

ĐỀ SỐ 18: ĐỀ TỰ LUẬN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN**NĂM HỌC:2020-2021****Thời gian làm bài 120 phút****I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm)** Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 - xy} + \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 - xy} \right) : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$ với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq y$ là:

A. $P = \frac{y+x}{xy}$

B. $P = \frac{y-x}{-xy}$

C. $P = \frac{x-y}{xy}$

D. $P = \frac{y-x}{xy}$

Câu 2. Giá trị của biểu thức: $Q = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.99} + \dots + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}}$ là:

A. $Q = 100$

B. $Q = 75$

C. $Q = 50$

D. $Q = 25$

Câu 3. Cho a, b thỏa mãn : $a^3 + 2b^2 - 4b + 3 = 0$ và $a^2 + a^2b^2 - 2b = 0$. Giá trị của $a^2 + b^2$ là :

A.0

B. 1

C.2

D. 4

Câu 4. Cho đường thẳng d : $y = -3x + 2$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục hoành và trục tung. Diện tích tam giác OAB là :

A. $\frac{4}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 5. Giá trị của một chiếc máy tính bảng sau khi sử dụng 1 năm được ước tính bởi công thức : $V(t) = 9800000 - 1200000t$ (đồng). Sau bao nhiêu năm thì giá trị của chiếc máy tính bảng là 5 000 000 đồng.

A. 3 năm ; B. 3,5 năm; C. 4 năm; D.4,5 năm

Câu 6. Cho đa thức $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m$ (m là tham số). Giá trị m để P(x) chia hết cho nhị thức $2x + 3$ là:

A. -7

B. 8

C. 10

D. 12

Câu 7. Đa thức f(x) khi chia cho $x + 1$ dư 4 khi chia $x^2 + 1$ dư $2x + 3$. Đa thức dư khi chia f(x) cho $(x - 1)(x^2 + 1)$ là:

A. $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

B. $\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$

C. $\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{9}{2}$

D. $\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{9}{2}$

Câu 8. Cho $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Biết f(x) Chia cho $(x+3)$ dư 1; chia cho $(x-4)$ dư 8, chia cho $(x+3)(x-4)$ được thương là $x-3$ và còn dư. Khi đó b,c,d là:

A. $b = 4 ; c = -8; d = 40$. B. $b = -4 ; c = -8; d = 40$. C. $b = -4 ; c = 8; d = 40$. D. $b = 4 ; c = 8; d = 40$.

Câu 9. Cho tam giác ABC (góc B là góc tù), và ba đường trung tuyến $AD = 36$ cm, $BE = 15$ cm, $CF = 39$ cm. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, và K là trung điểm của GC. Diện tích tam giác ABC là:

A. 160cm^2

B. 180cm^2

C. 360cm^2

D. Một kết quả khác

Câu 10. Diện tích tam giác ABC, biết ba đường cao của tam giác ứng với các đỉnh A, B, C có độ dài lần lượt là 60mm, 65mm, 156mm là:

A. 5075mm^2

B. 5570mm^2

C. 5670mm^2

D. 5070mm^2

Câu 11. Hình thang cân ABCD có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Độ dài đường cao của hình thang là:

A. 4cm

B. 5cm

C. $2\sqrt{5}$ cm

D. $3\sqrt{5}$ cm

Câu 12. Cho $\triangle ABC$, D là điểm trên cạnh AC sao cho $\angle BDC = \angle ABC$. Biết $AD = 7$ cm; $DC = 9$ cm. Tỷ số $\frac{BD}{BA}$ là:

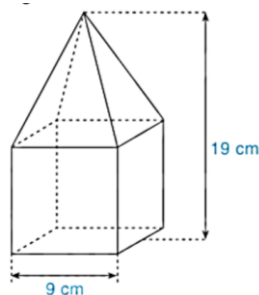
A. $\frac{DB}{BA} = \frac{2}{4}$

B. $\frac{DB}{BA} = \frac{4}{3}$

C. $\frac{DB}{BA} = \frac{1}{4}$

D. $\frac{DB}{BA} = \frac{3}{4}$

Câu 13: Một khối gỗ gồm đế là hình lập phương cạnh 9cm và một hình chóp tứ giác đều (hình bên). Tính thể tích khối gỗ.



