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Mà ΔSAB đều nên d' $\perp$ (SAB) tại trọng tâm $G \in SM$ với

$$SG = \frac{2}{3}SM = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

. Vậy $OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow \{O\} = d \cap d'$.

* Ta có : $IM \perp AB$ (vì $IM \parallel BC$)

$IM \perp SM$ (vì $SM \perp (ABC)$)

Do đó $IM \perp (SAB) \Rightarrow d' \parallel IM$

Ta có : $\left.\begin{array}{l} d \perp (ABC) \\ SM \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel SM.$

Vậy tứ giác IOGM là hình chữ nhật, nên :

$$OG = IM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

Tam giác vuông SGO cho :

$$OS^2 = SG^2 + GO^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = \frac{21a^2}{36}$$

Vây : $R = OS = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp S.ABC có AB = AC = BC = 2a ; SA = SB = SC = 3a. Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

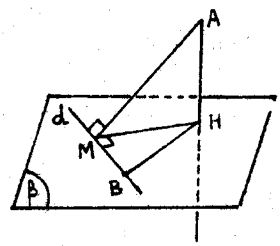
2. Cho hình chóp S.ABC có AB = AC = a ; $\widehat{BAC} = 120^{\circ}$; SA ⊥ (ABC) và SA = 2a. Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

3. Cho hình chóp S.ABCD. ABCD là hình vuông cạnh 2a, SH ⊥ (ABCD) với H là trung điểm của AB và SH = $a\sqrt{3}$. Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.

Vấn đề 10 : Tập hợp những điểm chiếu M của một điểm A cố định xuống d (hay α)

Ta thường gặp hai trường hợp sau :

1. $\begin{cases} d \text{ trong } \beta \text{ cố định} \\ d \text{ qua } B \text{ cố định} \\ A \notin \beta \end{cases}$

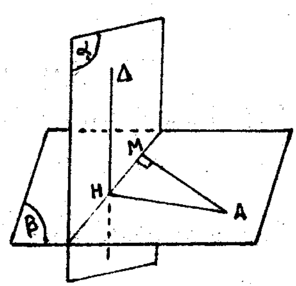


Ta kẻ AH ⊥ β (H ∈ β)
Áp dụng định lí 3 đường vuông góc, ta có (trong β) :

$\begin{cases} \widehat{BMH} = 90^{\circ} \\ B, H \text{ cố định} \end{cases}$

Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BH (hay một phần của đường tròn này.)

2. $\begin{cases} \alpha \text{ chứa } \Delta \text{ cố định} \\ A \notin \Delta \end{cases}$



Kẻ AM ⊥ α ⇒ AM ⊥ Δ
nên AM nằm trong β qua A và vuông góc với Δ. β cắt Δ tại H. Ta có (trong β) :

$\begin{cases} \widehat{AMH} = 90^{\circ} \\ A, H \text{ cố định} \end{cases}$

Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AH (hay một phần của đường tròn này) ở trong β.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là hình chữ nhật và SA ⊥ (ABCD). Một mặt phẳng lưu động α qua BC cắt đoạn SA tại E.

a) Tìm tập hợp các hình chiếu M của D xuống BE.

b) Tìm tập hợp các điểm chiếu N của D xuống α.

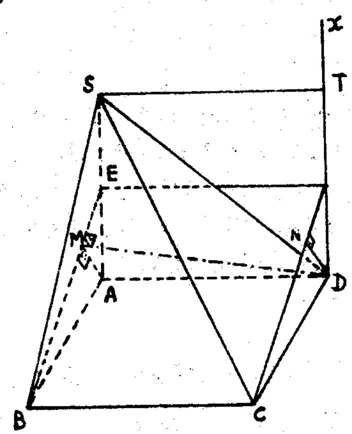
Giải

a) . Ta có : DA ⊥ (SAB) (vì DA ⊥ AB và DA ⊥ SA)

Kẻ DM ⊥ BE ⇒ AM ⊥ BE (định lí 3 đường vuông góc)

Trong mặt phẳng (SAB) cố định, ta có :

$$\begin{cases} \widehat{AMB} = 90^o \\ A\ ,\ B \text{ cố định} \end{cases}$$



Vậy : M thuộc đường tròn đường kính AB trong (SAB).

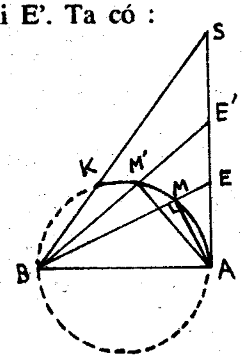
. *Giới hạn* :

E ≡ A ⇒ M ≡ A ;

E ≡ S ⇒ M ≡ K ∈ BS

⇒ M ∈ cung AK của đường tròn đường kính AB.

. Đảo lại, lấy M' ∈ AK, BM' cắt AS tại E'. Ta có :



AM' ⊥ BE' (vì M' ∈ đường tròn đường kính AB)

nên DM' ⊥ BE' nghĩa là M' là hình chiếu của D xuống BE' với E' ∈ AS.

Vậy : Tập hợp các điểm M là cung AK của đường tròn đường kính AB ở trong (SAB).

b) Kẻ $DN \perp \alpha \Rightarrow DN \perp BC$

$\Rightarrow$ DN nằm trong mặt phẳng β qua D và vuông góc với BC (nghĩa là β // (SAB)).

Vậy β là mặt phẳng chứa CD và Dx // SA.

Trong mặt phẳng (CDx) này, ta có :

$$\begin{cases} \widehat{CND} = 90^o \\ C, D \text{ cố định} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ N $\in$ đường tròn đường kính CD.

Chứng minh tương tự ở câu a, tập hợp các điểm N là cung DH của đường tròn đường kính CD, với H là giao điểm của CT và đường tròn ($\vec{DT} = \vec{AS}$).

VÍ DỤ 2 :

Cho tam giác đều ABC co cạnh a ; Bx, Cy là 2 nửa đường thẳng cùng chiều và cùng vuông góc với (ABC). B' và C' là 2 điểm lưu động trên Bx và Cy sao cho : CC' = 2 BB'. Chứng minh rằng B'C' luôn đi qua 1 điểm cố định. Tìm tập hợp hình chiếu của A xuống B'C' và tập hợp hình chiếu của B xuống mặt phẳng (AB'C').

Giải

* *Chứng minh B'C' qua 1 điểm cố định*

B'C' cắt BC tại E.

Ta có :

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{1}{2}$$

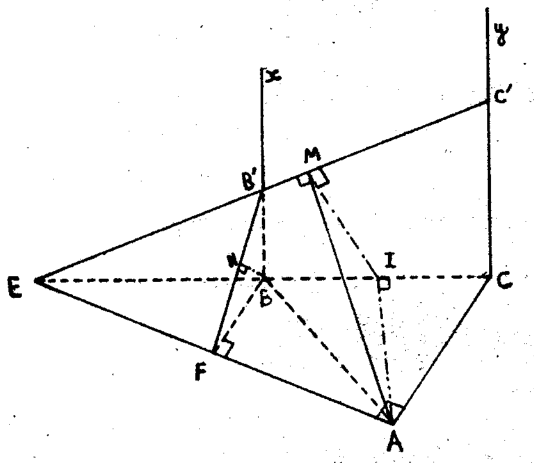
$\Rightarrow$ E cố định (và EB = BC = a)

* *Tập hợp hình chiếu M của A xuống B'C'*

. Ta có : AI $\perp$ BC (I là trung điểm BC)

AI $\perp$ Bx (vì Bx $\perp$ (ABC))

$\Rightarrow$ AI $\perp$ (Bx,Cy)



Ta lại có : $AM \perp B'C'$

nên : $IM \perp B'C'$ (định lí 3 đường vuông góc).

Trong mặt phẳng (Bx,Cy) ta có :

$$\begin{cases} \widehat{IME} = 90^o \\ I, E \text{ cố định} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $M \in$ đường tròn đường kính IE.

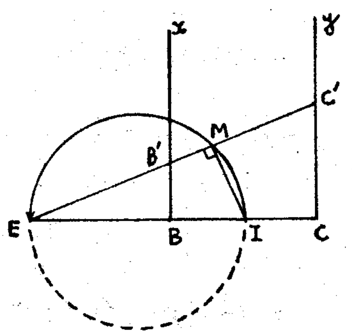
. *Giới hạn* :

$C' \equiv C \Rightarrow M \equiv I$; $C' \to \infty$

$\Rightarrow M \to E$ (vì $EC' \parallel Bx$)

. Vậy : Tập hợp các điểm M là nửa đường tròn đường kính IE, trừ điểm E.

(Độc giả tự chứng minh lấy phần đảo)



* *Tập hợp hình chiếu N của B xuống (AB'C')*

. **Để ý rằng BE = BA = BC = a nên :**

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp AE \\ CC' \perp AE \end{array}\right\} \Rightarrow AE \perp (ACy)$$

. Kẻ BN $\perp$ (AB'C') $\Rightarrow$ BN $\perp$ AE

$\Rightarrow$ BN nằm trong mặt phẳng β cố định (qua B và vuông góc với AE).

Do đó β chính là mặt phẳng (FBx), với F là trung điểm AE.

. Trong mặt phẳng (FBx), ta có :

$$\begin{cases} \widehat{BNF} = 90^o \\ B\ ,\ F \text{ cố định} \end{cases}$$

Chứng minh tương tự, tập hợp các điểm N là nửa đường tròn đường kính BF, trừ điểm F.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình vuông ABCD. Ax là nửa đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại A. S lưu động trên Ax và E lưu động trên cạnh AD. Tìm tập hợp các hình chiếu của I xuống CE (I là trung điểm của SB).

   Hướng dẫn : Gọi J là trung điểm của AB thì IJ // Ax .

2. Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là hình chữ nhật và SA $\perp$ (ABCD) ; E, F là trung điểm của SB và SC. α là 1 mặt phẳng lưu động qua EF và cắt cạnh SA. Tìm tập hợp hình chiếu của S xuống α.

   Hướng dẫn : Kẻ SH $\perp$ giao tuyến của α và (SAB).

C. TOÁN TỔNG HỢP

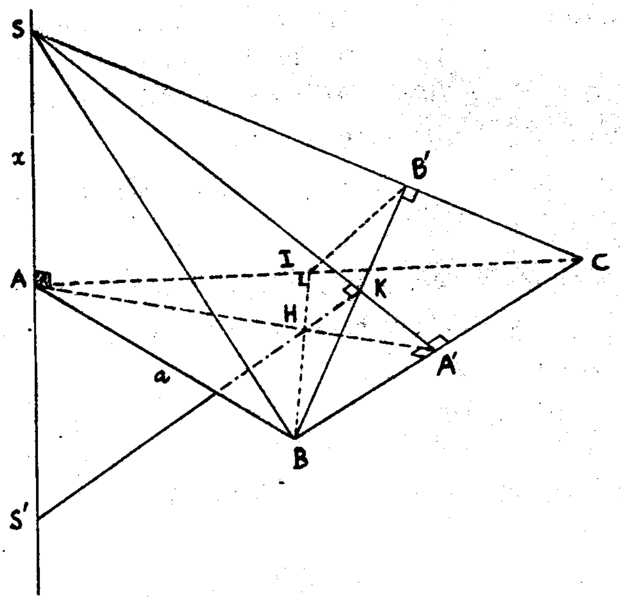
1. Cho tam giác đều ABC cạnh a, d là đường thẳng vuông góc với ABC tại A. Lấy S $\in$ d và đặt AS = x.

   a) Chứng minh rằng HK $\perp$ (SBC) (H,K là trực tâm của tam giác ABC và SBC).

b) Chứng minh rằng 7 điểm S, H, K, I, J, B', C' nằm trên 1 mặt cầu (I,J là trung điểm AC, AB và B', C' là chân đường cao vẽ từ B và C trong tam giác SBC.

c) HK cắt d tại S'. Định x để SS' ngắn nhất.

Giải



a) *Chứng minh : HK ⊥ (SBC)*

Gọi A' là trung điểm của BC.

Ta có :

$$\begin{cases} AA' \perp BC \\ SA' \perp BC \end{cases}$$ (tam giác cân:trung tuyến cũng là đường cao)

Vậy BC ⊥ (SAA')

Do đó BC ⊥ HK ⊂ (SAA') (1)

Ta cũng có :

$$\left.\begin{array}{l} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BI \perp (SAC)$$

Do đó : $BI \perp SC$
mà $BB' \perp SC$ $\Rightarrow SC \perp (BIB')$

$\Rightarrow SC \perp HK \subset (BIB')$ (2)

(1) và (2) cho : $HK \perp (SBC)$.

b) *Chứng minh 7 điểm S, H, K, I, J, B', C' ở trên 1 mặt cầu*

Ta có : $\widehat{SKH} = 90^o$ (vì $HK \perp (SBC)$ chứa SK)

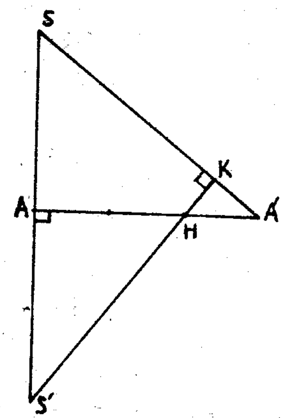
$\widehat{SIH} = 90^o$ (vì $BI \perp (SAC)$ chứa SI)

$\widehat{SB'H} = 90^o$ (vì $SC \perp (BIB')$ chứa B'H)

Tương tự : $\widehat{SJH} = \widehat{SC'H} = 90^o$.

Vậy : 7 điểm S, H, K, I, J, B', C' nằm trên mặt cầu đường kính SH.

c) *Định x để SS' ngắn nhất*



Xét tam giác SA'S' có H là trực tâm, ta có :

$\Delta S'AH \sim \Delta A'AS$ nên :

$$\frac{AS'}{AA'} = \frac{AH}{AS}$$

hay $AS'.AS = AA'.AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{a^2}{2}$ (vì $AH = \frac{2}{3}AA'$)

Theo bất đẳng thức Côsi ta lại có :

$SS' = AS + AS' \geq 2\sqrt{AS.AS'} = a\sqrt{2}$

(dấu = xảy ra khi $AS' = AS = x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$)

Vậy SS' ngắn nhất ($= a\sqrt{2}$) khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2. Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{BAC} = 90^o$; $AB = 2a$; $AC = 3a$; $SB \perp (ABC)$ và $SB = a\sqrt{3}$. Lấy $M \in SC$ và đặt $CM = x$. Gọi H và K là hình chiếu của M xuống (ABC) và (SAB). Mặt phẳng (MHK) cắt AB tại L.

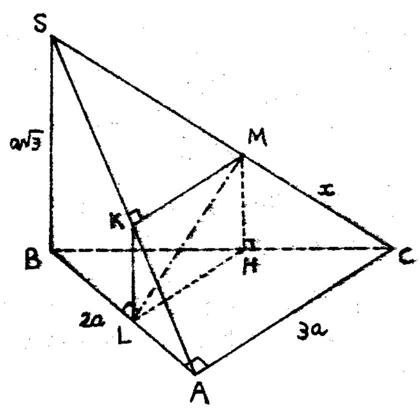
a) Chứng minh rằng MHLK là hình chữ nhật. Tính diện tích của hình chữ nhật này theo a và x. Tính x để MHLK là hình vuông.

b) Tìm tập hợp tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp B.MHLK khi M chạy trên SC.

c) Định x để ML ngắn nhất. Khi đó chứng tỏ rằng ML là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Giải

a) * *Chứng minh MHLK là hình chữ nhật*



Để ý rằng :
AC $\perp$ (SAB)
(vì AC $\perp$ SA và
AC $\perp$ AB).

Ta lại có :
MK $\perp$ (SAB)

Suy ra :
MK // AC
(K $\in$ SA)

Tương tự :
MH // SB.

Do đó, (MHK)
cắt (SAB) theo KL // MH // SB và (MHK) cắt (ABC) theo HL // MK // AC.

Mà SB $\perp$ AC nên MH $\perp$ LH.

Vậy : MHLK là 1 hình chữ nhật.

* *Tính* S_{MHLK}

Ta có :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{13} \; ; \; SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = 4a$$

$$\frac{MH}{SB} = \frac{CM}{CS} = \frac{x}{4a} \quad \Rightarrow \quad MH = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{MK}{AC} = \frac{SM}{SC} = \frac{4a - x}{4a} \quad \Rightarrow \quad MK = \frac{3(4a - x)}{4}$$

Vậy : $\quad S_{MHLK} = MH.MK = \dfrac{3x(4a-x)\sqrt{3}}{16}$

* *Định x để MHLK là hình vuông*

MHLK là hình vuông $\Leftrightarrow$ MH = MK

$$\Leftrightarrow \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{3(4a - x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2a\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1)$$

b) *Tìm tập hợp tâm mặt cầu ngoại tiếp B.MHLK*

* Ta có : $\quad ML \perp BL \quad$ (vì $MH \perp (ABC)$ và $HL \perp BL$)

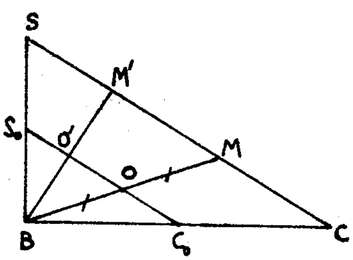
$\Rightarrow \widehat{BLM} = 90^o$.

Ta cũng có : $\widehat{BHM} = 90^o \quad$ (vì $MH \perp BC$)

$\widehat{BKM} = 90^o \quad$ (vì $MK \perp (SAB)$ chứa BK)

Vậy mặt cầu đường kính BM là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp B.MHLK.

* . Tâm O của mặt cầu ngoại tiếp là trung điểm của BM nên $O \in$ đoạn trung bình S_oC_o khi M lưu động trên SC.



. Đảo lại, lấy $O' \in S_oC_o$, BO' cắt SC tại M'. Kẻ $M'H' \perp (ABC)$, $M'K' \perp (SAB)$; (M'H'K') cắt AB tại L'. Ta dễ dàng chứng minh được O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp B.M'H'L'K'.

Vậy tập hợp tâm O là đoạn S_oC_o.

c) *Định x để ML ngắn nhất*

Ta có : $\quad ML^2 = MH^2 + MK^2 = \dfrac{1}{16}\,[3x^2 + 9(4a - x)^2]$

$$ML = \frac{1}{2}\sqrt{3(x^2 - 6ax + 12a^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3[(x-3a)^2 + 3a^2]}$$

Do đó ML nhỏ nhất khi $x = 3a$ và khi đó giá trị nhỏ nhất là $ML = \frac{3a}{2}$.

* Chứng tỏ rằng khi đó ML là đoạn vuông góc chung của SC và BA:

. Ta có : $ML \perp AB$ (theo chứng minh ở câu b)

. Ta cũng có :

$$\frac{AL}{AB} = \frac{CH}{CB} = \frac{CM}{CS} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4} \Rightarrow AL = \frac{3}{4}.2a = \frac{3a}{2}$$

$$LC^2 = AC^2 + LA^2 = 9a^2 + \frac{9a^2}{4}$$

Mà : $ML^2 + CM^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + 9a^2$

do đó : $LC^2 = ML^2 + CM^2 \Leftrightarrow ML \perp MC.$

Vậy : ML là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

3. Ax và By là hai nửa đường thẳng chéo nhau và tạo với nhau 1 góc α, nhận $AB = a$ làm đoạn vuông góc chung. Lấy $M \in Ax$, $N \in By$ và đặt $AM = x$; $BN = y$.

a) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABy).

b) Giả sử ta có : $xy = \frac{a^2}{\cos\alpha}$, chứng minh rằng $AN \perp BM$.

c) Giả sử $MN = x + y$ và $E \in MN$ sao cho $EM = x$, $EN = y$. Tính khoảng cách từ E đến các mặt (ABy) và (BAx). Suy ra rằng E cách đều hai mặt phẳng này.

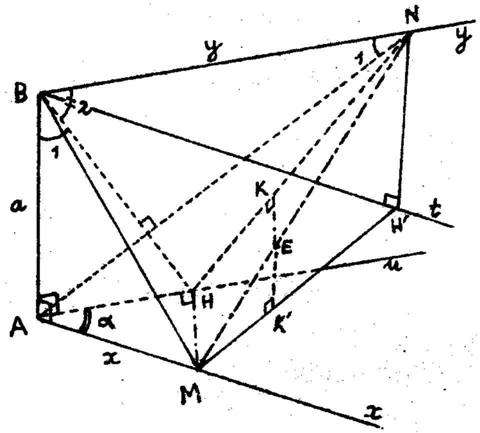
Giải

a) *Tính khoảng cách d[M,(ABy)]*

. Kẻ Au // By, ta có :

$\widehat{xAu} = \alpha =$ góc (Ax,By)

$AB \perp (Ax,Au)$ (vì $AB \perp Ax$ và $AB \perp Au$).



* Kẻ $MH \perp Au$ ($H \in Au$)

Do còn có : $MH \perp AB$ (vì $AB \perp (Ax,Au)$)

nên $MH \perp (ABy) \equiv (AB,Au)$.

Vậy $MH = d[M,(ABy)]$.

* Tam giác vuông AMH cho :

$MH = x\sin\alpha$ và $AH = x\cos\alpha$.

Vậy : $d[M,(ABy)] = x\sin\alpha$.

b) *Cho biết* $xy = \dfrac{a^2}{\cos\alpha}$ *(1) , chứng minh* $AM \perp BM$.

Hệ thức (1) có thể viết :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{x\cos\alpha} = \frac{y}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{BN}{AB}$$

Vậy hai tam giác vuông ABH và BNA đồng dạng.

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^o$ nên $\widehat{N_1} + \widehat{B_2} = 90^o$.

Vậy : BH $\perp$ AN.

Ta lại có BH là hình chiếu của BM xuống (ABy) , nên :

BM $\perp$ AN (định lí 3 đường vuông góc).

c) *Tính $d[E,(ABy)]$ và $d[E,(ABx)]$.*

Kẻ EK $\perp$ (ABy) $\Leftrightarrow$ EK // MH.

Ta có :

$$\frac{EK}{MH} = \frac{NE}{NM} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow EK = \frac{xy\sin\alpha}{x+y}$$

Tương tự, ta vẽ Bt // Ax , NH' $\perp$ Bt (H' $\in$ Bt) :

NH' = d[N,(ABx)] = $y\sin\alpha$.

Kẻ EK' $\perp$ (ABx), ta có :

$$\frac{EK'}{NH'} = \frac{ME}{MN} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow EK' = \frac{xy\sin\alpha}{x+y}$$

Vậy E cách đều hai mặt (ABx) và (ABy).

4. Cho tam giác đều ABC, cạnh a ; Bx và Cy là hai nửa đường thẳng cùng chiều và cùng vuông góc với (ABC). Lấy B' $\in$ Bx và C' $\in$ Cy sao cho : BB' + CC' = 2b (b là 1 hằng số).

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (AB'C') luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Tính khoảng cánh từ A đến (Bx, Cy) và từ A đến B'C' theo a, và α = góc (B'C', Bx).

c) Định vị trí của mặt phẳng (AB'C')để tam giác AB'C' có diện tích bé nhất.

Giải

a) *Chứng minh (AB'C') chứa một đường thẳng cố định*

Gọi I, J, là trung điểm của BC và B'C'. Ta có :

$$IJ = \frac{1}{2}(BB' + CC') = b$$

IJ // Bx // Cy.

Mà : điểm I cố định, b hằng số nên J cố định.

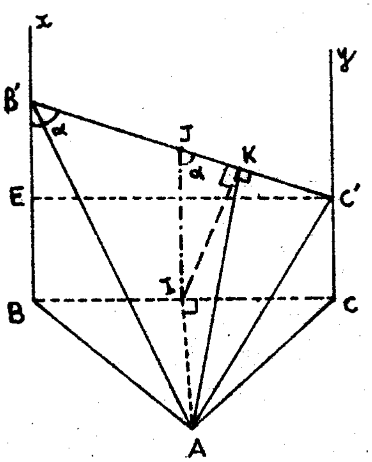
Vậy mặt phẳng (AB'C') luôn chứa đường thẳng AJ cố định.

b) *Tính d[A,(Bx,Cy)] và d[A,B'C']*

* Ta có :

$$\begin{cases} AI \perp BC & (\Delta ABC \text{ đều, trung tuyến AI cũng là đường cao}) \\ AI \perp Bx & (\text{vì } Bx \perp (ABC)) \end{cases}$$

Do đó $AI \perp (Bx,Cy)$.



Vậy :

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = d[A,(Bx,Cy)]$$

(vì AI là đường cao của tam giác đều).

* Kẻ $AK \perp B'C'$ $(K \in B'C') \Rightarrow IK \perp B'C'$ (định lí 3 đường vuông góc).

Tam giác vuông IJK cho :

$IK = IJ\sin\alpha = b\sin\alpha$.

Tam giác vuông AIK cho :

$$AK = \sqrt{AI^2 + IK^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} + b^2\sin^2\alpha}$$

Vậy : $$d[A,B'C'] = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + b^2\sin^2\alpha}$$

c) *Vị trí của (AB'C') để $S_{AB'C'}$ nhỏ nhất*

Kẻ C'E // BC $(E \in Bx)$

Tam giác vuông B'EC' cho :

$$B'C' = \frac{EC'}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad (\text{vì } EC' = BC = a)$$

Do đó : $$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}AK.B'C'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + b^2 \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3a^4}{4\sin^2\alpha} + a^2 b^2}$$

Vậy : $S_{AB'C'}$ bé nhất $\Leftrightarrow$ $\dfrac{3a^4}{4\sin^2\alpha}$ bé nhất (vì a^2b^2 = hằng số)

$\Leftrightarrow$ $\sin\alpha = 1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ B'C' // BC

Tóm lại $S_{AB'C'}$ bé nhất khi mặt phẳng AB'C' qua AJ và song song với BC.

BÀI LÀM THÊM

1. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và OA = a ; OB = b ; OC = c.
   a) Chứng minh rằng hình chiếu H của O xuống ABC là trực tâm của tam giác ABC.
   b) Tính khoảng cách từ O đến (ABC).
   c) Chứng minh rằng $S^2_{ABC} = S^2_{OBC} + S^2_{OCA} + S^2_{OAB}$.
   Suy ra rằng $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

Hướng dẫn :

a) Có thể dùng định lí 3 đường vuông góc.

b) $d[O,(ABC)] = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

2. Cho hình vuông ABCD cạnh a, Ax là nửa đường thẳng vuông góc với ABCD. Lấy S ∈ Ax, α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.
   a) Chứng minh rằng α luôn chứa 1 đường thẳng cố định khi S lưu động trên Ax.
   b) Gọi B', C', D' là giao điểm của α với SB, SC, SD. Chứng

minh rằng tứ giác AB'C'D' nội tiếp được và 7 điểm A, B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu cố định.

c) Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' có 2 đường chéo vuông góc và tính diện tích của AB'C'D' khi AS = a.

Hướng dẫn :

a) Chứng minh BD // α, khi đó α chứa Au // BD ; Au cố định.

b) Chứng minh AB' $\perp$ (SBC).

c) $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} AC'.B'D' = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

3. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và vuông góc, nhận AB làm đoạn vuông góc chung. A $\in d_1$, B $\in d_2$; (π) là mặt phẳng trung trực của AB và M $\in (\pi)$.

a) Chỉ cách dựng giao tuyến của mặt phẳng (M,d_2) với mặt phẳng α qua A và vuông góc với AB. Suy ra cách dựng đường thẳng qua M và cắt d_1 tại E, d_2 tại F.

b) Chứng minh rằng $AE^2 + BF^2 = 4OM^2$ (O là trung điểm của AB.

Hướng dẫn :

a) Dựng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BM}$. Dựng Nx // d_2. Nx là giao tuyến phải dựng.

b) Gọi F' = là hình chiếu của F trên α. EF' là cạnh huyền của 1 tam giác vuông đỉnh A mà trung tuyến vẽ từ A bằng OM.

4. Cho tam giác đều ABC cạnh a, tâm là O. Ax, By, Cz và Ot là những nửa đường thẳng cùng chiều và cùng vuông góc với (ABC). Lấy $O_1 \in$ Ot sao cho $OO_1 = a$. Một mặt phẳng α qua O_1 cắt Ax, By, Cz tại A_1 , B_1 , C_1.

a) Chứng minh rằng O_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

b) Chứng minh rằng $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3a$.

c) Giả sử thêm rằng $CC_1 = a$; tìm tập hợp hình chiếu của B xuống α.

Hướng dẫn :

a) Vẽ Iu $\perp$ (ABC) cắt B_1C_1 tại I_1 (I là trung điểm BC). Chứng minh $A_1O_1 = \frac{2}{3}A_1I_1$.

b) Xem bài khoảng cách.

c) 1 phần đường tròn trong mặt phẳng (Ax,By).

b) Tính khoảng cách từ S đến (ABC).

c) Tính khoảng cách từ S' đến (SAB), với S' là hình chiếu của S trên BC.

Hướng dẫn : Chú ý S' là trung điểm IC.

♦**5.** Cho 2 mặt phẳng α, β cắt nhau và 2 điểm A, B có tổng số khoảng cách đến 2 mặt phẳng α, β bằng nhau. Chứng minh một điểm M bất kì trên AB có tổng số khoảng cách đến 2 mặt phẳng α và β không đổi.

Hướng dẫn :

Tính tổng số khoảng cách từ M đến 2 mặt phẳng theo khoảng cách từ A,B đến 2 mặt phẳng và $k = \frac{MA}{AB}$.

Vấn đề 4 : Dựng thiết diện vuông góc với một mặt phẳng

Dùng định lí : a,$\alpha \perp \beta \Rightarrow a \subset \alpha$ hay a $/\!/ \alpha$ để xác định thiết diện.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp SABCD có SA vuông góc ABCD, SA = a ; ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Dựng và tính diện tích thiết diện qua SO và vuông góc (SAD).

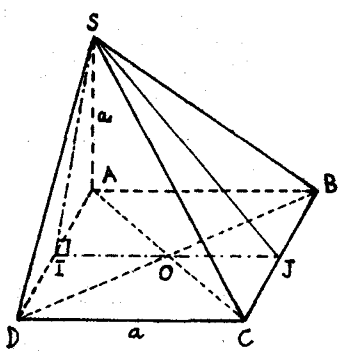
Giải

Gọi (P) là mặt phẳng qua SO và vuông góc (SAD).

$AB \perp AD, SA \Rightarrow AB \perp (SAD)$

$\Rightarrow AB /\!/ (P)$

Do đó (P) cắt (ABCD) theo giao tuyến qua O và song song AB. Giao tuyến này cắt AD, BC tại trung điểm I, J.



Thiết diện là tam giác vuông SIJ.

Ta có : $SI^2 = SA^2 + AI^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích thiết diện :

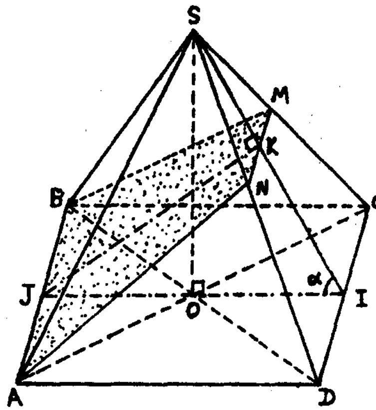
$$S = \frac{1}{2} SI.IJ = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}.$$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, hình chiếu của S trên (ABCD) là tâm O của ABCD. Gọi I là trung điểm CD. Góc của SI và (ABCD) là α. Mặt phẳng (P) qua AB và vuông góc (SCD).

Xác định thiết diện của (P) với hình chóp. Định α để (P) cắt đoạn SC. Tính diện tích thiết diện theo a và α.

Giải



* Gọi J là trung điểm AB.

Ta có : $CD \perp SO, IJ$

$\Rightarrow CD \perp (SIJ)$

Do đó : (SIJ) vuông góc (SCD) theo giao tuyến SI.

Hạ JK vuông góc SI tại K thì $JK \perp (SCD)$.

Ta có : $AB \subset (P)$, $(P) \perp (SCD)$

nên : $JK \subset (P)$.

Hơn nữa AB // CD nên (P) cắt (SCD) theo giao tuyến qua K song song với CD và cắt SC,SD tại M,N. Thiết diện là hình thang ABMN.

SO là trục đường tròn (ABCD) nên SA = SB = SC = SD.

Suy ra : $SM = SN$, $\Delta SBC = \Delta SAD$.

Do đó : $BM = AN$.

Vậy thiết diện là hình thang cân ABMN.

* Vì $SO \perp (ABCD)$ nên $\widehat{OIS} = \alpha < 90^o$

Ta có : (P) cắt đoạn SC $\Leftrightarrow$ (P) cắt đoạn SI

$\Leftrightarrow \widehat{ISJ} < 90^o \Leftrightarrow \widehat{OSI} < 45^o \Leftrightarrow 45^o < \alpha < 90^o$.

* Ta có : $JK = IJ\sin\alpha = a\sin\alpha$

$IK = IJ\cos\alpha = a\cos\alpha$; $SI = \dfrac{OI}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$

$$\frac{MN}{CD} = \frac{SK}{SI} = \frac{SI - IK}{SI} \Rightarrow MN = \frac{CD(SI - IK)}{SI}$$

$$\Rightarrow MN = -a\cos 2\alpha$$

Diện tích thiết diện :

$$S = \frac{1}{2}(AB + MN).JK = a^2.\sin^3\alpha .$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. O là hình chiếu của A trên (BCD), I là trung điểm CD. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với (BCD) cắt cạnh BC; BD tại M, N. Đặt $BM = x$, $BN = y$ $(0 < x,y \le a)$.
   a) Tính tỉ số diện tích các tam giác BOM và BIC ; BON và BID; BMN và BCD theo a,x,y. Suy ra : $3xy = a(x + y)$.
   b) Xác định vị trí mặt phẳng (P) để nó chia tam giác BCD thành hai phần có diện tích bằng nhau.

2. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, hình chiếu của S trên ABCD là tâm O của ABCD; $SO = h$. Mặt phẳng (P) qua AB và vuông góc (SCD) cắt SC và SD tại M,N.
   a) Tìm điều kiện giữa a và h để mặt phẳng (P) cắt đoạn SC.
   b) Tính diện tích thiết diện.

♦3. Cho hình chóp ABCDE có : ABC là tam giác vuông tại A và BCDE là hình chữ nhật nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Cho $AB = a$, $AC = b$, $CD = c$. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Mặt phẳng (P) qua AH và vuông góc (BCDE).

a) Xác định thiết diện của (P) và hình chóp ABCDE. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện khi $a > b$ và $a^2 + b^2 < c^2$

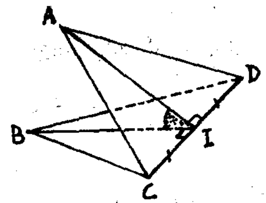
b) Đường thẳng qua E và vuông góc BD cắt BC tại F. Tính BF. Suy ra điều kiện của a và c để mặt phẳng (P) cắt đoạn BE trong trường hợp (P) vuông góc BD.

Vấn đề 5 : Xác định góc phẳng (số đo) của nhị diện

Trường hợp 1

Xác định góc phẳng của nhị diện (A,CD,B) với ACD và BCD là hai tam giác cân cạnh đáy CD :

Gọi I là trung điểm CD ta có AI,BI ⊥ CD nên $\widehat{AIB}$ là góc phẳng nd.(CD).

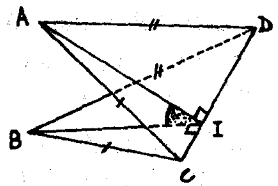


Trường hợp 2

Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau với AC = BC và AD = BD :

Gọi I là chân đường cao AI của tam giác ACD, vì hai tam giác ACD và BCD bằng nhau nên BI ⊥ CD.

Do đó $\widehat{AIB}$ là góc phẳng nd.(CD).

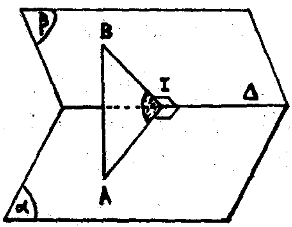


Trường hợp 3

Xác định góc phẳng của nd.(α,Δ,β) :

Tìm $A \in \alpha$, $B \in \beta$ sao cho $AB \perp \Delta$ (thường $AB \perp \alpha$ hay $AB \perp \beta$).

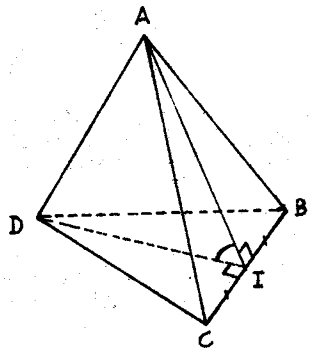
Chiếu A trên Δ thành I. Ta có $\widehat{AIB}$ là góc phẳng của nd(α,Δ,β).



VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính góc phẳng nhị diện (A,BC,D).

Giải



Gọi I là trung điểm BC.

Tam giác ABC, DBC đều nên :

$$AI, DI \perp BC.$$

Do đó : AID là góc phẳng nhị diện (A,BC,D).

Ta có : $AI = BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác ADI ta có :

$$AD^2 = AI^2 + DI^2 - 2AI.DI\cos\widehat{AID}$$

Do đó :

$$\cos\widehat{AID} = \frac{AI^2 + DI^2 - AD^2}{2AI.DI} = \frac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy : góc phẳng nhị diện (A,BC,D) là $\arccos \dfrac{1}{3}$.

VÍ DỤ 2 :

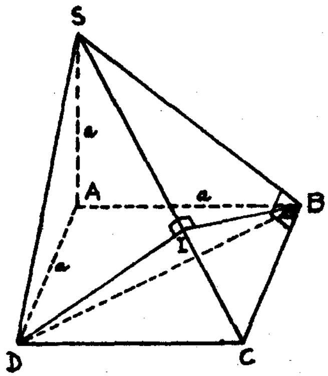
Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc (ABCD) và SA = a. Tính góc phẳng của các nhị diện :

a) (SBC,ABCD) ; b) (SBC,SDC).

Giải

a) *Góc phẳng nhị diện (BC)*

Ta có : $SA \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB$



nên $\quad BC \perp SB$.

Do đó :

số đo nd(BC) $\doteq \widehat{SBA} = 45^o$

b) *Góc phẳng nhị diện (SC)*

Vẽ đường cao BI của tam giác SBC.

Vì tam giác SBC và SDC bằng nhau nên : $DI \perp SC$

Do đó :

số đo nd(SC) $= \widehat{BID}$.

Ta có : $\dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$

Suy ra : $DI = BI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Trong ΔBID ta có :

$$BD^2 = BI^2 + DI^2 - 2BI.DI.\cos\widehat{BID}$$

Suy ra :

$$\cos\widehat{BID} = \frac{BI^2 + DI^2 - DB^2}{2BI.DI} = \frac{\dfrac{2a^2}{3} + \dfrac{2a^2}{3} - 2a^2}{2 \cdot \dfrac{2a^2}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Vậy : số đo nhị diện (SC) $= \widehat{BID} = 120^o$.

