

DẠNG 2**Các phương pháp tính tích phân cơ bản**

Câu 1: Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$ theo n .

- A. $I = \frac{1}{2n+2}$. B. $I = \frac{1}{2n}$. C. $I = \frac{1}{2n-1}$. D. $I = \frac{1}{2n+1}$.

Câu 2: Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x) dx$.

- A. $I = \frac{1}{2017}$. B. $I = 0$. C. $I = 2017$. D. $I = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính phân $\int_0^4 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{25}{4}$. B. 88. C. 25. D. $\frac{7}{4}$.

Câu 4: Biết $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx = a \ln \sqrt{12} + b \ln \sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên, khi đó $a^3 + b^3$ bằng

- A. -9. B. 0. C. 9. D. 7.

Câu 5: Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \frac{a}{b} \pi - \frac{m}{n}$, với $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$, các phân số $\frac{a}{b}, \frac{m}{n}$ tối giản. Tính $a^b + m^n$.

- A. 3. B. 5. C. 8. D. 2.

Câu 6: Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{d} + b \ln 2 + c \ln d$, với a, b, c, d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

- A. 16. B. 4. C. 28. D. -2.

Câu 7: Cho $I = \int_3^8 \frac{1}{x+x\sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ tối giản. Giá trị của $abc-d$ bằng

- A. -6. B. 18. C. 0. D. -3.

Câu 8: Cho $\int_0^1 \frac{\sqrt{3x+1}}{x-5} dx = a + b \ln 5 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

- A. 6. B. -4. C. 14. D. -2.

Câu 9: Cho $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4} dx = a \ln 3 + b \pi$ với a, b là các số thực. Giá trị của $a^2 + 3b^2$ bằng

- A. $\frac{7}{27}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{35}{144}$.

- Câu 10:** Biết $\int_0^3 x \ln(x^2 + 16) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + \frac{c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$
- A. $T = -2$. B. $T = 16$. C. $T = 2$. D. $T = -16$.
- Câu 11:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $a > 0$. Giả sử với mọi $x \in [0; a]$ ta có $f(x) > 0$ và $f(x) \cdot f(a - x) = 1$. Tính $I = \int_0^a \frac{dx}{1 + f(x)}$.
- A. $I = \frac{a}{3}$. B. $I = \frac{a}{2}$. C. $I = 2a$. D. $I = a \ln(a + 1)$.
- Câu 12:** Cho $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. 0. D. 2.
- Câu 13:** Cho $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a + b + c + d$?
- A. 18. B. 15. C. 16. D. 17.
- Câu 14:** Biết rằng $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x + 5\sqrt{x+3} + 9} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. -10. B. 10. C. 5. D. -5.
- Câu 15:** Cho tích phân $I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{14 - x^2 - \frac{1}{x^2}} \cdot dx = \frac{a \cdot \pi}{b} + c\sqrt{3} + d$, trong đó $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $S = a + b + c + d$.
- A. $S = 3$. B. $S = 7$. C. $S = 2$. D. $S = 11$.
- Câu 16:** Giả sử tích phân $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \ln 3 + c \ln 2$ trong đó a, b, c là các số hữu tỉ. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$.
- A. $\frac{77}{36}$. B. $\frac{73}{36}$. C. $\frac{67}{36}$. D. $\frac{1}{64}$.
- Câu 17:** Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3 + 1}} dx = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{b}{c} + \sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng
- A. 12. B. 10. C. 18. D. 15.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$; $\int_0^2 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^3 f'(\sqrt{x+1}) dx$.
- A. $I = -5$. B. $I = 0$. C. $I = -18$. D. $I = -10$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 3$. D. $I = 2$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x.f(x)dx = 2019$. Giá trị của tích phân

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\cos x)dx$ là

- A. 2019. B. 4038. C. -2019. D. -4038.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(mx) = nf(x) + p$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($m \neq 0$). Biết rằng

$\int_0^1 f(x)dx = q$ ($q \neq 0$). Tính tích phân $I = \int_1^m f(x)dx$.

