

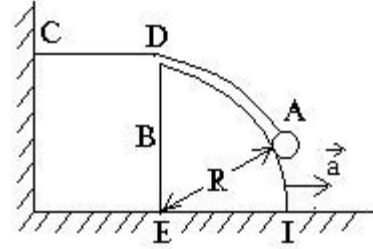
A. Cơ học

1. Động học

Bài 1: Cho cơ hệ như hình vẽ. B chuyển động sang phải với gia tốc a , còn vật nhỏ A được nối với điểm C bằng một sợi dây không dẫn được nâng lên theo đường dốc chính của một mặt trụ của vật B. Mặt này có bán kính R .

Giả sử tại thời điểm ban đầu vật A nằm trên sàn và đang đứng yên, sợi dây luôn căng.

Hãy tính vận tốc trung bình của vật A trong quá trình A đi từ sàn lên đến điểm cao nhất của trụ B (điểm D).



Giải:

Khi A đi từ sàn lên đến điểm cao nhất của trụ thì độ dời của nó sẽ là $|IA|$:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \frac{\frac{a}{g}}{\sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad (6) \quad (\alpha = \frac{\pi}{4})$$

$$|\vec{IA}| = IA = \sqrt{\left(R \frac{\pi}{2}\right)^2 + (R\sqrt{2})^2} - 2 \cdot R \frac{\pi}{2} \cdot R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$IA = \frac{R}{2} \sqrt{\pi^2 - 4\pi + 8}$$

Ta có thời gian để trụ dịch chuyển từ E đến F là:

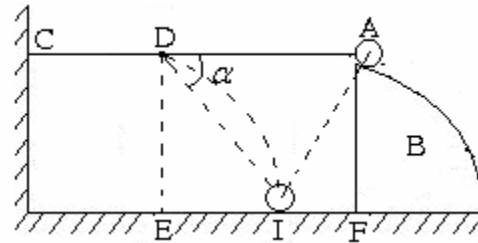
$$EF = \frac{1}{2} at^2$$

Thời gian để trụ đi từ E đến F cũng chính là thời gian chuyển dời của vật nhỏ khi đi từ I đến A :
Suy ra:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot EF}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot AD}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} R}{a}} = \sqrt{\frac{\pi R}{a}}$$

Vận tốc trung bình của vật nhỏ A: $\bar{v} = \frac{|IA|}{t}$

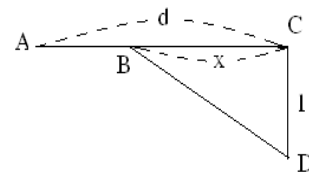
$$\bar{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\pi^2 - 4\pi + 8)aR}{\pi}}$$



Bài 2: Một chiếc ca nô xuất phát từ điểm A trên đường cái, ô tô này cần đến điểm D (trên đồng cỏ) trong thời gian ngắn nhất. Biết $AC = d$; $CD = l$.

Vận tốc ô tô chạy trên đường cái (v_1) lớn hơn vận tốc ô tô trên đồng cỏ (v_2) n lần.

Hỏi ô tô phải rời đường cái tại một điểm B cách C một đoạn x là bao nhiêu?



Giải:

$$t_1 = \frac{d - x}{v_1}$$

Thời gian ô tô

chạy trên đồng cỏ từ B đến D: $t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + l^2}}{v_2}$.

Tổng thời gian chạy từ A đến D của ô tô : $t = t_1 + t_2 = \frac{d - x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2 + l^2}}{v_2}$.

$$= \frac{d - x}{v_1} + n \cdot \frac{\sqrt{x^2 + l^2}}{v_1}.$$

Đặt: $f(x) = \frac{d - x + n\sqrt{x^2 + l^2}}{v_1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{nx}{v_1 \sqrt{x^2 + l^2}} = \frac{nx - \sqrt{x^2 + l^2}}{v_1 \sqrt{x^2 + l^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Bảng biến thiên:

		$\frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}$	
x	0	$\frac{d+1}{v_1}$	d
		- 0 +	

Vậy ô tô phải rời đường cái tại B cách C một đoạn $x = \frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}}$, lúc đó thời gian ngắn nhất cần thiết của ô

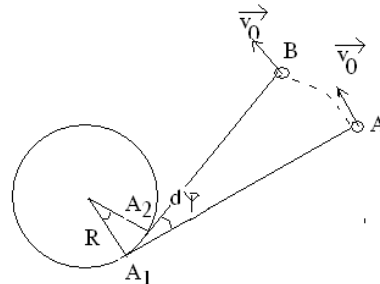
tô sẽ là: $t_{\min} = \frac{d + l\sqrt{n^2 - 1}}{v_1}$.