VÍ DỤ 3 :

Cho tứ diện ABCD có BCD là tam giác đều cạnh a, AB vuông góc (BCD) và AB = 2a. Tính số đo nhị diện (AC).

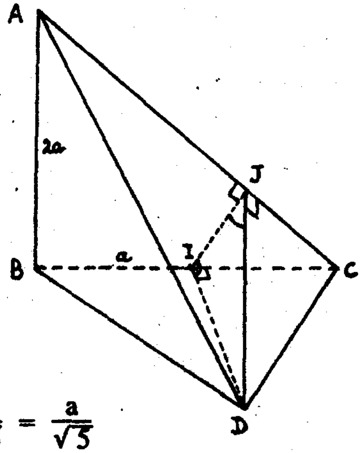
Giải

Gọi I là trung điểm BC.

Ta có : $DI \perp BC$ và $(BCD) \perp (ABC)$

nên : DI ⊥ (ABC).

Do đó : DI ⊥ AC.



Hạ IJ vuông góc AC tại J ta có:

AC ⊥ DI,IJ ⇒ AC ⊥ (DIJ)

⇒ AC ⊥ DJ

Suy ra : số đo nhị diện (AC) $= \widehat{DJI}$.

Ta có : $\sin\widehat{ACB} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$IJ = IC\sin\widehat{ACB} = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

Do đó : $tg\widehat{DIJ} = \dfrac{DI}{IJ} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

Vậy : số đo nhị diện (AC) = arctg $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABCD có SA = 2a, SA vuông góc (ABCD), ABCD là hình vuông cạnh a. Tính số đo các nhị diện :

   a) (A,SD,C) ; b) (A,BD,S) ; c) (SAD,SBC).

2. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông, SA vuông góc (ABCD), SB hợp với đáy một góc α. Định α để số đo nhị diện (B,SC,D) là 120^o.

3. Cho hình chữ nhật ABCD. Trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD) theo giao tuyến BD, ta lấy điểm M sao cho $\widehat{BMD} = 90^o$.

   a) Chứng minh ΔMAC vuông.

   b) Xác định góc phẳng nhị diện (MAB,MCD). Chứng minh hai mặt phẳng (MAB) và (MCD) không thể vuông góc nhau.

4. Cho 3 nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz không cùng trong một phẳng với xOy = 90^{o}, yOz = xOz = 60^{o}. Tính số đo nhị diện tạo thành bởi 2 mặt phẳng (xOz) và (yOz).

5. Trong mặt phẳng (P) cho 2 đường tròn (O), (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi I là trung điểm tiếp tuyến chung ngoài. OS và O'S' vuông góc (P) và ở cùng phía đối với (P) với OA = OS, O'A = O'S'. Xác định góc phẳng của nhị diện (S,AI,S'). Chứng minh nhị diện này vuông.

Vấn đề 6 : Xác định mặt phân giác

* Mặt phân giác của nhị diện (α,Δ,β) xác định bởi Δ và đường phân giác một góc phẳng của nhị diện, hay bởi Δ và điểm I cách đều hai mặt α,β.

VÍ DỤ 1 :

Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By vuông góc nhau và nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Vẽ Bt song song Ax. Trên Ax , By lần lượt lấy 2 điểm M , N sao cho MN = AM + BN.

a) Xác định mặt phân giác α của nhị diện (ABy,ABt).

b) Lấy điểm I trên đoạn MN sao cho MI = AM. Chứng minh I nằm trên α.

Giải

a) *Mặt phân giác nhị diện (ABy,ABt)*

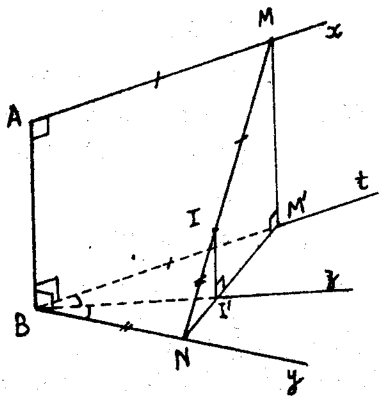
Ta có : AB $\perp$ By,Bt nên $\widehat{yBt}$ là góc phẳng của nhị diện (ABy,ABt).

Do đó vẽ đường phân giác Bz của $\widehat{yBt}$ thì (ABz) là mặt phân giác α của nhị diện (AB).

b) *I nằm trên α*

Gọi M' là hình chiếu của M trên Bt, I' là hình chiếu của I trên M'N.

Ta có : $MM' \,//\, AB \Rightarrow MM' \perp M'N \Rightarrow II' \,//\, MM'$ và $BM' = AM$; $IN = BN$



Do đó :

$$\frac{I'M'}{I'N'} = \frac{IM}{IN} = \frac{BM'}{BN}$$

Suy ra : I' là chân phân giác góc B trong $\Delta BM'N$.

Do đó : $I' \in Bz$

Hơn nữa $II' \,//\, MM' \,//\, AB$ nên $II' \subset (ABz) \equiv \alpha$.

Vậy I nằm trên α.

VÍ DỤ 2 :

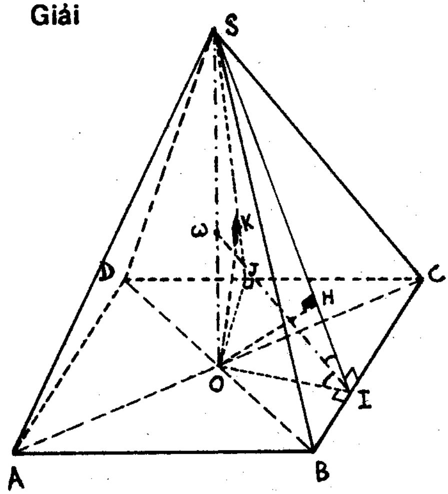
Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thoi, O là giao điểm của AC và BD, SO vuông góc (ABCD).

a) Chứng minh (SAC) và (SBD) lần lượt là mặt phân giác của nhị diện (SA), (SC) và (SB), (SD).

b) Tìm một điểm cách đều cả năm mặt của hình chóp.

Giải

a) * *(SAC) là mặt phân giác nhị diện (SA),(SC)*



Gọi I, J, H, K lần lượt là hình chiếu của O trên CB, CD, SI, SJ.

Ta có :

$BC \perp SO, OI$

$\Rightarrow BC \perp (SOI)$

$\Rightarrow (ABCD) \perp (SOI)$

và $OH \perp (SBC)$.

Tương tự ta có : (ABCD) $\perp$ (SOJ)

và OK $\perp$ (SCD).

Hơn nữa trong hình thoi ABCD ta có : OI = OJ nên hai tam giác vuông SOI và SOJ bằng nhau.

Suy ra : OH = OK hay O cách đều hai mặt (SBC), (SCD);

do đó : (SAC) $\equiv$ (SOC) là mặt phân giác nhị diện (SC).

Chứng minh tương tự ta có (SAC) cũng là mặt phân giác nhị diện (SA).

* *(SBD) là mặt phân giác nhị diện (SB), (SD)*

Chứng minh tương tự.

b) *Tìm một điểm cách đều năm mặt của hình chóp*

Theo câu a) ta có SO là giao tuyến của mặt phân giác các nhị diện (SA), (SB), (SC), (SD).

Ta có : BC $\perp$ OI,SI $\Rightarrow$ $\widehat{SIO}$ là góc phẳng nhị diện (BC).

Vẽ phân giác góc SIO cắt SO tại ω, ta có :

$\omega \in$ SO $\Rightarrow$ ω cách đều 4 mặt (SAB), (SBC), (SCD), (SAD).

$\omega \in$ Iω $\Rightarrow$ ω cách đều (SBC) và (ABCD).

Vậy ω là điểm cách đều cả năm mặt của hình chóp.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thoi tâm O, SO vuông góc (ABCD). Chứng minh SO là giao tuyến của các mặt phân giác của các nhị diện (SA), (SB), (SC), (SD).

2. Cho hình chóp SABCD có SAB là tam giác đều, ABCD là hình vuông và (SAB) vuông góc (ABCD). Xác định mặt phân giác các nhị diện :

   a) (B,AD,S) ; b) (S,CD,A) ; c) (A,SD,C).

3. Cho nhị diện (α,Δ,β). Trong mặt phân giác của nhị diện, vẽ đường thẳng Ot vuông góc Δ tại O. Một mặt phẳng qua Ot cắt α và β theo giao tuyến Ox và Oy.

a) Vẽ góc phẳng uOv của nhị diện (Δ). Chứng minh Ot là phân giác góc này.

b) Lấy M và N trên Ox và Oy. MN cắt Ot tại I. Các đường thẳng qua M,N song song với Δ cắt Ou (trong α) và Ov (trong β) tại M', N'. Chứng minh M', N' I thẳng hàng.

c) Chứng minh Ot là phân giác góc xOy.

♦4 Cho nhị diện (α,Δ,β) và 2 điểm M, N lần lượt trên α, β. Mặt phân giác của nhị diện (α,Δ,β) cắt MN tại I. Gọi P, Q là hình chiếu của M, N trên Δ. Chứng minh :

$$\frac{IM}{IN} = \frac{PM}{QN}$$

Vấn đề 7 : Diện tích hình chiếu

Ta có thể dùng công thức diện tích hình chiếu của một đa giác trên một mặt phẳng : $S' = S\cos\varphi$ để tính diện tích đa giác hay tính góc phẳng của nhị diện.

VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh a, các mặt (SAB), (SBC), (SCA) hợp với (ABC) các góc bằng nhau là α.

a) Chứng minh hình chiếu H của của S trên (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Tính tổng số diện tích bốn mặt của tứ diện.

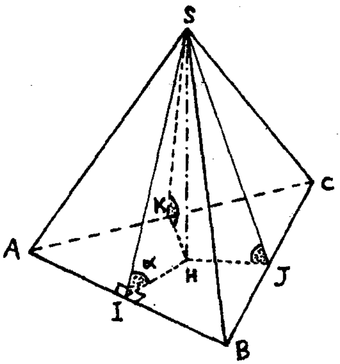
Giải

a) *H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC*

Gọi I, J, K là hình chiếu của H trên AB, BC, CA.Theo định lí 3 đường vuông góc ta có :

$$AB \perp SI \quad , \quad BC \perp SJ \quad , \quad CA \perp SK$$

Do đó : $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = \widehat{SKH} = \alpha$.



Suy ra ba tam giác vuông SIH, SJH , SKH bằng nhau nên HI = HJ = HK. Ta có H cách đều 3 cạnh ΔABC.

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) *Tổng diện tích bốn mặt của tứ diện*

Hình chiếu của (SAB), (SBC), (SCA) trên (ABC) là tam giác (HAB), (HBC), (HCA). Vì ba mặt (SAB), (SBC), (SCA) hợp với (ABC) các góc bằng nhau là α nên:

$$S_{HAB} = S_{SAB}.\cos\alpha \ , \ S_{HBC} = S_{SBC}.\cos\alpha \ , \ S_{HCA} = S_{SCA}.\cos\alpha$$

Do đó :

$$S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}(S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA}) + S_{ABC}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha} S_{ABC} + S_{ABC}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}(1 + \cos\alpha)}{4\cos\alpha}$$

VÍ DỤ 2 :

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính góc phẳng của nhị diện (A,BC,D).

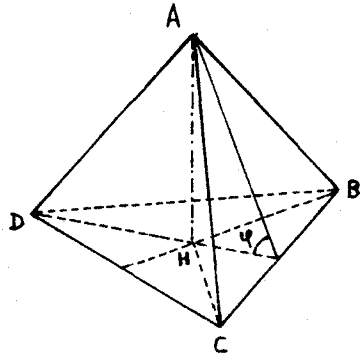
Giải

Vì AB = AC = AD nên hình chiếu H của A trên (BCD) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Ta có : $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$S_{HBC} = \frac{1}{2} HI.BC$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$



Gọi φ là góc phẳng nhị diện (BC) ta có :

$$S_{HBC} = S_{ABC}.\cos\varphi$$

Suy ra :

$$\cos\varphi = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$$

$$= \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy : góc phẳng nhị diện (BC) là $\varphi = \arccos\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thoi cạnh a, $\hat{A} = 60^\circ$, H là hình chiếu của S trên (ABCD). SH hợp với các mặt (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) các góc bằng nhau là α.

a) Chứng minh H là giao điểm của AC và BD.

b) Tính tổng số diện tích các tam giác SAB, SBC SCD, SDA theo a và α.

2. Cho hình vuông ABCD cạnh a. M và N là trung điểm BC và CD. Dựng 3 nửa đường thẳng Ax , By , Dt vuông góc (ABCD) và ở cùng phía đối với (ABCD). Lấy điểm S trên Ax với $SA = \frac{3a}{4}$.

a) Dựng giao điểm E, F của mặt phẳng (SMN) và By, Dt.

b) Tính số đo nhị diện (S,MN,A).

c) Tính diện tích ngũ giác SEMNF theo a.

♦ **3.** Cho hình chóp SABCD có tam giác SAB vuông tại S, (SAB) vuông góc với (ABCD), SA = 2a, SB = $a\sqrt{5}$; ABCD là hình chữ nhật, BC = a.

a) Xác định thiết diện của mặt phẳng (P) qua S và vuông góc BD, với hình chóp.

b) Chứng minh số đo nhị diện (SAB,P) = $\widehat{ADB}$. Tính $\cos\widehat{ADB}$.

c) Tính diện tích thiết diện trên ; suy ra diện tích hình chiếu của thiết diện trên mặt phẳng (SAB).

Hướng dẫn : a) Lưu ý (P) cắt đoạn CD.

Vấn đề 8 : Mặt cầu nội tiếp hình chóp

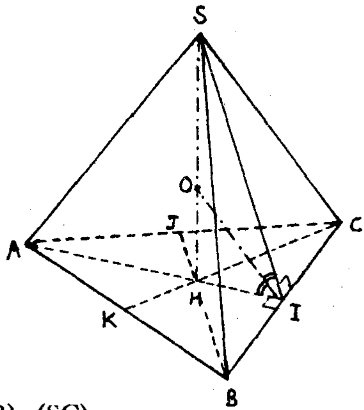
* Mặt cầu tâm O bán kính R tiếp xúc mặt phẳng (P) khi và chỉ khi : d(O,P) = R.
* Mặt cầu nội tiếp hình chóp khi nó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp.
* Tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp là điểm cách đều tất cả các mặt hình chóp.
* Bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp là khoảng cách từ tâm mặt cầu đến một mặt của hình chóp.
* Xác định tâm ω của mặt cầu nội tiếp hình chóp đỉnh S :
  - Tìm điểm I trên mặt đáy cách đều tất cả các mặt bên.
  - Tìm giao điểm ω của mặt phân giác nhị diện tạo bởi một mặt bên và mặt đáy với SI.

VÍ DỤ 1 :

Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên đường vuông góc với (ABC) tại tâm H của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, lấy điểm S với SH = 2a. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp SABC.

Giải

* Gọi I, J, K là trung điểm BC, CA, AB.



Ta có : BC $\perp$ SH,HI

nên BC $\perp$ (SIH)

Do đó : (SBC) $\perp$ (SIH).

Suy ra đường cao vẽ từ H của ΔSHI là khoảng cách từ H đến (SBC).

Vì $\Delta SHI = \Delta SHJ = \Delta SHK$ nên H cách đều 3 mặt bên.

Do đó SH là giao tuyến mặt phân giác các nhị diện (SA), (SB), (SC).

Vẽ phân giác của góc phẳng $\widehat{SIH}$ của nhị diện (BC), cắt SH tại O.

O $\in$ SH $\Rightarrow$ O cách đều (SAB), (SBC), (SCA).

O $\in$ OI $\Rightarrow$ O cách đều (SBC), (ABC).

Vậy O là tâm mặt cầu nội tiếp SABC.

* Trong ΔSHI ta có :

$$. \ SI^2 = SH^2 + HI^2 = 4a^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{147a^2}{36}$$

$$\Rightarrow \ SI = \frac{7a\sqrt{3}}{6}$$

$$. \ \frac{OH}{OS} = \frac{IH}{IS} \quad \Rightarrow \quad \frac{OH}{IH} = \frac{OS}{IS} = \frac{OH + OS}{IH + IS} = \frac{SH}{IH + IS}$$

$$\Rightarrow \ OH = \frac{IH.SH}{IH + IS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot 2a}{\frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{7a\sqrt{3}}{6}} = \frac{a}{4}.$$

Vậy, bán kính mặt cầu nội tiếp là : $r = OH = \frac{a}{4}$.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a , $\widehat{ASB} = \varphi$, SA = SB = SC = SD.

a) Xác định hình chiếu H của S trên (ABCD).

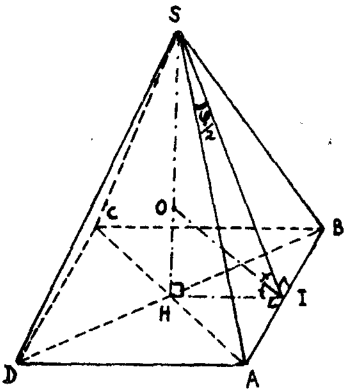
b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Giải

a) *Xác định hình chiếu H*

Ta có SA = SB = SC = SD, nên hình chiếu H của S trên (ABCD) là tâm đường tròn ngoại tiếp ABCD.

b) *Hình cầu nội tiếp hình chóp*



* Gọi I, J, K, L là trung điểm AB , BC , CD , DA. Ta có : AB ⊥ SH,HI nên (SAB) ⊥ (SHI). Do đó đường cao vẽ từ H của ΔSHI là khoảng cách từ H đến (SAB).

· Vì ΔSHI = ΔSHJ = ΔSHK = = ΔSHL nên H cách đều 4 mặt bên của hình chóp. Do đó SH là giao tuyến của 4 mặt phân giác các nhị diện (SA), (SB), (SC), (SD). Vẽ phân giác của góc phẳng $\widehat{SIH}$ của nd(AB), cắt SH tại O.

O ∈ SH ⇒ O cách đều 4 mặt (SAB), (SBC), (SCD), (SDA).

O ∈ OI ⇒ O cách đều 2 mặt (SAB), (ABCD).

Vậy O là tâm hình cầu nội tiếp hình chóp SABCD.

* . Ta có : $SI = AI \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$

$$SH^2 = SI^2 - HI^2 = \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \left(\operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right)$$

$$SH^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{\cos\varphi}}{2\sin \frac{\varphi}{2}}$$

. Trong ΔSHI ta có :

$$\frac{OH}{OS} = \frac{IH}{IS} \Rightarrow \frac{OH}{IH} = \frac{OS}{IS} = \frac{OH + OS}{IH + IS} = \frac{SH}{IH + IS}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{IH.SH}{IH + IS} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{\cos\varphi}}{2\sin \frac{\varphi}{2}}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{\cos\varphi}}{2\left(\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2}\right)}$$

Vậy bán kính hình cầu nội tiếp là :

$$r = OH = \frac{a\sqrt{\cos\varphi}}{2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Xác định tâm, bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đều cạnh a.
2. Xác định tâm , bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh a , SA = SB = SC và số đo nd.(BC) = α.
3. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a tâm O. SO vuông góc (ABCD). Góc của (SAB) và (ABCD) là α.
   a) Xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp.
   b) Chứng minh khi tâm hai mặt cầu này trùng nhau thì $\cos\alpha = \sqrt{2} - 1$.

C. TOÁN TỔNG HỢP

1. Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD. Mặt phẳng (Q) vuông góc (P) theo giao tuyến AB. Điểm M di động sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} = 90^\circ$.

a) Tìm tập hợp (T) các điểm M. Xác định vị trí điểm M để khoảng cách từ M đến (ABCD) lớn nhất.

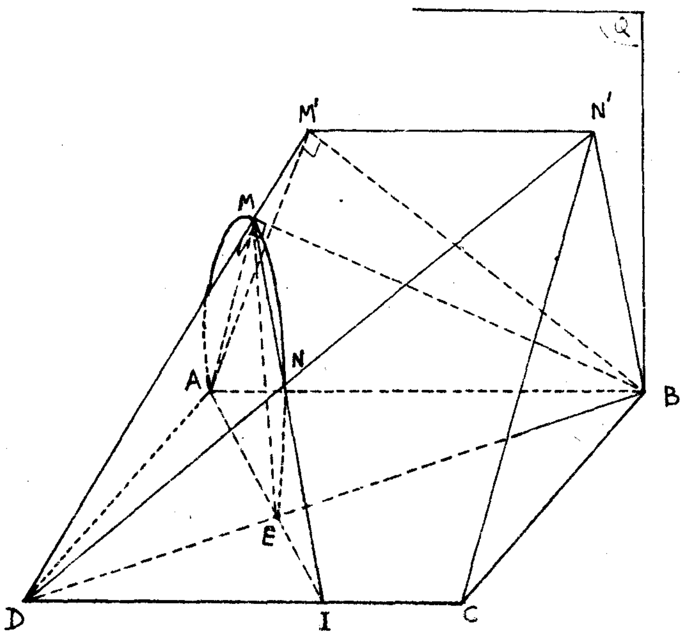
b) M' là giao điểm của MD và (Q). Tìm tập hợp các điểm M'.

c) Mặt phẳng chứa (T) cắt CD tại I, IM cắt lại (T) tại N, ND cắt (Q) tại N'. Chứng minh M'N' // AB.

d) Cho ABCD là hình vuông, hãy chứng minh :

$$\sin^2\widehat{MDB} + \sin^2\widehat{NDB} = \frac{1}{2}$$

Giải



a) * *Tìm tập hợp các điểm M*

– Ta có : $MA \perp MB, MD$

nên : $MA \perp (MBD)$.

Suy ra : $MA \perp BD$.

Do đó M thuộc mặt phẳng α cố định qua A và vuông góc BD tại E.

Ta có $MA \perp (MBD) \Rightarrow MA \perp ME$.

Do đó : M thuộc đường tròn (T) đường kính AE trong mpα

– Đảo lại, lấy $M \in (T)$, ta có : $MA \perp ME, BD \Rightarrow MA \perp (MBD)$

$\Rightarrow MA \perp MB, MD$.

– Vậy : tập hợp các điểm M là đường tròn (T) đường kính AE trong mpα.

* *Vị trí điểm M*

Ta có $\alpha \perp (P)$ theo giao tuyến AE nên hạ MH vuông góc AE tại H thì $MH \perp (P)$. Do đó : $MH = d(M,(P))$.

Ta có : MH lớn nhất $\Leftrightarrow MH = \dfrac{AE}{2} \Leftrightarrow$ M là trung điểm cung $\overset{\frown}{AE}$.

b) *Tập hợp các điểm M'*

– Ta có : $\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \\ (P) \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (Q) \Rightarrow AD \perp M'B \quad (1)$

$\left.\begin{array}{l} MA \perp (MBD) \\ M'B \subset (MBD) \end{array}\right\} \Rightarrow MA \perp M'B \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được : $M'B \perp (MAD)$ nên $M'B \perp M'A$.

Do đó : M' thuộc đường tròn (T') đường kính AB trong mặt phẳng (Q).

– Đảo lại, lấy $M' \in (T')$ và gọi M là hình chiếu của A trên M'D.

Ta có : $M'B \perp M'A, AD \Rightarrow MB' \perp (M'AD) \Rightarrow M'B \perp MA$.

Mà : $MA \perp MD$ nên $MA \perp (M'BD)$ hay $MA \perp MB$.

– Vậy : tập hợp các điểm M' là đường tròn (T') đường kính AB trong mặt phẳng (Q).

c) *Chứng minh M'N' // AB.*

Ta có I là giao điểm của AE và CD.

Vì AB // CD, (Q) ∩ (CDM'N') = M'N' nên M'N' // AB.

d) *Chứng minh* $\sin^2\widehat{MDB} + \sin^2\widehat{NDB} = \frac{1}{2}$

Ta có : M'B ⊥ (MAD) ⇒ M'B ⊥ M'D.

N là một vị trí của M trên (T) nên N' là một vị trí của M' tương ứng nghĩa là N'B ⊥ N'D và N' ∈ (T').

Do đó :

$$\sin^2\widehat{MDB} + \sin^2\widehat{NDB} = \frac{M'B^2}{BD^2} + \frac{N'B^2}{BD^2} = \frac{M'B^2 + M'A^2}{BD^2}$$

(vì M'N' // AB trong (T'))

$$= \frac{AB^2}{BD^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = b, $\widehat{BAD} = \alpha < 90^o$; SA hợp với (ABCD) góc 45^o, SC vuông góc (ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SA và BD.

Giải

* *Đoạn vuông góc chung của SA và BD*

Từ C vẽ đường vuông góc BD tại E.

Ta có : BD ⊥ CE,SC ⇒ BD ⊥ (SCE).

Gọi F là hình chiếu của A trên CE.

SC ⊥ (ABCD) ⇒ (SCE) ⊥ (ABCD)

⇒ AF ⊥ (SCE).

Do đó SF là hình chiếu của SA trên (SCE).

Gọi H là hình chiếu của E trên SF.

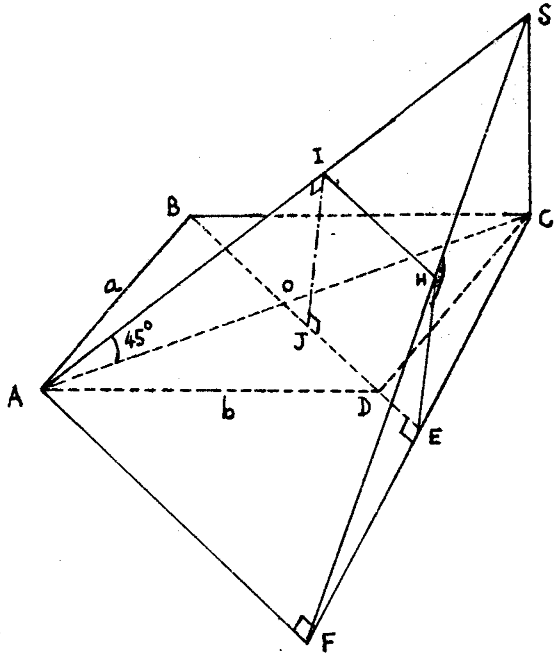
Từ H vẽ đường song song AF cắt SA tại I.

Từ I vẽ đường song song EH cắt BD tại J.

Ta có : $BD \perp (SCE) \Rightarrow BD \perp EH \Rightarrow BD \perp IJ.$

$EH \perp SF \Rightarrow EH \perp (SAF) \Rightarrow EH \perp SA \Rightarrow SA \perp IJ$

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của SA và BD.



* *Tính IJ*

+ Ta có : . diện tích ΔBCD là $s = \frac{1}{2}$ CB.CD.sinC $= \frac{1}{2}$ absinα.

. $BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ (định lí hàm số cosin trong tam giác BCD)

Ta lại có : $s = \frac{1}{2}$ BD.CE $\Rightarrow CE = \frac{2s}{BD}$

$$= \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

Gọi O là giao điểm AC và BD. OE là đường trung bình trong tam giác ACF nên : $EF = CE = \frac{1}{2}CF$.

+ Trong tam giác ACD ta có :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD.CD\cos(\pi - \alpha) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \end{aligned}$$

$$SC \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SAC} = 45^o \Rightarrow SC = AC.$$

+ Ta có :

$$\begin{aligned} SF^2 &= SC^2 + CF^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha + \frac{4a^2b^2\sin^2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \\ &= \frac{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha + 4a^2b^2\sin^2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \\ &= \frac{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos 2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \end{aligned}$$

+ Hai tam giác EHF và SCF đồng dạng nên :

$$\frac{EH}{SC} = \frac{EF}{SF}$$

Do đó :

$$EH = \frac{EF.SC}{SF}$$

$$= \frac{\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sqrt{\dfrac{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos 2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}}$$

Vậy độ dài đoạn vuông góc chung là :

$$IJ = EH = \frac{ab\sin\alpha \,.\, \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos 2\alpha}}$$

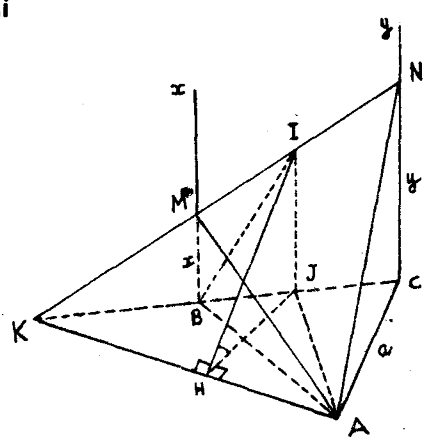
3. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Bx, Cy là 2 nửa đường thẳng cùng vuông góc (ABC) và ở cùng phía đối với (ABC). Trên Bx, Cy lần lượt lấy 2 điểm M,N. Đặt BM = x, CN = y.

a) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh IM < IB < IA. Suy ra tam giác AMN chỉ có thể vuông tại M hay N. Tìm hệ thức giữa a, x, y để tam giác AMN vuông tại M.

b) Cho M, N di động thỏa CN = 2BM. Chứng minh (AMN) cắt (ABC) theo giao tuyến d cố định. Xác định đoạn vuông góc chung của d và Cy ; AM và BC.

c) Vẫn cho CN = 2BM. Xác định M,N để tam giác AMN vuông tại M. Khi đó gọi J là trung điểm BC, hãy chứng minh tam giác JAM vuông cân và tính số đo nhị diện ((ABC),(AMN)).

Giải



a) * *Chứng minh IM < IB < IA*

. Nếu $\widehat{BMI}$ tù thì trong ΔBMI ta có : IM < IB.

Nếu $\widehat{CNI}$ tù thì trong ΔCNI ta có : IN < IC.

Mà IM = IN và IB = IC nên ta luôn luôn có : IM < IB.

. Ta có : IJ // Bx

$\Rightarrow$ IJ $\perp$ (ABC).

mà : $JA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} > JB = \dfrac{a}{2}$ nên IA > IB

Vậy : IM < IB < IA.

* *ΔAMN chỉ có thể vuông tại M hay N*

Vì IA > IM = IN nên ΔAMN không thể vuông tại A.

* *Hệ thức giữa x,y,a để ΔAMN vuông tại M*

Ta có : $MA^2 = MB^2 + AB^2 = x^2 + a^2$

$NA^2 = NC^2 + AC^2 = y^2 + a^2$

Trong hình thang vuông MBCN ta có :

$$MN^2 = BC^2 + (BM - CN)^2 = a^2 + (x - y)^2$$

Do đó : ΔAMN vuông tại M $\Leftrightarrow NA^2 = MN^2 + MA^2$

$\Leftrightarrow y^2 + a^2 = a^2 + (x - y)^2 + x^2 + a^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2xy + a^2 = 0$

b)* *Chứng minh giao tuyến d của (AMN) và (ABC) cố định*

Vì CN = 2BM nên MN cắt BC tại K và có : $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{1}{2}$

Do đó : K cố định. Vậy : d là đường thẳng AK cố định.

* *Đoạn vuông góc chung của d và Cy.*

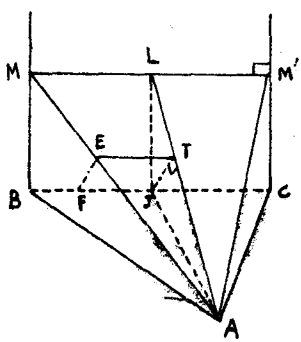
Ta có : AB = BC = BK nên ΔACK vuông tại A.

Do đó : $AK \perp AC$.

Hơn nữa : $Cy \perp (ABC)$ nên $Cy \perp AC$.

Vậy AC là đoạn vuông góc chung của AK và Cy.

* *Đoạn vuông góc chung của AM và BC*



Gọi M' là hình chiếu của M trên Cy, ta có : MM' // BC $\Rightarrow$ BC // (AMM')

Gọi L là trung điểm MM' ta có :

$BC \perp JL, AJ \Rightarrow BC \perp (AJL)$

$\Rightarrow MM' \perp (AJL)$.

Do đó hạ JT vuông góc AL tại T thì $JT \perp (AMM')$.

Đường thẳng qua T song song MM' cắt AM tại E.

Đường thẳng qua E song song với JT cắt BC tại F.

$JT \perp (AMM') \Rightarrow JT \perp AM, MM' \Rightarrow JT \perp AM, BC.$

$EF \parallel JT \Rightarrow EF \perp AM, BC$

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của AM và BC.

c) * *Xác định M,N để ΔAMN vuông tại M*

Theo trên ta có điều kiện để ΔAMN vuông tại M là :

$$2x^2 - 2xy + a^2 = 0$$

Vì CN = 2BM hay y = 2x nên : $x^2 = \frac{a^2}{2}$ hay $y = 2x = a\sqrt{2}$

* *Chứng minh ΔJAM vuông cân*

$$\left.\begin{array}{l} AJ \perp BC \\ (BCMN) \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AJ \perp (BCMN) \Rightarrow AJ \perp JM.$$

Ta có $JM^2 = JB^2 + BM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{4}$

Do đó : $JM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = AJ$

Vậy ΔJAM vuông cân.

* *Số đo nhị diện ((ABC,(AMN))*

Hạ JH vuông góc AK tại H. Theo định lí 3 đường vuông góc ta có IH vuông góc AK. Do đó số đo nd.(AK) = $\widehat{IHJ}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad AK^2 &= KJ^2 + AJ^2 \\ &= \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 3a^2 \quad \Rightarrow \quad AK = a\sqrt{3} \end{aligned}$$

Trong ΔAJK ta có : JH.AK = AJ.KJ

Suy ra : $$JH = \frac{AJ.KJ}{AK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{3a}{4}$$

$$\text{Do đó : } \operatorname{tg}\widehat{IHJ} = \frac{IJ}{JH} = \frac{\frac{3x}{2}}{JH} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \sqrt{2}$$

Vậy số đo nd.[(ABC),(AMN)] = số đo nd.(AK) = arctg $\sqrt{2}$.

4. Cho tứ diện SABC có (SAB) và (SAC) vuông góc (ABC), B và C là hai điểm di động trên đường thẳng Δ cố định không qua A. Cho $SA = h$, $\widehat{BAC} = \alpha < 90^{\circ}$, $AB = x$, $AC = y$, $a = d(A,\Delta)$ (h,α,a : không đổi). Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SC.

a) Tính số đo nd.(S,BC,A).

b) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB, SC.

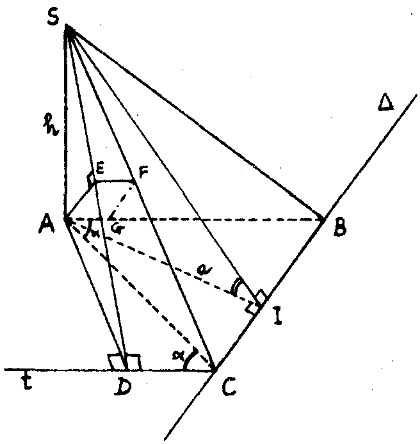
c) Chứng minh A, B, C, H, K nằm trên một mặt cầu (X).

d) Cho $\alpha = 60^{\circ}$. Tính bán kính mặt cầu (X) và x, y để bán kính này nhỏ nhất.

e) Cho $\alpha = 90^{\circ}$. Chứng minh (X) chứa một đường tròn cố định.

Giải

a) *Tính số đo nd.(BC).*



Gọi I là hình chiếu của A trên BC.

Vì : (SAB),(SAC) $\perp$ (ABC) nên SA $\perp$ (ABC).

Do đó : SI $\perp$ BC. Suy ra : $\widehat{SIA}$ = số đo nd.(BC).

Ta có : $\operatorname{tg}\widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{h}{a}$

Vậy :

$$\text{sđ.nd.(BC)} = \operatorname{arctg}\frac{h}{a}$$

b) * *Đoạn vuông góc chung của SC và AB*

Từ C vẽ Ct song song AB ta có : AB // (SCt).

Hạ AD vuông góc Ct tại D. Ta có : Ct $\perp$ AD,SA

nên : Ct $\perp$ (SAD) hay (SCt) $\perp$ (SAD).

Do đó hạ AE vuông góc SD tại E thì AE $\perp$ (SCt).

Đường thẳng qua E và song song Ct cắt SC tại F.

Từ F vẽ đường thẳng song song AE cắt AB tại G.

$$\begin{array}{lll} AE \perp (SCt) \Rightarrow & AE \perp SC, Ct & \Rightarrow \quad AE \perp SC, AB \\ FG \parallel AE \quad \Rightarrow & FG \perp SC, AB & \end{array}$$

Vậy FG là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

* Ta có : $\widehat{ACD} = \alpha$ (sole trong)

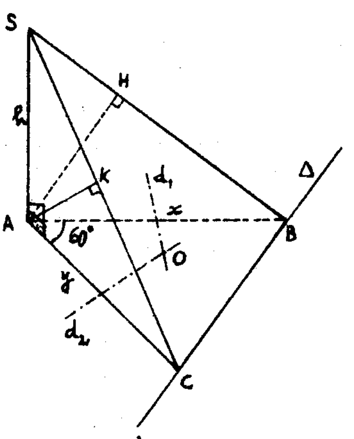
Do đó : $AD = AC\sin\widehat{ACD} = y\sin\alpha$.

$$\Delta SDA \text{ có : } \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{y^2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{h^2 + y^2\sin^2\alpha}{h^2y^2\sin^2\alpha}$$

Suy ra : $FG = AE = \dfrac{hy\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + y^2\sin^2\alpha}}$

c) *A,B,C,H,K nằm trên một mặt cầu*



ΔSAB và ΔSAC có :

$SA^2 = SH.SB = SK.SC$

Do đó : BCKH nội tiếp được.

Suy ra hình chóp A.BCKH có mặt cầu ngoại tiếp.

Vậy A,B,C,H,K nằm trên một mặt cầu (X).

d) *Bán kính mặt cầu và giá trị nhỏ nhất của nó*

* Gọi d_1,d_2 là trung trực của AB, AC trong mặt phẳng (ABC).

Vì ΔAHB, AKC vuông tại H, K nên d_1, d_2 qua tâm 2 đường tròn (AHB), (AKC).

Hơn nữa vì (SAB) , (SAC) $\perp$ (ABC) và $d_1 \perp AB$, $d_2 \perp AC$ nên d_1 , d_2 là trục của các đường tròn (AHB) và (AKC).

Do đó giao điểm O của d_1 và d_2 chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCKH (và cũng là tâm đường tròn (ABC)).

Diện tích ΔABC là : $S = \frac{1}{2} AI.BC = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A$

Suy ra : $BC = \frac{xy\sqrt{3}}{2a}$

Dùng định lí hàm số sin trong ΔABC với $R = OA$ ta có :

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{xy}{a}$$

Vậy : bán kính mặt cầu là $R = \frac{xy}{2a}$.

* Trong ΔABC ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = x^2 + y^2 - xy$$

Do đó :

$$\left(\frac{xy\sqrt{3}}{2a}\right)^2 = x^2 + y^2 - xy \geq 2xy - xy = xy$$

hay : $xy \geq \frac{4a^2}{3}$ nên $R = \frac{xy}{2a} \geq \frac{2a}{3}$

Từ đó suy ra : R nhỏ nhất $\Leftrightarrow R = \frac{2a}{3}$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

e) (X) *qua đường tròn cố định.*

Khi $\alpha = 90^\circ$ thì O là trung điểm BC.