- A. nmq . B. $nmq + mp - q$. C. $mp - q$. D. $-nmp - nq$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 5f(x) + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng

$\int_0^1 f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- A. $I = 11$. B. $I = 15$. C. $I = 19$. D. $I = 14$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx = 1$, $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x)dx = 13$. Tính tích

phân $I = \int_0^1 x^2 f(x^3)dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 8$. C. $I = 7$. D. $I = 9$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3x) = f(x) - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 5$. Giá

trị $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

- A. 4. B. 10. C. 7. D. 12.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f(x)dx = a + \frac{1}{b} \ln^2 2$ trong đó

$a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị $S = a + b$.

- A. $S = 3$. B. $S = 5$. C. $S = -3$. D. $S = 1$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f(x)dx = a + \frac{1}{b} \ln^2 2$ trong đó

$a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị $S = a + b$.

- A. $S = 3$. B. $S = 5$. C. $S = -3$. D. $S = 1$.

- Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\ln 2} f(e^x + 1)dx = 5$ và $\int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1} dx = 3$. Tính $I = \int_2^3 f(x)dx$.
- A. $I = 2$. B. $I = 4$. C. $I = -2$. D. $I = 8$.
- Câu 28:** **D3-2.2-3]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 4f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.
- A. $I = 9$. B. $I = 6$. C. $I = 5$. D. $I = 8$.
- Câu 29:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x+f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x)dx = 1$ và $2g(2) - g(1) = 2$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x^2}{x+f^2(x)} dx$ bằng
- A. 1,5. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 30:** Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $a^{2019} + b^{2019}$ bằng
- A. $2^{2018} + 1$. B. 2. C. 0. D. $2^{2018} - 1$.
- Câu 31:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{6}{\pi}$. B. $\frac{2}{\pi}$. C. $\frac{4}{\pi}$. D. $\frac{1}{\pi}$.
- Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$ và $\int_0^1 x.f(x)dx = \frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 4. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 33:** **6.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3) = 6$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)dx = \frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{53}{5}$. B. $\frac{117}{20}$. C. $\frac{153}{5}$. D. $\frac{13}{5}$.
- Câu 34:** **7.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 2$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)dx = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng
- A. $-\frac{2}{285}$. B. $\frac{194}{95}$. C. $\frac{116}{57}$. D. $\frac{584}{285}$.

Câu 35: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Biết $f(e) = \frac{1}{2e^2}$, tính tích phân

$$I = \int_1^e \left(f'(x) \ln x + \frac{e^{\ln x}}{x} \right) dx.$$

A. $I = e - \frac{1}{2}.$

B. $I = e + \frac{1}{2}.$

C. $I = e.$

D. $I = \frac{1}{2} - e.$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.A	4.B	5.D	6.B	7.A	8.D	9.C	10.D
11.B	12.C	13.C	14.A	15.A	16.B	17.B	18.D	19.A	20.B
21.B	22.C	23.D	24.C	25.D	26.D	27.B	28.B	29.B	30.C
31.A	32.B	33.B	34.C	35.A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Với $n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: Đặt $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt$

Đổi cận: $x = 0 \rightarrow t = 1; x = 1 \rightarrow t = 0$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^n dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

Cách 2: Ta có $d(1 - x^2) = -2x dx \rightarrow -\frac{1}{2} d(1 - x^2) = x dx$

$$I = \int_0^1 (1 - x^2)^n x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2)^n d(1 - x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

Câu 2: Chọn A

Đặt $t = 2017x \Rightarrow dt = 2017 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2017} dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2017$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2017} f(t) \cdot \frac{1}{2017} dt = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(t) dt = \frac{1}{2017}.$$

Câu 3: Chọn A

Đặt $x = t^3 + 3t$. Khi đó: $dx = (3t^2 + 3) dt$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 4 \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Vậy: } \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(t^3 + 3t) (3t^2 + 3) dt = \int_0^1 (t+1) (3t^2 + 3) dt = \frac{25}{4}.$$

Câu 4: Chọn B

Đặt $t = x^2 + 4x + 7 \Rightarrow dt = (2x + 4) dx \Rightarrow (x + 2) dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 7; x = 1 \Rightarrow t = 12$.