- A. 196830cm^3 ; B. 999cm^3 ; C. 972cm^3 ; D. 759cm^3

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo AC lấy điểm E sao cho $AC = 3AE$. Qua E vẽ đường thẳng song song với CD , cắt AD và BC theo thứ tự ở M và N . Chọn câu khẳng định đúng:

- A. $\triangle AME \sim \triangle ADC$ với tỉ số đồng dạng $k_1 = \frac{1}{3}$.
 B. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ với tỉ số đồng dạng $k_2 = 1$.
 C. $\triangle CNE \sim \triangle ADC$ với tỉ số đồng dạng $k_3 = 2$.
 D. $\triangle CNE \sim \triangle ADC$ với tỉ số đồng dạng $k_4 = \frac{3}{2}$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Kẻ $AH \perp BD$ ở H , $CK \perp BD$ tại K . Tứ giác $AHCK$ là hình gì.

- A. Tứ giác $AHCK$ là hình vuông B. Tứ giác $AHCK$ là hình thang cân C. Tứ giác $AHCK$ là hình bình hành D. Tứ giác $AHCK$ là hình thoi

Câu 16. Bạn An đã có một số bài kiểm tra, bạn đó tính rằng : Nếu được thêm ba điểm 10 và ba điểm 9 nữa thì điểm trung bình của tất cả các bài sẽ là 8. Nếu được thêm một điểm 9 và hai điểm 10 nữa thì điểm trung bình của tất cả các bài là 7,5. Hỏi bạn An đã có tất cả mấy bài kiểm tra ?

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 8

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm):

a. Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 3.

b. Tìm số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 2 (3,0 điểm)

a. Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x^3+1)$ biết $P(x)$ chia cho $(x-1)$ thì dư 1, $P(x)$ chia cho (x^3+1) thì dư x^2+x+1 .

b. Cho $a, b, c \neq 0$ và $a + b + c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau. Từ đó suy ra rằng :

$$\frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}}.$$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O . M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$

a. Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân.

b. Chứng minh $ME \parallel BN$

c. Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2$, Chứng minh: $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} \leq \frac{1}{2}(x+y+z)$.

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	C	D	C	D	A	B	C	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	D	B	A	C	C				

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 - xy} + \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 - xy} \right) : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$

Rút gọn P với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq y$ $P = \frac{y - x}{xy}$

Câu 2. Tính giá trị của biểu thức:

$$a) A = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.99} + \dots + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}}.$$

$$b) B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \dots + \frac{1}{99}}.$$

Hướng dẫn:

a) Biến đổi số bị chia: $(1 + \frac{1}{99}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{97}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{95}) + \dots + (\frac{1}{49} + \frac{1}{51}) = \frac{100}{1.99} + \frac{100}{3.97} + \frac{100}{5.95} + \dots + \frac{100}{49.51}$

Biểu thức này gấp 50 lần số chia. Vậy $A = 50$.

$$\frac{100-1}{1} + \frac{100-2}{2} + \frac{100-3}{3} + \dots + \frac{100-99}{99} =$$

$$b) \text{ Biến đổi số chia: } = \left(\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{99}{99} \right) =$$

$$= 100 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) - 99 = 1 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right)$$

Biểu thức này bằng 100 lần số bị chia. Vậy $B = \frac{1}{100}$.

Câu 3. Cho a, b thỏa mãn : $a^3 + 2b^2 - 4b + 3 = 0$ và $a^2 + a^2b^2 - 2b = 0$.

Tính: $a^2 + b^2$.

$$a^3 + 2b^2 - 4b + 3 = 0 \Rightarrow a^3 = -2(b-1)^2 - 1 \leq -1, \text{ suy ra } a \leq -1. \quad (1)$$

$$a^2 + a^2b^2 - 2b = 0 \Rightarrow a^2(1+b^2) = 2b \Rightarrow a^2 = \frac{2b}{1+b^2} \leq 1$$

$$(\text{Vì } 2b \leq 1+b^2)$$

$$\Rightarrow a \geq -1$$

$$(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = -1$. Do đó $2b = 1 + b^2 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1$.