Xét đường tròn (T) tâm I, bán kính IA ở trong mp(I,SA) : (T) là đường tròn cố định.

Cho M ∈ (T) ta có :

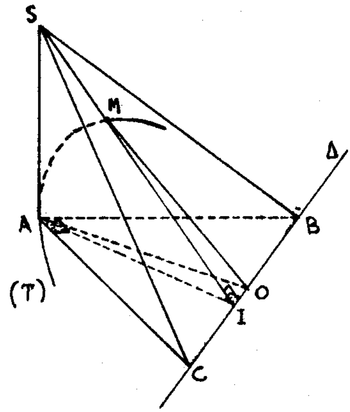
$\Delta OIA = \Delta OIM$ (vì OI chung và IA = IM)

nên OM = OA.

Do đó M nằm trên mặt cầu (X).

Nói cách khác :

Mặt cầu (X) chứa đường tròn (T) cố định.



BÀI LÀM THÊM

1. Trong 2 mặt phẳng vuông góc (P), (Q) lần lượt cho 2 tam giác cân ACD, BCD có CD = 2x, AC = AD = BC = BD = a. Gọi M và N là trung điểm của AB và CD.
   a) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và CD.
   b) Định x để nhị diện (AB) vuông. Khi đó hãy xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

2. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn đường kính AB. Điểm M di động trên đường tròn. Đoạn SA vuông góc (P). H là hình chiếu của A trên SM. Hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và M cắt nhau tại K.
   a) Chứng minh (SAM) ⊥ (SBM).
   b) Tìm tập hợp (T) các điểm H.
   c) Xác định đoạn vuông góc hạ từ H xuống mặt phẳng (SAB). Tìm vị trí của H để đoạn vuông góc này dài nhất.
   d) Chứng minh KH tiếp xúc (T).

3. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác vuông cân ABC với AB = AC = a. Bx, Cy vuông góc và ở cùng một phía với (P). Hai điểm M và N di động lần lượt trên Bx và Cy sao cho ΔAMN vuông tại M. Đặt BM = x và CN = y.

a) Tính y, diện tích ΔAMN, cosin của góc hợp bởi (AMN) với (P) khi $x = a$.

b) I là trung điểm BC. Chứng minh $\widehat{AMI}$ là góc phẳng nd (A, MN, B). Tính giá trị góc này khi $x = a$.

c) Chứng minh A, C, I, M, N cùng nằm trên 1 mặt cầu. Xác định tâm mặt cầu.

4. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$.M di động trên nửa đường tròn và có hình chiếu trên AB là H. Đặt $AH = x$. Trên nửa đường thẳng Mt vuông góc (P) lấy điểm S với $SM = MH$.

a) Tính độ dài các cạnh của tứ diện SABM.

b) Chứng minh số đo nhị diện (P,SAB) không đổi.

c) Định x để hình cầu ngoại tiếp SABM có bán kính lớn nhất.

♦ **5.** Tứ diện đều ABCD có M và N là trung điểm AB và CD. Hình chiếu của tứ diện trên mặt phẳng (P) song song với MN là 1 tứ giác có diện tích S và một góc bằng 60°. Tính tổng số diện tích 4 mặt của tứ diện.

Hướng dẫn :

Hình chiếu của tứ diện trên (P) là 1 hình thang cân. Góc của AB và (P) là α thì góc của CD và (P) là $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Chương VI : PHÉP BIẾN HÌNH

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Phép tịnh tiến

1. Định nghĩa

Phép tịnh tiến vectơ V là phép biến đổi điểm biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

$$T(\vec{V}) : \quad M \longmapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{V}$$

2. Tính chất

Phép tịnh tiến biến :

* một vectơ thành một vectơ bằng nó.
* một đường thẳng thành một đường thẳng cùng phương.
* một mặt phẳng thành một mặt phẳng cùng phương.
* một đường tròn thành một đường tròn cùng bán kính và hai tâm là hai điểm tương ứng.

II. Phép đối xứng

* Hai điểm M và M' đối xứng qua điểm O khi O là trung điểm của MM'.
* Hai điểm M và M' đối xứng qua đường thẳng Δ khi Δ là đường trung trực của đoạn MM'.
* Hai điểm M và M' đối xứng qua mặt phẳng (α) khi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn MM'.

III. Phép vị tự

1. Định nghĩa

Phép vị tự tâm O tỉ số $k \neq 0$ là phép biến đổi điểm biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

$$VT(O,k) : M \longmapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

$k > 0$: phép vị tự dương ; $k < 0$: phép vị tự âm

2. Tính chất

Phép vị tự biến :

* vectơ $\overrightarrow{AB}$ thành vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
* nửa đường thẳng không qua tâm vị tự thành nửa đường thẳng song song cùng chiều nếu $k > 0$, và ngược chiều nếu $k < 0$.
* một mặt phẳng không qua tâm vị tự thành một mặt phẳng song song.
* một đường tròn thành một đường tròn có bán kính

$$R' = |k|R$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : **Tìm tập hợp điểm bằng phép biến hình**

Nếu có một phép biến hình biến điểm P thành điểm M và ta biết tập hợp (F) của P thì tập hợp các điểm M là hình biến của (F) trong phép biến hình trên.

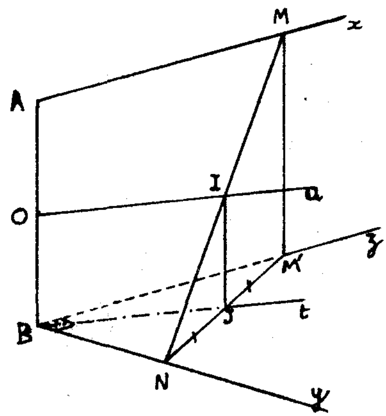
VÍ DỤ 1 :

Cho hai nửa đường thẳng vuông góc và chéo nhau Ax và By nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By. Gọi α là mặt phẳng chứa By và song song với Ax, M' là hình chiếu của M trên α, J và I lần lượt là trung điểm của M'N và MN. Tìm tập hợp của J và I trong các trường hợp sau :

a) AM = kBN, k là hằng số dương.

b) AM + BN = a (a là độ dài cho trước).

Giải



Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp Ax \\ AB \perp By \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp \alpha$$

$\Rightarrow MM' \parallel AB$

$Ax \parallel \alpha \Rightarrow BM' \parallel AM$

Do đó : $BM' = AM$.

a) Theo giả thiết

$AM = kBN$ nên ta có :

$$\frac{BM'}{BN} = k = \text{hằng số dương}$$

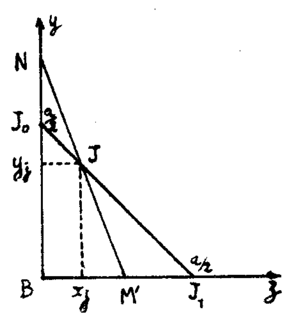
$\Rightarrow$ $M'N \parallel$ phương Δ không đổi.

Suy ra tập hợp trung điểm J của NM' là nửa đường thẳng Bt. (Độc giả tự xét phần đảo).

* Mặt khác $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BO}$ (O là trung điểm của AB)

nên $T(\overrightarrow{BO})$: $J \longmapsto I$

Vậy tập hợp các điểm I là nửa đường thẳng Ou // Bt , Ou là hình tịnh tiến của Bt trong phép tịnh tiến BO.



b) Đặt $AM = BM' = x$; $BN = y$, và $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Theo giả thiết ta có :

$AM + BN = a \Leftrightarrow x + y = a$

Nếu chọn 2 trục tọa độ (Bz,By), ta có tọa độ (x_j, y_j) thỏa : $2x_j + 2y_j = a$ với $x_j \geq 0$, $y_j \geq 0$.

Vậy tập hợp các điểm J là đoạn J_oJ_1 với $J_o \in By$ và $J_1 \in Bz$ và $BJ_o = BJ_1 = \frac{a}{2}$

Suy ra tập hợp các điểm I là đoạn I_oI_1 tịnh tiến của J_oJ_1 bởi phép tịnh tiến $\overrightarrow{BO}$.

VÍ DỤ 2 :

Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz vuông góc từng đôi một. Lần lượt lấy ba điểm A, B, C trên Ox, Oy, Oz và gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Giả sử A và B cố định, điểm C di động trên Oz. Tìm tập hợp các đường trung tuyến phát xuất từ A và B của tam giác ABC và tập hợp điểm G.

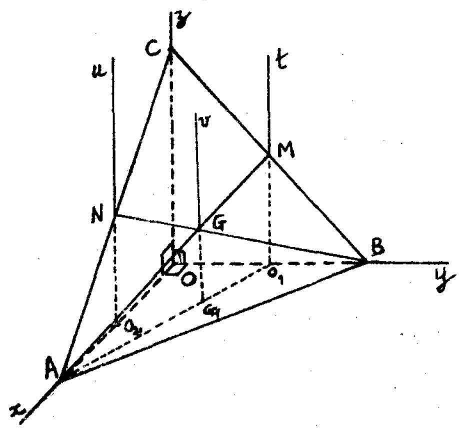
Giải

* Gọi AM và BN là hai trung tuyến của tam giác ABC.

Ta có : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC}$

Do đó :

$VT\left(B, \frac{1}{2}\right) : C \longmapsto M$



Vậy tập hợp các điểm M là nửa đường thẳng O_1t // Oz , O_1t là hình vị tự của Oz bởi phép VT $\left(B, \frac{1}{2}\right)$.

Suy ra tập hợp các đường trung tuyến AM là phần mặt phẳng xác định bởi điểm A và nửa đường thẳng O_1t.

* Tương tự tập hợp các đường trung tuyến BN là phần mặt phẳng xác định bởi điểm B và nửa đường thẳng O_2u với VT $\left(A, \frac{1}{2}\right)$:

$Oz \longmapsto O_2u$

* Ta có : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow VT\left(A, \frac{2}{3}\right) : M \longmapsto G$

Vậy tập hợp các điểm G là nửa đường thẳng G₁v, hình vị tự của O₁t bởi phép vị tự $\left(A, \frac{2}{3}\right)$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho ba nửa đường thẳng Ax, By, Cz song song cùng chiều và không đồng phẳng. Trên Ax, By, Cz lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho AM = BN = CP.
   a) Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn NP.
   b) Suy ra tập hợp trọng tâm G của tam giác MNP.

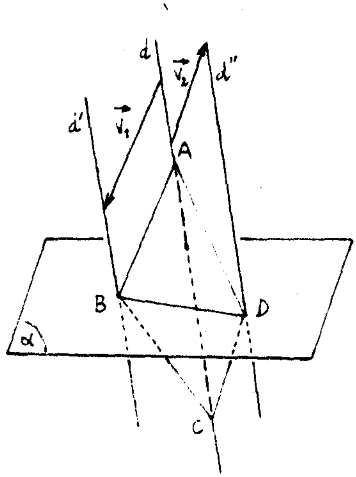
2. Trong mặt phẳng α cho tam giác ABC cố định. Điểm M ở ngoài α. Gọi E, F, G, P, Q, R lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, MA, MB, MC.
   a) Chứng tỏ các đoạn PE, QF, RG đồng quy tại điểm I.
   b) Tìm điểm M để hai tứ giác PQEF và QRFG là những hình chữ nhật.
   c) M di động sao cho $\frac{PE}{QF} = k \neq 1$. Chứng tỏ I di động trên một mặt cầu cố định.

Hướng dẫn : câu c) : Tính $\frac{IE}{IF}$ theo k.

Vấn đề 2 : **Dựng hình bằng phép biến hình**

VÍ DỤ 1 :

Dựng một tứ diện ABCD biết A và C ở trên đường thẳng d; B và D ở trên mặt phẳng α sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_1}$ và $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_1}$ và $\overrightarrow{V_2}$ là 2 vectơ cho sẵn.



Giải

. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_1} \Leftrightarrow T(\overrightarrow{V_1}) : A \longmapsto B$

Mà $A \in d$ nên $B \in d'$ tịnh tiến của d bởi phép tịnh tiến $\overrightarrow{V_1}$. Vậy $\{B\} = d' \cap \alpha$

. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{V_2} \Leftrightarrow T(\overrightarrow{V_2}) : C \longmapsto D$

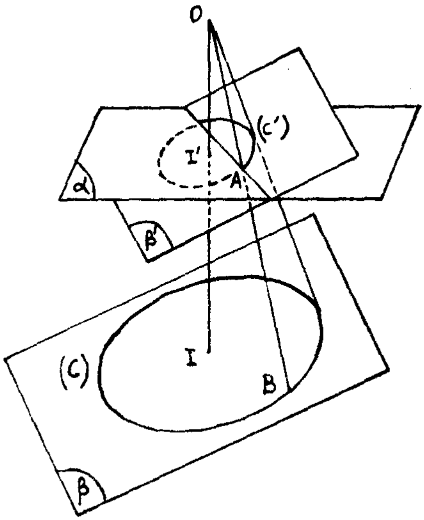
Mà $C \in d$ nên $D \in d''$ tịnh tiến của d bởi phép tịnh tiến $\overrightarrow{V_2}$. Vậy $\{D\} = d'' \cap \alpha$

Từ đó ta suy ra cách dựng tứ diện ABCD.

VÍ DỤ 2 :

Cho điểm cố định O, mặt phẳng cố định α và đường tròn cố định (C) không nằm trong α. Dựng một cát tuyến qua O cắt α tại A và đường tròn (C) tại B sao cho $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$ $(k \neq 0)$.

Giải



$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow VT(O,k) : B \mapsto A$

Mà $B \in (C)$ nên $A \in (C')$, với (C') là đường tròn vị tự của (C) trong phép vị tự tâm O tỉ số k.

Vậy : $\{A\} = \alpha \cap (C')$.

(C') nằm trongmặt phẳng $(\beta') // \beta$ và tâm I' định bởi $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ với I là tâm của (C). Từ đó suy ra cách dựng cát tuyến OAB.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho ba mặt phẳng α, β, γ có một điểm O chung. Dựng tam giác mà các đỉnh A, B, C lần lượt ở trên α, β, γ sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_1}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{V_2}$.

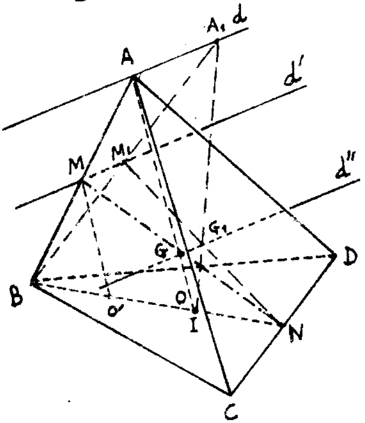
2. Cho hai mặt phẳng giao nhau α và β và điểm O ở ngoài hai mặt phẳng này. Dựng một đường thẳng qua O cắt α tại A và cắt β tại B sao cho OA = a và OB = b.

C. TOÁN TỔNG HỢP

1. Cho tứ diện ABCD mà B, C, D cố định và A lưu động. Gọi M, N, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN.
   a) Tìm tập hợp các điểm M và G khi A lưu động trên đường thẳng d.
   b) Gọi A_1 là vị trí đặc biệt của A và G_1 là điểm tương ứng của G. So sánh $\overrightarrow{GG_1}$ và $\overrightarrow{AA_1}$. Chứng tỏ AG qua điểm cố định I.

Giải

a) * M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BA}$



Vậy :

$VT\left(B, \frac{1}{2}\right) : A \longmapsto M$

Do đó khi A lưu động trên d thì M' lưu động trên d' // d với d' là hình vị tự của d.

* Ta cũng có $\overrightarrow{NG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{NM}$

$\Leftrightarrow VT\left(N, \frac{1}{2}\right) : M \longmapsto G$

Vậy tập hợp các điểm G là đường thẳng d" // d', d" là hình biến của d' trong phép vị tự tâm N tỉ số $\frac{1}{2}$.

b) BA_1 cắt d' tại M_1 và NM_1 cắt d" tại G_1. Ta có :

$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM_1} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$$

Vậy $\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}$

Do đó : $\overrightarrow{GG_1}$ là hình biến của $\overrightarrow{AA_1}$ bởi phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ AG và A_1G_1 đồng quy tại I $\Rightarrow$ $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ (1)

Mặt khác, trong tam giác ABN đường thẳng AG cắt BN tại O và gọi O' là trung điểm của BO, ta có :

$\overrightarrow{O'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O'M}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ (2)

(1) và (2) cho : $I \equiv O$.

Do đó : AG qua I cố định với $\overrightarrow{NI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NB}$.

2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Tính IJ .

b) Tìm một đường thẳng Δ biết rằng phép đối xứng qua Δ biến A thành B và C thành D. Δ có phải là trục đối xứng của tứ diện không ?

c) Chứng tỏ rằng tứ diện ABCD có ba trục đối xứng.

Giải

a) * Ta có $JA = JB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác JAB cân $\Rightarrow IJ \perp AB$.

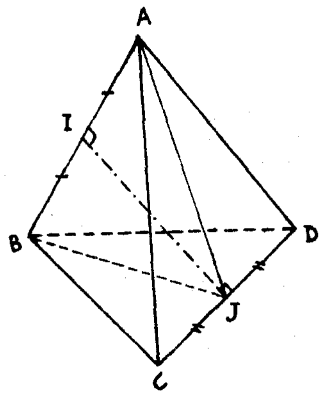
Tương tự tam giác ICD cân $\Rightarrow IJ \perp CD$.

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

* $IJ^2 = AJ^2 - AI^2$

$$= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



b) IJ là đường trung trực của AB và của CD, vậy $\Delta \equiv IJ$.

Δ là trục đối xứng của tứ diện.

c) Suy ra : tứ diện ABCD có 3 trục đối xứng là ba đoạn nối trung điểm của các cặp cạnh đối.

3. Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz vuông góc từng đôi một. Lần lượt lấy các điểm A, B, C trên Ox, Oy , Oz và G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Giả sử A cố định, B và C di động sao cho OB + OC = = d (d là độ dài không đổi). Tìm tập hợp trung điểm M của BC và tập hợp các điểm G.

b) Giả sử A cố định với OA = 1. Điểm B và C lưu động sao cho OB + OC = 2. Dựng tam giác ABC sao cho trung tuyến phát xuất từ A của tam giác ABC có độ dài cho sẵn m. Biện luận . Trong trường hợp m có độ dài nhỏ nhất, xét hình tính của tam giác ABC và khoảng cách từ O đến (ABC).

Giải

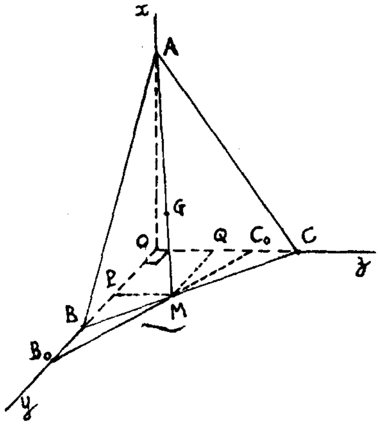
a) Kẻ $MP \perp Oy$ và $MQ \perp Oz$.

Ta có $OB = 2OP$ và $OC = 2OQ$.

Do đó : $OB + OC = d \Leftrightarrow OP + OQ = \frac{d}{2}$

Đặt $\overline{OP} = x$ và $\overline{OQ} = y$ ta có :

$$x + y = \frac{d}{2} \quad \text{với} \quad x \geq 0 \quad \text{và} \quad y \geq 0 .$$



Vậy : M di chuyển trên đoạn B_0C_0 với $OB_0 = OC_0 = \dfrac{d}{2}$

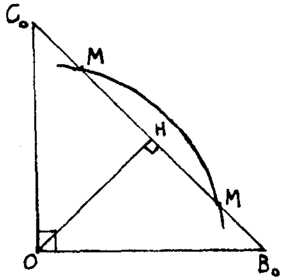
Mặt khác : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3} \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$

$$VT\left(A, \frac{2}{3}\right) : M \longmapsto G.$$

Vậy tập hợp các điểm G là đoạn G_0G_1, hình vị tự của B_0C_0 trong phép vị tự $\left(A, \dfrac{2}{3}\right)$.

b) * Theo câu a) : $M \in B_0C_0$ với $OB_0 = OC_0 = 1$ nên $B_0C_0 = \sqrt{2}$ và $OH = \dfrac{1}{2} B_0C_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(OH là khoảng cách từ O đến B_0C_0).



* Theo giả thiết ta có :

$$OM = \sqrt{AM^2 - OA^2} = \sqrt{m^2 - 1}$$

$$(m > 1)$$

$\Rightarrow M \in$ đường tròn (C) tâm O , bán kính $\sqrt{m^2 - 1}$.

Vậy : M là giao điểm của B_0C_0 và đường tròn (C).

* *Biện luận* :

. Nếu $OM < OH \Leftrightarrow m^2 - 1 < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m < \dfrac{\sqrt{6}}{2}$:

B_0C_0 ngoài (C) : Bài toán không có nghiệm hình.

. Nếu $OM = OH \Leftrightarrow m = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$: $M \equiv H$: Bài toán có 1 nghiệm hình.

. Nếu OH < OM ≤ OB_o ⇔ $\frac{\sqrt{6}}{2} < m \le \sqrt{2}$: (C) cắt B_oC_o tại 2 giao điểm : Bài toán có 2 nghiệm hình.

. Nếu OM > OB_o ⇔ $m > \sqrt{2}$: (C) không có giao điểm với đoạn B_oC_o. Bài toán không có nghiệm hình.

* m nhỏ nhất ⇔ $m = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ⇔ $H \equiv M$, $BC \equiv B_oC_o$:
Δ ABC đều có cạnh là $\sqrt{2}$.

* Xét tam giác vuông AOH với H là trung điểm của BC.
Kẻ OI ⊥ AH thì OI ⊥ (ABC) vì (AOH) ⊥ (ABC) theo giao tuyến AH. Ta có :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{1} + 2 = 3$$

Vậy, khoảng cách từ O đến (ABC) là : $OI = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

BÀI LÀM THÊM

1. Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau, vuông góc và nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Gọi α là mặt phẳng chứa By và song song với Ax. Hai điểm M và N lần lượt lưu động trên Ax và By. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên α, I và J là trung điểm của MN và M'N. Tìm tập hợp các điểm I và J trong các trường hợp sau :

a) AM = 2BN.

b) MN = d với d là độ dài cho trước và d > AB.

2. Cho tứ diện ABCD trong đó BCD cố định và điểm A lưu động trên mặt phẳng α.

a) Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN. Tìm tập hợp các điểm M và I.

3. Cho tứ diện OABC có $OA = OB = OC = a$ và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^{\circ}$, $\widehat{BOC} = 90^{\circ}$.

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

b) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của OA và BC. Chứng minh (OJA) là mặt phẳng trung trực của BC và IJ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

c) Chứng tỏ tứ diện OABC có hai mặt phẳng đối xứng và một trục đối xứng.

Chương VII : **HÌNH LĂNG TRỤ**

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Khối đa diện

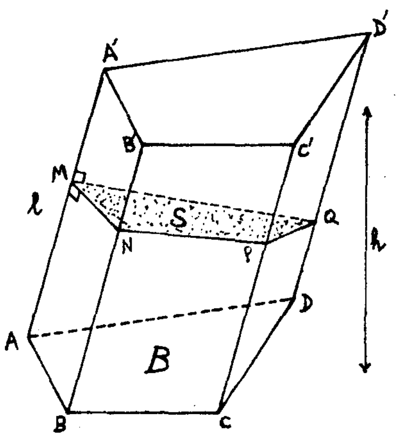
a/ Khối đa diện là một vật thể hình học giới hạn bởi một số hữu hạn các đa giác phẳng.

b/ Nếu hai khối đa diện đồng dạng thì :

- những góc đa diện tương ứng bằng nhau.
- những cạnh tương ứng tỉ lệ.
- những mặt tương ứng là những đa giác đồng dạng.
- tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ đồng dạng.

II. Hình lăng trụ

1. Định nghĩa



Hình lăng trụ là một khối đa diện có hai mặt song song gọi là hai đáy và tất cả những cạnh không thuộc hai đáy đều song song nhau.

Ví dụ : Lăng trụ tứ giác ABCDA'B'C'D' :

- Hai đáy ABCD, A'B'C'D' là hai đa giác bằng nhau.
- Các cạnh bên AA', BB' ... song song và bằng nhau.

– Mỗi mặt bên ABB'A', ... là hình bình hành.
– Chiều cao là khoảng cách giữa hai đáy.
– Thiết diện thẳng là thiết diện vuông góc với cạnh bên.

2. Phân loại lăng trụ

– Lăng trụ xiên.
– Lăng trụ đưng có cạnh bên vuông góc với đáy.
– Lăng trụ đều là lăng trụ đứng mà mặt đáy là đa giác đều.

3. Diện tích xung quanh

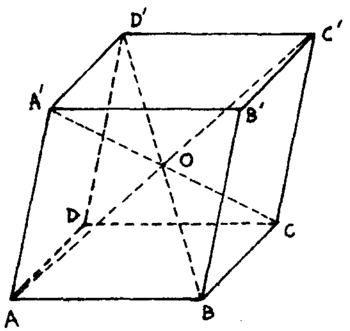
$S = pl$ với p là chu vi thiết diện thẳng
l là cạnh bên

4. Thể tích

$V = Bh$ với B là diện tích đáy và h là chiều cao.

$V = Sl$ với S là diện tích thiết diện thẳng và l là cạnh bên.

III. Hình hộp



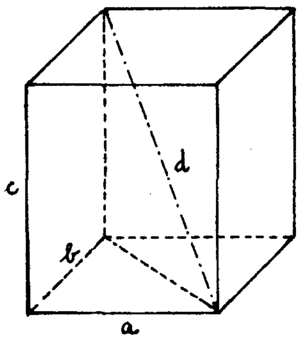
1. Định nghĩa

Hình hộp là hình lăng trụ mà đáy là hình bình hành.

– Sáu mặt là các hình bình hành.
– Các cạnh song song và bằng nhau từng nhóm 4.
– 4 đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

2. Phân loại hình hộp

– Hình hộp đứng là hình hộp mà cạnh bên vuông góc với đáy.
– Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng mà đáy là hình chữ nhật.



. Gọi a, b, c là 3 kích thước của hình hộp chữ nhật thì các đường chéo có độ dài bằng nhau là :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

. Thể tích : $V = abc$

– Hình lập phương là hình hộp chữ nhật mà ba chiều bằng nhau : $a = b = c$

. Độ dài đường chéo $d = a\sqrt{3}$

. Thể tích : $V = a^3$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : **Những bài toán cơ bản**

Dùng tính chất của cạnh bên, mặt bên của lăng trụ, của hình hộp. hình hộp chữ nhật và hình lập phương.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình lăng trụ tứ giác ABCDA'B'C'D'. Chứng minh rằng :

a) Các đường chéo của hình lăng trụ tạo thành hai cặp đường thẳng đồng quy tại I và J .

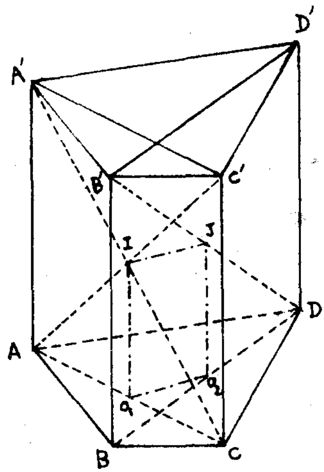
b) IJ song song và bằng đoạn nối trung điểm của hai đường chéo của một mặt đáy.

c) Tổng bình phương các đường chéo của lăng trụ bằng tổng bình phương các cạnh của nó trừ $8IJ^2$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ nên ACC'A' là hình bình hành. Do đó hai đường chéo AC' và A'C giao nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Tương tự $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'}$ nên BDD'B' là hình bình hành. Do đó hai đường chéo BD' và B'D giao nhau tại trung điểm J của mỗi đường.

b) Gọi O_1 và O_2 là trung điểm của AC và BD.



Ta có :

$\overrightarrow{O_1I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ (đường trung bình của tam giác ACA').

$\overrightarrow{O_2J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}$ (đường trung bình của tam giác BDD').

Mà : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'}$ nên $\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_2J}$. Do đó O_1O_2JI là hình bình hành.

Vậy : $IJ \parallel O_1O_2$ và $IJ = O_1O_2$.

c) Tứ giác ACC'A' là hình bình hành nên :

$$AC'^2 + A'C^2 = 2(AA'^2 + AC^2) \qquad (1)$$

Tứ giác BDD'B' là hình bình hành nên :

$$BD'^2 + B'D^2 = 2(BB'^2 + BD^2) \qquad (2)$$

Theo hệ thức đường trung tuyến trong các tam giác ABC và ACD ta có :

$$AB^2 + BC^2 = 2BO_1^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$AD^2 + CD^2 = 2DO_1^2 + \frac{AC^2}{2}$$

Tam giác BO_1D cho : $BO_1^2 + DO_1^2 = 2O_1O_2^2 + \frac{BD^2}{2}$

Do đó : $2(BO_1^2 + DO_1^2) = 4O_1O_2^2 + BD^2$

Suy ra : $AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 = 4O_1O_2^2 + AC^2 + BD^2$

Mà $O_1O_2 = IJ$ nên :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 - 4IJ^2$$

Vậy (1) và (2) cho :

$$AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4AA'^2 + 2(AC^2 + BD^2)$$

$$= 4\,AA'^2 + 2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) - 8IJ^2.$$

VÍ DỤ 2 :

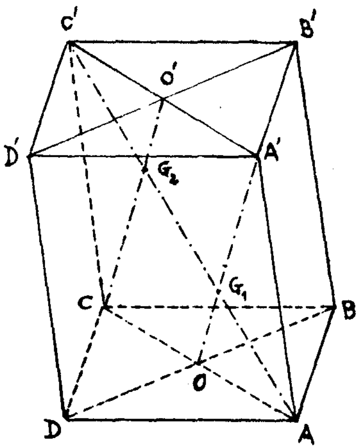
Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng đường chéo AC' qua trọng tâm G_1 và G_2 của các tam giác BDA' và CB'D' ; và ta có $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$.

b) M là điểm tùy ý, chứng minh rằng :

$\sum MA^2 = 8MI^2 + \frac{1}{2}\sum AC'^2$, với I là tâm hình hộp.

Giải



a) Gọi O và O' là tâm hai hình bình hành đáy ABCD và A'B'C'D'.

Trong hình bình hành ACC'A' đường chéo AC' cắt OA' tại G_1 và CO' tại G_2.

Mà $A'O \subset (BDA')$ nên AC' cắt (BDA') tại G_1 và $CO' \subset (CB'D')$ nên AC' cắt (CB'D') tại G_2.

$\Delta OAG_1 \sim \Delta A'C'G_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta O'G_2C' \sim \Delta CG_2A \quad \Rightarrow \quad \frac{G_2O'}{G_2C} = \frac{O'C'}{CA} = \frac{1}{2}$$

Vậy G_1 và G_2 là trọng tâm của các tam giác A'BD và CB'D'.

Mặt khác $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{O'A'}$ nên OA' // CO' và OA' = CO'. Do đó theo tính chất đường trung bình trong ΔACG_2 và $\Delta C'A'G_1$ ta có:

$$AG_1 = G_1G_2 = G_2C'.$$

b) Trong một hình hộp 4 đường chéo đồng quy tại trung điểm I của mỗi đường nên theo hệ thức đường trung tuyến, ta có :

$$MA^2 + MC'^2 = 2MI^2 + \frac{AC'^2}{2}$$

$$MA'^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{A'C^2}{2}$$

$$MB^2 + MD'^2 = 2MI^2 + \frac{BD'^2}{2}$$

$$MB'^2 + MD^2 = 2MI^2 + \frac{B'D^2}{2}$$

Do đó $\sum MA^2 = 8MI^2 + \frac{1}{2}(AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2)$

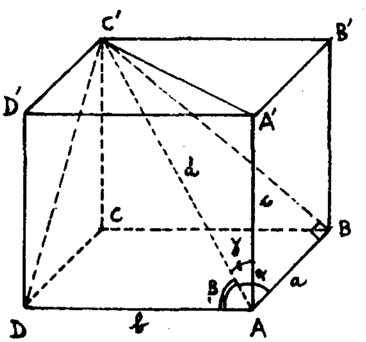
$$= 8MI^2 + \frac{1}{2}\sum AC'^2$$

VÍ DỤ 3 :

Gọi α, β, γ là các góc của một đường chéo hình hộp chữ nhật với 3 cạnh cùng phát xuất từ một đỉnh. Chứng minh rằng :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Giải



Đặt : góc (AB,AC') = α ;
góc (AD,AC') = β ; và
góc (AA',AC') = γ

Gọi a, b, c là 3 chiều và d là đường chéo hình hộp.

Ta có : $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases}$

$\Rightarrow$ AB $\perp$ (BCC'B')

Do đó : $AB \perp BC'$

Tương tự : $AA' \perp A'C'$ và $AD \perp DC'$

Tam giác vuông ABC' cho : $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC'} = \dfrac{a}{d}$

Tam giác vuông ADC' cho : $\cos\beta = \dfrac{AD}{AC'} = \dfrac{b}{d}$

Tam giác vuông AA'C' cho : $\cos\gamma = \dfrac{AA'}{AC'} = \dfrac{c}{d}$

Vậy : $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1$$

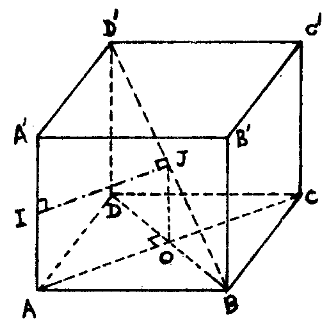
VÍ DỤ 4 :

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của AA' và BD'.

Giải

Ta có : $A'A \perp (ABCD)$, BD là hình chiếu của BD' xuống (ABCD), và $AO \perp BD$ (đường chéo hình vuông).

Do đó dựng OJ // AA' cắt BD' tại J và JI // OA cắt AA' tại I, thì IJ là đoạn vuông góc chung của AA' và BD'.



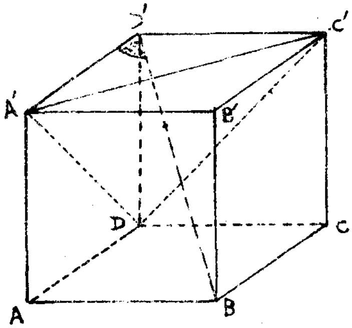
Tứ giác AOIJ là hình chữ nhật nên:

$$IJ = AO = \frac{1}{2}\ AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

VÍ DỤ 5 :

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Tính góc của hai mặt phẳng (DA'C') và (ABB'A').

Giải



Ta có :

$D'A' \perp (ABB'A')$

(vì $D'A' \perp A'B'$ và $A'A$).

$D'B \perp (DA'C')$ (vì $D'B$ là trục của đường tròn $DA'C'$).

Do đó góc nhọn của hai mặt $(DA'C')$ và $(ABB'A')$ là góc $\widehat{BD'A'}$.

Trong tam giác vuông $BD'A'$ ta có :

$$\cos\widehat{BD'A'} = \frac{A'D'}{BD'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy : $\widehat{BD'A'} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho lăng trụ tam giác ABCA'B'C'.

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, A'B'C', ACC'. Chứng minh rằng :

$$(IGK) \,//\, (BB'C'C) \quad ; \quad (A'KG) \,//\, (AIB')$$

b) Giả sử ABCA'B'C' là lăng trụ tam giác đều và có các cạnh đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Một đường thẳng qua tâm của tam giác ABC cắt các đường thẳng AB' và MN lần lượt ở P và Q. Tính PQ theo a.

Hướng dẫn

b) Gọi E là trung điểm của BC, B'E cắt MN tại Q . IQ cắt AB' tại P.

2. Cho hình hộp đứng ABCDA'B'C'D', biết : AB = a, AD = b, $\widehat{BAD} = \alpha$, đường chéo AC' tạo với đáy một góc β, giao điểm các đường chéo của hình hộp là O.

a) Dựng và tính đoạn vuông góc chung của BD và AC'.

b) Tính tổng các bình phương các khoảng cách từ điểm M tùy ý đến 8 đỉnh của hình hộp theo a, b, α, β và OM = x . Suy ra vị trí của M để tổng này bé nhất.

Hướng dẫn :

a) Qua A dựng mặt phẳng (P) $\perp$ BD và chiếu C' xuống (P).

b) Xem ví dụ 2.

3. Cho hình lập phương. Tính góc của hai đường chéo, góc của một đường chéo với một cạnh và góc của một đường chéo với một mặt của hình lập phương.

4. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có đường chéo d. Gọi I, J, K là trung điểm của BC, C'D' và AA'. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJK) và (ABCD). Tính góc của hai mặt phẳng này.

Hướng dẫn :

Gọi M là trung điểm của CD. JK và AM cắt nhau tại N. Kẻ AH $\perp$ IN, tính $\widehat{KHA}$.

5. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Điểm M tùy ý trên đường chéo AB'. Gọi I và J lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng (MCD') với các đường thẳng BC' và DA'. Chứng minh 3 điểm I, J, M thẳng hàng. Định vị trí của M để trung điểm của IJ thuộc mặt A'B'C'D'.

Hướng dẫn :

Đường song song với AB kẻ từ M cắt AA' tại E và BB' tại F. Trong hình thang MFC'D', hai cạnh xiên MD' và C'F cắt nhau tại P. CP cắt BC' tại I. Trong hình thang MEDC, hai cạnh xiên CM và DE cắt nhau tại Q. D'Q cắt DA' tại J.

Vấn đề 2 : Dựng và tính diện tích thiết diện của lăng trụ

Sử dụng các vấn đề của các chương trước để xác định giao tuyến.

VÍ DỤ 1 :

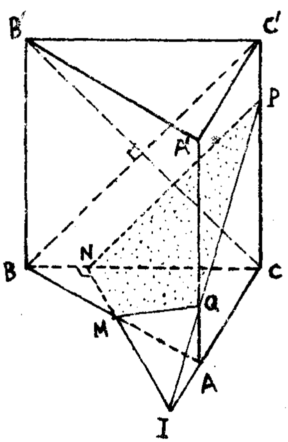
Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân AB = AC = a và cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Dựng và tính diện tích của thiết diện mà ta có được khi cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng α qua M và vuông góc với B'C.

Giải

* . Ta có : $\alpha \perp B'C \Rightarrow \alpha \perp (BCC'B')$

và $(ABC) \perp (BCC'B')$ (vì lăng trụ đứng).

Do đó α cắt (ABC) theo giao tuyến $MN \perp (BCC'B')$



. Mặt khác tam giác ABC vuông cân cạnh a nên $BC = a\sqrt{2} = AA'$. Do đó BCC'B' là hình vuông. Suy ra $BC' \perp B'C$.