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx = \int_7^{12} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_7^{12} = \frac{1}{2} \ln 12 - \frac{1}{2} \ln 7 = \ln \sqrt{12} - \ln \sqrt{7} \Rightarrow a = 1; b = -1.$$

Vậy $a^3 + b^3 = 0$.

Câu 5: Chọn D

Đặt $x = \cos 2t$. Ta có $dx = -2 \sin 2t dt, 0 = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right)$ và $1 = \cos 0$.

$$\text{Ta có } \frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t} = \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 t}{1 + 2 \cos^2 t - 1} = \tan^2 t.$$

$$\begin{aligned}
\text{Vậy } \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{\tan^2 t} (-2 \sin 2t) dt \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\tan t| \sin 2t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt \\
&= 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1 \\
\Rightarrow \frac{a}{b} &= \frac{1}{2}, \frac{m}{n} = \frac{1}{1}. \text{ Vì các phân số } \frac{a}{b}, \frac{m}{n} \text{ tối giản nên ta suy ra } a=1, b=2, m=1, n=1.
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a^b + m^n = 1^2 + 1^1 = 2.$$

Câu 6: Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \rightarrow t=1; \quad x=3 \rightarrow t=2$$

$$I = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{4 + 2t} \cdot 2t dt = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2} \right) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6 \ln|t+2| \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{3} - 12 \ln 2 + 6 \ln 3.$$

$$\text{Suy ra } a=7, b=-12, c=6, d=3. \text{ Do đó } a+b+c+d=4.$$

Câu 7: Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx.$$

$$\text{Khi } x=3 \Rightarrow t=2; \text{ Khi } x=8 \Rightarrow t=3.$$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó } I &= \int_2^3 \frac{1}{t^2 - 1 + (t^2 - 1)t} \cdot 2t dt = \int_2^3 \frac{2t}{(t^2 - 1)(t+1)} dt = \int_2^3 \frac{2t}{(t-1)(t+1)^2} dt \\
&= \int_2^3 \frac{(t+1) + (t-1)}{(t-1)(t+1)^2} dt = \int_2^3 \left(\frac{(t+1)}{(t-1)(t+1)^2} + \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)^2} \right) dt \\
&= \int_2^3 \left(\frac{1}{(t-1)(t+1)} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt \\
&= \int_2^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) + \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt = \left[\frac{1}{2} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) - \frac{1}{t+1} \right] \Big|_2^3 \\
&= \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t+1} \right] \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{12} \Rightarrow a=3, b=2, c=1, d=12.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } abc - d = 3 \cdot 2 \cdot 1 - 12 = -6.$$

Câu 8: Chọn D

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1}. \text{ Ta có } t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2t dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{3} dt.$$

$$\text{Ta có } x-5 = \frac{t^2-1}{3} - 5 = \frac{t^2-16}{3}.$$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$, $x = 1$ thì $t = 2$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{3x+1}}{x-5} dx &= \int_1^2 \frac{t}{t^2-16} \cdot \frac{2t}{3} dt = 2 \int_1^2 \frac{t^2}{t^2-16} dt = 2 \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{t-4} - \frac{2}{t+4} \right) dt \\ &= \left[2(t + 2\ln|t-4| - 2\ln|t+4|) \right]_1^2 = (4 + 4\ln 2 - 4\ln 6) - (2 + 4\ln 3 - 4\ln 5) \\ &= 2 + 4\ln 2 - 4\ln 3 + 4\ln 5 - 4\ln 6 = 2 + 4\ln 2 - 4\ln 3 + 4\ln 5 - 4\ln(2 \cdot 3) \\ &= 2 + 4\ln 2 - 4\ln 3 + 4\ln 5 - 4\ln 2 - 4\ln 3 = 2 + 4\ln 5 - 8\ln 3. \end{aligned}$$

Suy ra $a + b + c = 2 + 4 - 8 = -2$.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4} dx = \int_0^2 \left(\frac{x+1}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x^2+2x+4} \right) dx = \int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx - \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4} dx$.

