PHÒNG GD& ĐT THÀNH PHỐ
TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

Thứ 7 ngày 11 tháng 11năm 2023

PHÁCH THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn Toán. Lớp 9
(*Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề*)

Họ và tên: ....

Lớp: 9.......

Mã phách

PHÒNG GD& ĐT THÀNH PHỐ
TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

Thứ 7 ngày 11 tháng 11 năm 2023
ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: Toán. Lớp: 9.
(*Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề*)

Điểm bài thi	Mã phách

ĐỀ BÀI

Bài 1. (*5,0 điểm*)

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P, biết $P=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{x-\sqrt{x}}$.

b) Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn: $xy=1$. Chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{x+y}\geq 3$.

Bài 2. (*5,0 điểm*)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}$

Bài 3. (*5,0 điểm*) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $BH.BD=BC.BK$ và $BH.BD+CHCE=BC^2$.

b) Chứng minh $BH=AC.\cot\widehat{ABC}$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.

Bài 4. (3,*0 điểm*)

a) Cho các số nguyên $a_1;a_2;...;a_n$. Đặt S = $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$ và $P=a_1+a_2+...+a_n$. Chứng minh rằng S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x-3y=2xy-11$.

Bài 5. (2,*0 điểm*)

Các số nguyên từ 1 đến 10 được xếp xung quanh một đường tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng với cách xếp đó luôn tồn tại ba số theo thứ tự liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.

-----Hết-----

Chú ý:

+ Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

+ Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

<u>BÀI LÀM</u>

PHÒNG GD& ĐT THÀNH PHỐ
TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

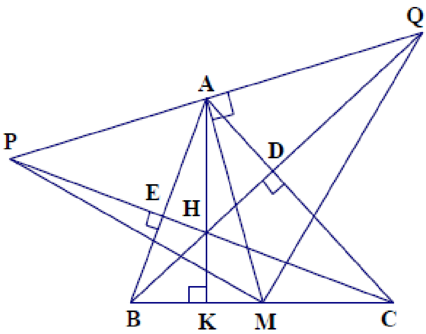
ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn Toán. Lớp 9

Thời gian: 150 phút

BÀI/Ý	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Bài 1	a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P, biết $P=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$. b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $xy=1$. Chứng minh $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x+y}\ge 3$.	**5**
a (2đ)	Điều kiện để P xác định là $x>0; x\neq 1$	0,5
	Ta có $P=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$	0,5
	Vậy Ta có $P=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$ (với $x>0; x\neq 1$).	0,5
b (3đ)	Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{xy}{x}+\dfrac{xy}{y}+\dfrac{2}{x+y}=x+y+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{x+y}{2}+\left(\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2}{x+y}\right)$	1
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\dfrac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{2}\ge 1\ (1)$ (vì $xy=1$)	0,5
	$\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2}{x+y}\ge 2.\sqrt{\dfrac{x+y}{2}.\dfrac{2}{x+y}}\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2}{x+y}\ge 2\ (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x+y}\ge 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.	0,5 0,5
Bài 2.	Giải các phương trình sau: a) Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$ b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)\left(x^2+xy+2\right)=8\end{cases}$	**5**
a (2,5đ)	Điều kiện: $x\ge 1$ Ta có: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$	

		1
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{x-1}-1$. $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\sqrt{x-1}-1$ $\Leftrightarrow \left\|\sqrt{x-1}-1\right\|=\sqrt{x-1}-1$	1
	$\Rightarrow \sqrt{x-1}-1\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 2$ (TMĐK) Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{x\in \mathbb{R}/x\geq 2\}$.	0,5
b ***(2,5đ)***	$\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)(3x+y)=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow x^2+xy+2=3x+y \Leftrightarrow (x-1)(x+y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2-y\end{array}\right.$	0,5
	$x=1 \Leftrightarrow 3+y^2+4y=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=-5\end{array}\right.$	0,5
	$x=2-y \Leftrightarrow (2-y+y)\left[3(2-y)+y\right]=8 \Leftrightarrow 2(6-2y)=8 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;1)$ và $(1;-5)$	0,5 0,5
Bài 3. a	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H. a) Chứng minh: $BH\,.\,BD = BC\,.\,BK$ và $BH\,.\,BD + CHCE = BC^2$. b) Chứng minh $BH = AC\,.\cot\widehat{ABC}$. c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.	*5,0*
		*0,5*
	Xét tam giác: ΔBHK; ΔBCD có: $\widehat{KBH}$ chung $\widehat{BKH}=\widehat{BDC}=90^\circ$. $\Rightarrow \Delta BHK \backsim \Delta BCD$(g.g) nên $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{BK}{BD}$ $\Rightarrow BH\cdot BD = BCBK$ Tương tự: $\Delta CHK \backsim \Delta CBE$	*0,5* *0,5* *0,5*