Vậy : $\alpha \perp B'C \Rightarrow \alpha \parallel BC'$ nên α cắt (BCC'B') theo NP // BC'.

. Trong tam giác ABC, MN và AC cắt nhau tại I. Hai mặt phẳng α và (ACC'A') có I và P chung nên giao tuyến của chúng là IP, đường này cắt AA' tại Q.

. Vậy thiết diện của lăng trụ cắt bởi α là MNPQ.

* Ta thấy MNPQ có hình chiếu xuống ABC là MNCA và góc của hai mặt này là $\widehat{CNP} = 45^o$.

$$S_{AMNC} = S_{ABC} - S_{BMN} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^2}{16} = \frac{7a^2}{16}$$

Vậy : $$S_{MNPQ} = \frac{S_{AMNC}}{\cos 45^o} = \frac{7a^2}{16} \cdot \sqrt{2}.$$

VÍ DỤ 2 :

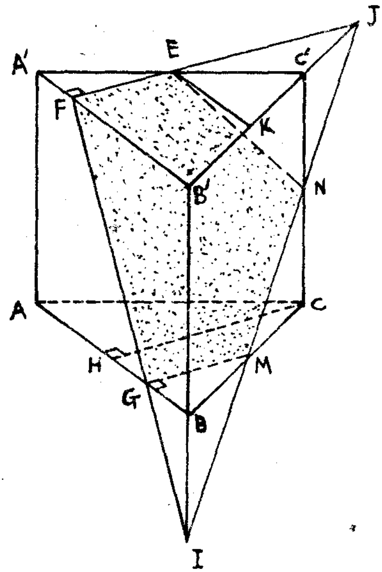
Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C' có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CC' và C'A'. Dựng và tính diện tích của thiết diện của mặt phẳng (MNE) với lăng trụ, và chứng minh rằng (MNE) ⊥ (AA'BB').

Giải

* Trong hình chữ nhật BCC'B', đường thẳng MN cắt BB' tại I và B'C' tại J.

JE cắt A'B' tại F và FI cắt AB tại G.

Thiết diện là MNEFG.



* . Gọi CH là đường cao của tam giác ABC.

Ta có $IB = C'J = \frac{a}{2}$ nên

$$\frac{BG}{B'F} = \frac{IB}{IB'} = \frac{1}{3}$$

. Gọi K là trung điểm của B'C' thì :

EK // B'F

$$\Rightarrow \frac{EK}{B'F} = \frac{JK}{JB'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow B'F = \frac{3}{2} EK$$

và vì : $EK = \frac{1}{2} A'B' = \frac{a}{2} \Rightarrow B'F = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{4}$

. Do đó :

$$BG = \frac{1}{3} B'F = \frac{a}{4} \Rightarrow \text{ G là trung điểm BH}$$

Suy ra : MG // CH (đường trung bình của tam giác BCH)

. Ta có $\left.\begin{array}{l} MG \perp AB \\ MG \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow MG \perp (ABB'A')$

Vậy : $(MNE) \perp (ABB'A')$.

* Ta có $S_{MNEFG} = S_{IFJ} - S_{IMG} - S_{JNE}$

. Tam giác vuông JFB' cho :

$$FJ^2 = B'J^2 - B'F^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \Rightarrow FJ = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

Theo tính chất đường trung bình trong ΔBCH ta có :

$$GM = EF = \frac{1}{2} CH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Ta có $JE = JF - EF = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4} - \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Delta NC'J$ vuông cân nên $JN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

EN là đường trung bình của $\Delta C'A'C$ nên $EN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔNEJ cân nên đường cao NN' cũng là trung tuyến.

Do đó : $NN'^2 = JN^2 - \left(\dfrac{JE}{2}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{16} = \dfrac{5a^2}{16}$

$$\Rightarrow NN' = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

. Tam giác vuông BIG cho :

$$IG^2 = BI^2 + BG^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} \Rightarrow IG = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

Tam giác vuông IB'F cho :

$$IF^2 = IB'^2 + B'F^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow IF = \frac{3a\sqrt{5}}{4}$$

$$S_{IFJ} = \frac{1}{2} FJ.FI = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{15}}{32}$$

$$S_{IGM} = \frac{1}{2}\ GI.GM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{32}$$

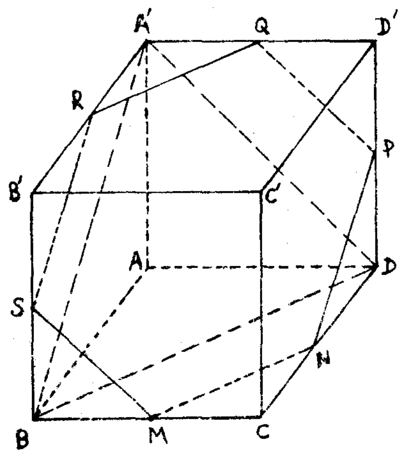
$$S_{JEN} = \frac{1}{2}\ JE.NN' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{16}$$

Vậy $S_{MNEFG} = \dfrac{9a^2\sqrt{15}}{32} - \dfrac{a^2\sqrt{15}}{32} - \dfrac{a^2\sqrt{15}}{16} = \dfrac{3a^2\sqrt{15}}{16}$

VÍ DỤ 3 :

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Một mặt phẳng α qua trung điểm của BC và song song với mặt phẳng (BDA') cắt hình lập phương theo hình gì ? Tính diện tích của thiết diện này.

Giải



* α // (A'BD) ⇒ α cắt (ABCD) theo giao tuyến MN // BD.

α // (A'BD) ⇒ α // A'B ⇒ α // CD' ⇒ α cắt (CDD'C') theo giao tuyến NP // CD'.

Tương tự α cắt ADD'A' theo PQ // A'D, cắt A'B'C'D' theo QR // B'D', cắt ABB'A' theo RS // A'B.

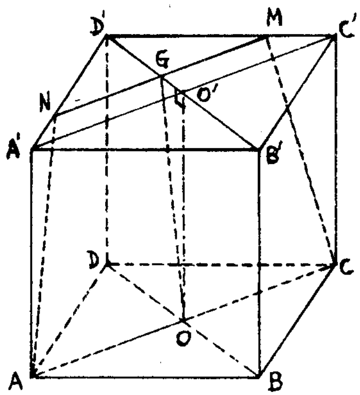
Mà tam giác A'BD là tam giác đều cạnh là $a\sqrt{2}$ nên theo tính chất của đường trung bình của các tam giác thì MNPQRS là lục giác đều cạnh $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

* Vậy : Dt MNPQRS $= 6 \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 4 :

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh bằng a và G là trọng tâm của tam giác A'C'D'. Mặt phẳng (GAC) cắt hình lập phương theo hình gì ? Tính diện tích của hình này.

Giải



* Ta có (ABCD) // (A'B'C'D') nên mặt phẳng (GAC) cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến AC // MN. Mặt khác hai tam giác AA'N và CC'M bằng nhau nên AN = CM. Vậy thiết diện ACMN là hình thang cân.

* Ta có : $\frac{MN}{A'C'} = \frac{D'G}{D'O'} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$$

Tam giác vuông OO'G cho : $OG^2 = OO'^2 + O'G^2$

mà $O'G = \frac{1}{3}\ O'D' = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ nên :

$$OG^2 = a^2 + \frac{2a^2}{36} = \frac{38\,a^2}{36} \Rightarrow OG = \frac{a\sqrt{38}}{6}$$

Vậy : $\quad Dt(ACMN) = \frac{1}{2}(AC + MN)\,OG$

$$= \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} + \frac{2}{3}a\sqrt{2}\right)\frac{a\sqrt{38}}{6}$$

$$= 5a^2\,\frac{\sqrt{19}}{18}.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy là tam giác vuông cân AB = AC = a và cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BB'. Dựng và tính diện tích thiết diện có được khi cắt lăng trụ bởi mặt phẳng (C'MN).

Hướng dẫn :

Đường thẳng MN cắt AA' tại E và A'B' tại F , C'E cắt CA tại P và C'F cắt B'C' tại Q.

Có thể dùng diện tích hình chiếu.

2. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC vuông cân tại C với AB $= a\sqrt{2}$ và cạnh bên AA' $= a\sqrt{2}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CA và AB. Dựng và tính diện tích của thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng α qua M và vuông góc với A'N.

Hướng dẫn :

Nhận xét α // CN nên α cắt (ABC) theo ME // CN.

ME cắt BC tại I và α cắt ABB'A' theo EF $\perp$ A'N, FI cắt CC' tại N. Có thể dùng diện tích hình chiếu.

3. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', BC và CD. Mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương theo một thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của hình này.

Hướng dẫn :

Lục giác đều ; $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

4. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Tính diện tích thiết diện khi cắt hình lập phương bởi mặt phẳng qua A và các trung điểm của B'C' và C'D'.

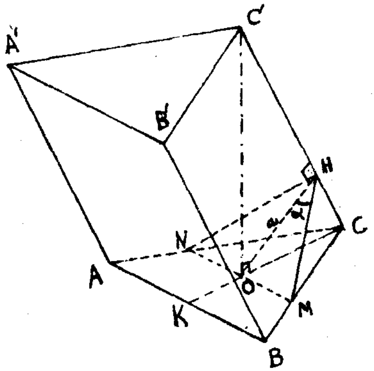
Vấn đề 3 : Diện tích và thể tích lăng trụ, hình hộp

> – Diện tích xung quanh bằng tổng số diện tích các mặt bên hay bằng tích số của chu vi thiết diện thẳng với cạnh bên.
> – Thể tích : $V = Bh = Sa$.

VÍ DỤ 1 :

Cho lăng trụ xiên ABCA'B'C', đáy ABC là tam giác đều có tâm O. Hình chiếu của C' trên (ABC) là O. Tính thể tích V của lăng trụ biết khoảng cách từ O đến CC' là a và số đo nhị diện cạnh CC' là 2α.

Giải



. Kẻ OH $\perp$ CC', ta có :

$$OH = a \text{ (gt)}.$$

Mặt phẳng qua OH và vuông góc với CC' cắt (ABC) theo giao tuyến MN thì :

$\widehat{MHN} = 2\alpha$ (góc phẳng nhị diện cạnh CC')

. Ta cũng có MN // AB vì

AB $\perp$ OH (AB $\perp$ (OCC'))

Tam giác MHN cân nên $\widehat{MHO} = \alpha$.

Tam giác vuông MOH cho $OM = a\text{tg}\alpha$.

Do đó $MN = 2a\text{tg}\alpha$ và $AB = \dfrac{3}{2}\ MN = 3a\text{tg}\alpha$.

$$CO = \frac{2}{3}CK = \frac{2}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}\,.\text{tg}\alpha.$$

Tam giác vuông COC' có đường cao OH nên :

$$\frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{3a^2.\,\text{tg}^2\alpha} = \frac{3\text{tg}^2\alpha - 1}{3a^2.\,\text{tg}^2\alpha}$$

$$OC' = \frac{a\sqrt{3}\ \text{tg}\alpha}{\sqrt{3\text{tg}^2\alpha - 1}}$$

. Vậy : $V = S_{ABC} \times C'O = \dfrac{AB^2\ \sqrt{3}}{4}\cdot OC'$

$$= \frac{9a^2\ \sqrt{3}\ \text{tg}^2\alpha}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}\ \text{tg}\alpha}{\sqrt{3\text{tg}^2\alpha - 1}}$$

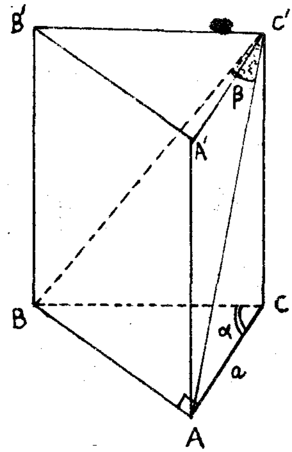
$$= \frac{27a^3\ \text{tg}^3\alpha}{4\sqrt{3\ \text{tg}^2\alpha - 1}} \quad \left(\text{tg}\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

VÍ DỤ 2 :

Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC = a và $\widehat{C} = \alpha$. Đường chéo BC' của mặt bên

(BCC'B') hợp với mặt bên (ACC'A') một góc β. Tính thể tích của lăng trụ.

Giải



. Ta có : AB ⊥ AC (gt)
AB ⊥ AA'
(lăng trụ đứng)

Do đó :

AB ⊥ (ACC'A')

⇒ AC' = hc.BC'/(ACC'A')

⇒ góc (BC',ACC'A') = β

$= \widehat{BC'A}$

. Tam giác vuông BAC' cho :

$AC' = AB\cot g\beta = a\,tg\alpha.\cot g\beta$

Tam giác vuông ACC' cho :

$CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = a^2.tg^2\alpha.\cot g^2\beta - a^2$

$$CC' = \frac{a\sqrt{\sin^2\alpha\,\cos^2\beta - \cos^2\alpha\,\sin^2\beta}}{\cos\alpha\,\sin\beta}$$

$$= \frac{a\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{\cos\alpha\,\sin\beta}$$

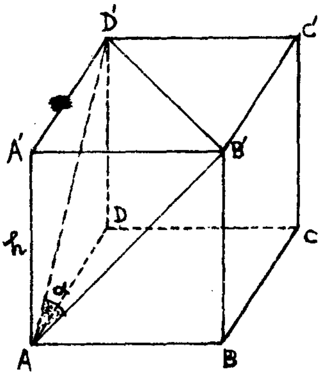
$$. \quad V = S_{ABC} \times CC' = \frac{1}{2}\ AB.AC.CC'$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{a^3\ tg\alpha\ \sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{\cos\alpha\,\sin\beta}$$

VÍ DỤ 3 :

Chiều cao của một lăng trụ tứ giác đều bằng h và góc của hai đường chéo phát xuất từ một đỉnh của hai mặt bên kề nhau là α. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ.

Giải



. Gọi x là cạnh của hình vuông đáy, ta có :

$$B'D' = x\sqrt{2} \quad \text{và}$$
$$AB' = AD' = \sqrt{h^2 + x^2}$$

Theo hệ thức cosin trong tam giác thường, ta có :

$$B'D'^2 = AB'^2 + AD'^2 - 2AB'.AD'\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2(h^2 + x^2) - 2(h^2 + x^2)\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2\cos\alpha = 2h^2(1 - \cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{h^2(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

. $S_{xq} = 4xh = 4h^2\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}}$

. $V = x^2 h = \dfrac{h^3(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}$.

VÍ DỤ 4 :

Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, góc A bằng α và chân đường vuông góc hạ từ B' xuống đáy (ABCD) trùng với giao điểm O các đường chéo của đáy. Cho BB' = a. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình hộp.

Giải

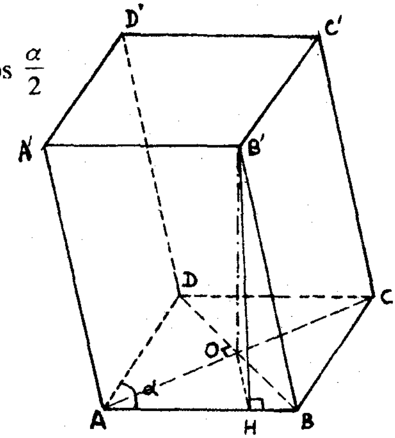
* Đáy ABCD là hình thoi nên đường chéo AC là phân giác $\widehat{DAB}$ và $AO \perp BD$.

Do đó : $OB = a\sin\dfrac{\alpha}{2}$ và $AO = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Tam giác vuông BOB' cho :

$$B'O^2 = a^2 - a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow B'O = a\cos\frac{\alpha}{2}$$



Vậy : $V = Dt(ABCD).B'O$

$$= a^3\cos\frac{\alpha}{2}\,.\,\sin\alpha$$

* Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow B'H \perp AB$
(định lí 3 đường vuông góc).

Tam giác vuông OAH cho :

$$OH = OA\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$= a\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\,.\,a\sin\alpha$$

Tam giác vuông B'OH cho :

$$B'H^2 = B'O^2 + OH^2 = a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,.\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$B'H = a\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Vậy :

$$S_{xq} = 4.Dt(ABB'A') = 4a^2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\,.$$

VÍ DỤ 5 :

Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' có đường chéo bằng a và đường thẳng CA' hợp với các mặt (ABCD) và (ABB'A') các góc α và β. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật.

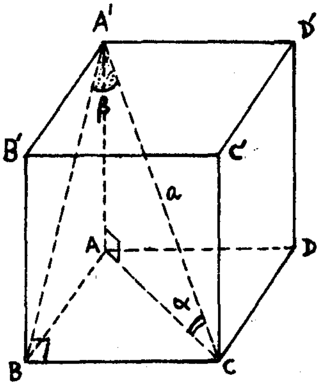
Giải

. Ta có : $A'A \perp (ABCD) \Rightarrow AC = hc.A'C/_{(ABCD)}$

$CB \perp (ABB'A') \Rightarrow A'B = hc.A'C/_{(ABB'A')}$

nên : góc $(CA',ABCD) = \widehat{ACA'} = \alpha$

và : góc $(CA',ABB'A') = \widehat{BA'C} = \beta$



. Trong tam giác vuông CAA' :

$$AA' = a\sin\alpha$$
$$AC = a\cos\alpha$$

Trong tam giác vuông CBA' :

$$BC = a\sin\beta$$

Tam giác vuông ABC cho :

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$
$$= a^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\beta$$
$$AB = a\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

Vậy :

$$V = AB.BC.AA' = a^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$
$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA' = 2(a\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} + a\sin\beta).a\sin\alpha$$
$$= 2a^2 \sin\alpha (\sin\beta + \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta})$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho lăng trụ xiên ABCA'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' xuống (ABC) trùng với tâm đường trònngoại tiếp tam giác ABC. Cho $\widehat{BAA'} = \alpha$. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình lăng trụ.
2. Cho lăng trụ đứng ABCDA'B'C'D' có đáy là hình thoi, góc nhọn A bằng α. Cho diện tích của tứ giác ABC'D' là S và mặt phẳng ABC'D' hợp với đáy góc β. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ.
3. Cho lăng trụ tam giác đều ABCA'B'C' cạnh đáy và bán kính đường tròn ngoại tiếp của một mặt bên là a. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ.

   Đáp số : $V = \dfrac{3a^3}{4}$; $S_{xq} = 3a^2\sqrt{3}$
4. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có đoạn nối hai tâm của hai mặt bên kề nhau là a. Tính thể tích của hình lập phương.
   Đáp số : $V = 2a^3\sqrt{2}$

C. TOÁN TỔNG HỢP

1. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a và đường cao AA' = h. Điểm M trên đường chéo AB' của mặt AA'B'B sao cho $\frac{MA}{MB'} = \frac{5}{4}$.

a) Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng AC và BC'.

b) Mặt phẳng α qua M và song song với A'C và BC'. Dựng thiết diện của α và hình lăng trụ. α cắt CC' tại N, tính $\frac{NC}{NC'}$.

Giải

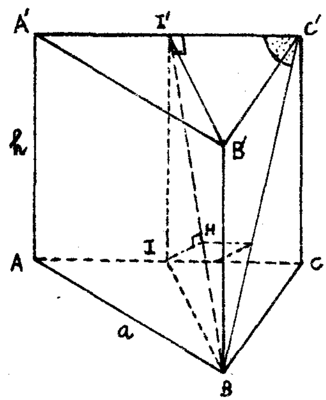
a) * Gọi I và I' là trung điểm của AC và A'C', ta có :

AC ⊥ BI (vì ΔABC đều)

AC ⊥ BB' (lăng trụ đứng)

Do đó AC ⊥ (BII'B') và BI' = hc.BC'/(BII'B')

Kẻ IH ⊥ BI' thì IH bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC'.



Ta có : $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(đường cao Δ đều)

Tam giác vuông BII' có đường cao IH cho :

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{II'^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{3a^2 + 4h^2}{3a^2.h^2}$$

$$IH = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$$

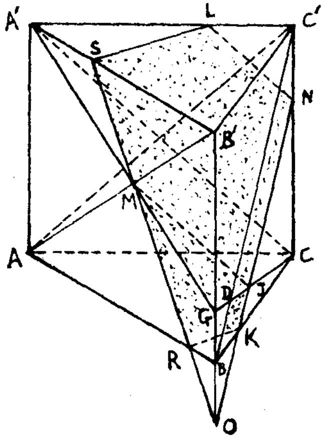
* Góc (AC,BC') = $\widehat{BC'I'}$.

Tam giác vuông BI'C' cho :

$$\cos BC'I' = \frac{I'C'}{BC'} = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Vậy : $$BC'I' = \arccos \frac{a}{2\sqrt{a^2 + h^2}}$$

b) * A'M cắt BB' tại G.



Mặt phẳng α qua M và song song với A'C nên cắt mặt phẳng A'CG theo MJ // A'C.

Mặt phẳng α // BC' và mặt (BCC'B') có J chung nên α cắt (BCC'B') theo giao tuyến NK qua J và // BC'. Các đường thẳng NK và BB' cắt nhau tại O.

Hai mặt phẳng α và (ABB'A') có M và O chung nên cắt nhau theo MO. Đường thẳng MO cắt AB tại R và A'B' tại S .

Mặt phẳng α // A'C và (ACC'A') có N chung nên α cắt (ACC'A') theo NL//A'C.

Vậy thiết diện là ngũ giác KNLSR.

* Ta có : $\dfrac{AA'}{B'G} = \dfrac{MA}{MB'} = \dfrac{5}{4}$ (vì AA' // BB')

mà BB' = AA' nên :

$$\frac{BB'}{B'G} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{BB'}{BG} = 5$$

CG cắt BC' tại D, ta có :

$$\frac{DC}{DG} = \frac{CC'}{BG} = 5 \Rightarrow \frac{CD}{CG} = \frac{5}{6}$$

$$MJ \ // \ A'C \Rightarrow \frac{JC}{JG} = \frac{MA'}{MG}$$

Mà $\dfrac{MA'}{MG} = \dfrac{MA}{MB'} = \dfrac{5}{4}$ nên : $\dfrac{JC}{JG} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{CJ}{CG} = \dfrac{5}{9}$

Do đó : $\dfrac{CJ}{CD} = \dfrac{5}{9} : \dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{3}$

NJ // C'D $\Rightarrow$ $\dfrac{CN}{CC'} = \dfrac{CJ}{CD} = \dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{NC}{NC'} = 2$.

2. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh a. Điểm M lưu động trên AA' và N lưu động trên BC sao cho AM = BN = = h với 0 < h < a.

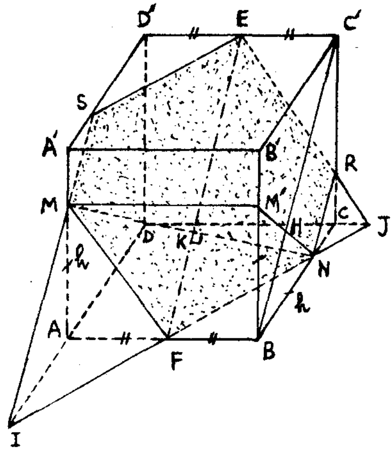
a) Chứng minh rằng khi h thay đổi thì MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định.

b) Gọi E là trung điểm của D'C'. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) với hình lập phương.

c) Tính chu vi của thiết diện theo a và h.

Giải

a) Kẻ MM' // AB ta có BM' = AM.



Do đó :
BM' = BN = h nên BC' $\perp$ M'N tại trung điểm H của M'N.

Ta có :

$$\begin{cases} BC' \perp M'N \\ BC' \perp AB \end{cases}$$

$\Rightarrow$ BC' $\perp$ (MNM').

Gọi E và F là trung điểm của C'D' và AB thì EF // BC' nên EF $\perp$ MN $\subset$ (MNM') tại trung điểm K của MN (vì FM = FN, EM = EN).

b) NF cắt AD tại I và CD tại J.
IM cắt A'D' tại S và JE cắt CC' tại R.
Thiết diện của (MNE) với hình lập phương là lục giác MFNRES.

c) Ta có :

$$. \ FM = FN = \sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{4}}$$

$$. \ \frac{CJ}{BF} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow CJ = \frac{\frac{a}{2}(a-h)}{h} = \frac{a(a-h)}{2h}$$

$$\frac{RC'}{RC} = \frac{C'E}{CJ} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a(a-h)}{2h}} = \frac{h}{a-h}$$

$$\Rightarrow \frac{RC'}{h} = \frac{RC}{a-h} = \frac{CC'}{a} = 1 \Rightarrow RC' = h, \ RC = a - h.$$

Do đó : $NR = (a - h)\sqrt{2}$

$$. \ ER = \sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{4}}$$

$$. \ AI = BN = h$$

$$\frac{A'S}{AI} = \frac{MA'}{MA} \Rightarrow A'S = a - h \Rightarrow MS = (a - h)\sqrt{2}$$

$$. \ SE = \sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{4}}$$

. Vậy : $\text{Chu vi (MFNRES)} = 4\sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{4}} + 2(a - h)\sqrt{2}$

$$= 2[\,(a - h)\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4h^2}\,)\,]$$

3. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a, gọi M là điểm di động trên cạnh AB. Đặt AM = x (0 < x < a). Mặt phẳng (A'MC) cắt hình lập phương theo một đa giác (P).

a) Chứng tỏ (P) là một hình bình hành có một đường chéo cố định còn đường chéo kia vuông góc với CB'.

b) Tính theo x bình phương y của đường chéo di chuyển của (P). Khi y nhỏ nhất (P) là hình gì ?

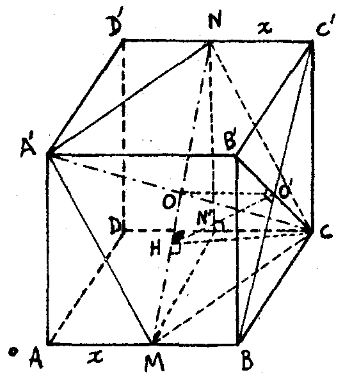
c) Tìm tập hợp các hình chiếu vuông góc của C lên đường chéo di chuyển của (P).

Giải

* Ta có :
(ABCD) // (A'B'C'D') nên mặt phẳng (A'MC) cắt hai mặt này theo hai giao tuyến CM // A'N.

Tương tự :
(ABB'A') // (CDD'C') $\Rightarrow$ A'M // NC

Vậy MNCA' là hình bình hành có đường chéo A'C cố định.



* Mặt khác : CB' $\perp$ BC' (đường chéo hình vuông)
CB' $\perp$ AB (vì AB $\perp$ (BCC'B'))

Vậy : CB' $\perp$ (ABC'D') $\Rightarrow$ CB' $\perp$ MN $\subset$ (ABC'D').

b) * Kẻ NN' $\perp$ CD.

Ta có : $\Delta AMA' = \Delta C'CN$

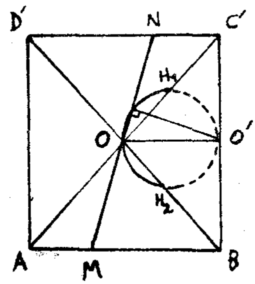
$\Rightarrow C'N = AM = x$

$MN'^2 = a^2 + (a - 2x)^2$.

Do đó : $y = MN^2$

$= MN'^2 + NN'^2$

$= 2a^2 + (a - 2x)^2$



* y nhỏ nhất khi $a - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

Khi ấy A'M = MC nên A'MCN là hình thoi.

c) * Hai đường chéo A'C và MN giao nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên MN qua O cố định.

Kẻ CH $\perp$ MN

Ta có CB' $\perp$ (ABC'D') tại O' và CH $\perp$ MN $\subset$ (ABC'D') nên O'H $\perp$ OH (định lí 3 đường vuông góc).

Vậy H ở trên đường tròn đường kính OO' trong mặt phẳng (ABC'D').

* Khi M di chuyển từ A đến B thì H di chuyển trên cung H_1H_2 với $O'H_1 \perp AC'$ và $O'H_2 \perp BD'$.

Độc giả chứng minh phần đảo.

BÀI LÀM THÊM

1. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' có AB = a, AD = b, AA' = c và BD' = AC' = CA' = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
   a) Chứng minh ABC'D' là hình chữ nhật và ABCDA'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.
   b) Gọi α, β, γ là ba góc tạo bởi một đường chéo và 3 mặt cùng đi qua một đỉnh thuộc đường chéo. Chứng minh : $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

2. Một lăng trụ xiên có thiết diện thẳng là tam giác đều cạnh a, cạnh bên có độ dài 2a và hợp với đáy một góc 60°. Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy, chiều cao và thể tích của lăng trụ.

3. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy là tam giác đều ABC cạnh a. Lấy điểm M trên BB' và điểm N trên CC' sao cho : BM = x và CN = y.
   a) Chứng minh tam giác AMN không thể vuông ở A. Tìm hệ thức giữa x và y để tam giác AMN vuông ở M.
   b) Chứng minh rằng nếu x = 2y thì mặt phẳng (AMN) luôn qua một đường thẳng cố định.
   c) Gọi I là trung điểm của AA' và α là góc của hai mặt phẳng (BIC') và (ABC). Tính AA' theo a và α.

Hướng dẫn :

a) $AM^2 = a^2 + x^2$, $AN^2 = a^2 + y^2$, $MN^2 = a^2 + (x - y)^2$

b) MN cắt BC tại 1 điểm cố định.

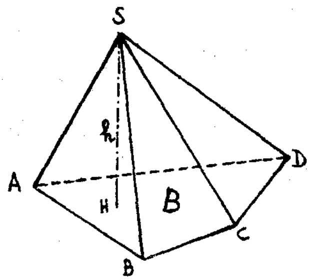
Chương VIII : **HÌNH CHÓP VÀ HÌNH CHÓP CỤT**

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Hình chóp

1. Định nghĩa

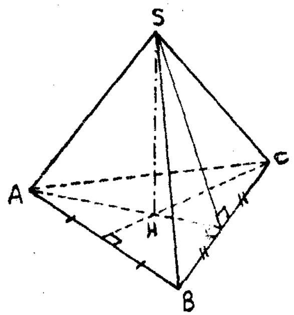
Cho đa giác lồi ABCDE ... và điểm S ở ngoài mặt phẳng đa giác. Hình chóp là khối đa diện hạn định bởi ABCDE ... và các tam giác SAB, SBC, SCD ...



* S : đỉnh của hình chóp ; ABCDE ... : đáy ; ΔSAB, ΔSBC, ... : là các mặt bên.
* Đường cao của hình chóp là đoạn vuông góc SH vẽ từ đỉnh S xuống ABCDE ...

2. Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy.



. Tất cả cạnh bên của hình chóp đều bằng nhau.

. Đường cao vẽ từ đỉnh của một mặt bên gọi là trung đoạn.

3. Công thức

* *Thể tích* : $V = \dfrac{1}{3}Bh$ $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$

* *Diện tích xung quanh* :

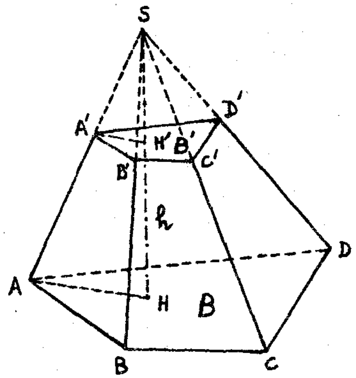
. Hình chóp đều : $S_{xq} = \frac{1}{2} pd$ $\begin{cases} p : \text{chu vi đáy} \\ d : \text{trung đoạn} \end{cases}$

. Hình chóp thường : S_{xq} = tổng diện tích các mặt bên.

II. Hình chóp cụt

1. Định nghĩa

* *Hình chóp cụt* là phần hình chóp nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy.
  . ABCD, A'B'C'D' : 2 đáy
  Khoảng cách HH' giữa 2 đáy là đường cao của hình chóp cụt.



* *Hình chóp cụt đều* là phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy.

  Trong hình chóp cụt đều :
  . hai đáy là 2 đa giác đều.
  . các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau.
  . đường nối trung điểm 2 đáy của 1 mặt bên là trung đoạn.

2. Công thức

* *Thể tích* :

$$V = \frac{1}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)h \quad \begin{cases} B, B' : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$$

* *Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều* :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p')d \quad \begin{cases} p, p' : \text{chu vi 2 đáy} \\ d : \text{trung đoạn} \end{cases}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : Hình chóp tam giác

> Trong các bài toán về hình chóp tam giác, ta có thể chọn đỉnh của hình chóp tùy ý và việc chọn đỉnh thích hợp sẽ giúp giải bài toán dễ dàng hơn.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp SABC có SB = SC = BC = CA = a ; hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích của hình chóp.

Giải

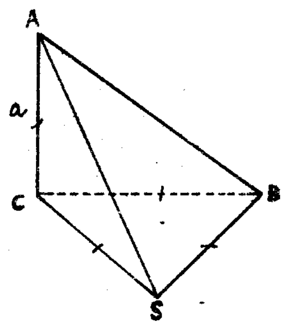
Ta có : $\begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ (ASC) \perp (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad AC \perp (SBC)$

Chọn A làm đỉnh hình chóp ta có :

$$V = \frac{1}{3} AC \times S_{SBC}$$

$$= \frac{1}{3} a. \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$



VÍ DỤ 2 :

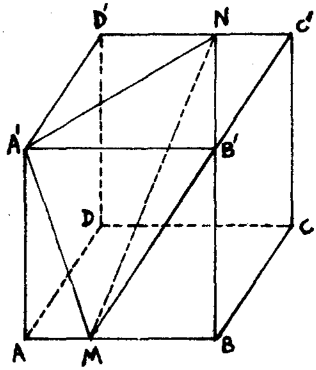
Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D', cạnh a. Lấy $M \in AB$ và $N \in C'D'$. Chứng tỏ rằng hình chóp B'A'MN có thể tích không đổi.

Giải

Chọn đỉnh hình chóp là M (hay N).

Ta có :

Đường cao của hình chóp kẻ từ M đến (A'B'N) chính là a (vì cũng là khoảng cách từ A đến (A'B'C'D')).



. Diện tích của tam giác A'B'N bằng $\frac{1}{2}a^2$ (vì đường cao vẽ từ N đến A'B' bằng a).

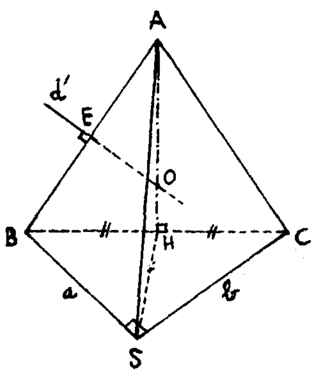
Vậy :

$$V(B'A'MN) = V(MA'B'N) = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}.a^2 = \frac{1}{6}a^3.$$

VÍ DỤ 3 :

Cho hình chóp SABC có (SBC) ⊥ (ABC) ; SA = SB = AB = = AC = a , SC = b. Chứng minh rằng tam giác SBC vuông. Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC.

Giải



Ta có (ABC) và (SBC) vuông góc nhau theo giao tuyến BC.

Do đó nếu kẻ : AH ⊥ BC (H là trung điểm BC) thì AH ⊥ (SBC)

Mà : AS = AB = AC

nên HS = HB = HC.

Vậy : tam giác SBC vuông tại S (vì trung tuyến HS bằng nửa cạnh đối ứng).

* Ta có AH là trục của đường tròn (SBC).

Trong mặt phẳng (ABH) kẻ đường trung trực d' của AB, d' cắt AH tại O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp ASBC.

Ta có hai tam giác vuông AEO và AHB đồng dạng nên : $\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AE}{AH} \Rightarrow AO = \dfrac{AB.AE}{AH} = \dfrac{AB^2}{2AH}$

mà $BC^2 = SB^2 + SC^2 = a^2 + b^2$

$$BH^2 = \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2}$$

(điều kiện : $b < a\sqrt{3}$)

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC là :

$$R = AO = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. M, N là trung điểm của BC và CD. Tính thể của hình chóp AB'MN.

   Đáp số : $\dfrac{a^3}{8}$

2. Cho hình chóp SABC có các cạnh bên đôi một vuông góc. Diện tích các mặt bên lần lượt bằng $4a^2$, $6a^2$, $12a^2$. Tính thể tích của hình chóp.

   Đáp số : $16a^3$

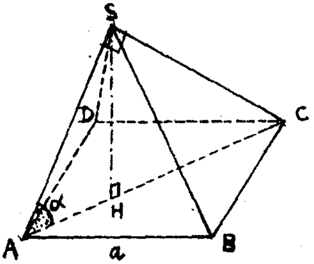
Vấn đề 2 : Tính thể tích hình chóp và hình chóp cụt (tính trục tiếp)

> Ta phải xác định đường cao, tính đường cao và diện tích đáy. (Cần xem lại các bài toán xác định đoạn vuông góc, khoảng cách, v.v.)

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp SABCD có : đáy là hình vuông ABCD cạnh a; (SAC) $\perp$ đáy ; $\widehat{ASC} = 90^\circ$ và SA tạo với đáy 1 góc bằng α. Tính thể tích của hình chóp.

Giải



* Ta có (SAC) $\perp$ (ABCD) theo giao tuyến AC , do đó kẻ

$$SH \perp AC \quad (H \in AC)$$

thì $SH \perp (ABCD)$

Vậy : $\widehat{SAH}$ = góc (SA,đáy) = α

* Δ vuông SAC cho : $SA = AC\cos\alpha$

Δ vuông SAH cho :

$SH = SA\sin\alpha = a\sqrt{2}\cos\alpha.\sin\alpha$.

Vậy thể tích hình chóp là :

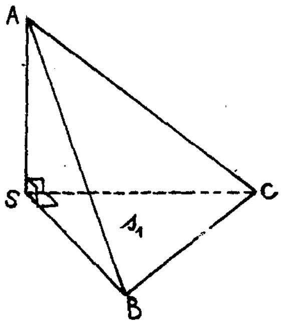
$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3} a^2 .a\sqrt{2} . \sin\alpha.\cos\alpha$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}\sin 2\alpha}{6}.$$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABC có các mặt bên đôi một vuông góc và có diện tích là s_1, s_2, s_3. Tính thể tích của hình chóp.

Giải



Ta có : (SAB) $\perp$ (SBC)

(SAC) $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow$ SA $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow$ SA $\perp$ SB và SA $\perp$ SC.

Tương tự : SB $\perp$ SC.

Gọi S_{SBC} , S_{SCA} , S_{SAB} lần lượt là s_1 , s_2 , s_3 ; ta có :

$$V(SABC) = V(ASBC) = \frac{1}{3} S_{SBC}.AS$$

$$= \frac{1}{3} s_1.AS$$

Tính AS :

Ta có : $\frac{1}{2}SA.SB = s_3$ (1)

$\frac{1}{2}SA.SC = s_2$ (2)

(1) & (2) cho : $\frac{1}{4}SA^2.SB.SC = s_3 \times s_2$

Mà $\frac{1}{2}SB.SC = s_1$ nên :

$$SA^2 = \frac{2s_2 s_3}{s_1} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{2s_2 s_3}{s_1}}$$

Vậy : $V(SABC) = \frac{1}{3} s_1 \times \sqrt{\frac{2s_2 s_3}{s_1}} = \frac{1}{3}\sqrt{2s_1s_2s_3}$

VÍ DỤ 3 :

Cho hình chóp SABC có : $\widehat{BAC} = 90^o$; $\widehat{ABC} = \alpha$; SBC là tam giác đều cạnh a và (SAB) ⊥ (ABC). Tính thể tích của hình chóp.