Vậy $a^2 + b^2 = 2$.

Câu 4. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{2} < \frac{x}{6} - x$ là.

Bài giải

$$\begin{aligned}\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{2} < \frac{x}{6} - x &\Leftrightarrow 2.2x - 3(x-1) < x - 6x \Leftrightarrow 4x - 3x + 3 < -5x \Leftrightarrow x + 5x < -3 \\ \Leftrightarrow 6x < -3 &\Leftrightarrow x < \frac{-3}{6} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} : \end{aligned}$$

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $3x - 2 + |4x| = 0$

Bài giải

a) Với $x < 0 \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow |4x| = -4x \Rightarrow 3x - 2 + |4x| = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 - 4x = 0 \Leftrightarrow -2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ giá trị này thỏa mãn điều kiện $x < 0$ nên $x = -2$ là nghiệm của phương trình.

Với $x \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow |4x| = 4x \Rightarrow 3x - 2 + |4x| = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 7x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ giá trị này thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ nên $x = \frac{2}{7}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy $S = \left\{ -2, \frac{2}{7} \right\}.$

Câu 6. Cho đa thức $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m$ (m là tham số)

a/ Tìm m để $P(x)$ chia hết cho nhị thức $2x + 3$.

GIẢI: a/ Đặt $Q(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x$ ta có $P(x)$ chia hết cho nhị thức $2x + 3$ khi và chỉ khi $Q(-3/2) + m = P(-3/2) = 0 \Rightarrow m = -Q(-3/2)$

Tính trên máy ta tìm được $Q(-3/2) = -12$ vậy $m = 12$.

Câu 7. Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x + 1$ dư 4 khi chia $x^2 + 1$ dư $2x + 3$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x + 1)(x^2 + 1)$

Giải:

Theo định lý Bơ du ta có $f(-1) = 4$ (1)

Do bậc của đa thức chia $(x + 1)(x^2 + 1)$ là 3

Nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x) &= (x + 1)(x^2 + 1). q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= [(x + 1). q(x) + a](x^2 + 1) + bx + c - a \end{aligned} \quad (2)$$

mà $f(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $2x + 3$ (3)

Từ (1), (2), (3). Ta có $b = 2$ (4); $c - a = 3$ (5)

$$a - b + c = 4 \quad (6)$$

Giải hệ phương trình (4); (5); (6). Ta được đa thức cần tìm:

$$\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$$

Câu 8. Cho $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Biết $f(x)$ Chia cho $(x + 3)$ dư 1; chia cho $(x - 4)$ dư 8, chia cho $(x + 3)(x - 4)$ được thương là $x - 3$ và còn dư. Hãy xác định b, c, d (Trình bày lời giải và viết kết quả).

Giải

$f(x) = (x + 3)(x - 4)(x - 3) + mx + n$ (1) (Dư là $mx + n$) ta có:

$$f(-3) = m(-3) + n = 1$$

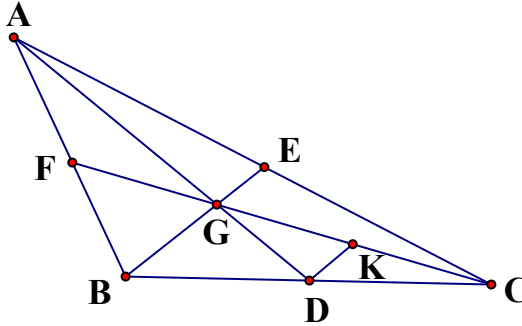
$$f(4) = m.4 + n = 8 \text{ giải hệ phương trình tìm được } m = 1; n = 4.$$

Thay vào (1) Từ đó suy ra : $b = -4$; $c = -8$; $d = 40$.