Bài 3: Trên mặt phẳng nằm ngang có một cột trụ bán kính R thẳng đứng, người ta dùng một sợi dây chỉ mảnh không giãn, khối lượng không đáng kể để nối một vật nhỏ với một điểm trên vành trụ, điểm này sát mặt phẳng ngang.

Ban đầu vật nhỏ nằm yên trên mặt phẳng và dây ở tư thế căng, lúc này chiều dài dây là L . Truyền cho vật vận tốc v_0 hướng vuông góc với dây và vật chuyển động trên mặt phẳng ngang cuốn dây vào trụ.

Hỏi sau bao lâu dây cuốn hết trụ? Giả thiết trong khi chuyển động dây luôn nằm ngang.

Bỏ qua ma sát và bề dày của dây.



Giải:

Ta nhận thấy ngay không có lực nào tác dụng vào vật sinh công, do vậy động năng của vật được bảo toàn do vậy nó có vận tốc không đổi v_0 .

Tại một thời điểm nào đó dây có chiều dài l , xét một thời gian vô cùng bé dt vật đi được cung AB :

$$\overline{AB} = l_0 = v_0 dt.$$

Do $dl = R\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dl}{R}$ thế vào phương trình trên ta được:

$$l \frac{dl}{R} = v_0 dt$$

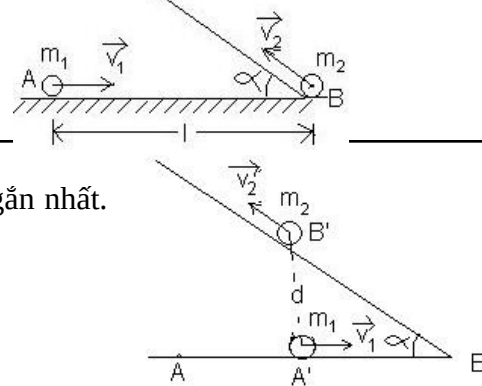
Lấy tích phân hai vế: $\int_0^L \frac{dl}{R} = \int_0^t v_0 dt \Leftrightarrow \frac{1}{R} \cdot \frac{l^2}{2} \Big|_0^L = v_0 t \Big|_0^t$

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{2R} = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{L^2}{2v_0 R}.$$

Vậy thời gian để dây cuốn hết trụ sẽ là: $t = \frac{L^2}{2v_0 R}.$

Bài 4: Có hai vật m_1 và m_2 chuyển động thẳng đều với vận tốc lần lượt là v_1 và v_2 . Vật m_2 xuất phát từ B.

Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa chúng trong quá trình chuyển động và thời gian đạt được khoảng cách đó? Biết khoảng cách ban đầu giữa chúng là l và góc giữa hai đường thẳng là α .



Giải:

Giả sử sau thời gian t khoảng cách giữa hai vật là ngắn nhất. Khoảng cách đó sẽ là:

$$d = \sqrt{A'B^2 + BB'^2 - 2A'B \cdot BB' \cdot \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(l - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 - 2(l - v_1 t)v_2 t \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{(v_1^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2)t^2 - 2l(v_1 + v_2 \cos \alpha)t + l^2}$$

Ta xem biểu thức trong căn là một tam thức bậc hai ẩn số t , với $\Delta = -4l^2 v_2^2 \sin^2 \alpha$, d sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi tam thức đó nhận giá trị nhỏ nhất,

hay $d = d_{\min} \Leftrightarrow t = \frac{l(v_1 + v_2 \cos \alpha)}{v_1^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2}$

Và khoảng cách bé nhất giữa chúng lúc đó sẽ là: $d_{\min} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{lv_2 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2}}$$

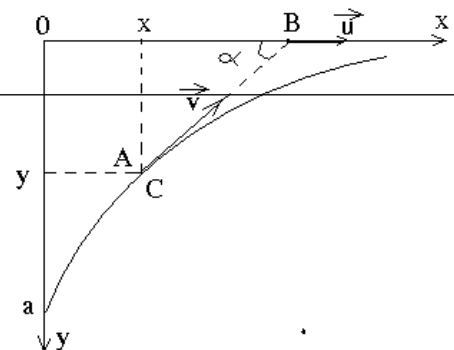
Bài 5: Có hai tàu A và B cách nhau một khoảng a đồng thời tàu A và B chuyển động với vận tốc không đổi lần lượt là v và u ($v > u$). Tàu B chuyển động trên một đường thẳng (đường thẳng này vuông góc với đoạn thẳng nối các vị trí ban đầu của hai tàu, còn tàu A luôn hướng về tàu B.

Hỏi sau bao lâu tàu A đuổi kịp tàu B?

Giải:

Ta gắn hệ trục Oxy trùng với mặt phẳng nước và trục Ox phương chiều với chuyển động của tàu B, còn tàu A nằm phần dương của trục Oy ở vị trí ban đầu có tọa độ là $(0, a)$.