Giải

* Ta có : (SAB) ⊥ (ABC) theo giao tuyến AB.

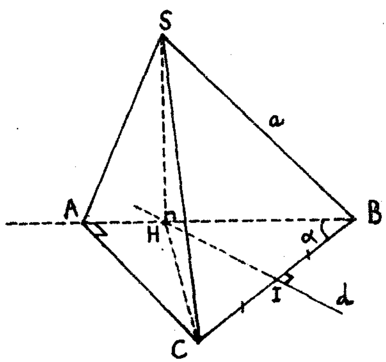
Kẻ SH ⊥ AB (H ∈ AB)

⇒ SH ⊥ (ABC)

Ta lại có : SB = SC

⇒ HB = HC

Vậy chân đường cao H là giao điểm của đường trung trực của BC và AB.



* Gọi I là trung điểm BC, HI là trung tuyến cũng là đường cao của tam giác cân HBC nên :

$$HB = \frac{BI}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$$

Do đó : $$SH^2 = SB^2 - HB^2 = a^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{a^2}{4\cos^2\alpha}(4\cos^2\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$$

* Trong Δ vuông ABC có : $AB = BC\cos\alpha$

$AC = BC\sin\alpha = a\sin\alpha$

nên : $$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\cos\alpha$$

Vậy : $$V(S.ABC) = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2.\sin\alpha.\cos\alpha.\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$$

$$V(S.ABC) = \frac{1}{12}a^3.\sin\alpha.\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$$

Điều kiện để bài toán có nghĩa :

$$4\cos^2\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha < 60^0$$

VÍ DỤ 4 :

Cho tứ diện ABCD có AD = b và 5 cạnh còn lại đều bằng a. Tính thể tích của tứ diện.

Giải

* Kẻ CH ⊥ (ABD)

Ta có :

$$CA = CB = CD\ (= a) \Rightarrow HA = HB = HD$$

Vậy H là tâm đường tròn (ABD).

(H là giao điểm của 2 đường trung trực của AD và AB).

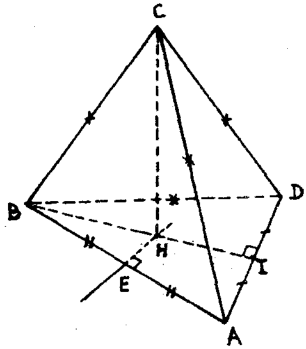
* Hai tam giác vuông BEH và BIA đồng dạng cho :

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BE}{BI}$$

$$\Rightarrow \quad BH = \frac{BA \cdot BE}{BI} = \frac{BA^2}{2BI}$$

Mà $BI = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ nên

$$BH = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$$



Trong tam giác vuông HBC cho :

$$CH^2 = CB^2 - BH^2 = a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2(3a^2 - b^2)}{4a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \quad CH = \frac{a\sqrt{3a^2 - b^2}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

Vậy : $V(C.ABD) = \frac{1}{3} S_{ABD}.CH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BI.AD.CH$

$$= \frac{1}{12} ab\sqrt{3a^2 - b^2}$$

Điều kiện để bài toán có nghĩa : $b < a\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 5 :

Cho hai hình thang ABCD và ABEF vuông tại A và B và nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc. Cho $AB = 5a$; $AD = AF = a$; $BC = 4a$; $BE = x$. Định x để ADF.BCE là 1 hình chóp cụt và tính thể tích của hình chóp cụt này.

Giải

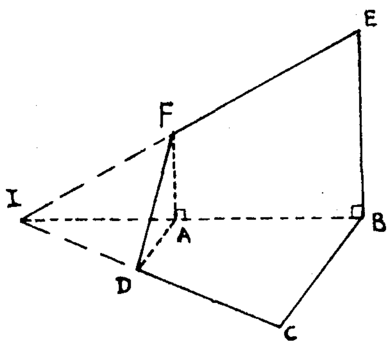
* CD cắt AB tại I.

ADF.BCE là hình chóp cụt khi EF qua I.

EF qua I $\Leftrightarrow \dfrac{BE}{AF} = \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{BC}{AD} = 4$

$\Leftrightarrow x = BE = 4a$

* Ta có : (ABEF) $\perp$ (ABCD) theo giao tuyến AB.



BE $\perp$ AB

$\Rightarrow$ BE $\perp$ (ABCD)

$\Rightarrow$ BE $\perp$ BC $\subset$ (ABCD)

Do đó :

$$S_{BCE} = \frac{1}{2} BC.BE = 8a^2 = B$$

$$S_{ADF} = \frac{1}{2} a^2 = B'$$

$h = AB = 5a$ (vì AB $\perp$ (ADF))

Vậy : $$V(ADF.BCE) = \frac{1}{3} h\,(B + B' + \sqrt{BB'})$$

$$= \frac{1}{3} 5a.(8a^2 + \frac{1}{2} a^2 + 2a^2) = 35a^3 .$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABC có các mặt bên đôi một vuông góc và BC = a ; CA = b ; AB = c. Tính thể tích của hình chóp.

   Đáp số : $V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{8}(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$

2. Cho hình chóp SABC, đáy là tam giác đều ; tam giác SBC có đường cao SH = h và (SBC) $\perp$ (ABC). Cho biết góc [SB,(ABC)] = α và góc [SC,(ABC)] = $90^\circ - \alpha$. Tính thể tích của hình chóp.

   Đáp số : $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{3\sin^2 2\alpha}$

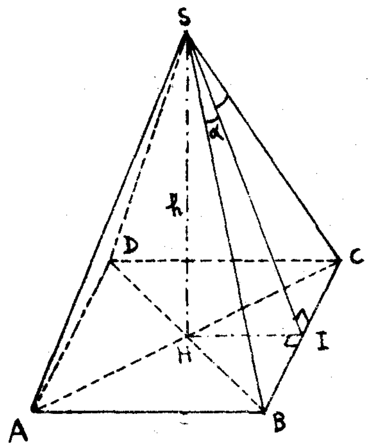
Vấn đề 3 : **Hình chóp đều**

Cần nhớ 2 đặc điểm : * Chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy (hay các cạnh bên bằng nhau). * Đáy là 1 đa giác đều.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, có chiều cao h, góc ở đỉnh của mặt bên bằng 2α. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp.

Giải



Gọi I là trung điểm của BC và đặt cạnh đáy bằng 2x . Ta có :

$HI = \frac{1}{2} AB = x$.

SI vừa là phân giác vừa là đường cao của tam giác SBC nên :

$SI = BI\text{cotg}\alpha$
$= x\text{cotg}\alpha$.

Δ vuông SHI cho :

$SI^2 = SH^2 + HI^2$

$x^2.\text{cotg}^2\alpha = h^2 + x^2$.

Vậy : $x = \dfrac{h}{\sqrt{\text{cotg}^2\alpha - 1}}$

Điều kiện để bài toán có nghĩa :

$\text{cotg}^2\alpha > 1 \Leftrightarrow \text{cotg}\alpha > 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

Vậy :

$S_{xq} = \frac{1}{2}\,p.d = \frac{1}{2}\,(8x).x\text{cotg}\alpha = 4x^2\,\text{cotg}\alpha = \dfrac{4h^2\,\text{cotg}\alpha}{\text{cotg}^2\alpha - 1}$

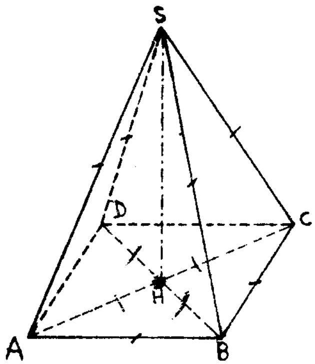
$V = \frac{1}{3}\,S_{ABCD} \times SH = \frac{1}{3}\,(4x^2).h = \dfrac{4h^3}{3(\text{cotg}^2\alpha - 1)}$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng SABCD là 1 hình chóp đều. Tính cạnh của hình chóp này khi thể tích của nó bằng $\dfrac{9a^3\sqrt{2}}{2}$.

Giải

* Ta có ngay ABCD là 1 hình thoi (vì có 4 cạnh bằng nhau).



Gọi H là tâm hình thoi. Ta có:

$$SH \perp AC \qquad (1)$$

(ΔSAC cân : trung tuyến cũng là đường cao).

Tương tự :

$$SH \perp BD \qquad (2)$$

(1) và (2) cho :

$$SH \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow \quad HA = HB = HC = HD$$

Vậy hình thoi ABCD là 1 hình vuông và SABCD là hình chóp đều.

* Đặt cạnh của hình chóp bằng x , ta có :

$$HB = \frac{x\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad SH = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Vậy thể tích hình chóp này là :

$$V(SABCD) = \frac{1}{3}\, x^2 \,.\, \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

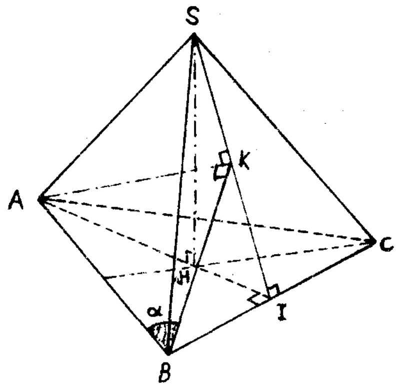
Và ta có : $\dfrac{9a^3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{3}\, x^3 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3a.$

♦ **VÍ DỤ 3 :**

Cho hình chóp tam giác đều SABC. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng d và góc [AB,(SBC)] = α. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp.

Giải

* *Xác định d và α*



. Gọi I là trung điểm BC. Ta có :

BC ⊥ (SAI)

(vì BC ⊥ AI và BC ⊥ SI).

. Kẻ AK ⊥ SI (K ∈ I)

và AK ⊥ BC (vì BC ⊥ (SAI))

nên AK ⊥ (SBC) :

AK = d là khoảng cách từ A đến (SBC).

. Ta lại có : BK là hình chiếu của AB trên SBC :

$\widehat{ABK} = \alpha$ là góc của AB và (SBC)

* *Tính V* :

Ta có : $V = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SH.$

. Tam giác vuông ABK cho :

$$\sin\alpha = \frac{AK}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\alpha}$$

Do đó : $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{d^2\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}$

. Hai tam giác vuông AKI và SHI đồng dạng cho :

$$\frac{SH}{AK} = \frac{SI}{AI} \qquad (1)$$

$$\text{Mà : } HI = \frac{1}{3}\ AI = \frac{1}{3}\ \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{d\sqrt{3}}{6\sin\alpha}$$

$$SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{x^2 + \frac{3d^2}{36\sin^2\alpha}} \quad (\text{đặt } SH = x)$$

$$\text{(1) thành : } \frac{x}{d} = \frac{\sqrt{x^2 + \dfrac{3d^2}{36\sin^2\alpha}}}{\dfrac{d\sqrt{3}}{2\sin\alpha}} \Leftrightarrow 9x^2 = 12x^2\sin^2\alpha + d^2$$

$$\text{Vậy : } \quad x^2 = \frac{d^2}{3(3 - 4\sin^2\alpha)} \quad \text{và} \quad SH = \frac{d}{\sqrt{3(3 - 4\sin^2\alpha)}}$$

Do đó :

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{d^2\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha} \times \frac{d}{\sqrt{3(3 - 4\sin^2\alpha)}} = \frac{d^3}{12\sin^2\alpha\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}}$$

Điều kiện để bài toán có nghĩa :

$$3 - 4\sin^2\alpha > 0 \Leftrightarrow \sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha < 60^\circ.$$

* *Tính S_{xq}* :

Ta có $\quad S_{xq} = 3\ S_{SBC}$

mà $\quad V = \frac{1}{3}\ AK.S_{SBC}$ nên $S_{SBC} = \frac{3V}{AK}$

$$\text{Vậy} \quad S_{xq} = \frac{9V}{d} = \frac{3d^2}{4\sin^2\alpha\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}}.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện đều cạnh a. Tính thể tích của tứ diện.

Đáp số : $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

2. Cho hình chóp tam giác đều SABC, cạnh bên bằng a, góc ở đỉnh của mặt bên bằng 2α. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp.

Đáp số : $S_{xq} = \dfrac{3a^2 \sin 2\alpha}{2}$; $V = \dfrac{1}{3} a^3 \sin^2\alpha \sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}$.

Vấn đề 4 : Hình chóp cụt đều

> Ngoài các đặc điểm của hình chóp cụt đều, cần chú ý đến các đường thường kẻ thêm khi tính toán đường cao, trung đoạn.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp cụt đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy lớn 3a, cạnh đáy nhỏ a và góc ở đáy của mặt bên là α. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cụt.

Giải

* Gọi OO' và II' lần lượt là đường cao và trung đoạn hình chóp cụt đều.

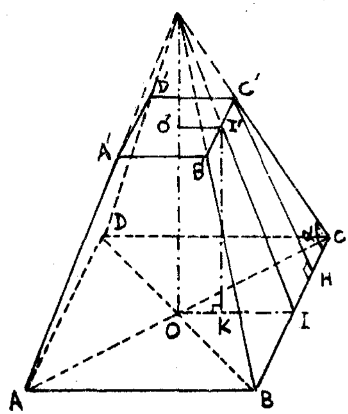
Kẻ $C'H \perp BC$ $(H \in BC)$

Ta có : $C'H = II'$

và $IH = I'C' = \dfrac{a}{2}$

Suy ra $CH = a$

và $C'H = a\operatorname{tg}\alpha$.



Vậy : $S_{xq} = \dfrac{1}{2}(p + p')d$

$$= \frac{1}{2}(4.3a + 4.a).a\operatorname{tg}\alpha = 8a^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

$$S_{tp} = 8a^2 \operatorname{tg}\alpha + 9a^2 + a^2 = 2a^2(4\operatorname{tg}\alpha + 5)$$

* Kẻ $I'K \perp (ABCD)$ ($I'K \,//\, OO'$ và $I'K = OO'$). Ta có :

$$I'K = \sqrt{II'^2 - IK^2}$$

Mà : $IK = OI - O'I' = \dfrac{3a}{2} - \dfrac{a}{2} = a$

Do đó : $OO' = I'K = a\sqrt{tg^2\alpha - 1}$.

Vậy : $V = \dfrac{1}{3} h \left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$

(với $h = OO'$; $B = S_{ABCD}$; $B' = S_{A'B'C'D'}$)

$$= \frac{1}{3} a \sqrt{tg^2\alpha - 1}\ (9a^2 + a^2 + 3a^2)$$

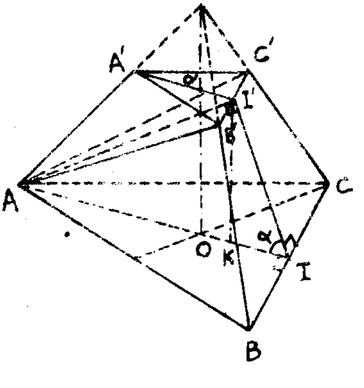
$$= \frac{13a^3}{3} \sqrt{tg^2\alpha - 1}$$

Điều kiện để bài toán có nghĩa : $tg^2\alpha > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp cụt đều ABC.A'B'C' có : cạnh lớn 2a ; mặt bên hợp với đáy 1 góc α ; mặt phẳng A B'C' vuông góc với (BCC'B'). Tính thể tích hình chóp cụt.

Giải



* Gọi I, I' trung điểm của BC, B'C'. Ta có :

$\widehat{AII'} = \alpha$ là góc [(BCC'B');(ABC)]

. Ta cũng có :

AB'C' là tam giác cân (AB' = AC') nên $AI' \perp B'C'$.

Mà : $(AB'C') \perp (BCC'B')$ theo giao tuyến B'C', nên :

$$AI' \perp (BCC'B')$$

. Gọi OO' là tâm của vòng tròn ngoại tiếp (ABC), (A'B'C') và kẻ

- I'K ⊥ (ABC) (I'K // OO' và I'K = OO'). Ta có :

$$II' = AI\cos\alpha = a\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$I'K = II'\sin\alpha = a\sqrt{3}\cos\alpha.\sin\alpha.$$

$$IK = II'\cos\alpha = a\sqrt{3}\cos^2\alpha$$

Mà : $O'I' = OK = OI - IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - a\sqrt{3}\cos^2\alpha$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{3}(1 - 3\cos^2\alpha)$$

$A'I' = 3O'I' = a\sqrt{3}(1 - 3\cos^2\alpha)$, và $A'I' = \dfrac{B'C'\sqrt{3}}{2}$

nên $B'C' = \dfrac{2A'I'}{\sqrt{3}} = 2a(1 - 3\cos^2\alpha)$

* Vậy : $V = \dfrac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$

với $h = I'K$; $B = \dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4}$; $B' = \dfrac{B'C'^2\sqrt{3}}{4}$

$$V = \frac{1}{12}h\sqrt{3}(BC^2 + B'C'^2 + BC.B'C')$$

$$= \frac{3}{2}a^3\sin2\alpha(3\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha + 1).$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp cụt đều ABC.A'B'C', cạnh đáy lớn 3a, cạnh đáy nhỏ a, góc ở đáy của mặt bên là α. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cụt.

2. Cho hình chóp cụt đều ABCD.A'B'C'D' có : góc giữa mặt bên và đáy là α ; đường cao là h và đường chéo A'C = d. Tính diện tích toàn phần của hình chóp cụt.

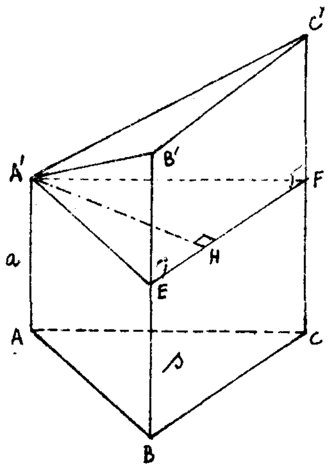
Vấn đề 5 : Tính thể tích của một khối đa diện

Ta xem khối đa diện là tổng hay hiệu nhiều khối đơn giản (hình lăng trụ, hình chóp).

VÍ DỤ 1 :

Cho tam giác ABC có diện tích s . Kẻ AA' , BB', CC' vuông góc với (ABC) và ở về cùng một phía đối với ABC. Cho AA' = a , BB' = b , CC' = c ($a < b \le c$). Tính thể tích khối ABC.A'B'C'.

Giải



* Qua A', kẻ mặt phẳng song song với (ABC), cắt BB' tại E, CC' tại F . Thể tích khối ABC.A'B'C' bằng thể tích hình lăng trụ ABC.A'EF cộng thể tích hình chóp A'EFC'B'.

* Ta có :

$V(ABC.A'EF) = S_{ABC}.AA' = a.s$

* Kẻ $A'H \perp EF$ ($H \in EF$) (1)

Vì (A'EF) // (ABC) nên

$BB' \perp (A'EF) \Rightarrow BB' \perp A'H$ (2)

(1) và (2) cho : $A'H \perp EFC'B'$.

Do đó : $V(A'EFC'B') = \frac{1}{3} S_{EFC'B'} \times A'H$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (EB' + FC').EF.A'H$

Mà : $\frac{1}{2} EF.A'H = S_{A'EF} = S_{ABC} = s$; và $EB' = b - a$;

$CF' = c - a$ nên :

$V(A'EFC'B') = \frac{1}{3} s (b + c - 2a)$

* Như vậy :

$V(ABC.A'B'C') = as + \frac{1}{3} (b + c - 2a)s = \frac{1}{3} (a + b + c)s$

Ghi chú :

Khối ABC.A'B'C' gọi là hình lăng trụ cụt tam giác và ta có thể chứng minh được công thức tính thể tích sau :

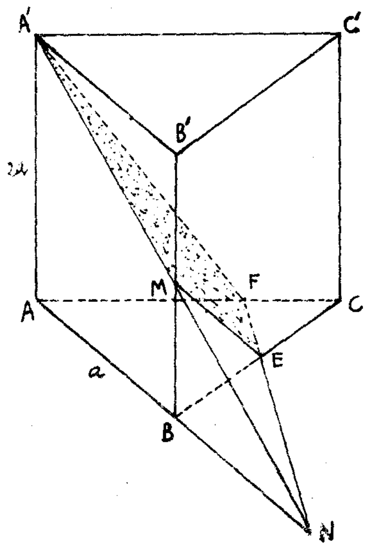
$$V((ABC.A'B'C') = \frac{1}{3}(a + b + c)s_1$$

với a, b, c là 3 cạnh bên và s_1 là diện tích thiết diện thẳng góc với cạnh bên.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình lăng trụ tam giác đều, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. M, E là trung điểm của BB' và BC. Mặt phẳng A'ME chia hình lăng trụ thành hai phần. Tính thể tích hai phần đó.

Giải



* A'M cắt AB tại N với BN = a (vì BM // AA' và $BM = \frac{1}{2} AA'$).

NE cắt AC tại F .

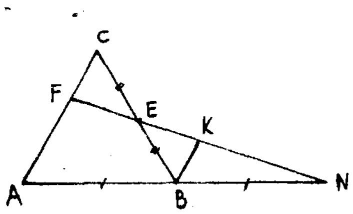
Vậy mặt phẳng A'ME cắt lăng trụ thành hai phần : A'MEFAB và A'MEFCC'B'.

* Khối A'MEFAB có thể tích bằng hiệu số thể tích của hai hình chóp A'.ANF và M.BNE.

. Ta có :

$$V(A'.ANF) = \frac{1}{3} S_{ANF}.AA' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AN.AF.\sin 60^\circ \times AA' .$$

$$V(M.BNE) = \frac{1}{3} S_{BNE}.MB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BN.BE.\sin 120^\circ \times MB.$$



. *Tính AF*

Kẻ BK //AC. Ta có :

$BK = \frac{1}{2} AF$ (đường trung bình)

$BK = CF$ (vì $\Delta ECF = \Delta EBK$)

Do đó : $AF = 2CF = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} a.$

* Vậy : $V(A'MEFAB) = V(A'.ANF) - V(M.BNE)$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a - \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{72}(16a^3 - 3a^3) = \frac{13a^3\sqrt{3}}{72}$$

và $V(A'MEFCC'B') = V(ABC.A'B'C') - V(A'MEFAB)$

$$= 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{13a^3\sqrt{3}}{72} = \frac{23a^3\sqrt{3}}{72}.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' cạnh đáy a, cạnh bên 2a. E, F là trung điểm của A'B' và A'C'. Mặt phẳng (BCEF) chia lăng trụ thành hai phần. Tính thể tích phần không chứa điểm A.

   Đáp số : $\frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$

2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. E, F là trung điểm của BC và CD. Mặt phẳng (A'EF) chia hình lập phương thành hai phần. tính thể tích của 2 phần này.

   Hướng dẫn :

   Đường thẳng EF cắt AB tại I và AD tại J . Xét hình chóp A'AIJ .

   Đáp số : $\frac{7a^3}{24}$ và $\frac{17a^3}{24}$

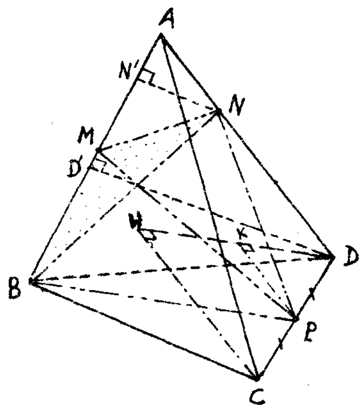
Vấn đề 6 : Tính thể tích hình chóp (tính gián tiếp)

> Ta thường phải so sánh đường cao, diện tích đáy của hình chóp phải tính với một hình chóp đã biết (hay dễ tính toán hơn).

VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng v. M, P là trung điểm của AB và CD. N ∈ đoạn AD và DA = 3NA. Tính thể tích tứ diện BMNP.

Giải



. Kẻ $CH \perp (ABD)$

$PK \perp (ABD)$

Ta có : $PK = \frac{1}{2} CH$

(đường trung bình)

. Gọi NN' , DD' là các đường cao trong tam giác NBM và DAB , ta có :

$$\frac{S_{NBM}}{S_{DAB}} = \frac{\frac{1}{2} NN'.BM}{\frac{1}{2} DD'.AB}$$

Mà :

$$\frac{NN'}{DD'} = \frac{NA}{DA} = \frac{1}{3} \quad \text{và} \quad \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$$

nên : $$\frac{S_{NBM}}{S_{DAB}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Vậy :

$$\frac{V(P.BMN)}{V(D.ABC)} = \frac{\frac{1}{3} PK.S_{NBM}}{\frac{1}{3} CH.S_{ABD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

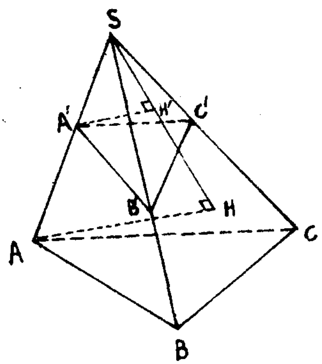
Do đó : $V(BMNP) = \dfrac{1}{12}\, v$.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp S.ABC. Trên các đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$\frac{V(S\,.\,A'B'C')}{V(S\,.\,ABC)} = \frac{SA'\,.\,SB'\,.\,SC'}{SA\,.\,SB\,.\,SC}$$

Giải



. Kẻ các đường thẳng

$AH \perp (SBC)$

$A'H' \perp (SBC)$

Ta có :

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{SA'}{SA}$$

. Ta lại có :

$$\frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2}\,SB'\,.\,SC'\,.\,\sin\widehat{B'SC'}}{\frac{1}{2}\,SB\,.\,SC\,.\,\sin\widehat{BSC}}$$

$$= \frac{SB'.SC'}{SB.SC}$$

Vậy :

$$\frac{V(S\,.\,A'B'C')}{V(S\,.\,ABC)} = \frac{V(A'\,.\,SB'C')}{V(A\,.\,SBC)} = \frac{\frac{1}{3}\,A'H'\cdot S_{SB'C'}}{\frac{1}{3}\,AH\cdot S_{SBC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

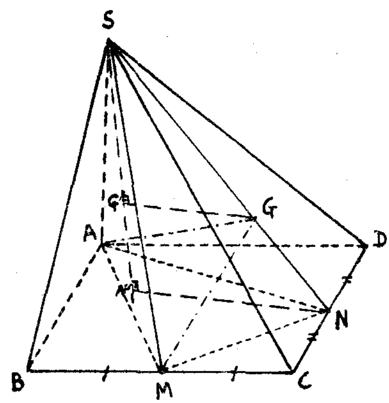
Chú ý :

Công thức trên có thể dùng để so sánh thể tích hai hình chóp tam giác có chung đỉnh và chung cạnh bên.

◆ **VÍ DỤ 3 :**

Cho hình chóp S.ABCD có thể tích là v , ABCD là hình bình hành ; M là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác SCD. Tính thể tích tứ diện S.AMG.

Giải



Hai hình chóp S.ABCD và S.AMG rất khó so sánh. Ta dùng hình chóp S.AMN làm trung gian để so sánh (N là trung điểm của CD).

* Hai hình chóp S.ABCD và S.AMN có chung đường cao h. Ta so sánh S_{AMN} và S_{ABCD}.

Ta có :

$$S_{ABM} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = S_{ADN}$$

$$S_{CMN} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$$

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN} + S_{CMN}) = \frac{3}{8} S_{ABCD} .$$

Do đó :

$$\frac{V(S.AMN)}{V(S.ABCD)} = \frac{\frac{1}{3} h . S_{AMN}}{\frac{1}{3} h . S_{ABCD}} = \frac{3}{8} \qquad (1)$$

* Chọn tam giác SAM làm đáy chung của 2 tứ diện S.AMG và S.AMN. Vẽ NN' ⊥ (SAM) và GG' ⊥ (SAM).

Ta có :

$$\frac{V(G.SAM)}{V(N.SAM)} = \frac{\frac{1}{3} GG' . S_{SAM}}{\frac{1}{3} NN' . S_{SAM}} = \frac{GG'}{NN'} = \frac{SG}{SN} = \frac{2}{3} \qquad (2)$$

(1) và (2) cho : $\dfrac{V(G.SAM)}{V(S.ABCD)} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}$

Vậy : $V(S.AMG) = \dfrac{1}{4} v$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp SABCD có thể tích là v ; ABCD là hình bình hành. M, N, P là trung điểm của BC, CD, SD. Tính thể tích tứ diện AMNP.

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích bằng v. M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD và CC'. Tính thể tích tứ diện MNPQ.

Vấn đề 7 : **Tính thể tích bằng cách sử dụng công thức :**

$$\frac{V(S.A'B'C')}{V(S.ABC)} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC} \qquad \textbf{(1)}$$

Cần nhớ rằng ta chỉ áp dụng công thức (1) được cho những *hình chóp tam giác* có chung đỉnh và chung cạnh bên.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. M ∈ cạnh SA và $\dfrac{SM}{SA} = x$. Tính x để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau.

Giải

Ta có BC // AD nên (MBC) cắt SAD theo giao tuyến MN // BC.

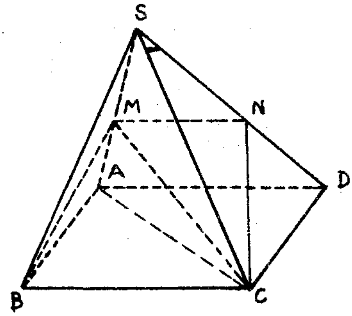
* Ta có :

$$\frac{V(S.MBC)}{V(S.ABC)} = \frac{SM.SB.SC}{SA.SB.SC} = x$$

Mà : $V(S.ABC) = \frac{1}{2} V(S.ABCD) = \frac{1}{2} v$

(vì hai hình chóp này có chung đường cao và $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$)

Do đó : $V(S.MBC) = \frac{1}{2} v.x$



Tương tự :

$$\frac{V(S.MCN)}{V(S.ACD)} = \frac{SM.SC.SN}{SA.SC.SD} = x^2$$

$$\left(\text{vì } \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} = x\right)$$

$$\Rightarrow \quad V(SMCN) = \frac{1}{2} x^2.v$$

* Ta lại có :

$$V(S.MBCN) = V(S.MBC) + V(S.MCN) = \frac{1}{2} v\,(x + x^2)$$

Mặt phẳng (MBC) chia S.ABCD thành 2 phần có thể tích bằng nhau thì có :

$$V(S.MBCN) = \frac{1}{2} V(S.ABCD) = \frac{1}{2} v .$$

$$\Leftrightarrow \quad x + x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad (\text{vì } x > 0)$$

♦ **VÍ DỤ 2 :**

Cho hình chóp S.ABC : M ∈ cạnh SA , N ∈ cạnh SB sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$; $\frac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng α qua MN và song song với SC cắt AC tại E, BC tại F .

a) Chứng minh rằng AB , MN , EF đồng quy tại I . Tính tỉ số $\frac{BI}{BA}$.

b) Mặt phẳng α chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích của 2 phần này.

Giải

a) *Chứng minh AB, MN, EF đồng quy*

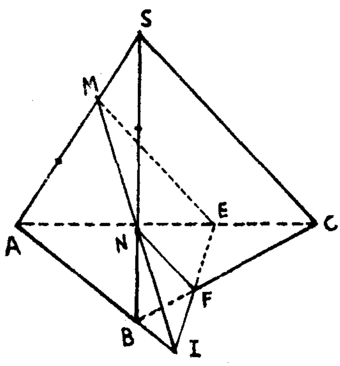
MN cắt AB tại I. Ta có :

$$I \in MN \Rightarrow I \in \alpha$$
$$I \in AB \Rightarrow I \subset (ABC)$$

Do đó : $I \in$ giao tuyến EF của α và (ABC).

Vậy AB, MN, EF đồng quy tại I.

* *Tính* $\frac{BI}{BA}$



Gọi L là trung điểm của SN

. Ta có : $SL = \frac{1}{2} SN = NB$

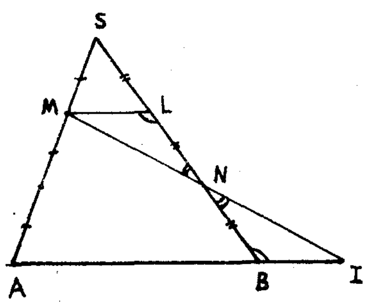
Do đó : $\frac{SM}{SA} = \frac{SL}{SB} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow ML \,//\, AB \text{ và } \frac{ML}{AB} = \frac{1}{3}$$

. Ta cũng có :

$$\Delta MNL = \Delta INB \text{ (g.c.g)}$$
$$\Rightarrow BI = ML = \frac{1}{3} AB .$$

Vậy : $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{3}$.



b) *Tính tỉ số thể tích*

α // SC nên cắt (SAC) theo ME // SC.

Tương tự : NF // SC.

* Gọi V_1 là thể tích khối MNFEAB. Ta có :

$V_1 = V(A.MEI) - V(B.NFI)$

. Hình chóp A.MEI và hình

chóp A.SCB có đỉnh chung và cạnh bên chung nên :

$$\frac{V(A.MEI)}{V(A.SBC)} = \frac{AM.AE.AI}{AS.AC.AB} \qquad (1)$$

Mà : $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{4}{3}$

$\left(\text{vì } \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AB + BI}{AB} = 1 + \dfrac{1}{3}\right)$

nên :

$$\frac{V(A.MEI)}{V(A.SCB)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{27}$$

hay $\quad V(A.MEI) = \dfrac{16}{27}v \quad$ với $v = V(A.SCB)$

. Tương tự , hình chóp B.NFI và hình chóp B.SCA có chung đỉnh và cạnh bên, nên :

$$\frac{V(B.NFI)}{V(B.SCA)} = \frac{BN.BF.BI}{BS.BC.BA} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

hay : $\quad V(B.NFI) = \dfrac{1}{27}v$.

* Vậy : $\quad V_1 = \dfrac{16}{27}v - \dfrac{1}{27}v = \dfrac{15}{27}v = \dfrac{5}{9}v$.

và $\quad V_2 = V(MNFECS) = V(S.ABC) - V_1$

$$= v - \frac{5}{9}v = \frac{4}{9}v$$

Do đó : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{5}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình chóp S.ABCD có thể tích bằng v , ABCD là hình bình hành. M ∈ cạnh SA và $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Tính thể tích khối (ABCDMN).

Đáp số : $\dfrac{4}{9}$ v.

♦ **2.** Cho hình chóp S.ABCD. ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của SC.

a) Chứng minh rằng AI qua trọng tâm G của tam giác SBD.

b) Mặt phẳng qua AI và song song với BD chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích 2 phần này.

Hướng dẫn :

a) Gọi O là tâm hình bình hành. SO, AI là trung tuyến của ΔSAC.

b) Tỉ số thể tích là $\frac{1}{2}$.

Vấn đề 8 : Dùng thể tích để chứng minh một hệ thức

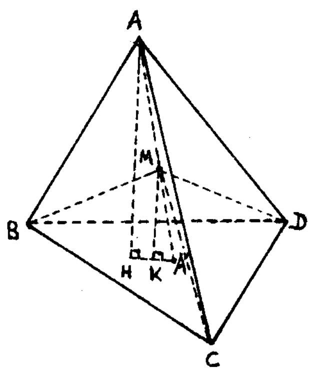
VÍ DỤ 1 :

Cho tứ diện ABCD và điểm M ở trong. AM cắt (BCD) tại A' ; BM cắt (ACD) tại B' ; CM cắt (ABD) tại C' và DM cắt (ABC) tại D'. Chứng minh rằng :

$$\frac{V(M.BCD)}{V(ABCD)} = \frac{MA'}{AA'}$$

và suy ra : $\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} = 1$.

Giải



* Vẽ AH ⊥ (BCD) ; MK ⊥ (BCD). (MK // AH và 3 điểm A' , H, K thẳng hàng).

Ta có :

$$\frac{V(M.BCD)}{V(ABCD)} = \frac{\frac{1}{3}MK.S_{BCD}}{\frac{1}{3}AH.S_{BCD}} = \frac{MK}{AH} = \frac{MA'}{AA'}$$

* Tương tự , ta có :

$$\frac{V(M.CDA)}{V(ABCD)} = \frac{MB'}{BB'} \quad ; \quad \frac{V(M.DAB)}{V(ABCD)} = \frac{MC'}{CC'}$$

và $$\frac{V(M.ABC)}{V(ABCD)} = \frac{MD'}{DD'}$$

Vậy :

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} =$$

$$= \frac{V(M.BCD) + V(M.CDA) + V(M.DAB) + V(M.ABC)}{V(ABCD)}$$

$$= \frac{V(ABCD)}{V(ABCD)} = 1 .$$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Chứng minh hệ thức :

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SC'} = \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SD'} \qquad (1)$$

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ SB'.SC'.SD' + SA'.SB'.SD' = SA'.SC'.SD' + SA'.SB'.SC' (2)

* Gọi v là thể tích hình chóp SABCD và l là cạnh bên.

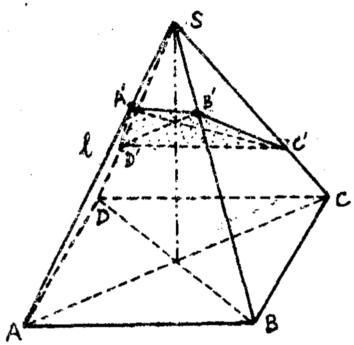
Xét hai hình chóp S.B'C'D' và SBCD , ta có :

$$\frac{V(S.B'C'D')}{V(S.BCD)} = \frac{SB'.SC'.SD'}{SB.SC.SD}$$

Mà : $V(S.BCD) = \frac{1}{2}\ V(S.ABCD) = \frac{1}{2}\,v$

và $SA = SB = SC = SD = l$

nên $V(S.B'C'D') = SB'.SC'.SD' \times \frac{v}{2l^3}$



Tương tự :

$$V(S.A'B'D') = SA'.SB'.SD' \times \frac{V}{2l^3}$$

$$V(S.A'C'D') = SA'.SC'.SD' \times \frac{V}{2l^3}$$

$$V(S.A'B'C') = SA'.SB'.SC' \times \frac{V}{2l^3}$$

* Ta cũng có : $V(S.A'B'C'D') = V(S.B'C'D') + V(S.A'B'D')$
$= V(S.A'C'D') + V(S.A'B'C')$

nên : $\frac{V}{2l^3}(SB'.SC'.SD' + SA'.SB'.SD') =$

$= \frac{V}{2l^3}(SA'.SC'.SD' + SA'.SB'.SC')$

Vậy : $SB'.SC'.SD' + SA'.SB'.SD' = SA'.SC'.SD' + SA'.SB'.SC'$

Hệ thức (2) được chứng minh nên (1) được chứng minh.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện ABCD và M là 1 điểm ở trong tam giác BCD. Vẽ MB' // AB (B' ∈ (ACD)) ; MC' // AC (C' ∈ (ABD)) ; MD' // AD (D' ∈ (ABC)). Chứng minh rằng BM và AB' cắt nhau trên CD và $\frac{V(MACD)}{V(BACD)} = \frac{MB'}{BA}$.