Câu 9. Cho tam giác ABC (góc B là góc tù), và ba đường trung tuyến AD = 36 cm, BE = 15 cm, CF = 39 cm. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, và K là trung điểm của GC.

- a) Chứng minh: $AD \perp DK$
b) Tính diện tích tam giác ABC.

Hình vẽ:



a) Chứng minh $AD \perp DK$:

$$\text{Ta có } DG = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \times 36 = 12(\text{cm}); BG = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \times 15 = 10(\text{cm});$$

$$GC = \frac{2}{3}CF = \frac{2}{3} \times 39 = 26(\text{cm})$$

DK là đường trung bình tam giác BGC nên: $DK = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$ và

$$GK = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2} \times 26 = 13(\text{cm})$$

Tam giác DGK có $DK^2 + DG^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 = GK^2$
 $\Rightarrow \triangle DGK$ vuông tại D (định lý Pi ta go đảo) , hay $AD \perp DK$

b) Tính diện tích tam giác ABC:

$BG \parallel DK, AD \perp DK \Rightarrow AD \perp BG$

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}; \quad S_{ABD} = \frac{1}{2}BG \times AD = \frac{10 \times 36}{2} = 180(\text{cm}^2).$$

$$S_{ABD} = S_{ADC} \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ABD} = 2 \times 180 = 360(\text{cm}^2)$$

Câu 10. Diện tích tam giác ABC, biết ba đường cao của tam giác ứng với các đỉnh A, B, C có độ dài lần lượt là 60mm, 65mm, 156mm.

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác tương ứng với ba đường cao 60mm, 65mm, 156mm là a, b, c.

Trong cùng một tam giác cạnh và chiều cao tương ứng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có:

$$60.a = 65.b = 156.c = k \quad (k > 0) \quad \text{Ta có } a = \frac{k}{60}; b = \frac{k}{65}; c = \frac{k}{156}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } a^2 = b^2 + c^2$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A, nên $b = h_b = 65\text{mm}, c = h_c = 156\text{mm}$

$$\text{Từ đó ta có: } S_{ABC} = 5070\text{mm}^2.$$

Câu 11. Hình thang cân ABCD có đáy lớn CD = 10 cm , đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên . Độ dài đường cao của hình thang là: $2\sqrt{5}$ cm (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 121)

Câu 12. Cho $\triangle ABC$, D là điểm trên cạnh AC sao cho $BDC = ABC$.

Biết $AD = 7\text{cm}$; $DC = 9\text{cm}$. Tính tỷ số $\frac{BD}{BA}$

Giải:

$\triangle CAB$ và $\triangle CDB$ có C chung ; $\angle ABC = \angle BDC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle CDB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CB}$ do đó ta có :

$$CB^2 = CA \cdot CD$$

Theo gt $CD = 9\text{cm}$; $DA = 7\text{cm}$ nên $CA = CD + DA = 9 + 7 = 16$ (cm)

Do đó $CB^2 = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow CB = 12$ (cm)

Mặt khác lại có : $\frac{DB}{BA} = \frac{3}{4}$

Câu 13. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD

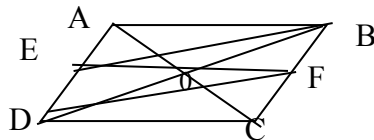
a) Chứng minh rằng: $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b) Đường thẳng qua O vuông góc với AB và CD theo thứ tự tại H và K .

$$\text{CMR: } \frac{OA}{OK} = \frac{AB}{CD}$$

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD , F là trung điểm của BC .

a) C/m $BE = DF$ và $\angle ABE = \angle CDF$ Tứ giác $EBFD$ là hình bình hành.



Cm:

a) Xét $\triangle AEB$ và $\triangle CFD$ có:

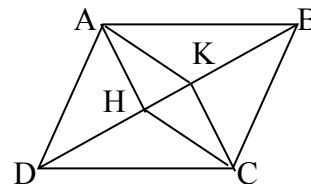
$\angle A = \angle C$ (2 góc đối của hình bình hành $ABCD$)

$AB = CD$ (2 cạnh đối hình bình hành $ABCD$); $AE = CF$ (cùng $= \frac{1}{2} AD$ hay AC).