	nên $\frac{CH}{BC}=\frac{KC}{CE}\Rightarrow CH\cdot CE=BC\cdot KC$ Cộng vế với vế hai đẳng thức ta được: $BH\cdot BD+CH.CE=BCBK+BC\cdot KC$ hay $BH\cdot BD+CH\cdot CE=BC(BK+KC)=BC^2$	*0,5*
b	$\Delta BEH \,\#\, \Delta CEA(g\cdot g)\Rightarrow\frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}$ Xét ΔBEC vuông tại $E\Rightarrow\cot ABC=\frac{BE}{CE}$ $\Rightarrow\frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}=\cot ABC\Rightarrow BH=AC\cdot\cot ABC$	*0,5* *0,5* *0,5*
c	Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$. Chứng minh $\Delta PAH \,\#\, \Delta AMB\ (g.g)\Rightarrow\frac{PA}{AM}=\frac{AH}{MB}$ Chứng minh: $\Delta QAH \,\#\, \Delta MAC\,(g.g)\Rightarrow\frac{QA}{AM}=\frac{AH}{MC}$ Do $MB=MC\,(\text{gt})\Rightarrow\frac{QA}{AM}=\frac{PA}{AM}$ $\Rightarrow PA=QA\Rightarrow\Delta QMP$ cân tại $M\Rightarrow MP=MQ$.	*0,5* *0,5*
Bài 4	a) Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Đặt S = $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$ và $P=a_1+a_2+...+a_n$. Chứng minh rằng S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6. b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x-3y=2xy-11$.	**3**
a (1,5đ)	Với $a\in Z$ thì $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, Mà $(2.3)=1$	0,5
	$\Rightarrow a^3-a\,\vdots\,6$ $\Rightarrow S-P=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+...+(a_n^3-a_n)\,\vdots\,6$	1
	Vậy $S\,\vdots\,6\Leftrightarrow P\,\vdots\,6$	0,5
b (1,5đ)	$5x-3y=2xy-11\Rightarrow x(5-2y)+\frac{3}{2}(5-2y)-\frac{15}{2}+11=0$ $\Leftrightarrow(5-2y)\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{-7}{2}\Leftrightarrow(2y-5).\frac{2x+3}{2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow(2y-5)(2x+3)=7$	0,5
	(2x + 3) và (2y - 5) là các ước số của 7 nên ta có: 2x + 3: 1, -1, 7, -7 2y - 5: 7, -7, 1, -1 Vập phương trình có các nguyện nguyên là $(x,y)\in\{(-1;6);(-2;-1);(2;3);(-5;2)\}$	0,5 0,5 0,5
	Các số nguyên từ 1 đến 10 được xếp xung quanh một đường tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng với cách xếp đó luôn tồn tại	**1**

The inner table of part b:

2x + 3	1	-1	7	-7
2y - 5	7	-7	1	-1

5	ba số theo thứ tự liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.	
	Giả sử 10 số được xếp theo thứ tự tùy ý là a, b, c, d, e, f, g, h, i, j. Khi đó có 10 bộ ba số theo thứ tự liên tiếp là: (a; b; c); (b; c; d); (c; d; e); ... (j; a; b). Mỗi số từ 1 đến 10 xuất hiện đúng 3 lần trong 10 bộ số trên. Suy ra tổng các bộ số trên là: $S = (a + b + c) + (b + c + d) + ...+ (j + a + b)$ $= 3(1 + 2 + 3 + ... + 10) = 165$.	0,5 0,5
	Giả sử tất cả các bộ 3 số trên đều có tổng nhỏ hơn hoặc bằng 16 thì: $S \leq 16. 10 = 160$ (mâu thuẫn). Vậy luôn tồn tại một bộ có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.	0,5 0,5