Suy ra rằng : $\frac{MB'}{BA} + \frac{MC'}{CA} + \frac{MD'}{DA} = 1$

♦2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC , đường cao là SO. Lấy O' ∈ SO. Một mặt phẳng lưu động qua O' và cắt SA, SB, SC tại A', B', C'. Chứng minh rằng $\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = 1$ hằng số.

Hướng dẫn :

Phân tích $V_{SA'B'C'} = V_{SOA'B'} + V_{SOB'C'} + V_{SOC'A'}$; tương tự với V_{SABC} và dùng $\frac{V_{SOA'B'}}{V_{SOAB}} = \frac{SA'.SB'.SO'}{SA.SB.SO}$. Hằng số bằng $\frac{3SO}{SA.SO'}$.

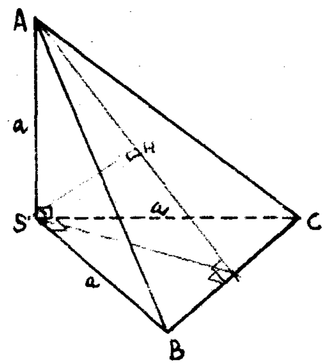
Vấn đề 9 : Dùng thể tích để tính đường cao hay diện tích đáy

> Xét công thức $V = \frac{1}{3}Bh$. Trong một số trường hợp ta có thể biết V và B dễ dàng (hay V và h) nên sẽ suy ra được h (hay B).

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp S.ABC có các mặt bên đều là tam giác vuông đỉnh S và SA = SB = SC = a. Tính khoảng cách từ S đến mặt (ABC).

Giải



* Ta có :

$$V(S.ABC) = V(A.SBC) = \frac{1}{3} SA. \frac{1}{2} SB.SC = \frac{1}{6} a^3.$$

Ta lại có ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ (vì các tam giác SAB, SAC, SBC vuông cân)

nên $$S_{ABC} = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

* Với SK là khoảng cách từ S đến (ABC) , ta cũng có :

$$V(S.ABC) = \frac{1}{3} S_{ABC}.SK.$$

Vậy :

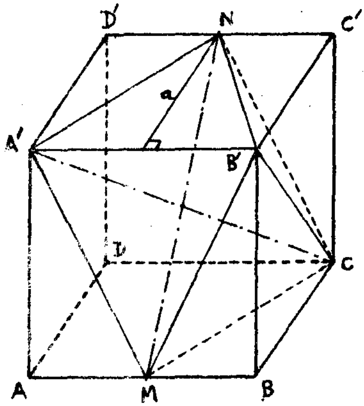
$$SK = \frac{3V(SABC)}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot a^3}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

♦ **VÍ DỤ 2 :**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a ; M, N là trung điểm của AB và C'D'. Chứng minh rằng A'MCN là 1 hình thoi và tính khoảng cách từ B' đến A'MCN.

Giải

* *Chứng minh A'MCN là hình thoi*



Ta có : $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NC'} + \overrightarrow{C'C}$

Mà $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C}$ và

• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC'}\ (= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$,

nên : $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{NC}$

Do đó A'MCN là hình bình hành.

Ta cũng có :

$$A'M = A'N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vậy A'MCN là hình thoi.

* *Tính khoảng cách từ B' đến A'MCN*

. Ta có :

$$V(B'.A'MCN) = 2V(B'.A'NC)$$

(vì có chung đường cao vẽ từ B' và $S_{A'MCN} = 2S_{A'NC}$)

Mà : $V(B'.A'NC) = V(C.A'B'N) = \frac{1}{3} \cdot S_{A'B'N} \times CC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^3$

nên $V(B'.A'MCN) = \dfrac{a^3}{3}$

. Ta cũng có : $S_{A'MCN} = \dfrac{1}{2}$ A'C.MN

Mà : $MN = BC' = a\sqrt{2}$ (vì MBC'N là hình bình hành)

$A'C = a\sqrt{3}$ (đường chéo hình lập phương)

nên $S_{A'MCN} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$

. Ta lại có : $V(B'.A'MCN) = \frac{1}{3} S_{A'MCN} \times B'H$

(với B'H là khoảng cách từ B' đến A'MCN).

Vậy :

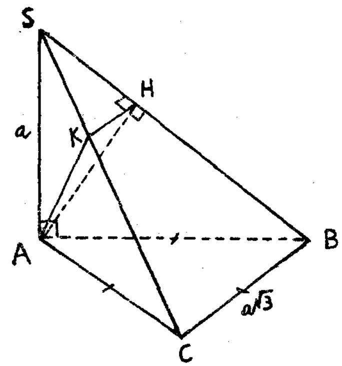
$$B'H = \frac{3V(B'.A'MCN)}{S_{A'MCN}} = \frac{a^3}{\frac{a^2\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

♦ **VÍ DỤ 3 :**

Cho hình chóp S.ABC , đáy là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$ đường cao là SA = a. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SB tại H cắt SC tại K. Tính SK và diện tích của tam giác AHK.

Giải

* *Tính SK* :



Ta có : SB = SC = 2a.

Tam giác vuông SAB cho :

$$SA^2 = SH.SB$$

$$\Rightarrow \quad SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác vuông SHK cho :

$$SK = \frac{SH}{\cos\widehat{BSC}}$$

Từ hệ thức :

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos\widehat{BSC}\text{ , ta có :}$$

$$\cos\widehat{BSC} = \frac{5a^2}{8a^2} = \frac{5}{8}$$

Vậy : $$SK = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4a}{5}.$$

* *Tính S_{AHK}* :

Ta có : $\dfrac{V(SAHK)}{V(SABC)} = \dfrac{SA.SH.SK}{SA.SB.SC} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$

mà : $V(SABC) = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SA = \dfrac{1}{3}\dfrac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

nên $V(SAHK) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{40}$

Ta cũng có :

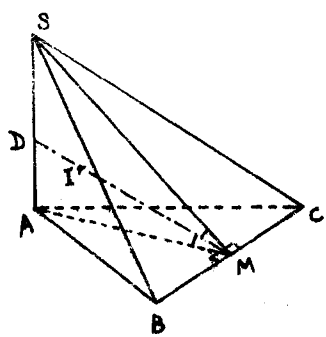
$$V(SAHK) = \frac{1}{3} S_{AHK}.SH$$

Vậy : $S_{AHK} = \dfrac{3V(SAHK)}{SH} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{40\cdot\dfrac{a}{2}} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{20}$.

♦ **VÍ DỤ 4 :**

Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) ; ABC là tam giác đều và AS = AB = AC = a. M là trung điểm của BC và MD là phân giác trong của góc SMA. Chứng minh rằng trên MD có 1 điểm cách đều tất cả các mặt của hình chóp (tâm mặt cầu nội tiếp). Tính bán kính của mặt cầu này.

Giải



* Để ý rằng :

. (SAM) là mặt phân giác của nhị diện cạnh SA.

. (BCD) là mặt phân giác của nhị diện cạnh BC.

Kẻ mặt phân giác (α) của nhị diện cạnh AB, (α) phải cắt MD tại I (vì M, D ở 2 bên (α)). Ta có :

$d[I,(ABC)] = d[I,(SBC)] = r$ (vì $I \in$ mặt phân giác của nhị diện BC)

$d[I,(SAB)] = d[I,(ABC)] = r$ (vì $I \in$ mặt phân giác (α))

$d[I,(SAB)] = d[I,(SAC)] = r$ (vì $I \in$ mặt phân giác (SAM))

Vậy I cách đều bốn mặt của hình chóp S.ABC.

* Ta có :

$$V(S.ABC) = V(I.ABC) + V(I.SBC) + V(I.SCA) + V(I.SAB)$$

$$= \frac{1}{3} r (S_{ABC} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{SAB})$$

Vậy $$r = \frac{3V(S.ABC)}{S_{tp}} \quad (1)$$

Mà : $$V(S.ABC) = \frac{1}{3} \cdot SA.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SM.BC = \frac{1}{4} a^2\sqrt{7}$$

$$\left(\text{vì } SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$S_{SAB} = S_{SAC} = \frac{1}{2} a^2$$

nên

$$r = \frac{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{7} + 2 + 2)} = \frac{a\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3} + \sqrt{7}}$$

Chú ý : *Khi có hình cầu nội tiếp, ta có thể dùng công thức (1) để tính bán kính của hình cầu nội tiếp này.*

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' , cạnh a. Tính thể tích tứ diện BDC'B' và suy ra khoảng cách từ B' đến mặt (BDC').

Đáp số : $V(BDC'B') = \frac{a^3}{6}$ và $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

2. Cho tứ diện ABCD có thể tích v ; M ∈ AC ; N ∈ AD ; P ∈ BD sao cho : $\frac{CM}{CA} = \frac{DN}{DA} = \frac{DP}{DB} = \frac{2}{3}$.

Cho biết khoảng cách từ D đến (MNP) bằng h, tính diện tích tam giác MNP.

Hướng dẫn : $V(M.DNP) = \frac{4}{27}v$; $S_{MNP} = \frac{4v}{9h}$

C. TOÁN TỔNG HỢP

1. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a ; AC = BD = b ; AD = BC = c.

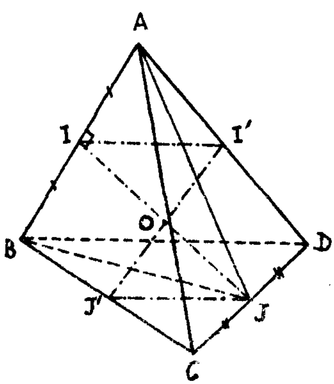
   a) Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối là đoạn vuông góc chung của cặp cạnh đối đó.

   b) Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

   c) Qua các đỉnh B, C, D lần lượt kẻ các đường thẳng song song với CD, BD, BC ; ta được tam giác MNP. Chứng minh rằng hình chóp A.MNP có 3 mặt bên vuông đỉnh A. Tính thể tích hình chóp A.MNP và suy ra thể tích tứ diện ABCD.

Giải

a) *Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD*



Gọi I, J là trung điểm của AB và CD. Ta có :

$$AJ = BJ$$

(vì ΔACD = ΔBDC (c.c.c)).

Tam giác JAB cân nên trung tuyến JI cũng là đường cao :

$$JI \perp AB.$$

Tương tự : $IJ \perp CD$

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Chứng minh tương tự cho các cặp cạnh đối khác.

b) *Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp ABCD*

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCD. Ta có :

$OA = OB \Leftrightarrow O \in$ mặt phẳng trung trực (π) của AB

$OC = OD \Leftrightarrow O \in$ mặt phẳng trung trực (π') của CD.

Vậy $O \in$ giao tuyến của (π) và (π').

Để ý rằng IJ vừa nằm trong (π), vừa nằm trong (π') nên IJ là giao tuyến của (π) , (π').

Do đó : $O \in IJ$.

Tương tự : $O \in I'J'$ với I', J' là trung điểm của AD và BC.

Ta lại có : $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{J'J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Do đó II'JJ' là hình bình hành, và IJ cắt I'J' tại trung điểm O của mỗi đường.

Vậy tâm O là trung điểm IJ .

Tính bán kính :

Ta có : $AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{CD^2}{2}$

$$\Rightarrow AJ^2 = \frac{1}{4}[\,2(AC^2 + AD^2) - CD^2\,]$$

$$= \frac{1}{4}[\,2(b^2 + c^2) - a^2\,]$$

Trong tam giác vuông AIJ có :

$$IJ^2 = AJ^2 - AI^2$$

$$= \frac{1}{4}[\,2(b^2 + c^2) - a^2\,] - \frac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$$

Trong tam giác vuông AIO có :

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 = \frac{1}{4}IJ^2 + JA^2$$

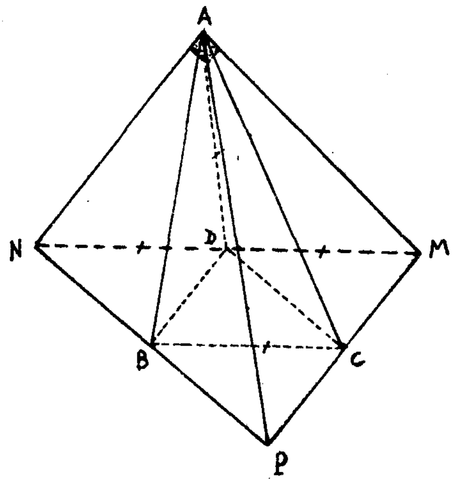
$$= \frac{1}{8}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp ABCD là :

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

c) * *Chứng minh* $\widehat{MAN} = \widehat{NAP} = \widehat{PAM} = 90^o$



Ta có : DN = BC = c (vì DNBC là hình bình hành).

Tương tự : DM = BC = c.

Vậy : DA = DM = DN : ΔMAN có trung tuyến bằng nửa cạnh đối diện nên vuông tại A.

Tương tự :

$$\widehat{NAP} = \widehat{PAM} = 90^o.$$

* *Tính V(AMNP)*

Ta có MA $\perp$ (NAP) (vì MA $\perp$ NA và MA $\perp$ PA)

Do đó : $V(M.ANP) = \frac{1}{3}S_{ANP}.MA = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AN.AP.AM$

Đặt AM = x ; AN = y ; AP = z . Ta có :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4c^2 & (\Delta AMN \text{ vuông} : AM^2 + AN^2 = MN^2) \\ y^2 + z^2 = 4a^2 & (\text{tương tự}) \\ z^2 + x^2 = 4b^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow \quad z^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \quad ; \quad x^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2) \quad ;$

$\quad\quad y^2 = 2(c^2 + a^2 - b^2)$

Vậy :

$$V(AMNP) = \frac{1}{6}\, xyz$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{8(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

* *Tính V(A.BCD)* :

Hai hình chóp A.MNP và A.BCD có chung đường cao và

$S_{BCD} = \frac{1}{4} S_{MNP}$ ($\Delta BCD \sim \Delta MNP$ và tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{2}$)

Vậy :

$$V(A.BCD) = \frac{1}{4}\, V(AMNP)$$

$$= \frac{1}{24}\sqrt{8(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}\,.$$

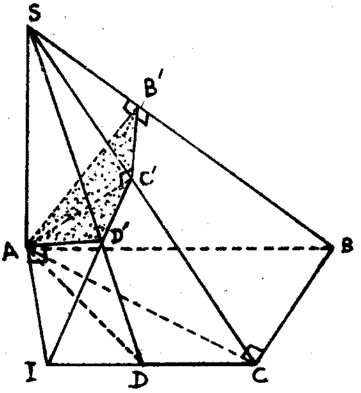
2. Cho hình chóp S.ABCD ; ABCD là nửa lục giác đều (AB = 2a, BC = CD = DA = a). Đường cao của hình chóp là SA = $a\sqrt{3}$. Một mặt phẳng qua A và vuông góc với SB cắt SB, SC, SD tại B', C', D'.

a) Chứng minh rằng AB'C'D' nội tiếp được.

b) C'D' cắt CD tại I. Chứng minh rằng AI ⊥ AB.

c) Tính thể tích hình chóp S.AB'C'D'. Suy ra diện tích của AB'C'D'.

Giải



a) *Chứng minh AB'C'D' nội tiếp được*

Ta có :

AC' ⊥ SB

(vì SB ⊥ (AB'C'D')) (1)

Ta cũng có :

BC ⊥ (SAC)

(vì BC ⊥ AC và BC ⊥ SA)

⇒ BC ⊥ AC' ⊂ (SAC) (2)

(1) và (2) cho :

$$AC' \perp (SBC) \quad \Rightarrow \quad AC' \perp B'C'$$

Tương tự : $AD' \perp B'D'$.

Vậy AB'C'D' nội tiếp trong đường tròn đường kính AB'.

b) *Chứng minh $AI \perp AB$*

$$\left.\begin{array}{l}(ABCD) \perp (SAB) \\ (A'B'C'D') \perp (SAB) \supset SB \\ (ABCD) \cap (AB'C'D') = AI\end{array}\right\} \Rightarrow AI \perp (SAB)$$

Vậy : $AI \perp AB$.

c) *Tính $V(S.AB'C'D')$*

Ta có : $\dfrac{V(S.AB'C')}{V(S.ABC)} = \dfrac{SA\,.\,SB'\,.\,SC'}{SA\,.\,SB\,.\,SC}$

Mà : $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SB'\,.\,SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{3a^2}{7a^2} = \dfrac{3}{7}$

(vì $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 3a^2 + 4a^2$)

$\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SC'\,.\,SC}{SC^2} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{3a^2}{6a^2} = \dfrac{1}{2}$

(vì $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 3a^2 + 3a^2$)

và $V(S.ABC) = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \; a.a\sqrt{3} \;\; a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{2}$

nên : $V(S.AB'C') = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^3}{2} = \dfrac{3a^3}{28}$

Tương tự : $V(S.AC'D') = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{a^3}{4} = \dfrac{3a^2}{32}$

Vậy : $V(S.AB'C'D') = V(S.AB'C') + V(S.AC'D') = \dfrac{45a^3}{224}$

* *Tính diện tích của AB'C'D'*

Ta cũng có $V(S.AB'C'D') = \dfrac{1}{3} S_{AB'C'D'} \times SB'$.

mà $\quad SB' = \frac{3}{7} SB = \frac{3}{7} a\sqrt{7}$

nên $\quad S_{AB'C'D'} = \frac{3V(S.AB'C'D')}{SB'} = \frac{45a^2\sqrt{7}}{224}$.

3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' , cạnh a ; $M \in AB$ và $AM = x$. Mặt phẳng (A'MC) cắt C'D' tại N.

a) Chứng minh rằng A'MCN là hình bình hành. Tính diện tích của A'MCN theo a và x .

b) Định vị trí của M để diện tích A'MCN nhỏ nhất và định vị trí của M để chu vi A'MCN nhỏ nhất.

c) Tính khoảng cách từ B' đến A'MCN theo a và x .

Giải

a) *Chứng minh A'MCN là hình bình hành*

Ta có :

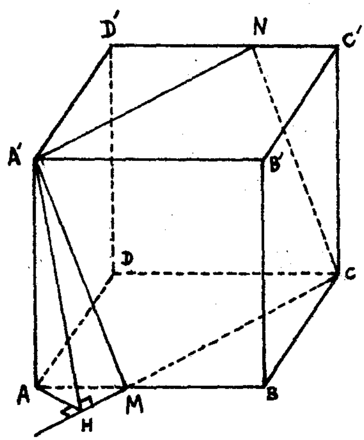
(ABCD) // (A'B'C'D') nên (A'MC) cắt 2 mặt phẳng này theo giao tuyến song song :

MC // A'N $\quad$ (1)

Tương tự :

(ABB'A') // (CDD'C') nên A'M // CN $\quad$ (2)

(1) và (2) cho : A'MCN là hình bình hành.



* *Tính $S_{A'MCN}$*

Kẻ $A'H \perp MC$, ta có :

$AH \perp MC$ (định lí 3 đường vuông góc)

Ta cũng có hai tam giác vuông AHM và CBM đồng dạng nên

$$\frac{AH}{BC} = \frac{AM}{MC}$$

$$\Rightarrow \quad AH = \frac{AM.BC}{MC} = \frac{ax}{MC}$$

Tam giác vuông A'AH cho :

$$A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2.MC^2 + a^2x^2}{MC^2}} = \frac{a\sqrt{(a-x)^2 + a^2 + x^2}}{MC}$$

Vậy : $S_{A'MNC} = A'H.MC = a\sqrt{2(x^2 - ax + a^2)}$

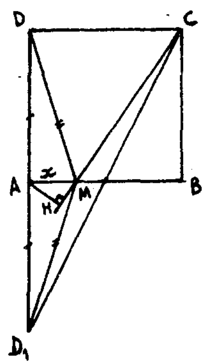
b) *Định M để $S_{A'MNC}$ nhỏ nhất*

Ta có : $S_{A'MNC} = a\sqrt{2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\right]}$

Do đó , $S_{A'MNC}$ nhỏ nhất khi :

$$x - \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \text{M là trung điểm của AB.}$$

* *Định M để chu vi của A'MNC nhỏ nhất*



Ta có :

chu vi (A'MNC) = 2(A'M + MC)

= 2(DM + MC)

(vì $\Delta AA'M = \Delta ADM$)

= 2(D_1M + MC)

(D_1 là điểm đối xứng của D qua A)

Ta cũng có :

$$D_1M + MC \geq CD_1$$

Dấu = xảy ra khi M là giao điểm của CD_1 và AB, chính là trung điểm của AB.

Vậy : chu vi của A'MNC nhỏ nhất khi M ở trung điểm AB (cũng là lúc diện tích A'MNC nhỏ nhất).

c) *Tính khoảng cách từ B' đến A'MNC*

Ta có : V(B'.A'MCN) = 2V(B'.A'NC) (vì 2 hình chóp này có chung đường cao và $S_{A'MCN} = 2S_{A'NC}$)

Mà : $V(B'.A'NC) = V(C.A'B'N) = \frac{1}{3} CC'.S_{NA'B'}$

$$= \frac{1}{3} . a . \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{6}$$

nên $V(B'.A'MCN) = \frac{a^3}{3}$

Ta cũng có : $V(B'.A'MCN) = \frac{1}{3} B'K.S_{A'MCN}$

(B'K là khoảng cách từ B' đến A'MCN)

Vậy : $$B'K = \frac{3V(B'.A'MCN)}{S_{(A'MCN)}} = \frac{a^2}{\sqrt{2(x^2 - ax + a^2)}}.$$

4. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = a và đường chéo bằng 2a. S là 1 điểm trên đường thẳng d vuông góc với (ABCD) tại A. α là góc tạo bởi SC và mặt (SAB).

   a) Tính thể tích của hình chóp.

   b) Định α để góc của 2 mặt (SCD) và (ABCD) bằng 45^o.

   c) Gọi O là tâm hình chữ nhật và E, F lần lượt là hình chiếu của A xuống SO và SD. Chứng minh rằng hình chóp A.EODF nội tiếp được trong 1 mặt cầu. Định tâm và tính bán kính của mặt cầu này và chứng tỏ rằng mặt cầu này cố định khi S lưu động trên d.

Giải

a) *Tính V(S.ABCD)*

. Ta có :

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

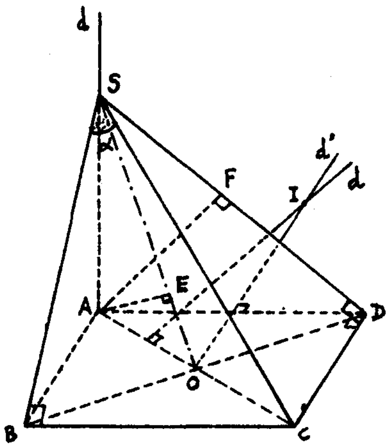
$$S_{ABCD} = AB.BC = a^2\sqrt{3}.$$

. Ta cũng có :

$BC \perp (SAB)$ (vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$)

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu của SC xuống (SAB)

$\Rightarrow$ $\widehat{BSC} = \alpha$ là góc SC và (SAB).



Tam giác vuông SBC cho :

$SB = BC\text{cotg}\alpha = a\sqrt{3}\,\text{cotg}\alpha.$

Tam giác vuông SAB cho :

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2\text{cotg}^2\alpha - a^2} = a\sqrt{3\text{cotg}^2\alpha - 1}$$

Vậy :

$$V(S.ABCD) = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3\text{cotg}^2\alpha - 1} = a^3\sqrt{\text{cotg}^2\alpha - \frac{1}{3}}$$

Điều kiện để bài toán có nghĩa :

$$\text{cotg}^2\alpha > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{cotg}\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

b) *Định α để góc [(SCD),(ABCD)] = 45°*

. Ta có : $AD \perp CD$ (ABCD là hình chữ nhật)

nên $SD \perp CD$ (định lí 3 đường vuông góc)

Vậy : $\widehat{SDA}$ là góc [(SCD),(ABCD)].

. Ta lại có :

$$\widehat{SDA} = 45^\circ \Leftrightarrow AD = SA \Leftrightarrow a\sqrt{3} = a\sqrt{3\text{cotg}^2\alpha - 1} \Leftrightarrow \text{cotg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \text{arccotg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy : góc [(SCD),(ABCD)] = 45° khi $\alpha = \text{arccotg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) *Hình chóp A.EODF nội tiếp được trong 1 mặt cầu*

Hình chóp A.EODF nội tiếp được trong 1 mặt cầu khi đáy EODF là 1 tứ giác nội tiếp được.

Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} SA^2 = SF.SD \\ SA^2 = SE.SO \end{array}\right\} \Rightarrow SF.SD = SE.SO$$

· Vậy EODF nội tiếp được.

* *Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp A.EODF*

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp, ta có :

$$IA = IO = IE \Leftrightarrow I \in \text{trục } d \text{ của đường tròn } (AOE)$$

Để ý rằng : d qua trung điểm AO, vuông góc với AO và nằm trong (ABCD) (vì (AOE) $\perp$ (ABCD))

Tương tự :

$$IA = ID = IF \Leftrightarrow I \in \text{trục } d' \text{ của đường tròn } (AFD)$$

(d' qua trung điểm AD, vuông góc với AD và nằm trong (ABCD)).

Vậy I là giao điểm của d và d', cũng là tâm đường tròn (AOD) (vì d và d' cũng là trung trực của AO và AD).

* *Tính bán kính*

Tam giác ABD là nửa tam giác đều (AB = a, BD = 2a) nên : $\widehat{DBA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 120^\circ$

$$\Rightarrow R = IA = \frac{AD}{2\sin\widehat{AOD}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = a$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp A.EODF có tâm là I cố định và bán kính là a, nên mặt cầu này cố định khi S lưu động trên d.

BÀI LÀM THÊM

1. Cho tam giác AOB (OA = OB = 2a ; $\widehat{AOB} = 120^\circ$). Trên đường thẳng d vuông góc với (AOB) tại O, về 2 phía điểm O, lấy 2 điểm C, D sao cho tam giác ACB vuông và tam giác ADB đều.

   a) Tính các đoạn OC và OD.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

c) Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp ABCD.

Hướng dẫn :

a) $OC = a\sqrt{2}$; $OD = 2a\sqrt{2}$

b) $V = a^3\sqrt{6}$

c) $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^o$.

2. Cho hình chóp đều S.ABC có đường cao SH = h, và góc ở đỉnh S của mặt bên nhọn. Gọi I, J , K lần lượt là trực tâm của SBC, SCA, SAB.

a) Chứng minh rằng $AI \perp (SBC)$; $BJ \perp (SCA)$ và $CK \perp (SAB)$.

b) Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp SIJK có tâm nằm trên SH.

c) Cho biết bán kính của mặt cầu ngoại tiếp SIJK bằng 2R, tính thể tích của hình chóp S.ABC theo h và R .

Hướng dẫn :

a) Chứng minh $BC \perp (SAI)$ và $SC \perp (ABI)$

b) AI cắt SH tại H' thỏa : HH'.SH = HA.HM với M là trung điểm BC. Mặt cầu đường kính SH' là mặt cầu ngoại tiếp SIJK.

c) $V = \dfrac{h^2(h - 2R)\sqrt{3}}{2}$

3. Cho tứ diện ABCD có : tam giác ABC vuông tại B (BC = 2a; BA = a) ; tam giác DBC đều và góc nhị diện cạnh BC bằng 30^o.

a) Xác định đường cao DH của hình chóp D.ABC và tính thể tích tứ diện ABCD.

b) Tính khoảng cách từ A đến (DBC).

c) Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Hướng dẫn :

a) DHM là nửa tam giác đều (M là trung điểm BC) và $DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{a}{2}$

c) Tâm mặt cầu là tâm đường tròn (DBC).

4. Cho hình chóp S.ABCD , đáy là hình vuông cạnh 2a. SAB là tam giác đều và SCD là tam giác vuông cân đỉnh S ; I, J là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng 2 mặt phẳng SAB và SCD vuông góc.

b) Xác định đường cao SH của hình chóp và tính thể tích hình chóp.

c) Một mặt phẳng α lưu động, vuông góc với IJ tại M $\in$ đoạn IJ . α cắt hình chóp theo một thiết diện, chứng minh rằng thiết diện là 1 hình thang cân (trừ khi M $\equiv$ H). Tìm tập hợp điểm O, trung điểm của đoạn nối trung điểm 2 đáy của hình thang.

Hướng dẫn :

a) Chứng tỏ rằng $\widehat{ISJ}$ là góc [(SAB),(SCD)] và $\widehat{ISJ} = 90^\circ$.

b) $SH \perp IJ$ $(H \in IJ)$; $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

c) Tập hợp các điểm O là 2 đoạn IE, JE (E là trung điểm của SH).

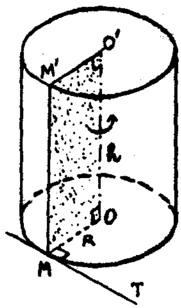
Chương IX : KHỐI TRÒN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Hình trụ

1. Định nghĩa

Hình trụ là hình tròn xoay sinh ra bởi một hình chữ nhật quay quanh một cạnh của nó.



+ Hai đáy là 2 hình tròn bằng nhau.
+ OO' là trục và OO' = h là chiều cao.
+ MM' là đường sinh.

2. Thiết diện

a/ Thiết diện song song với trục là hình chữ nhật chứa 2 đường sinh.

b/ Thiết diện vuông góc với trục là hình tròn bằng hình tròn đáy.

c/ Mặt phẳng tiếp xúc với hình trụ dọc theo một đường sinh thì vuông góc với thiết diện qua trục và đường sinh đó : (M'MT) $\perp$ (MOO'M').

3. Diện tích và thể tích

$S_{xq} = 2\pi Rh$ = chu vi đáy $\times$ chiều cao

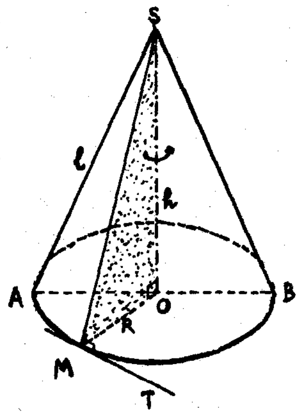
$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

$V = \pi R^2 h$ = diện tích đáy $\times$ chiều cao

II. Hình nón

1. Định nghĩa

Hình nón là hình tròn xoay sinh ra bởi một tam giác vuông quay quanh cạnh góc vuông của nó.



+ S là đỉnh.
+ (O) là đường tròn đáy.
+ SO là trục và SO = h là chiều cao.
+ SM là đường sinh.
+ $\widehat{ASB}$ là góc ở đỉnh của hình nón (AB là đường kính của (O)).

2. Thiết diện

a/ Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân chứa hai đường sinh.

b/ Thiết diện vuông góc với trục là hình tròn.

c/ Mặt phẳng tiếp xúc với hình nón dọc theo đường sinh thì vuông góc với thiết diện qua trục và đường sinh đó : (SMT) $\perp$ (SMO).

3. Diện tích và thể tích

$$S_{xq} = \pi Rl = \frac{1}{2} \text{ chu vi đáy} \times \text{đường sinh}$$

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3} \text{ diện tích đáy} \times \text{chiều cao}$$

4. Hình nón cụt

a/ *Định nghĩa*

Hình nón cụt là phần hình nón giới hạn giữa mặt đáy hình nón với một thiết diện song song với mặt đáy (là hình tròn xoay sinh ra bởi hình thang vuông quay quanh cạnh vuông góc với hai đáy).

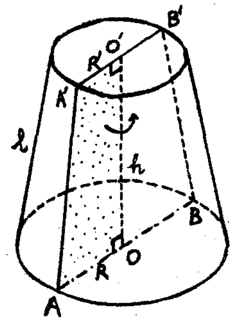
(O) , (O') : đường tròn đáy

OO' : trục , h = OO' : chiều cao

AA' : đường sinh (l = AA')

R = OA ; R' = O'A' : bán kính đáy.

AA'B'B : thiết diện qua trục
(hình thang cân chứa hai đường sinh).



b/ *Diện tích và thể tích*

* Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = \pi(R + R')l$$

* Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = \pi(R + R')l + \pi R^2 + \pi R'^2$$

* Thể tích

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R'^2 + RR').$$

II. Hình cầu

1. Định nghĩa

. *Mặt cầu* tâm O bán kính R là tập hợp (S) = $\{M \in \mathbb{R}^3 / OM = R\}$.

. Hình cầu tâm O bán kính R là tập hợp (C) = $\{M \in \mathbb{R}^3 / OM \leq R\}$

O : tâm , R : bán kính

2. Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

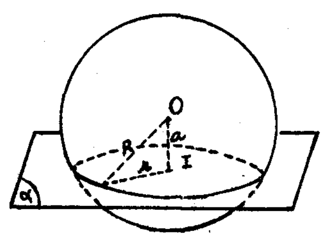
Cho đường thẳng Δ. Đặt :

a = d(O,Δ)

* a > R : Δ và (S) không có điểm chung.

* a = R : Δ tiếp xúc (S) và ta có Δ ⊥ OA tại A.

* a < R : Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

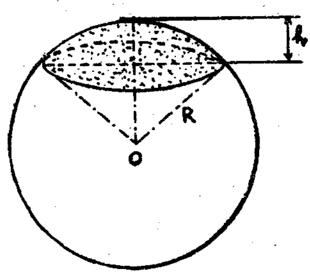


3. Vị trí tương đối của mpα và mặt cầu (S)

Cho mpα. Đặt $a = d(O,\alpha)$.

* $a > R$: α và (S) không có điểm chung.
* $a = R$: α tiếp xúc (S) và ta có $\alpha \perp OA$ tại A.
* $a < R$: α cắt (S) theo đường tròn tâm I (I là hình chiếu của O trên α), bán kính $r = \sqrt{R^2 - a^2}$.

4. Diện tích và thể tích



a/ *Diện tích mặt cầu*

$$S = 4\pi R^2$$

b/ *Thể tích hình cầu*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

c/ *Diện tích chỏm cầu*

$$S = 2\pi Rh$$

d/ *Thể tích quạt cầu*

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : Các bài toán cơ bản về hình trụ

Khi giải các bài toán về hình trụ ta cần nhớ :

- Thiết diện của hình trụ song song với trục là hình chữ nhật chứa hai đường sinh.
- Thiết diện qua trục là hình chữ nhật có kích thước h (chiều cao hình trụ) và 2R (đường kính đáy hình trụ).
- Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích hình trụ là :

$$S_{xq} = 2\pi Rh \quad , \quad S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \quad , \quad V = \pi R^2 h$$

- Ta thường vẽ thêm đường sinh của hình trụ.

VÍ DỤ 1 :

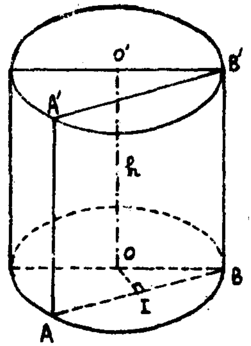
Cho 1 hình trụ có thiết diện qua trục là 1 hình vuông cạnh a.

a) Tính diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích hình trụ.

b) Một thiết diện song song với trục hình trụ có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích thiết diện qua trục. Tính khoảng cách từ tâm mặt đáy hình trụ đến thiết diện đó.

Giải

a) *Diện tích xung quanh, toàn phần, thể tích hình trụ*



Thiết diện qua trục là 1 hình vuông cạnh a nên ta có : $h = a$, $R = \frac{a}{2}$.

Diện tích xung quanh hình trụ:

$$S_{xq} = 2\pi Rh = \pi a^2$$

Diện tích toàn phần hình trụ:

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Thể tích hình trụ :

$$V = \pi R^2 h = \frac{\pi a^3}{4}$$

b) *Khoảng cách từ tâm của đáy đến thiết diện*

Xét thiết diện AA'B'B với A, B thuộc đường tròn đáy (O) và A', B' thuộc đường tròn đáy (O').

Vẽ OI vuông góc AB tại I thì I là trung điểm AB và $OI \perp (AA'B'B)$. Ta có : $OI = d[O,(AA'B'B)]$.

Ta có : $S_{AA'B'B} = \frac{a^2}{2} = AB.AA' \Rightarrow AB = \frac{a}{2} \Rightarrow IA = \frac{a}{4}$

Trong tam giác vuông OAI ta có :

$$OI^2 = OA^2 - IA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{3a^2}{16}$$

Vậy : $d[O,(AA'B'B)] = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn tâm O, O', bán kính R, chiều cao h. Một đoạn thẳng AB di động với A trên (O) và B trên (O').

Xác định góc α của AB và trục hình trụ. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và OO' theo R, h và α.

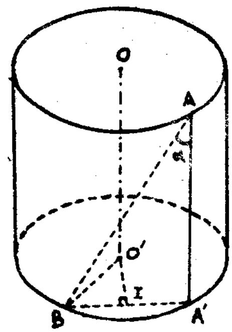
Giải

* *Xác định góc của AB và OO'*

Vẽ đường sinh AA'. Ta có :

$$AA' \parallel OO'$$

Do đó : $\alpha = \widehat{A'AB}$



* *Độ dài đoạn vuông góc chung của AB và OO'*

Ta có : OO' // (AA'B) nên độ dài đoạn vuông góc chung của AB và OO' là :

$$d(O',(AA'B)).$$

Kẻ O'I vuông góc A'B tại I thì I là trung điểm A'B và $O'I \perp (AA'B)$, nên $O'I = d(O',(AA'B))$

Ta có : $A'B = AA' \,\mathrm{tg}\alpha = h\mathrm{tg}\alpha \Rightarrow IB = \frac{1}{2} A'B = \frac{1}{2} h\mathrm{tg}\alpha$

$$O'I^2 = O'B^2 - IB^2 = R^2 - \frac{1}{4} h^2 \,\mathrm{tg}^2\alpha$$

$$= \frac{1}{4}(4R^2 - h^2 \,\mathrm{tg}^2\alpha)$$

Vậy độ dài đoạn vuông góc chung của AB và OO' là :

$$\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2\mathrm{tg}^2\alpha}$$

VÍ DỤ 3 :

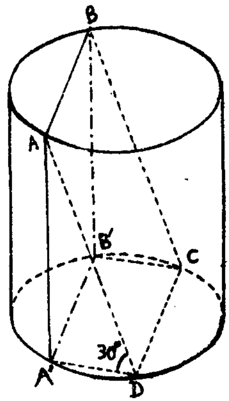
Cho hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn (O), (O') bán kính R. AB và CD lần lượt là 2 dây cung song song của 2 đường tròn đáy và cùng bằng $R\sqrt{2}$, (ABCD) không song song hay chứa OO'.

a) Chứng minh ABCD là 1 hình chữ nhật.

b) Cho góc của (ABCD) và đáy là 30°. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình trụ.

Giải

a) *ABCD là hình chữ nhật*



Vẽ 2 đường sinh AA', BB'. Tứ giác A'B'CD có A'B' // CD, A'B' = CD và nội tiếp trong đường tròn (O) nên là hình chữ nhật.