Tàu A chuyển động với vận tốc v luôn hướng về phía tàu B vận tốc gồm hai thành phần:



cùng
trên

B với

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -v \sin \alpha \end{cases}$$

Lấy vế chia vế hai phương trình trên và ta rút ra:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{1}{\tan \alpha} \frac{dy}{dt} = - \cot \alpha \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

Ta lại có: $\tan \alpha = \frac{y}{ut - x} \Rightarrow ut - x = y \cot \alpha \quad (2)$

Đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$$u - \frac{dx}{dt} = \cot \alpha \frac{dy}{dt} - \frac{y}{\sin^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad (3)$$

Thay (1) vào (3) ta suy ra:

$$u = - \frac{y}{\sin^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad (4)$$

Mặt khác: $\frac{dy}{dt} = -v \sin \alpha \Rightarrow dt = - \frac{dy}{v \sin \alpha} \quad (5)$

Thay dt từ (5) vào (4): $u = v \frac{y}{dy} \frac{d\alpha}{\sin \alpha}$

hay $\frac{u}{v} \frac{dy}{y} = \frac{d\alpha}{\sin \alpha}$

Lấy tích phân 2 vế:

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} \int_a^y \frac{dy}{y} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{u}{v} \ln \frac{y}{a} &= \ln \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

Suy ra $\tan \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{u}{v}}$

Mặt khác ta lại có:

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{-1} + \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{u}{v}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{u}{v}}}$$

và $dt = - \frac{dy}{v \sin \alpha}$

nên $dt = - \frac{a}{2v} \left[\left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{u}{v}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{u}{v}} \right] d \left(\frac{y}{a} \right) \quad (*)$

Lấy tích phân 2 vế phương trình (*):

$$\int_0^t dt = - \frac{a}{2v} \int_a^0 \left[\left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{u}{v}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{u}{v}} \right] d \left(\frac{y}{a} \right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{a}{2v} \left(\frac{1}{1 - \frac{u}{v}} + \frac{1}{1 + \frac{u}{v}} \right)$$

hay

$$t = \frac{av}{v^2 - u^2}$$

Vậy sau thời gian $\frac{av}{v^2 - u^2}$ tàu A sẽ đuổi kịp tàu B.

Bài toán đuổi bắt có nhiều dạng khác nhau, phương pháp đa năng để giải các loại bài toán này chính là phương pháp “**vi phân**”. Tuy nhiên còn có những phương pháp đặc biệt để giải chúng, các bạn có thể tham khảo cuốn “**Lãng mạn toán học**” của giáo sư Hoàng Quý có nêu ra một trong những phương pháp đặc biệt đó để giải bài toán sau:

Có hai tàu A và B cách nhau một khoảng a đồng thời tàu A và B chuyển động cùng vận tốc. Tàu B chuyển động trên một đường thẳng (đường thẳng này vuông góc với đoạn thẳng nối các vị trí ban đầu của hai tàu), còn tàu A luôn hướng về tàu B.

Hỏi sau một thời gian đủ lâu thì hai tàu chuyển động trên cùng một đường thẳng và khoảng cách giữa chúng không đổi. Tính khoảng cách này ?

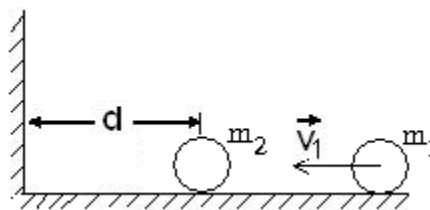
Đáp số: $\frac{a}{2}$.

Bài 6: Vật m_2 đang đứng yên trên mặt sàn nằm ngang nhẵn cách bờ tường một khoảng d . Vật m_1 chuyển động tới và chạm hoàn toàn đàn hồi với vật m_2 ($m_1 > m_2$), vật m_2 lại va chạm đàn hồi

với bờ tường và gặp m_1 lần 2. Va chạm

lần 2 xảy ra cách bờ tường một khoảng

là bao nhiêu?



Tìm điều kiện để điểm va chạm lần 2 cách điểm va chạm lần 1 một khoảng là $d/2$?

Giải :

Chọn trục toạ độ như hình vẽ.

Gọi v_1, v_1' lần lượt là vận tốc của vật 1 trước và sau khi va chạm.

Gọi v_2 và v_2' là vận tốc của vật 2 trước và sau khi va chạm (các vận tốc v_1, v_2, v_1', v_2' mang giá trị đại số).

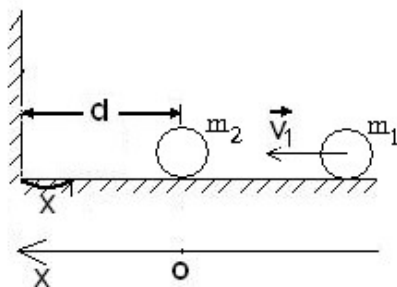
Sau va chạm :

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad (\text{do } v_2 = 0)$$

Nhận thấy v_1', v_2' đều dương, chứng tỏ sau va chạm chúng chuyển động cùng chiều ox .