Tính $I_1 = \int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+4) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (\ln 12 - \ln 4) = \frac{1}{2} \ln 3$.

Tính $I_2 = \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4} dx = \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2+3} dx$.

Đặt $x+1 = \sqrt{3} \tan u \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u} du$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$ và $x=2 \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{3(1+\tan^2 u)} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Vậy $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4} dx = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Suy ra $a^2 + 3b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5}{18}$.

Câu 10: Chọn D

Đặt $t = x^2 + 16 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=16$; $x=3 \Rightarrow t=25$.

$I = \int_0^3 x \ln(x^2+16) dx = \frac{1}{2} \int_{16}^{25} \ln t dt$. Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = t \end{cases}$.

$I = \frac{1}{2} \int_{16}^{25} \ln t dt = \frac{1}{2} (t \ln t) \Big|_{16}^{25} - \frac{1}{2} \int_{16}^{25} dt = 25 \ln 5 - 32 \ln 2 - \frac{9}{2}$.

Vậy $T = a + b + c = 25 - 32 - 9 = -16$.

Cách 2.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+16) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2+16} dx \\ v = \frac{x^2}{2} + 8 = \frac{x^2+16}{2} \end{cases}$.

$I = \int_0^3 x \ln(x^2+16) dx = \frac{x^2+16}{2} \cdot \ln(x^2+16) \Big|_0^3 - \int_0^3 x dx = 25 \ln 5 - 32 \ln 2 - \frac{9}{2}$

Vậy $T = a + b + c = 25 - 32 - 9 = -16$.

Câu 11: Chọn B

Từ giả thiết: $f(x) > 0$ và $f(x) \cdot f(a-x) = 1$, ta suy ra: $f(a-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Đặt $x = a - t \Rightarrow dx = -dt$; Với $x = 0 \Rightarrow t = a$, $x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int_0^a \frac{f(t)dt}{1+f(t)} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a \frac{(1+f(x))dx}{1+f(x)} = \int_0^a dx = a. \text{ Vậy } I = \frac{a}{2}.$$

Câu 12: Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{2+x^2} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, } I = \int_0^1 x \ln(2+x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(2+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x}{2+x^2} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln(2+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2} dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{x^2+2} \right) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \ln(x^2+2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2.$$

$$\text{Thay vào (1), suy ra } I = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}. \text{ Vậy } \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0$$

Câu 13: Chọn C

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$. Khi đó:

$$I = \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \int_0^1 \frac{2t+1}{(t+2)^2} dt = \int_0^1 \left(\frac{-3}{(t+2)^2} + \frac{2}{t+2} \right) dt = \left(\frac{3}{t+2} + 2 \ln|t+2| \right) \Big|_0^1 = \ln \frac{9}{4} - \frac{1}{2}.$$

Vậy $a+b+c+d = 9+4+1+2 = 16$.

Câu 14: Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+3}$. Ta có $t^2 = x+3 \Rightarrow 2t dt = dx$.

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$\text{Khi đó } I = \int_{-2}^1 \frac{dx}{x+5\sqrt{x+3}+9} = \int_1^2 \frac{2t dt}{t^2-3+5t+9} = \int_1^2 \frac{2t}{t^2+5t+6} dt = \int_1^2 \frac{2t}{(t+2)(t+3)} dt.$$

$$I = \int_1^2 \left(-\frac{4}{t+2} + \frac{6}{t+3} \right) dt = \left(-4 \ln|t+2| + 6 \ln|t+3| \right) \Big|_1^2 = -20 \ln 2 + 4 \ln 3 + 6 \ln 5.$$

Do đó $a = -20, b = 4, c = 6$. Vậy $a + b + c = -20 + 4 + 6 = -10$.