Vì A'C = 2R , CD = $R\sqrt{2}$ nên A'B'CD là hình vuông.

Ta có : $\begin{cases} AA' \perp (A'B'CD) \\ CD \perp A'D \end{cases}$

$\Rightarrow$ CD $\perp$ AD

(định lí 3 đường vuông góc).

Hơn nữa AB // CD , AB = CD nên ABCD là hình chữ nhật.

b) *Tính thể tích, diện tích xung quanh*

Ta có A'D,AD $\perp$ CD nên $\widehat{ADA'} = 30^{\circ}$.

Do đó : $AA' = A'D \operatorname{tg}30^{\circ} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$

Thể tích hình trụ : $V = \pi R^2 h = \dfrac{\pi R^3 \sqrt{6}}{3}$

Diện tích xung quanh hình trụ : $S_{xq} = 2\pi Rh = \dfrac{2\pi R^2 \sqrt{6}}{3}$

VÍ DỤ 4 ;

Cho hình trụ có thể tích không đổi. Tính chiều cao hình trụ theo bán kính đáy của nó để diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất.

Giải

. Gọi h, R là chiều cao, bán kính đáy hình trụ.

Ta có diện toàn phần hình trụ :

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi (Rh + R^2)$$

Thể tích hình trụ : $V = \pi R^2 h$

Suy ra : $h = \dfrac{V}{\pi R^2}$

Do đó : $S = 2\pi \left(\dfrac{V}{\pi R} + R^2\right) = 2\left(\dfrac{V}{R} + \pi R^2\right)$

. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương $\dfrac{V}{2R}$, $\dfrac{V}{2R}$, πR^2

ta có :

$$S \geq 2.3 \sqrt[3]{\frac{V}{2R} \cdot \frac{V}{2R} \cdot \pi R^2} \Leftrightarrow S \geq 6 \sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$$

Do đó : S nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = 6 \sqrt[3]{\dfrac{\pi V^2}{4}} \Leftrightarrow \dfrac{V}{2R} = \pi R^2$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi R^2 h}{2R} = \pi R^2 \Leftrightarrow h = 2R.$$

Vậy khi h = 2R thì hình trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao $R\sqrt{2}$. Đường chéo của thiết diện song song với trục hợp với mặt đáy một góc 60°.

   a) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của trục hình trụ và đường chéo của thiết diện.

   b) Tìm tập hợp trung điểm đường chéo của thiết diện khi thiết diện di động và vẫn thỏa điều kiện trên.

Đáp số : $\dfrac{R\sqrt{30}}{6}$

2. Trong một hình trụ, có 1 hình vuông xiên góc với trục, các đỉnh hình vuông ở trên 2 đường tròn đáy, chiều cao và bán kính đáy hình trụ là 2 và 7. Tính cạnh hình vuông.

Đáp số : 10

3. Một hình trụ có chiều cao h. Một thiết diện song song với trục hình trụ và cách trục một khoảng cách a. Thiết diện này cắt đường tròn đáy theo 1 dây cung trương góc α. Tính diện tích thiết diện.

Đáp số : $2ah.\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

4. Cho 1 hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn (O), (O') bán kính R, chiều cao hình trụ $R\sqrt{2}$. Điểm A trên đường tròn (O), B trên đường tròn (O'), OA $\perp$ O'B.

a) Chứng minh tứ diện OAO'B có các mặt là tam giác vuông. Tính thể tích và diện tích toàn phần tứ diện này.

b) Mặt phẳng (P) vuông góc với OO' và cách O một khoảng x ($0 < x < R\sqrt{2}$). Tính diện tích thiết diện của (P) và tứ diện OAO'B. Định x để thiết diện này có diện tích lớn nhất.

Đáp số :

a) $\frac{R^3\sqrt{2}}{6}$, $R^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

b) $\frac{1}{2}x(R\sqrt{2}-x)$, $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vấn đề 2 : Hình trụ nội tiếp, ngoại tiếp lăng trụ đứng

Ta có :

. Đáy hình trụ nội tiếp (hay ngoại tiếp) đáy lăng trụ.

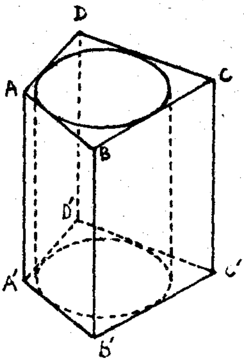
. Chiều cao hình trụ và lăng trụ bằng nhau.

VÍ DỤ 1 :

Chứng minh nếu lăng trụ đứng tứ giác ngoại tiếp hình trụ, thì tổng diện tích các mặt đối bằng nhau.

Giải

Xét lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' ngoại tiếp hình trụ. Đặt AA' = h



Vì ABCD ngoại tiếp đường tròn đáy hình trụ nên :

AB + CD = BC + AD

Suy ra

h.AB + h.CD = h.BC + h.AD

hay

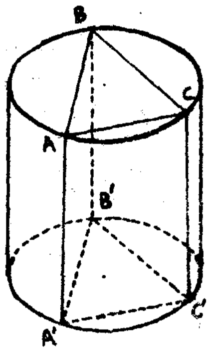
$S_{ABB'A'} + S_{CDD'C'} = S_{BCC'B'} + S_{ADD'A'}$ (ĐPCM)

VÍ DỤ 2 :

Cho hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao 2R. Tính thể tích và diện tích xung quanh lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong hình trụ.

Giải

Xét lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' nội tiếp hình trụ. Ta có : AA' = 2R.



ΔABC đều nội tiếp đường tròn bán kính R nên $AB = R\sqrt{3}$.

Thể tích lăng trụ :

$$V = Bh = \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2R$$

$$= \frac{3R^3\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích xung quanh lăng trụ :

$$S = p.l = 3.R\sqrt{3}.2R = 6R^2\sqrt{3}.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình trụ ngoại tiếp lăng trụ đứng tam giác, một mặt bên của lăng trụ chứa trục hình trụ. Chứng minh 2 mặt bên còn lại của lăng trụ vuông góc.

2. Cho hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao 2R. Tính thể tích phần lăng trụ đứng tứ giác đều nằm ngoài hình trụ, biết lăng trụ ngoại tiếp hình trụ.

Đáp số : $2(4 - \pi)R^3$

3. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' có ABCD và A'B'C'D' lần lượt nội tiếp trong 2 đường tròn đáy 1 hình trụ. Cho AB = a, A'C hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên (ABB'A') góc β. Tính chiều cao và diện tích xung quanh hình trụ.

Đáp số : $\dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}}$, $\dfrac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

Vấn đề 3 : Các bài toán cơ bản về hình nón

Khi giải các bài toán về hình nón ta cần nhớ :

- Thiết diện qua đỉnh hình nón là tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh.
- Thiết diện qua trục hình nón là tam giác cân có :
  . hai cạnh bên là hai đường sinh
  . cạnh đáy là đường kính đáy
  . góc đáy là góc của đường sinh và đáy
  . góc ở đỉnh là góc ở đỉnh của hình nón.
- Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích hình nón là :

$$S_{xq} = \pi Rl, \; S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2, \; V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

VÍ DỤ 1 :

Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh 2a.

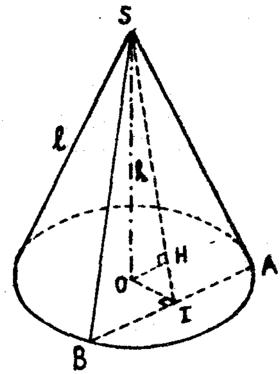
a) Tính thể tích và diện tích xung quanh hình nón.

b) Thiết diện qua đỉnh hình nón và cách tâm của đáy hình nón 1 khoảng cách là $\frac{a}{2}$. Tính diện tích thiết diện.

Giải

a) *Thể tích, diện tích xung quanh hình nón*

Thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh 2a nên hình nón có chiều cao $h = a\sqrt{3}$, bán kính đáy $R = a$, đường sinh $l = 2a$.



Thể tích hình nón :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$$

Diện tích xung quanh hình nón:

$S_{xq} = \pi Rl = 2\pi a^2$.

b) *Diện tích thiết diện*

Xét thiết diện qua đỉnh S của hình nón chứa 2 đường sinh SA, SB. Gọi O là tâm của đáy hình nón, I là trung điểm AB, H là hình chiếu của O trên SI.

Ta có : $AB \perp OI, SO$ nên $AB \perp (SOI)$ hay $(SAB) \perp (SOI)$.

Do đó : $OH \perp (SAB)$. Suy ra $OH = \frac{a}{2}$

Trong tam giác vuông SOI ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{11}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OI^2 = \frac{3a^2}{11} \qquad \Rightarrow SI^2 = SO^2 + OI^2 = \frac{36a^2}{11}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{6a\sqrt{11}}{11}$$

Trong tam giác vuông OAI ta có :

$$IA^2 = OA^2 - OI^2 = \frac{8a^2}{11} \Rightarrow IA = \frac{2a\sqrt{22}}{11}$$

Diện tích thiết diện :

$$S = \frac{1}{2} AB.SI = IA.SI = \frac{12a^2\sqrt{2}}{11}.$$

VÍ DỤ 2 :

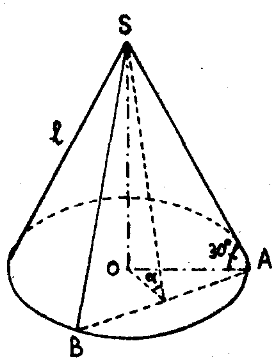
Cho hình nón đỉnh S, đường sinh l, góc của đường sinh và đáy là 30^o.

a) Tính thể tích, diện tích xung quanh hình nón.

b) Một mặt phẳng qua S cắt hình nón theo thiết diện có diện tích $\frac{l^2\sqrt{2}}{3}$. Tính góc hợp bởi thiết diện và mặt đáy.

Giải

a) *Thể tích, diện tích xung quanh hình nón*



Gọi SO, SA, OA là đường cao, đường sinh và bán kính đáy hình nón.

Ta có : $\widehat{SAO} = 30^o$;

$$SO = SA\sin30^o = \frac{1}{2} ;$$

$$OA = SA.\cos30^o = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích hình nón :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi OA^2 .SO = \frac{\pi l^3}{8}$$

Diện tích xung quanh hình nón :

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi OA.SA = \frac{\pi l^2\sqrt{3}}{2}.$$

b) *Góc của thiết diện và đáy*

Xét thiết diện SAB chứa 2 đường sinh SA, SB. Gọi I là trung điểm AB, ta có :

$$AB \perp OI, SO \Rightarrow \alpha = \widehat{SIO} \text{ là góc của thiết diện và đáy.}$$

$$SI = \frac{SO}{\sin\alpha} = \frac{l}{2\sin\alpha} \quad ; \quad OI = SO\cot g\alpha = \frac{l}{2}\cot g\alpha$$

$$IB^2 = OB^2 - OI^2 = \frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\cot g^2\alpha$$

$$= \frac{l^2}{4}(3 - \cot g^2\alpha) = \frac{l^2(4\sin^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha}$$

$$S = \frac{1}{2}AB.SI = IB.SI = \frac{l^2\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{4\sin^2\alpha}$$

Do đó :

$$S = \frac{l^2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \frac{l^2\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{4\sin^2\alpha} = \frac{l^2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{4\sin^2\alpha - 1} = 4\sqrt{2}\sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 9(4\sin^2\alpha - 1) = 32\sin^4\alpha$$

$$\Leftrightarrow 32\sin^4\alpha - 36\sin^2\alpha + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{3}{4} \quad \text{hay} \quad \sin^2\alpha = \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{hay} \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{hay} \quad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$$

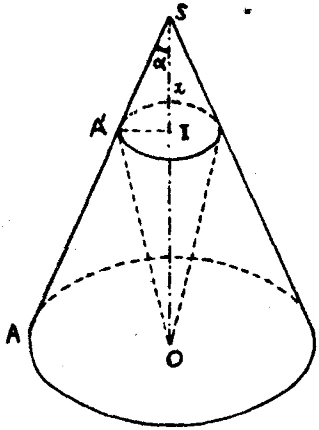
VÍ DỤ 3 :

Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O bán kính R, góc ở đỉnh là 2α. Một mặt phẳng (P) vuông góc SO tại I và cắt hình nón theo hình tròn (I). Đặt SI = x . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình nón đỉnh O đáy là hình tròn (I).

Giải

. Xét đường sinh SA. Ta có : $\widehat{ASO} = \alpha$

Mặt phẳng (P) cắt SA tại A'.



Bán kính hình tròn (I) :

$$IA' = SItg\alpha = xtg\alpha.$$

Tam giác vuông SOA cho :

$$SO = OAcotg\alpha = Rcotg\alpha$$

. Thể tích hình nón có đỉnh O và đáy là hình tròn (I) :

$$V = \frac{1}{3}\pi IA'^2.OI$$

$$= \frac{1}{3}\pi.x^2\,tg^2\alpha.(Rcotg\alpha - x)$$

$$= \frac{\pi}{3}\,tg^2\alpha.x^2.(Rcotg\alpha - x)$$

. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương :

x , x , 2Rcotgα − 2x , ta có :

$$x^2.(2Rcotg\alpha - 2x) \leq \left(\frac{x + x + 2Rcotg\alpha - 2x}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad V \leq \frac{\pi}{6}\,tg^2\alpha.\left(\frac{2Rcotg\alpha}{3}\right)^3 = \frac{4}{81}\pi R^3\,cotg\alpha$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2Rcotg\alpha - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}Rcotg\alpha.$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích hình nón này là :

$$V = \frac{4}{81}\pi R^3\,cotg\alpha.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình nón chữ S , đường sinh bằng a, góc của đường sinh và đáy là 45^o.

   a) Tính thể tích, diện tích toàn phần hình nón.

   b) Một mặt phẳng (P) qua S và hợp với đáy hình nón một góc nhọn α. Định α để (P) cắt hình nón theo 2 đường sinh SA, SB. Tính khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mp(P) khi $\alpha > 45^o$.

Đáp số :

a) $\dfrac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$, $\dfrac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2} + 1)$

b) $\alpha > 45^o$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$.

2. Cho hình nón đỉnh S có góc ở đỉnh là 2φ $(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2})$, đường sinh bằng a. Một thiết diện qua đỉnh S và cắt hình nón theo 2 đường sinh SA, SB.

a) Chứng minh : $\widehat{ASB} \le 2\varphi$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện SAB.

Hướng dẫn : Đặt $\widehat{ASB} = 2\alpha$, $0 < \alpha \le \varphi$, tính diện tích S của thiết diện theo a và α.

Đáp số : $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$: $S = \dfrac{1}{2}a^2\sin 2\varphi$; $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$: $S = \dfrac{a^2}{2}$

3. Đường sinh hình nón bằng 13a, chiều cao 12a. Một đường thẳng d song song với đáy và cắt hình nón. Khoảng cách từ d đến mặt đáy và đường cao hình nón là 6a và 2a. Tính độ dài phần đường thẳng d nằm trong hình nón.

Đáp số : 3a

4. Một hình nón có chiều cao bằng bán kính R của đáy. Một mặt phẳng qua đỉnh hình nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung trương cung 90^o. Tính diện tích thiết diện.

Đáp số : $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

5. Cho hình nón đỉnh S có góc ở đỉnh là 60^o. AB là đường kính cố định của đáy.

a) Cho D là trung điểm cung AB, C là điểm thuộc cung nhỏ BD sao cho $\widehat{BAC} = 15^o$. Tính góc của 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Cho EF là dây cung di động của đường tròn đáy hình nón và vuông góc AB. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSEF chạy trên một cung tròn cố định.

Đáp số :

a) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) Cung của đường tròn đường kính SI, I là tâm của đường tròn (SAB).

Vấn đề 4 : Các bài toán cơ bản về hình nón cụt

Khi làm các bài toán về hình nón cụt ta cần nhớ :

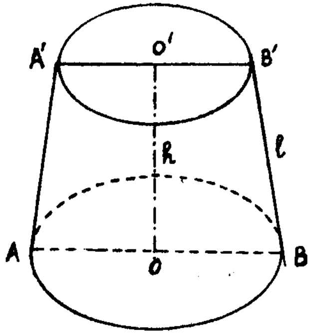
- Thiết diện qua trục là hình thang cân có cạnh đáy lớn bằng 2R, cạnh đáy nhỏ bằng 2R', cạnh bên bằng l, chiều cao bằng h, góc ở đáy bằng α (R, R', l, h, α lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ, đường sinh, chiều cao, góc hợp bởi đường sinh và mặt đáy của hình nón cụt).
- Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích hình nón cụt :

$S_{xq} = \pi(R + R')l$; $S_{tp} = \pi(R + R')l + \pi R^2 + \pi R'^2$;

$V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + R'^2 + RR')$

VÍ DỤ 1 :

Cho hình nón cụt có bán kính 2 đáy là R, R' (R > R') và diện tích xung quanh bằng tổng diện tích 2 mặt đáy. Tìm thể tích hình nón cụt.



Giải

AA'B'B là 1 thiết diện qua trục OO'. Gọi h, l là chiều cao, đường sinh của hình nón cụt. Ta có :

$$S_{xq} = S_Đ + S_đ$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi(R + R')l = \pi R^2 + \pi R'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \frac{R^2 + R'^2}{R + R'}$$

Trong hình thang vuông OO'A'A ta có :

$$OO'^2 = AA'^2 - (OA - O'A')^2$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = l^2 - (R - R')^2 = \left(\frac{R^2 + R'^2}{R + R'}\right)^2 - (R - R')^2$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = \frac{4R^2 R'^2}{(R + R')^2} \qquad \Rightarrow \quad h = \frac{2RR'}{R + R'}$$

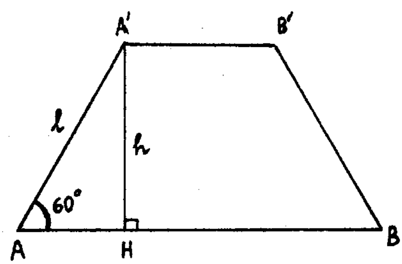
Thể tích hình nón cụt :

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R'^2 + RR') = \frac{2\pi RR'}{3(R + R')}(R^2 + R'^2 + RR')$$

VÍ DỤ 2 :

Cho hình nón cụt có thiết diện qua trục có diện tích S, đường sinh hợp với đáy góc 60^{o}. Tính diện tích xung quanh hình nón cụt.

Giải



AA'B'B là 1 thiết diện qua trục.

$AA' = l \quad , AB = 2R ,$

$A'B' = 2R' , A'H = h.$

Ta có : $AA' = \dfrac{A'H}{\sin 60^{o}}$

$$\Rightarrow l = \frac{2h}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích thiết diện qua trục :

$$S = \frac{1}{2}(AB + A'B').A'H = (R + R')h = \frac{(R + R')l\sqrt{3}}{2}$$

Do đó diện tích xung quanh là :

$$S_{xq} = \pi(R + R')l = \frac{2\pi S}{\sqrt{3}} .$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Một hình nón cụt có diện tích 2 đáy là S, S'. Tính diện tích thiết diện song song với đáy và có bán kính bằng trung bình cộng của bán kính 2 đáy.

   Đáp số : $\frac{1}{4}(\sqrt{S} + \sqrt{S'})^2$

2. Một hình nón cụt có chu vi đáy lớn bằng 2 lần chu vi đáy nhỏ, chiều cao h, và đường chéo của thiết diện qua trục vuông góc với đường sinh. Tính diện tích xung quanh, thể tích hình nón cụt và thể tích hình nón phát sinh ra hình nón cụt đó.

   Đáp số : $2\pi h^2$, $\frac{7\pi h^3}{9}$, $\frac{8\pi h^3}{9}$

3. Cho hình nón cụt có bán kính 2 đáy là R, R' (R > R'). Một thiết diện song song với đáy chia hình nón cụt thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính bán kính thiết diện đó.

   Đáp số : $\sqrt[3]{\frac{R^3 + R'^3}{2}}$

Vấn đề 5 : Hình trụ nội tiếp hình nón

Hình trụ nội tiếp hình nón khi 1 đáy của hình trụ là thiết diện song song với đáy hình nón và đáy thứ hai của hình trụ nằm trên đáy hình nón. Trong các bài toán loại này ta thường dùng thiết diện qua trục của chúng.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình nón bán kính đáy R, chiều cao h. Hình trụ chiều cao x (0 < x < h) nội tiếp trong hình nón. Tính thể tích hình trụ và tìm giá trị lớn nhất của thể tích này.

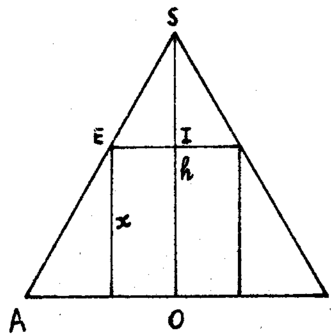
Giải

* Xét thiết diện qua trục của hình nón và hình trụ. Gọi tên như hình vẽ, ta có

OA = R ; SO = h ; OI = x ; IE là bán kính đáy hình trụ.

Ta có :

$$\frac{IE}{OA} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow IE = \frac{OA \cdot SI}{SO} = \frac{R(h - x)}{h}$$



Thể tích hình trụ :

$$V = \pi . IE^2 . IO = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot x (h - x)^2$$

Ta có :

$$V = \frac{\pi R^2}{2h^2} \cdot 2x (h - x)^2$$

* Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương : 2x, h − x, h − x ta được :

$$2x.(h - x)^2 \leq \left[\frac{2x + 2(h - x)}{3}\right]^3$$

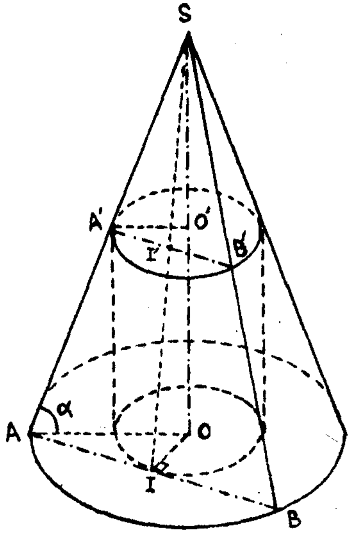
$$\Leftrightarrow \quad V \leq \frac{\pi R^2}{2h^2} \cdot \left(\frac{2h}{3}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad V \leq \frac{4\pi R^2 h}{27}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \quad 2x = h - x \quad \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích hình trụ là $V = \frac{4\pi R^2 h}{27}$.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình nón đỉnh S, bán kính đáy R, góc của đường sinh và đáy là α. Một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao hình nón. Tiếp tuyến với đường tròn đáy dưới hình trụ cắt đường tròn đáy hình nón tại A và B. SA và SB cắt đường tròn đáy trên của hình trụ tại A', B'. Tứ giác A'B'BA là hình gì ? Tính diện tích tứ giác này.



Giải

Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy dưới và trên của hình trụ. I, I' là trung điểm AB, A'B'. Ta có OI $\perp$ AB tại I nên I là tiếp điểm của AB với đường tròn đáy dưới của hình trụ.

. Ta có : (OAB) // (O'A'B') nên AB // A'B' , ΔSAB cân tại S nên AA' = BB'. Vậy A'B'BA là hình thang cân.

. Ta có : $\dfrac{O'A'}{OA} = \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow \quad O'A' = \frac{2R}{3}$$

Trong tam giác vuông OIA ta có :

$$IA^2 = OA^2 - OI^2 = \frac{5R^2}{9} \quad \Rightarrow \quad IA = \frac{R\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \frac{2R\sqrt{5}}{3}$$

. Ta có : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow A'B' = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{4R\sqrt{5}}{9}$

. Trong tam giác vuông SOI ta có :

$$SI^2 = SO^2 + OI^2 = R^2\,tg^2\alpha + \frac{4R^2}{9} = \frac{R^2}{9}(4 + 9tg^2\alpha)$$

Suy ra : $SI = \dfrac{R}{3}\sqrt{4 + 9tg^2\alpha}$

Ta có : $\dfrac{II'}{SI} = \dfrac{OO'}{SO} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad II' = \dfrac{R}{9}\sqrt{4 + 9tg^2\alpha}$

. Diện tích tứ giác A'B'BA :

$$S = \frac{1}{2}(AB + A'B').II' = \frac{5R^2\sqrt{5}}{81}\sqrt{4 + 9tg^2\alpha}\,.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình nón có hình trụ nội tiếp, đường chéo của thiết diện qua trục hình trụ song song với đường sinh của hình nón. Đường sinh hình nón bằng l và hợp với đáy góc α. Tìm thể tích phần hình nón ở ngoài hình trụ.

Đáp số : $\frac{7}{54}\pi l^3 \sin 2\alpha \cos\alpha$

2. Cho hình nón có đường sinh bằng l và hợp với đáy góc α. Tính bán kính đáy hình trụ nội tiếp hình nón biết thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông.

Đáp số : $\frac{l\cos\alpha}{1 + 2\text{cotg}\alpha}$

Vấn đề 6 : Hình nón ngoại tiếp (hay nội tiếp) hình chóp

Ta có hai đỉnh trùng nhau, đường tròn đáy hình nón ngoại tiếp (hay nội tiếp) đa giác đáy hình chóp.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình nón nội tiếp trong hình chóp tam giác đều có thiết diện qua trục là tam giác đều và bán kính đáy R. Tính diện tích xung quanh hình nón và thể tích phần hình chóp ở ngoài hình nón.

Giải

. Thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều và bán kính đáy R nên chiều cao và đường sinh hình nón là : $h = R\sqrt{3}$; $l = 2R$.

Diện tích xung quanh hình nón :

$$S_{xq} = \pi Rl = 2\pi R^2$$

Thể tích hình nón : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}$

. Tam giác đáy hình chóp đều có bán kính đường tròn nội tiếp là R nên có cạnh là $a = 2R\sqrt{3}$.

Thể tích hình chóp :

$$V' = \frac{1}{3} B\, h = \frac{1}{3} \frac{(2R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot R\sqrt{3} = 3R^3$$

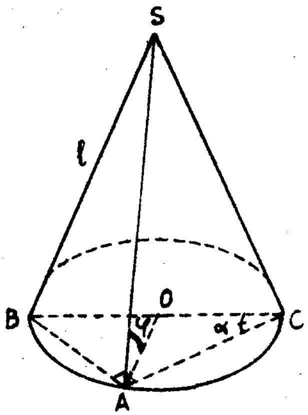
. Thể tích phần hình chóp ở ngoài hình nón :

$$v = V' - V = 3R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 \sqrt{3} = \frac{R^3(9 - \pi\sqrt{3})}{3}$$

VÍ DỤ 2 :

Cho 1 hình nón có diện tích xung quanh S, góc giữa đường sinh và đáy là φ Hình nón ngoại tiếp hình chóp có đáy là tam giác vuông với góc nhọn α. Tính thể tích hình chóp.

Giải



. Xét hình nón đỉnh S, đáy là **hình** tròn (O) , ngoại tiếp hình chóp SABC với ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{C} = \alpha$. BC là đường kính của (O). Ta có : $\widehat{SAO} = \varphi$.

Đường sinh , chiều cao hình nón :

$$l = SA = \frac{OA}{\cos\varphi} \ , \ h = SO = OA\,tg\varphi$$

Diện tích xung quanh hình nón :

$$S = \pi OA.SA = \pi \frac{OA^2}{\cos\varphi}$$

Suy ra : $OA = \sqrt{\dfrac{S\cos\varphi}{\pi}}$

. Ta có : $AB = BC\sin\alpha = 2OA\sin\alpha$

$AC = BC\cos\alpha = 2OA\cos\alpha$

Diện tích ΔABC :

$$B = \frac{1}{2}\ AB.AC = OA^2.\sin 2\alpha$$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\ OA^2\sin 2\alpha.\ OA\mathrm{tg}\varphi$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{S^3\cos^3\varphi}{\pi^3}}\ .\sin 2\alpha\ .\ \mathrm{tg}\varphi\ .$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình nón nội tiếp hình chóp. Bán kính đáy hình nón là R, góc của đường sinh và mặt đáy là 45°. Đáy hình chóp là 1 nửa tam giác đều. Tính thể tích hình chóp.

Đáp số : $\frac{R^3}{3}(3 + 2\sqrt{3})$

2. Cho hình chóp tứ giác đều có góc của cạnh bên và đáy là α, góc của mặt bên và đáy là φ, trung đoạn là a. Tính diện tích toàn phần hình nón ngoại tiếp hình chóp.

Đáp số : $\pi a^2.\mathrm{cotg}\alpha.\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}.\sin^2\varphi$

3. Cho hình nón có chiều cao bằng bán kính đáy là R. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp tam giác nội tiếp trong hình nón.

Đáp số : $\frac{R^3\sqrt{3}}{4}$

4. Cho hình chóp SABC có SA = SB = SC = a , $\widehat{BSC} = 120^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, S, B, C cố định và (SCA) quay quanh SC nhưng luôn ở về 1 phía của mặt phẳng (SBC).

a) Tìm tập hợp các đỉnh A và chân đường cao AH của hình chóp A.SBC.

b) Định vị trí của mặt (SCA) để thể tích SABC lớn nhất.

c) Tính góc $\widehat{ASB}$ để ΔABC vuông tại A. Khi đó hãy tính thể tích hình nón đỉnh S đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Đáp số : c) $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\frac{\pi a^3}{8}$

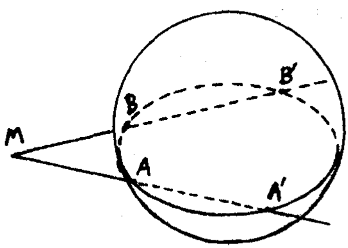
Vấn đề 7 : Các bài toán cơ bản về hình cầu

> Khi giải các bài toán về hình cầu ta cần nhớ :
> - Thiết diện của mặt cầu và mặt phẳng là một đường tròn có tâm là hình chiếu của tâm mặt cầu trên mặt phẳng.
> - Một điểm trên mặt cầu nhìn một đường kính của mặt cầu dưới một góc vuông.
> - Một đường tròn có ba điểm phân biệt ở trên mặt cầu thì mặt cầu chứa đường tròn đó.
> - Diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu :
>
> $$S = 4\pi R^2 \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

VÍ DỤ 1 :

Cho một mặt cầu. Từ một điểm M vẽ 2 đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, A' và B, B'. Chứng minh $\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'}$

Giải



Mặt phẳng (MAB) cắt mặt cầu theo đường tròn ngoại tiếp tứ giác AA'B'B.

Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn này ta có : $\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'}$.

VÍ DỤ 2 :

Cho 2 mặt cầu phân biệt tâm O và O' có một điểm chung A không nằm trên OO'. Chứng minh hai mặt cầu này cắt nhau theo một đường tròn.

Giải

Dựng mp(P) qua A vuông góc với OO' tại I. Ta có I là hình chiếu của O và O' trên (P). Do đó đường tròn (C) tâm I bán kính IA là đường tròn chung của 2 mặt cầu.

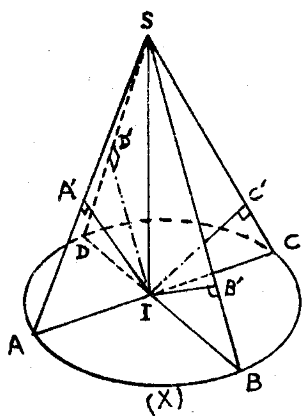
Giả sử M là điểm chung của 2 mặt cầu và $M \notin (C)$.

Xét ΔEFG nội tiếp trong (C). Hai mặt cầu này cùng ngoại tiếp tứ diện MEFG : vô lí. Vậy ngoài những điểm trên (C), hai mặt cầu không có điểm chung nào nữa. Do đó chúng cắt nhau theo đường tròn (C).

VÍ DỤ 3 :

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (X). AC cắt BD tại I. Đoạn SI vuông góc với (ABCD). Gọi A', B', C', D' là hình chiếu của I trên SA, SB, SC, SD. Chứng minh A'B'C'D' nội tiếp trong đường tròn.

Giải



Ta có : $\widehat{IA'S} = \widehat{IB'S} = \widehat{IC'S} = \widehat{ID'S} = 90^o$ nên A', B', C', D' thuộc mặt cầu (S_1) đường kính SI.

Gọi (S_2) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp A'.ABCD, và B_1 là giao điểm thứ hai của SB với mặt cầu (S_2). Ta có :

$$\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SB}.\overline{SB_1} \quad (1)$$

Trong 2 tam giác vuông SIA và SIB ta có :

$$SI^2 = \overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SB}.\overline{SB'} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $B_1 \equiv B'$. Do đó $B' \in (S_2)$.

Tương tự ta có : C', D' $\in (S_2)$.

Vậy A', B', C', D' là điểm chung của 2 mặt cầu (S_1) , (S_2) nên chúng nằm trên 1 đường tròn.

VÍ DỤ 4 :

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ, Δ' nhận AA' làm đoạn vuông góc chung ($A \in \Delta$, $A' \in \Delta'$). Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc Δ', d là hình chiếu của Δ trên (P). Mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) cắt Δ và Δ' tại M và M'. Gọi M_1 là hình chiếu của M trên (P) ; AA' = a ; h là khoảng cách giữa (P) và (Q) ; α = góc (Δ, P).

a) Chứng minh A, A', M, M', M_1 nằm trên mặt cầu (S) tâm O. Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu (S).

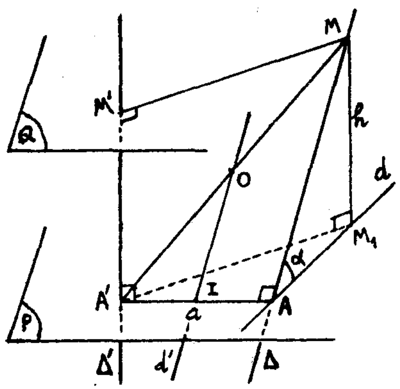
b) Chứng minh khi (Q) di động thì O chạy trên một đường thẳng cố định và (S) chứa một đường tròn cố định.

Giải

a) * *A, A', M, M', M_1 nằm trên mặt cầu (S)*

Ta có : $AA' \perp \Delta'$; $A \in (P)$;$(P) \perp \Delta'$ nên $A' \in (P)$.

$$\begin{cases} \Delta' \perp (P) \Rightarrow \Delta' \perp (Q) \Rightarrow \widehat{A'M'M} = 90^o \\ MM_1 \perp (P) \Rightarrow \widehat{A'M_1M} = 90^o \\ \Delta \perp AA' \Rightarrow \widehat{A'AM} = 90^o \end{cases}$$



Do đó A, A', M, M', M_1 nằm trên mặt cầu (S) có đường kính A'M, tâm O là trung điểm A'M.

* *Diện tích, thể tích hình cầu (S)*

Ta có : $\alpha = \widehat{MAM_1}$

$$AM = \frac{MM_1}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha} ;$$

$$A'M^2 = a^2 + \frac{h^2}{\sin^2\alpha}$$

Diện tích mặt cầu (S) :

$$S = 4\pi R^2 = \pi A'M^2 = \pi\left(a^2 + \frac{h^2}{\sin^2\alpha}\right)$$

Thể tích hình cầu (S) :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}\left(a^2 + \frac{h^2}{\sin^2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}$$

b) * *O chạy trên đường thẳng cố định*

Trong mp(A',Δ), O là trung điểm A'M nên chạy trên đường thẳng d' qua trung điểm I của AA' và d' // Δ.

* *(S) chứa đường tròn cố định*

Mặt phẳng (R) vuông góc d' tại I chứa AA' vì AA' vuông góc d' tại I. Do đó đường tròn đường kính AA' trong mp(R) là đường tròn thiết diện của (R) và mặt cầu (S). Vậy (S) chứa đường tròn cố định đường kính AA' trong mp(R).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Một mặt phẳng (P) qua điểm A trên mặt cầu hợp với OA góc α. Tính diện tích thiết diện giữa (P) và mặt cầu.

2. Cho mặt cầu đường kính SS' = 2R. Gọi H là 1 điểm trên đoạn SS' sao cho : SH = kHS'. Mp(P) vuông góc với SS' tại H và cắt mặt cầu theo đường tròn (X). ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (X).

   a) Định k để SABC là tứ diện đều. Tính thể tích tứ diện đều đó.

   b) Cho k = 2. Chứng minh S'A, S'B, S'C đôi một vuông góc. Tính thể tích phần hình cầu nằm ngoài hai hình nón đỉnh S, S' đáy là hình tròn (X).

Đáp số :

a) k = 2 ; $\dfrac{8R^3\sqrt{3}}{27}$

b) $\dfrac{20\pi R^3}{27}$

Vấn đề 8 : Tiếp tuyến của hình cầu

- Tiếp tuyến của hình cầu là đường thẳng vuông góc bán kính tại một điểm trên mặt cầu.
- Các tiếp tuyến của hình cầu tại một điểm nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với hình cầu tại điểm đó.
- Hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm đến hình cầu thì bằng nhau.

VÍ DỤ 1 :

Cho hai nửa đường thẳng Ax , By chéo nhau, vuông góc nhau và nhận đoạn AB = a làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax , By sao cho MN = AM + BN. Chứng minh MN tiếp xúc hình cầu đường kính AB.

Giải

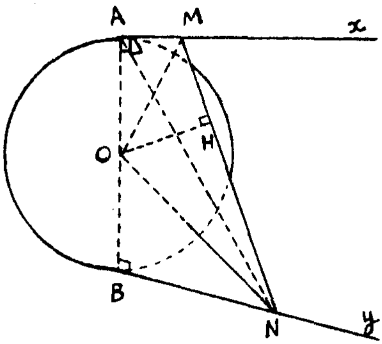
. Đặt AM = x , BN = y. Gọi O là trung điểm AB.

Áp dụng định lí hàm số cosin ta có :

$$\cos\widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2\,OM.ON}$$

$$= \frac{x^2 + \frac{a^2}{4} + y^2 + \frac{a^2}{4} - (x+y)^2}{2\,OM.ON}$$

$$= \frac{a^2 - 4xy}{4\,OM.ON}$$



Ta có : AM ⊥ AB và AM ⊥ BN nên AM ⊥ AN. Do đó :

$$MN^2 = AM^2 + AN^2$$
$$= AM^2 + BN^2 + AB^2$$

$\Rightarrow (x+y)^2 = x^2 + y^2 + a^2$

$\Rightarrow 2xy = a^2$

$$\Rightarrow \cos\widehat{MON} = \frac{-a^2}{4\,OM.ON} < 0$$

ΔMON có góc $\widehat{MON}$ tù nên hình chiếu H của O trên MN nằm trên đoạn MN.

. Ta chứng minh : $OH = \frac{AB}{2}$.

Giả sử $OH > \frac{AB}{2} = OA$.

Trong 2 tam giác vuông MOA, MOH ta có : $MH < AM$.

Trong 2 tam giác vuông NOB, NOH ta có : $NH < BN$.

Do đó : $MH + NH < AM + BN$ hay $MN < AM + BN$: trái với giả thiết.