$\Rightarrow \triangle AEB \cong \triangle CFD \Rightarrow BE = DF$; $\angle ABE = \angle CDF$

b. Tứ giác $EBFD$ có $BE \parallel DF$ và $BE = DF$ nên tứ giác $EBFD$ là hình bình hành

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Kẻ $AH \perp BD$ ở H , $CK \perp BD$ tại K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.



C/m: Ta có:

$AH \perp BD$, $CK \perp BD$ (gt) $\Rightarrow AH \parallel CK$ (1)

$ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC$ và $AD \parallel BC \Rightarrow \angle ADB = \angle CBD$ (so le trong)

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle CKB$ có: $AD = BC$,

$\angle ADB = \angle CBD \Rightarrow \triangle AHD \cong \triangle CKB$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AH = CK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: Tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Câu 16. Bạn An đã có một số bài kiểm tra, bạn đó tính rằng : Nếu được thêm ba điểm 10 và ba điểm 9 nữa thì điểm trung bình của tất cả các bài sẽ là 8. Nếu được thêm một điểm 9 và hai điểm 10 nữa thì điểm trung bình của tất cả các bài là 7,5. Hỏi bạn An đã có tất cả mấy bài kiểm tra ?

Bài giải :

Nếu được thêm ba điểm 10 và ba điểm 9 nữa thì số điểm được thêm là :

$$10 \times 3 + 9 \times 3 = 57 \text{ (điểm)}$$

Để được điểm trung bình của tất cả các bài là 8 thì số điểm phải bù thêm vào cho các bài đã kiểm tra là : $57 - 8 \times (3 + 3) = 9$ (điểm)

Nếu được thêm một điểm 9 và hai điểm 10 nữa thì số điểm được thêm là :

$$9 \times 1 + 10 \times 2 = 28 \text{ (điểm)}$$

Để được điểm trung bình của tất cả các bài là 7,5 thì số điểm phải bù thêm vào cho các bài đã kiểm tra là : $29 - 7,5 \times (1 + 2) = 6,5$ (điểm)

Như vậy khi tăng điểm trung bình của tất cả các bài từ 7,5 lên 8 thì tổng số điểm của các bài đã kiểm tra sẽ tăng lên là : $9 - 6,5 = 2,5$ (điểm)

Hiệu hai điểm trung bình là : $8 - 7,5 = 0,5$ (điểm)

Vậy số bài đã kiểm tra của bạn An là : $2,5 : 0,5 = 5$ (bài)

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,0 điểm): a.Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 3.

b.Tìm số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có a+b chia hết cho 3 .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = \\ &= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] \end{aligned}$$

Vì a+b chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3 ;

Do vậy $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

$$\text{b. } n^5 + 1 : n^3 + 1 \Leftrightarrow n^5 + n^2 - n^2 + 1 : n^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \Leftrightarrow : n^3 + 1 \Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n+1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1 \Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1$$

$$\text{Hay } n^2 - n : n^2 - n + 1 \Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : n^2 - n + 1 \Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$+ n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow n = 0, n = 1 \text{ thử lại thấy t/m đề bài}$$

$$+ n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 2 (4,0 điểm): a. Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x^3+1)$ biết $P(x)$ chia cho $(x-1)$ thì dư 1, $P(x)$ chia cho (x^3+1) thì dư x^2+x+1 .