Câu 15: Chọn A

$$\text{Ta có: } I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{14 - x^2 - \frac{1}{x^2}} \cdot dx = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{16 - \left(x + \frac{1}{x} \right)^2} \cdot dx$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = 4 \sin t \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = 4 \cos t dt, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; \text{ với } x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos t \cdot \sqrt{16 - (4 \sin t)^2} dt = 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = (8x + 4 \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4$$

$$\text{Mà } I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{14 - x^2 - \frac{1}{x^2}} \cdot dx = \frac{a\pi}{b} + c\sqrt{3} + d \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 2, d = -4.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c + d = 3.$$

Câu 16: Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \int_1^2 \frac{x+1}{(x+1)^2} dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)} dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= \ln|x+1| \Big|_1^2 + \frac{1}{x+1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{6} + \ln 3 - \ln 2. \text{ Suy ra } a = -\frac{1}{6}; b = 1; c = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = a^2 + b^2 + c^2 = \left(-\frac{1}{6} \right)^2 + 1^2 + (-1)^2 = \frac{73}{36}.$$

Câu 17: Chọn B

Cách 1: Ta có

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow t^2 = x^3+1 \Rightarrow 2t dt = 3x^2 dx$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{2\sqrt{2}}; x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}. \text{ Khi đó } I = \int_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{\frac{2}{3} t dt}{t \sqrt{t^2-1}} = \frac{2}{3} \int_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{t+1} + \sqrt{t-1} \Rightarrow dy = \frac{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}}{2\sqrt{t^2-1}} dt \Rightarrow \frac{2dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\text{Đổi cận } t = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1} + \sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{8};$$

$$t = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

$$I = \frac{2}{3} \int_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} \frac{2dy}{y} = \frac{4}{3} \ln|y| \Big|_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \frac{4}{3} \ln \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{1}{3} \ln \frac{(2\sqrt{2}+2)^2}{8} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right)$$

Do đó $a + b + c + d = 10$

Cách 2: Ta có $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}} dx$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$. Đổi cận $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{8}; x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{\frac{1}{3} dt}{\sqrt{t(t+1)}} = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{3} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right| \Big|_{\frac{1}{8}}^1 = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right)$.

Vậy $a + b + c + d = 3 + 3 + 2 + 2 = 10$.

Câu 18: Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = x dx$.

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 0; x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó: $I = \int_{-1}^3 f'(\sqrt{x+1}) dx = \int_0^2 2t \cdot f'(t) dt = 2t \cdot f(t) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 f(t) dt = 4f(2) - 2 \int_0^2 f(x) dx = -8 - 2 = -10$.

Câu 19: Chọn A

Ta có: $3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3f(x) dx = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $2x = t \Rightarrow d(2x) = dt$, với $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$\Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 5, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 20: Chọn B

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx = - \int_1^0 2t \cdot f(t) dt = 2 \int_0^1 t \cdot f(t) dt = 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx = 4038$.

Câu 21: Chọn B

Ta có: $n = \frac{n}{q} \cdot q = \frac{n}{q} \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{n}{q} f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(mx) - p}{q} dx = \int_0^1 \frac{f(mx)}{q} dx - \int_0^1 \frac{p}{q} dx, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{mq} \int_0^1 f(mx) d(mx) - \frac{p}{q} x \Big|_0^1 = \frac{1}{mq} \int_0^1 f(mx) d(mx) - \frac{p}{q}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(mx) d(mx) = \left(n + \frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $mx = t \Rightarrow d(mx) = dt$, với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = m$.

$$\int_0^1 f(mx) d(mx) = \left(n + \frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^m f(t) dt = \int_0^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow q + \int_1^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q}\right).mq, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_1^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q}\right).mq - q = nmq + mp - q, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^m f(x) dx = nmq + mp - q, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 22: Chọn C

Ta có: $f(2x) = 5f(x) + x \Rightarrow \int_0^1 f(2x) dx = \int_0^1 [5f(x) + x] dx = 5 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x dx$

$$= 5.2 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{21}{2}. \text{ Mặt khác } \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{21}{2} \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 21.$$

Do đó: $\int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 21 - 2 = 19.$

Câu 23: Chọn D

Xét $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 13$, đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = dx$.