Tương tự cho trường hợp $OH < \frac{AB}{2}$, nên $OH = \frac{AB}{2}$.

Vậy MN tiếp xúc hình cầu đường kính AB.

VÍ DỤ 2 :

Cho đường tròn đường kính AB tâm O và M di động trên đường tròn này. Đoạn SA vuông góc với (MAB). N là hình chiếu của A trên SM.

a) Chứng minh N chạy trên một đường tròn cố định (X).

b) Tiếp tuyến với đường tròn đường kính AB tại A và M cắt nhau tại T. Chứng minh TN tiếp xúc đường tròn (X). Suy ra TN tiếp xúc hai mặt cầu đường kính AB và SA.

Giải

a) *N chạy trên đường tròn cố định*

Ta có : $MB \perp SA, AM \Rightarrow MB \perp (SAM)$

$AN \perp MB, SM \Rightarrow AN \perp (SMB) \Rightarrow AN \perp SB$

Do đó : $AN \subset mp\alpha$ qua A và vuông góc SB tại H.

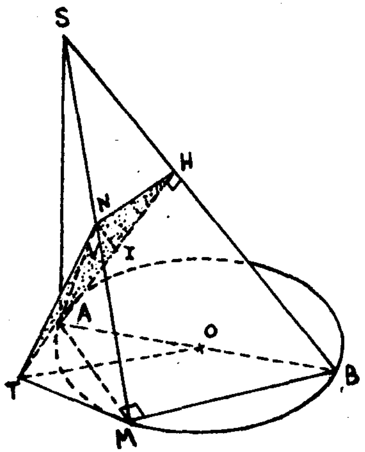
$AN \perp (SBM) \Rightarrow AN \perp NH$

Vậy N chạy trên đường tròn (X) đường kính AH trong $mp\alpha$.

b) * *TN tiếp xúc (X)*

Ta có : TA ⊥ OA,SA ⇒ TA ⊥ (SAB) ⇒ TA ⊥ SB

⇒ TA ⊂ mpα (1)



Theo tính chất của tiếp tuyến ta có : TO vuông góc AM tại trung điểm :

TO ⊥ AM,SA

⇒ TO ⊥ (SAM)

ΔAMN vuông tại N ⇒ TO là trục đường tròn (AMN)

⇒ TA = TN .

Gọi I là trung điểm AH thì AI = NI.

Do đó : ΔTAI = ΔTNI

Hơn nữa vì TA ⊥ (SAB) nên TA ⊥ AI.

ΔTAI vuông tại A ⇒ ΔTNI vuông tại N

Do đó : TN ⊥ NI (2)

Từ (1) và (2) ta có TN tiếp xúc (X)

* *TN tiếp xúc hai mặt cầu đường kính AB và SA*

. Ta có : $\widehat{SNA} = \widehat{SHA} = 90^o$ nên A , N , H thuộc mặt cầu đường kính SA.

Ta có : AN ⊥ (SMB) ⇒ AN ⊥ NB

α ⊥ SB ⇒ AH ⊥ SB

Do đó : A, N, H thuộc mặt cầu đường kính AB.

Suy ra : (X) là đường tròn chung của 2 mặt cầu.

. O là tâm mặt cầu đường kính AB, I là tâm đường tròn (X) nên OI ⊥ α.

Ta có : TN ⊥ NI nên TN ⊥ ON (định lí 3 đường vuông góc)

Suy ra TN tiếp xúc mặt cầu đường kính AB.

Tương tự TN tiếp xúc mặt cầu đường kính SA.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình cầu tâm O đường kính AB. Ax , By là hai tiếp tuyến của hình cầu tại A và B vuông góc nhau. Một tiếp tuyến thứ ba của hình cầu di động cắt Ax , By tại C, D.

   a) Chứng minh thể tích tứ diện ABCD không đổi.

   b) Vẽ Bx' song song với Ax . E là hình chiếu của C trên Bx', H là tiếp điểm của CD với hình cầu. H' là hình chiêu của H trên DE. Xét vị trí của BH' đối với góc x'By. Suy ra H nằm trong một mặt phẳng cố định.

2. Tính bán kính hình cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đều cạnh a.

   Đáp số : $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

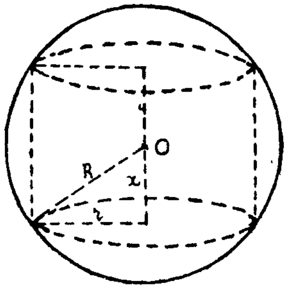
Vấn đề 9 : Hình trụ, hình nón nội tiếp ngoại tiếp hình cầu

> * Hình trụ nội tiếp hình cầu khi hai đáy hình trụ là hai thiết diện của hình cầu.
> * Hình trụ ngoại tiếp hình cầu khi hai đáy và các đường sinh hình trụ tiếp xúc hình cầu. Khi đó thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.
> * Hình nón nội tiếp hình cầu khi đỉnh hình nón nằm trên mặt cầu và đáy hình nón là thiết diện của hình cầu.
> * Hình nón ngoại tiếp hình cầu khi các đường sinh và đáy hình nón tiếp xúc với hình cầu.

VÍ DỤ 1 :

Trong hình cầu bán kính R có hình trụ nội tiếp. Tính thể tích V của hình trụ theo R và x với x là khoảng cách từ tâm hình cầu đến đáy hình trụ. Định x để diện tích xung quanh hình trụ đạt giá trị lớn nhất.

Giải



* *Thể tích hình trụ*

Đáy hình trụ là thiết diện của hình cầu nên có bán kính là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

Thể tích hình trụ :

$$V = \pi r^2 .2x = 2\pi x\,(R^2 - x^2)$$

* *Định x để S_{xq} lớn nhất*

Diện tích xung quanh hình trụ :

$$S_{xq} = 2\pi r.2x = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{x^2(R^2 - x^2)}\ ; \quad 0 < x < R$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số x^2 , $R^2 - x^2$ ta có :

$$x^2(R^2 - x^2) \le \left(\frac{x^2 + R^2 - x^2}{2}\right)^2 = \frac{R^4}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{xq} = 4\pi\sqrt{x^2(R^2 - x^2)} \le 4\pi.\frac{R^2}{2} \Leftrightarrow S_{xq} \le 2\pi R^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{R^2}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

(thỏa điều kiện $0 < x < R$) .

VÍ DỤ 2 :

Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O.

a) Dựng tâm hình cầu nội tiếp trong hình nón.

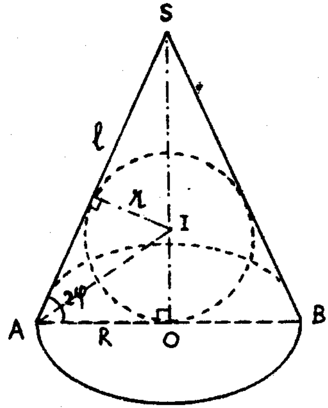
b) Gọi S_1 , V_1 lần lượt là diện tích toàn phần, thể tích hình nón và S_2, V_2 là diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu. Chứng minh : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_1}{S_2}$.

c) Chứng minh : $\dfrac{V_1}{V_2} \ge 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Giải

a) *Dựng tâm hình cầu nội tiếp hình nón*

Xét đường sinh SA. Vẽ phân giác góc $\widehat{SAO}$ cắt SO tại I. Ta có I cách đều mặt đáy và các đường sinh. Vậy I chính là tâm hình cầu phải tìm.



b) *Chứng minh* $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_1}{S_2}$

Gọi l, h, R, r là đường sinh, chiều cao, bán kính đáy hình nón và bán kính hình cầu nội tiếp.

Ta có : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \dfrac{R^2 h}{4r^3}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R l + \pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{R(l + R)}{4r^2}$$

Xét thiết diện SAB qua trục. Diện tích ΔSAB :

$$S = \frac{1}{2}(SA + SB + AB).OI = \frac{1}{2}SO.AB$$

$$\Rightarrow \quad 2(l + R).r = h.2R$$

$$\Rightarrow \quad l + R = \frac{R.h}{r}$$

Do đó : $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{R.\frac{Rh}{r}}{4r^2} = \dfrac{R^2 h}{4r^3} = \dfrac{V_1}{V_2}$

c) *Chứng minh* $\dfrac{V_1}{V_2} \geq 2$

Đặt $\widehat{SAO} = 2\varphi$, $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$ ta có : $h = R\text{tg}2\varphi$, $r = R\text{tg}\varphi$

Do đó :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^2 h}{4 r^3} = \frac{R^2 . R\, tg\, 2\varphi}{4 R^3\, tg^3 \varphi} = \frac{2\, tg\, \varphi}{4.\, tg^3 \varphi (1 - tg^2 \varphi)}$$

$$= \frac{1}{2\, tg^2 \varphi (1 - tg^2 \varphi)}$$

Vì $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ nên $0 < tg^2\varphi < 1$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $tg^2\varphi$, $1 - tg^2\varphi$ ta có :

$$tg^2\varphi\, (1 - tg^2\varphi) \leq \left(\frac{tg^2 \varphi + 1 - tg^2 \varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2\, tg^2 \varphi (1 - tg^2 \varphi)} \geq 2$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $tg^2\varphi = 1 - tg^2\varphi \Leftrightarrow tg^2\varphi = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

C. TOÁN TỔNG HỢP

1. Cho tam giác cân SAB có đáy AB = 2a không đổi, cạnh bên SA = x thay đổi. Tam giác này quay quanh đường cao SH.

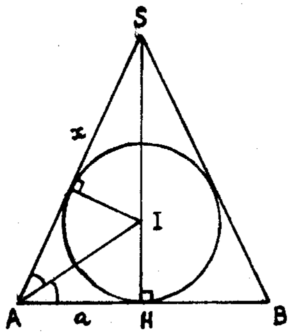
   a) Tính tỉ số $y = \frac{V_1}{V_2}$ theo a và x trong đó V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích các vật thể tròn xoay sinh ra bởi tam giác SAB và đường tròn nội tiếp tam giác đó trong phép quay nói trên.

   b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của y theo x .

Giải

a) Tam giác cân SAB quay quanh đường cao SH sinh ra hình nón đỉnh S, đường cao SH, bán kính HA.

Đường tròn nội tiếp tam giác SAB sinh ra mặt cầu tâm I bán kính IH với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SAB.



. Tam giác vuông SHA cho :

$$SH^2 = x^2 - a^2$$

Do đó : $V_1 = \frac{1}{3}\pi HA^2 .SH$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 \sqrt{x^2 - a^2}$$

. AI là phân giác của $\widehat{SAH}$ nên ta có :

$$\frac{IS}{IH} = \frac{SA}{AH} \Rightarrow \frac{IS}{SA} = \frac{IH}{AH} = \frac{IS + IH}{SA + AH} = \frac{SH}{SA + AH}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{SH.AH}{SA + AH} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}\,.a}{x + a}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\, IH^3 = \frac{4}{3}\pi\,\frac{a^3(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}{(x + a)^3}$$

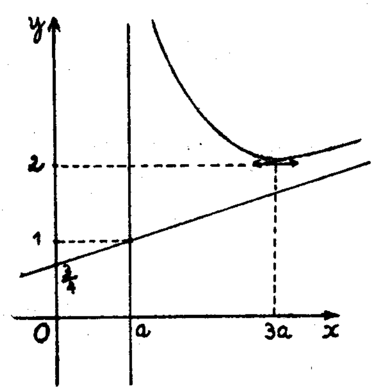
$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{x - a}{(x + a)^2}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Vậy: $y = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(x + a)^2}{4a(x - a)}$.

b) Ta có SA > AH $\Rightarrow$ x > a.

$$y' = \frac{(x - 3a)(x + a)}{4a(x - a)^2}$$

x	a		3a		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$



$\lim\limits_{x \to a} = \infty \Rightarrow x = a$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ và $y = \dfrac{x}{4a} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{a}{x-a}$ với $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{x-a} = 0$

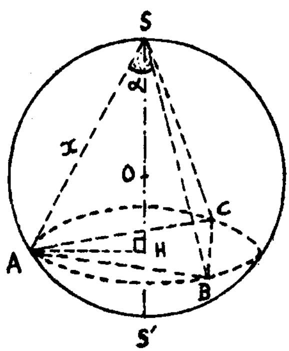
$$\Rightarrow y = \frac{x}{4a} + \frac{3}{4} \quad \text{là tiệm cận xiên}$$

2. Cho hình cầu bán kính R. Từ một điểm bất kì S trên mặt cầu, dựng ba cát tuyến bằng nhau cắt mặt cầu tại ba điểm A, B, C và từng đôi một lập với nhau một góc α.

   a) Tính thể tích tứ diện SABC theo R và α.

   b) Khi α thay đổi, tìm giá trị của α để thể tích này đạt giá trị lớn nhất.

Giải



a) Theo giả thiết $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$, nên : $\Delta SAB = \Delta SAC = \Delta SBC$.

Do đó $AB = AC = BC \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Kẻ đường kính SS' và H là hình chiếu của S xuống ABC.

Đặt $SA = x$. Tam giác SAB cân có góc $\widehat{S} = \alpha$ nên $AB = 2x \sin \dfrac{\alpha}{2}$.

Mà AB là cạnh Δ đều nội tiếp trong đường tròn bán kính HA

nên $AB = HA\sqrt{3} \Rightarrow HA = \dfrac{2x \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$

Tam giác vuông SAH cho $SH = \sqrt{x^2 - \dfrac{4x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3}}$

Tam giác vuông SAS' cho $SA^2 = SH.SS'$

$$\Rightarrow SH = \frac{x^2}{2R}$$

Do đó ta có phương trình :

$$\frac{x^2}{2R} = x\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}$$

Suy ra $\quad x = 2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

Vậy, thể tích của tứ diện SABC là :

$$V = \frac{1}{3}\,\text{Dt ABC} \times SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\cdot SH$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

b) V_{max} khi $\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $\quad y = t\left(1 - \frac{4}{3}t\right)^2 \quad$ với $t = \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \quad 0 < t \leq 1.$$

$$y' = \frac{1}{3}(16t^2 - 16t + 3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \quad \vee \quad t = \frac{3}{4}$$

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$

Vậy y_{max} khi $\sin^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^o$.

Do đó V lớn nhất khi SABC là tứ diện đều và

$$V_{max} = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3.$$

BÀI LÀM THÊM

1. Cho hình trụ có bán kính đáy R, đường cao OO' = h (O và O' là tâm của các đáy). AB là một đường kính di động của đường tròn (O), CD là đường kính cố định của đường tròn (O'). Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

   a) Tính diện tích tam giác ACD và góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và mặt phẳng đáy (O') theo R, h, α.

   b) Với giá trị nào của α thì tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất ?

   c) Gọi d_1 là khoảng cách giữa hai đường thẳng OO' và AC, d_2 là khoảng cách giữa OO' và AD. Chứng minh :

$$d_1^2 + d_2^2 = R^2.$$

Đáp số : a) $S = R\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}$, $\cot g\varphi = \dfrac{R\sin\alpha}{h}$

b) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; $V_{max} = \dfrac{2R^2h}{3}$

2. Cho hình nón cụt có đường tròn đáy lớn tâm O bán kính R, đường tròn đáy nhỏ tâm O' bán kính R', và đường cao OO' = h. Gọi A là điểm bất kì trên đường tròn đáy lớn, B là điểm bất kì trên đường tròn đáy nhỏ. Đặt AB = $l > 0$.

   a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của l. Cho biết tính chất của AB khi l đạt giá trị nhỏ nhất.

   b) Chứng minh rằng với mỗi l không đổi, góc giữa hai đường thẳng OO' và AB không đổi ; góc của hai bán kính OA và O'B không đổi.

   c) Tìm l để OABO' là tứ diện và tìm l để tứ diện đó có thể tích lớn nhất.

   d) Đặt α = góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng OO' và AB theo R, R' và α. Xác định α để d đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tính giá trị của l.

Đáp số :

a) $l_{min} = \sqrt{h^2 + (R - R')^2}$ khi đó AB là đường sinh hình nón cụt

c) V_{max} khi $l = \sqrt{h^2 + R^2 + R'^2}$

d) $\dfrac{RR' \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\alpha}}$

d_{max} khi $\cos\alpha = \dfrac{R'}{R}$ và $l = h^2 + R^2 - R'^2$

3. Cho mặt cầu tâm O bán kính R và điểm S với OS = d > R. Từ S kẻ ba tiếp tuyến SA , SB , SC với mặt cầu , giả sử $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$ (A,B,C là các tiếp điểm)

a) Chứng minh SABC và OABC là các hình chóp đều. Gọi I là giao điểm của SO với mặt phẳng (ABC). Tính theo R và d : OI , SA , IA , AB , $\sin\dfrac{\widehat{ASB}}{2}$, $\sin\dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

b) Tính d theo R để SA , SB , SC đôi một vuông góc. Chứng tỏ lúc đó OABC là tứ diện đều và OA song song với phân giác của $\widehat{BSC}$.

c) Tính d theo R để SABC là tứ diện đều. Có nhận xét gì về hình chóp OABC ?

d) Tính thể tích khối đa diện OABCS theo d và R.

e) Khi d thay đổi tìm một hệ thức giữa $\cos\widehat{ASB}$ và $\cos\widehat{AOB}$ độc lập đối với d .

Đáp số :

a) $OI = \dfrac{R^2}{d}$; $SA = \sqrt{d^2 - R^2}$; $IA = \dfrac{R}{d\sqrt{d^2 - R^2}}$

$AB = \dfrac{R}{d\sqrt{3(d^2 - R^2)}}$; $\sin\dfrac{\widehat{ASB}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2d}$;

$\sin\dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{\sqrt{3(d^2 - R^2)}}{2d}$

b) $d = R\sqrt{\dfrac{6}{2}}$

c) $d = R\sqrt{3}$

d) $V = \dfrac{\sqrt{3}\, R^2 (d^2 - R^2)}{d}$

e) $\cos\widehat{ASB} + \cos\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}$

Mục lục

In 5000 bản khổ 14,5 x 20,5 tại Xí nghiệp in Sở Giáo dục.
Giấy phép xuất bản số 136/XBNT–GP ngày 3.6.1991 của Sở Văn hóa và Thông tin TP.HCM.
In xong và nạp lưu chiểu tháng 7.1991.

Chương V : MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC. NHỊ DIỆN. DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU

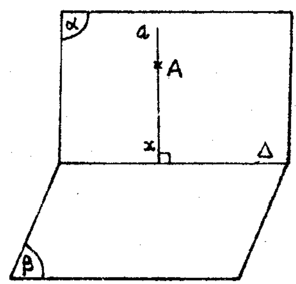
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Mặt phẳng vuông góc

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng vuông góc khi mặt này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists\, \mathbf{a} \subset \alpha : \mathbf{a} \perp \beta$$



2. Định lí – Hệ quả

* Cho hai mặt phẳng vuông góc. Từ một điểm trong mặt phẳng này vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng thứ nhất.

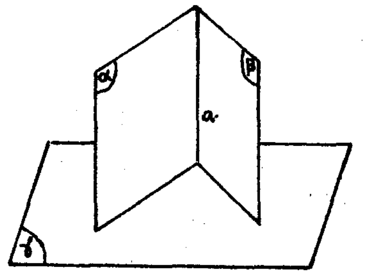
$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ A \in \alpha \\ Ax \perp \beta \end{cases} \Rightarrow Ax \subset \alpha$$

* Cho hai mặt phẳng vuông góc. Trong mặt phẳng này vẽ một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} \alpha \perp \beta\ .\ \alpha \cap \beta = \Delta \\ \mathbf{a} \subset \alpha\ ,\ \mathbf{a} \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \beta$$

* Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng đó.

$\begin{cases} \alpha, \beta \perp \gamma \\ \alpha \cap \beta = a \end{cases} \Rightarrow a \perp \gamma$



* Cho hai mặt phẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng thứ nhất cũng vuông góc mặt phẳng thứ hai.

$(\alpha \parallel \beta, \gamma \perp \alpha) \Rightarrow \gamma \perp \beta$

* Nếu một đường thẳng và một mặt phẳngcùng vuông góc với một mặt phẳng khác thì đường thẳng nằm trong hay song song với mặt phẳng.

$a, \alpha \perp \beta \Rightarrow a \subset \alpha$ hay $a \parallel \alpha$

* Qua một đường thẳng không vuông góc với một mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đã cho.

a không vuông góc α $\Rightarrow$ có duy nhất mpβ qua a và β vuông góc α.

II. Nhị diện

1. Định nghĩa

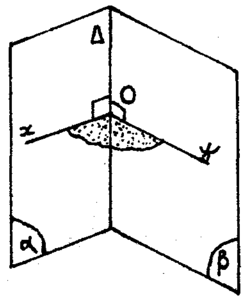
Nhị diện là hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng phát xuất từ một đường thẳng.

Kí hiệu : (α, Δ, β) ; (α, β) .

2. Góc phẳng (số đo) nhị diện

* Góc phẳng nhị diện là góc có đỉnh trên giao tuyến hai mặt, hai cạnh lần lượt nằm trong hai mặt và vuông góc với giao tuyến. Số đo của góc phẳng là số đo của nhị diện.

* Nhị diện vuông là nhị diện có góc phẳng là góc vuông.
* Hai mặt phẳng vuông góc nếu và chỉ nếu chúng tạo thành một nhị diện vuông.



3. Mặt phân giác của nhị diện

* Mặt phân giác của nhị diện là nửa mặt phẳng phát xuất từ cạnh nhị diện và chia nhị diện thành hai nhị diện bằng nhau.

* Mặt phân giác của một nhị diện là tập hợp những điểm cách đều hai mặt nhị diện.

III. Hình chiếu vuông góc

1. Hình chiếu của một góc vuông

* Khi một góc vuông có một cạnh song song hay nằm trong mặt phẳng chiếu thì hình chiếu của nó là góc vuông.
* Khi một góc có một cạnh song song hay nằm trong mặt phẳng chiếu và chiếu thành góc vuông thì góc đó vuông.
* Khi một góc vuông chiếu thành một góc vuông thì nó có ít nhất một cạnh song song hay nằm trong mặt phẳng chiếu.

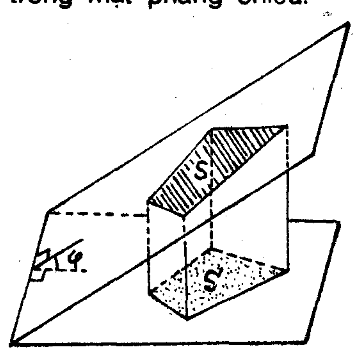
2. Diện tích hình chiếu

S' : diện tích hình chiếu của đa giác

S : diện tích đa giác

φ : góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt chứa đa giác và mặt phẳng chiếu (góc nhọn).

$$S' = S\cos\varphi$$



IV. Góc của hai mặt phẳng

* Góc của hai mặt phẳng cắt nhau là một trong bốn góc nhị diện mà chúng tạo nên. Ta thường chọn góc nhọn.
* Góc nhọn của hai mặt phẳng bằng góc nhọn của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

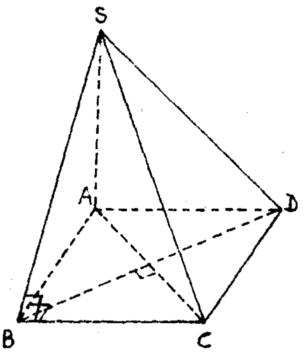
Vấn đề 1 : Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông, SA vuông góc với (ABCD). Chứng minh các cặp mặt phẳng sau đây vuông góc nhau : (SAB) và (SBC) ; (SBD) và (SAC).

Giải



. Ta có :

$BC \perp SA \quad (SA \perp (ABCD))$

và $BC \perp AB$

nên : $BC \perp (SAB)$

Do đó : $(SAB) \perp (SBC)$.

. Ta có :

$BD \perp SA \quad (SA \perp (ABCD))$

và $BD \perp AC$ (hai đường chéo hình vuông)

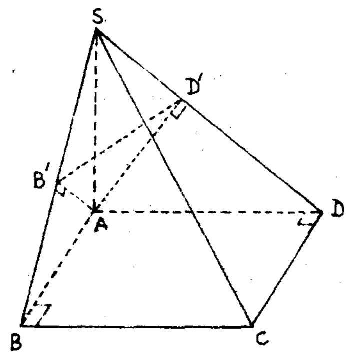
nên : $BD \perp (SAC)$

Do đó : $(SBD) \perp (SAC)$.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với (ABCD). Gọi B', D' là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh mặt phẳng (AB'D') vuông góc với hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải



Ta có : $BC \perp SA$

$(SA \perp (ABCD))$

và $BC \perp AB$

Do đó : $BC \perp (SAB)$

Suy ra : $BC \perp AB'$

$(AB' \subset (SAB))$

Như vậy : $AB' \perp BC$ và

$AB' \perp SB$

nên : $AB' \perp (SBC)$

Vậy : $(AB'D') \perp (SBC)$.

Tương tự ta có : $AD' \perp (SCD)$ nên $(AB'D') \perp (SCD)$.

VÍ DỤ 3 :

Cho hình vuông ABCD cạnh a, SA vuông góc mặt phẳng ABCD. Hai điểm M và N lần lượt di động trên hai đoạn BC và CD. Đặt $x = BM$, $y = DN$ $(0 < x , y < a)$.

Chứng minh hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc nếu và chỉ nếu $\widehat{AMN} = 90^o$. Tìm hệ thức giữa x, y khi (SAM) vuông góc (SMN).

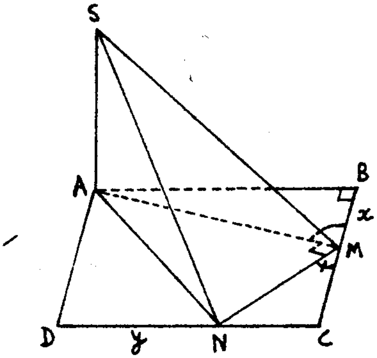
Giải

* Giả sử $\widehat{AMN} = 90^o$, ta có :

$MN \perp AM$

$MN \perp SA$

Do đó : $MN \perp (SAM)$



Vậy : $(SMN) \perp (SAM)$.

. Giả sử $(SMN) \perp (SAM)$, ta có :

$SA \perp (ABCD)$

nên $(ABCD) \perp (SAM)$.

Vì $(SMN) \cap (ABCD) = MN$

nên $MN \perp (SAM)$.

Vậy : $MN \perp AM$ hay

$\widehat{AMN} = 90^o$.

* Ta có :

$$tg\widehat{AMB} = \frac{AB}{BM} = \frac{a}{x} \text{ , } cotg\widehat{CMN} = \frac{CM}{CN} = \frac{a - x}{a - y}$$

Khi $\widehat{AMN} = 90^o$ thì $\widehat{AMB} + \widehat{CMN} = 90^o$ nên :

$$tg\widehat{AMB} = cotg\widehat{CMN}$$

hay $$\frac{a}{x} = \frac{a - x}{a - y}$$

Vậy hệ thức giữa x , y là : $a^2 - a(x + y) + x^2 = 0$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho tứ diện SABC có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông cân tại B. I và J là trung điểm AC và BC.
   a) Chứng minh $(SAC) \perp (ABC)$.
   b) Chứng minh $(SIJ) \perp (SBC)$.
   c) Vẽ đường cao IH của tam giác SIJ. Chứng minh H là trực tâm tam giác SBC.

2. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thoi , $SA = SC$ và $SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.
   a) Chứng minh : $(SAC) \perp (ABCD)$; $(SBD) \perp (ABCD)$.
   b) I và J là hình chiếu của O trên AB và CD. Chứng minh :
   $$(SAB) \perp (SCD) \Leftrightarrow \widehat{ISJ} = 90^o.$$

3. Cho hình chóp SABC có SA vuông góc (ABC), tam giác ABC vuông tại B, SA = $a\sqrt{2}$, AB = a, BC = $a\sqrt{3}$. Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SC.

a) Chứng minh tứ giác BCKH nội tiếp được.

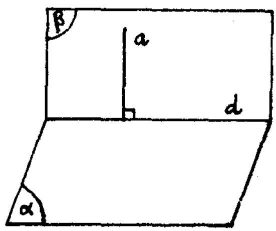
b) Chứng minh : (AHK) $\perp$ (SBC).

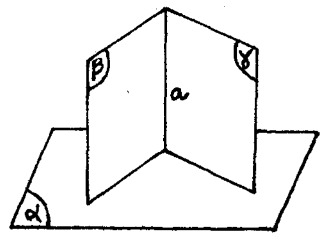
c) Tính diện tích tam giác AHK.

Vấn đề 2 : Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Ngoài các cách chứng minh ở chương trước, để chứng minh a $\perp$ α ta có thể chứng minh :

. $a \subset \beta$, $\beta \perp \alpha$, $\beta \cap \alpha$ = d và $a \perp d$





. $a = \beta \cap \gamma$ với $\beta, \gamma \perp \alpha$.

VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp SABCD có SAB là tam giác cân tại S và ABCD là hình chữ nhật. Gọi I là trung điểm AB. Cho (SAB) $\perp$ (ABCD). Chứng minh : SI $\perp$ (ABCD), BC $\perp$ (SAB).

Giải

. Tam giác SAB cân tại S nên :

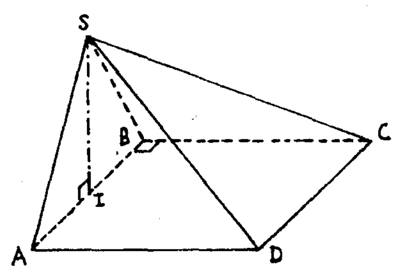
SI $\perp$ AB

và (SAB) $\perp$ (ABCD).

Suy ra : SI $\perp$ (ABCD).

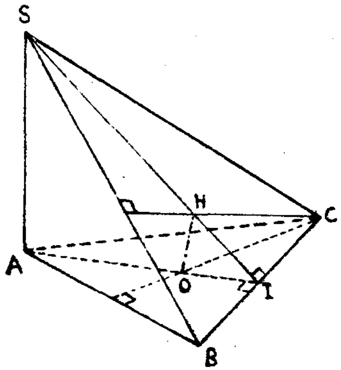
. Ta có : BC $\perp$ AB và (ABCD) $\perp$ (SAB)

Do đó : BC $\perp$ (SAB).



VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABC có ABC là tam giác đều, hai mặt (SAB), (SAC) vuông góc (ABC). Gọi I là trung điểm của BC và O , H lần lượt là trực tâm của hai tam giác ABC, SBC. Chứng minh: SA ⊥ (ABC) ; SB ⊥ (COH) ; (SAI) ⊥ (SBC) ; OH ⊥ (SBC).



Giải

* Ta có : (SAB),(SAC) ⊥ (ABC)

suy ra : SA ⊥ (ABC).

* Ta có : CO ⊥ AB (O là trực tâm)

(ABC) ⊥ (SAB)

nên : CO ⊥ (SAB)

suy ra : CO ⊥ SB

Hơn nữa : CH ⊥ SB (H là trực tâm)

nên : SB ⊥ (COH).

* Ta có : BC ⊥ SA,AI nên :

BC ⊥ (SAI). Do đó : (SAI) ⊥ (SBC).

* Theo trên SB ⊥ (COH) nên (COH) ⊥ (SBC)

Mà (SAI) ⊥ (SBC) và (SAI) ∩ (COH) = OH nên OH ⊥ (SBC).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hình vuông ABCD. Mặt phẳng (P) vuông góc (ABCD) theo giao tuyến AB. Điểm M di động sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} = 90^\circ$.

   a) Chứng minh M thuộc mặt phẳng trung trực của BD.

   b) MD cắt (P) tại M'. Chứng minh : AM' ⊥ BM'.

2. Cho 2 hình vuông ABCD và ABEF cạnh a nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc nhau : Trên 2 đoạn AC, BF lần lượt lấy 2 điểm M và N sao cho AM = BN = x ($0 < x < a\sqrt{2}$).

   a) Chứng minh AF ⊥ (ABCD).

b) Gọi M_1 là hình chiếu của M trên AB. Chứng minh : $MM_1 \perp M_1N$ và MN song song mặt phẳng (CDFE).

c) Tính MN theo a và x. Định x để MN nhỏ nhất.

d) Khi MN nhỏ nhất hãy chứng minh MN vuông góc AC, BF và MN song song DE.

Hướng dẫn :

b) Có thể dùng định lí Talet đảo để chứng minh MN // (CDFE).

d) Dùng định lí Pitago để kiểm chứng hai tam giác AMN, BMN vuông. Để ý giao điểm của AB với MD và NE khi chứng minh MN // DE.

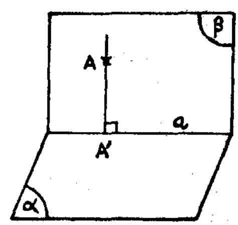
Vấn đề 3 : Dựng đường thẳng qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng

Cho điểm A và mpα. Dựng đường thẳng d qua A và vuông góc với α.

Trường hợp 1 : Nếu có $b \perp \alpha$ thì từ A ta dựng d song song với b.

Trường hợp 2 : Dựng mpβ chứa A và vuông góc α theo giao tuyến a. Dựng đường thẳng d qua A và vuông góc a tại A'.

Đây cũng là bài toán tìm hình chiếu A' của A trên mpα.



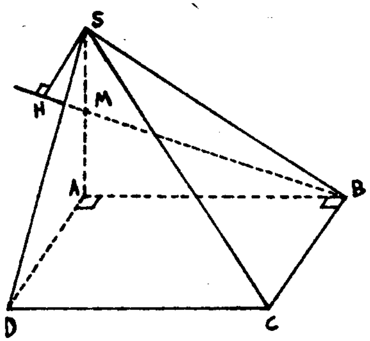
VÍ DỤ 1 :

Cho hình chóp SABCD có SA vuông góc với (ABCD) và ABCD là hình chữ nhật. Mặt phẳng α qua BC cắt SA tại M. Dựng đường vuông góc từ S với mặt phẳng α.

Giải

Ta có : $BC \perp AB, SA$

nên : $BC \perp (SAB)$.



Do đó : (MBC) ⊥ (SAB) theo giao tuyến MB.

Vậy đường thẳng qua S và vuông góc MB tại H là đường thẳng phải tìm.

VÍ DỤ 2 :

Cho hình chóp SABCD có SA vuông góc (ABCD). ABCD là hình thoi với $\hat{A}$ nhọn. Xác định hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

Giải

Chiếu A trên BC thành H.

Ta có : BC ⊥ SA,AH

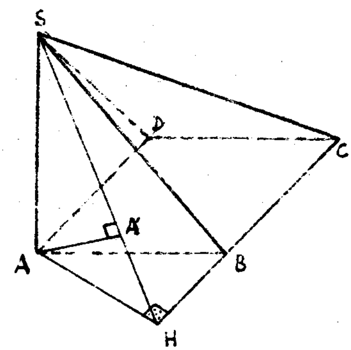
suy ra : BC ⊥ (SAH).

Do đó : (SBC) ⊥ (SAH) theo giao tuyến SH.

Gọi hình chiếu của A trên SH là A'.

AA' ⊥ SH ⇒ AA' ⊥ (SBC).

Vậy A' là hình chiếu của A trên mp(SBC).



VÍ DỤ 3 :

Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a tâm O, SO vuông góc ABCD, SA = b, SA hợp với (ABCD) và (SBC) hai góc bằng nhau. H là hình chiếu của A trên (SBC).

a) Xác định H. Chứng minh SO = AH, HB = $\frac{a}{2}$.

b) Chứng minh $5a^2 = 4b^2$.

c) Gọi α là góc của SA và (ABCD). Chứng minh :

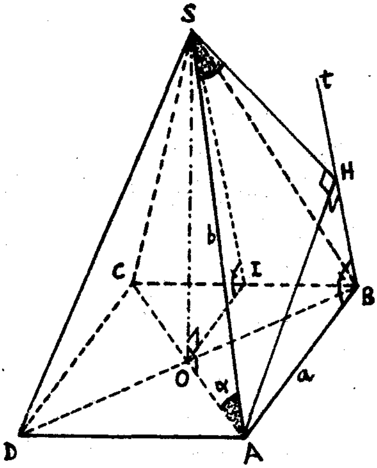
$$tg\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Giải

a) * *Xác định H*

Gọi I là trung điểm BC. Ta có : BC ⊥ SO,OI nên BC ⊥ (SOI) hay (SBC) ⊥ (SOI).

Từ B vẽ Bt song song SI. Ta có (ABt) // (SOI) nên (ABt) vuông góc (SBC) theo giao tuyến Bt. Do đó chiếu A trên Bt thì đó cũng là hình chiếu H của A trên (SBC).



* *Chứng minh SO = AH, HB = $\frac{a}{2}$*

Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \Rightarrow \text{góc } (SA,(ABCD)) = \widehat{SAO} \\ AH \perp (SBC) \Rightarrow \text{góc } (SA,(SBC)) = \widehat{ASH} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{SAO} = \widehat{ASH}$$

Suy ra hai tam giác vuông SOA và AHS bằng nhau.

Do đó : SO = AH.

Ta có : $\operatorname{tg}\widehat{SIO} = \operatorname{tg}\widehat{ABH} \Rightarrow \frac{SO}{OI} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow HB = OI = \frac{a}{2}$.

b) *Chứng minh : $5a^2 = 4b^2$*

Trong tam giác vuông ABH ta có : $AB^2 = AH^2 + HB^2$

Suy ra : $a^2 = SO^2 + OI^2 = (SA^2 - OA^2) + OI^2$

$$= \left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^2}{4}$$

Do đó : $5a^2 = 4b^2$.

c) *Chứng minh* $tg\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\text{Ta có : } tg\alpha = \frac{SO}{OA} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Trong mặt phẳng α cho đường tròn đường kính AB và điểm C trên đường tròn. Đoạn SA vuông góc với α.

a) Chứng minh : (SAC) ⊥ (SBC). Suy ra đường cao AH của tam giác SAC vuông góc (SBC).

b) Gọi O là trung điểm AB. Tìm hình chiếu O' của O trên (SBC).

2. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc (ABCD). Điểm M di động trên đoạn SA.

a) Chứng minh : (MCD) ⊥ (SAD).

b) Tìm hình chiếu S' của S trên (MCD). Suy ra S' chạy trên một cung tròn cố định.

c) Tìm hình chiếu của B trên (MCD).

♦**3.** Cho tứ diện SABC có S, B, C cố định, mặt phẳng (SCA) quay quanh SC và ở một phía đối với mặt phẳng (SBC). Cho SA = = SB = SC = a , $\widehat{ASC} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 120^\circ$.

a) Tìm tập hợp các điểm A và hình chiếu của A trên (SBC).

b) Tính $\widehat{BSA}$ để tam giác ABC vuông tại A.

Hướng dẫn : A nằm trong mặt phẳng vuông góc SC tại S.

4. Cho tứ diện SABC có tam giác ABC cân, AB = AC = SA = = SB = $a\sqrt{3}$, SC = a, (SBC) vuông góc (ABC), I là trung điểm BC.

a) Chứng minh tam giác SBC vuông.