Lời giải

Đặt $P(x) = (x-1)(x^3+1).Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$ với mọi x

$$\text{Vì } ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x^3+1) + bx^2 + cx + d - a$$

Từ $P(x)$ chia cho x^3+1 dư x^2+x+1

$$\text{suy ra } bx^2 + cx + d - a = x^2 + x + 1. \text{ Do đó } b=1; c=1; d-a=1$$

Lại có $P(x)$ chia cho $x-1$ dư 1

Nên $P(1)=1$ hay $a+b+c+d=1 \Rightarrow a+d=-1 \Rightarrow d=0; a=-1$

Vậy đa thức dư là: $-x^3+x^2+x$.

b. Cho $a, b, c \neq 0$ và $a+b+c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau. Từ đó suy ra rằng :

$$\frac{1}{a^{2017}} + \frac{1}{b^{2017}} + \frac{1}{c^{2017}} = \frac{1}{a^{2017} + b^{2017} + c^{2017}}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0 \Leftrightarrow (a+b) \cdot \frac{c(a+b+c) + ab}{abc(a+b+c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \frac{1}{a^{2017}} + \frac{1}{b^{2017}} + \frac{1}{c^{2017}} = \frac{1}{a^{2017}} + \frac{1}{(-c)^{2017}} + \frac{1}{c^{2017}} = \frac{1}{a^{2017}}$$

$$\frac{1}{a^{2017} + b^{2017} + c^{2017}} = \frac{1}{a^{2017} + (-c)^{2017} + c^{2017}} = \frac{1}{a^{2017}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{2017}} + \frac{1}{b^{2017}} + \frac{1}{c^{2017}} = \frac{1}{a^{2017} + b^{2017} + c^{2017}}.$$

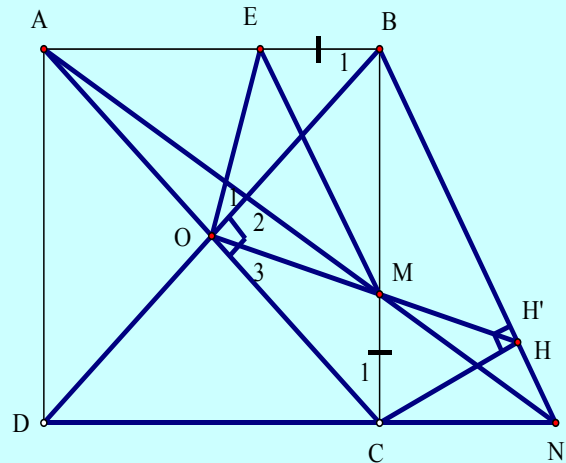
Câu 3 (4,5 điểm):

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O . M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$

a. Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân.

b. Chứng minh $ME \parallel BN$

c. Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.



Lời giải

Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $OB = OC$

Và $B_1 = C_1 = 45^\circ$; $BE = CM$ (gt) $\Rightarrow \triangle OEB = \triangle OMC$ (cgc) $\Rightarrow OE = OM$; $O_1 = O_3$

Lại có $O_2 + O_3 = \angle BOC = 90^\circ$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$O_2 + O_1 = \angle EOM = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

Từ (gt) tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$; $AB \parallel CD$

+ $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (Theo ĐL Ta-lét) (*)

Mà $BE = CM$ (gt) và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*)

Ta có $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$ (theo định lý đảo của định lý Ta-lét)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \angle OME = \angle OH'E$ (cặp góc so le trong)

Mà $\angle OME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O

$\Rightarrow \angle MH'B = 45^\circ = C_1 \Rightarrow \triangle OMC \cong \triangle BMH'$ (gg) $\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}$, kết hợp $\angle OMB = \angle CMH'$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle OMB \cong \triangle CMH'$ (cgc) $\Rightarrow \angle OBM = \angle MH'C = 45^\circ$

Vậy $\angle BH'C = \angle BH'M + \angle MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN$ ($H \in BN$) $\Rightarrow H \equiv H' \perp$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm).

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2$, Chứng minh: $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} \leq \frac{1}{2}(x + y + z)$.

Bài giải:

Với $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2$, nên ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} \leq \frac{1}{2}(x + y + z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y + z - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y-1} - 2\sqrt{z-2} \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 1 - 2\sqrt{y-1} + 1 + z - 2 - 2\sqrt{z-2} + 1 \geq 0$
 $(\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 1)^2 + (\sqrt{z-2} - 1)^2 \geq 0$ vì $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0, (\sqrt{y-1} - 1)^2 \geq 0, (\sqrt{z-2} - 1)^2 \geq 0$.

---Hết---