Đổi cận: $x = \frac{1}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1$.

Ta có $13 = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 f(u) du \Rightarrow \int_{\frac{1}{3}}^1 f(u) du = 26.$

Xét $I = \int_0^1 x^2 f(x^3) dx$, đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{3} dt = x^2 dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$. Vậy ta có:

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 x^2 f(x^3) dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt + \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{3}}^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt + \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{3}}^1 f(u) du \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 26 = 9. \end{aligned}$$

Câu 24: Chọn C

Cách 1: Ta có: $f(3x) = f(x) - 2x \Rightarrow \int_0^1 f(3x) dx = \int_0^1 [f(x) - 2x] dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 2x dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)dx = 5 - x^2 \Big|_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)dx = 4$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(3x)d(3x) = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x)dx$$

$$\text{Từ và suy ra } \int_0^3 f(x)dx = 3 \int_0^1 f(3x)dx = 3.4 = 12.$$

$$\text{Do đó } \int_1^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 12 - 5 = 7.$$

$$\textbf{Cách 2:} \text{ Ta có } \int_0^1 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(3x)d(3x) = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x)dx.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^3 f(x)dx = 3 \int_0^1 f(3x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 3 \int_0^1 [f(x) - 2x]dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx - 3 \int_0^1 2x dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = 2.5 - 3x^2 \Big|_0^1 = 10 - 3 = 7.$$

Câu 25: Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (2x-2)dx + \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = -1 + \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^2 = -1 + \frac{1}{2} \ln^2 2$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow S = a + b = -1 + 2 = 1.$$

Câu 26: Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (2x-2)dx + \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = -1 + \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^2 = -1 + \frac{1}{2} \ln^2 2$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow S = a + b = -1 + 2 = 1.$$

Câu 27: Chọn B

$$\text{Đặt } t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t-1}. \text{ Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=2; x=\ln 2 \Rightarrow t=3.$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\ln 2} f(e^x + 1)dx = 5 \Rightarrow \int_2^3 \frac{f(t)}{t-1} dt = 5 \Rightarrow \int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx = 5.$$

$$\text{Ta có } \int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1} dx = \int_2^3 \frac{(2x-2-1)f(x)}{x-1} dx = \int_2^3 \left[2f(x) - \frac{f(x)}{x-1} \right] dx = 3.$$

$$\text{Suy ra } 2I - \int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx = 3 \Rightarrow 2I = 8 \Leftrightarrow I = 4.$$

Câu 28: Chọn B

$$\text{Ta có } K = \int_0^1 f(2x)dx = \int_0^1 [4f(x) - x]dx = 4 \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 x dx = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx. \text{ Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=2.$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt = 7 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = 7.$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \Rightarrow I = \int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 7 - 1 = 6.$$

Câu 29: Chọn B

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + f^2(x)}$ nên $g'(x) = \frac{x}{x + f^2(x)}$.

$$\text{Đặt } I = \int_1^2 \frac{x^2}{x + f^2(x)} dx \Rightarrow I = \int_1^2 x g'(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = g'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = g(x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = xg(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 g(x) dx = 2g(2) - g(1) - 1 = 1.$$

Câu 30: Chọn C

Cách 1:

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \int_0^1 [e^x f(x)]' dx = [e^x f(x)] \Big|_0^1 = e.f(1) - f(0) = e - 1.$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ suy ra } a = 1, b = -1.$$

$$\text{Do đó } a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } u = f(x), \quad dv = e^x dx; \text{ ta có } du = f'(x) dx, \quad v = e^x.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, } \int_0^1 e^x f(x) dx &= [e^x f(x)] \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = [e^x f(x)] \Big|_0^1 \\ \Rightarrow \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx &= [e^x f(x)] \Big|_0^1 = e.f(1) - f(0) = e - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ suy ra } a = 1, b = -1.$$

$$\text{Do đó } a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0.$$

Câu 31: Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = -\frac{2}{\pi} f(x) \cdot \cos \frac{\pi}{2} x \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f'(x) \cdot \cos \frac{\pi}{2} x dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 (f(x) - 3 \sin \frac{\pi}{2} x)^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 6 \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx + 9 \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi}{2} x dx = 0$$

$$\text{Từ đây ta suy ra } f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{2} x \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3 \sin \frac{\pi}{2} x dx = \frac{6}{\pi}.$$

Câu 32: Chọn B

$$\text{Từ giả thiết: } \int_0^1 x.f(x) dx = \frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x.f(x) dx = 1. \text{ Tính: } I = \int_0^1 5x.f(x) dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 5x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{5}{2} x^2 \end{cases}. \text{ Ta có: } I = \int_0^1 5x.f(x) dx = \frac{5}{2} x^2.f(x) \Big|_0^1 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2.f'(x) dx$$

$$= \frac{5}{2} \cdot f(1) - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx,$$

$$\text{Mà: } I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 36 \Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx,$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [10x^2 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) [10x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{10x^3}{3} + C$$

$$\text{Với } f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{10 \cdot 1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}. \text{ Khi đó: } f(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3} \right) dx = \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{2}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Câu 33: Chọn B

$$\text{Tính } I = \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{3}x^3 \cdot f(x) \Big|_0^3 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 54 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx,.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{154}{3} \Rightarrow \frac{154}{3} = 54 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 4 \int_0^3 [f'(x)]^2 dx \Leftrightarrow \int_0^3 (x^3 f'(x) - 4[f'(x)]^2) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 f'(x) [x^3 - 4f'(x)] dx = 0. \Rightarrow x^3 - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^3}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{16} + C.$$

$$\text{Với } f(3) = 6 \Rightarrow C = \frac{15}{16}. \text{ Khi đó: } f(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{15}{16}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{15}{16} \right) dx = \left(\frac{1}{80}x^5 + \frac{15}{16}x \right) \Big|_0^3 = \frac{117}{20}.$$

Câu 34: Chọn C

$$\text{Tính: } I = \int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{4}x^4 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx,.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -38$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 8 \cdot \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -38.8 \Leftrightarrow 8 \cdot \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -38 \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \\
 &\Leftrightarrow \int_0^1 (8x^4 f'(x) + 38[f'(x)]^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) \cdot [8x^4 + 38f'(x)] dx = 0 \\
 &\Rightarrow 8x^4 + 38f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{4}{19}x^4 \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + C. \\
 &\text{Với } f(1) = 2 \Rightarrow C = \frac{194}{95}. \text{ Khi đó: } f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95}. \\
 &\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95}\right) dx = \left(-\frac{2}{285}x^6 + \frac{194}{95}x\right) \Big|_0^1 = \frac{116}{57}.
 \end{aligned}$$

Câu 35: Chọn A

$$\begin{aligned}
 \text{Xét } I &= \int_1^e \left(f'(x) \cdot \ln x + \frac{e^{\ln x}}{x} \right) dx = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x \cdot dx + \int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x} dx \\
 &= \left[f(x) \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} \cdot dx + \int_1^e e^{\ln x} \cdot d(\ln x) \\
 &= \left(f(x) \cdot \ln x - \frac{1}{2x^2} + e^{\ln x} \right) \Big|_1^e = f(e) - \frac{1}{2e^2} + e + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$