Gọi điểm va chạm lần 2 cách tường một đoạn x , thời gian giữa 2 lần va chạm là :



$$\Delta t = \frac{d - x}{v_1'} = \frac{d + x}{v_2'} \quad (1)$$

(do sau va chạm vào tường của m_2 thì nó vẫn có vận tốc như cũ nhưng đã đổi hướng $v_2'' = -v_1'$).

Thế v_1' và v_2' từ trên vào (1) ta suy ra :

$$x = \frac{m_1 + m_2}{3m_1 - m_2} d$$

Để va chạm lần 2 cách lần 1 một đoạn $\frac{d}{2}$ thì: $x = d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$

$$\text{hay } \frac{m_1 + m_2}{3m_1 - m_2} d = \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 = 3m_2}.$$

Bài 7: Một hạt chuyển động theo chiều dương của trục ox với vận tốc sao cho $v = a\sqrt{x}$ (a là hằng số dương). Biết lúc $t = 0$ hạt ở vị trí $x=0$.

Hãy xác định :

- Vận tốc và gia tốc của hạt theo thời gian.
- Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ vị trí $x = 0$ đến vị trí x .

Giải:

$$\text{a. Theo đề bài : } v = a\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = a\sqrt{x}$$

$$\text{hay } \frac{dx}{\sqrt{x}} = a dt$$

$$\text{Nguyên hàm hai vế : } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int a dt \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = at + c$$

$$\text{Do } t=0 \text{ thì } x=0 \Rightarrow c=0$$

$$\text{Do vậy } 2\sqrt{x} = at \Rightarrow x = \frac{a^2}{4} t^2$$

$$\text{Vận tốc của vật } v = \frac{dx}{dt} = x'$$

$$\boxed{v = \frac{a^2}{2} t}$$

Gia tốc của vật :

$$w = \frac{d^2 x}{dt^2} = x''$$

$$w = \frac{a^2}{2}$$

b. Vận tốc trung bình $\bar{v} = \frac{x}{t} = \frac{a^2}{4} t$

$$\bar{v} = \frac{a\sqrt{x}}{2}$$

Bài 8: Ném một viên đá từ điểm A trên mặt phẳng nghiêng với vận tốc v_0 hợp với mặt phẳng ngang một góc $\beta = 60^\circ$, biết $\alpha = 30^\circ$. Bỏ qua sức cản của không khí.

a. Tính khoảng cách AB từ điểm ném đến điểm viên đá rơi.

b. Tìm góc φ hợp bởi phương véc tơ vận tốc và phương ngang ngay sau viên đá chạm mặt phẳng nghiêng và bán kính quỹ đạo của viên đá tại B.

Giải:

a. Chọn hệ trục oxy gắn o vào điểm A và trục ox song song với phương ngang Trong quá trình chuyển động lực tác dụng duy nhất là trọng lực P .

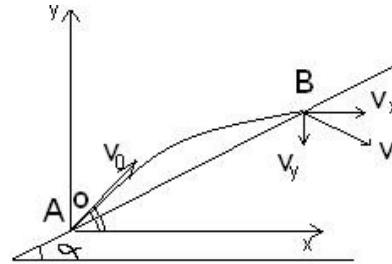
Theo định luật II Newton:

$$P = ma$$

Chiếu lên:

$$0x: 0 = ma_x \Rightarrow a_x = 0$$

$$0y: -P = ma_y \quad a_y = -g$$



Phương trình chuyển động của vật theo hai trục ox và oy:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \beta \cdot t & (1) \\ y = v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 & (2) \end{cases}$$

Khi viên đá rơi xuống mặt phẳng nghiêng:

$$\begin{cases} x = l \cos \alpha & (3) \\ y = l \sin \alpha & (4) \end{cases}$$

T hế (3) vào (1) ta rút ra t thế vào (2) và đồng thời thế (4) vào (2) ta rút ra :

$$l = \frac{-2v_0^2 \cos \beta \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha)}{g \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$l = \frac{-2v_0^2 \cos \beta \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow l = \frac{2v_0^2}{3g}$$

b. Tại B vận tốc của vật theo phương ox là:

$$v_x = v_0 \cos \beta = \frac{v_0}{2}$$

Khi vật chạm mặt phẳng nghiêng :

$$x = l \cos \alpha = \frac{2v_0^2}{3g} \cos \alpha$$

$$\text{hay } v_0 \cos \beta \cdot t = \frac{2v_0^2}{3g} \cos \alpha ;$$

Suy ra thời gian chuyển động trên không của viên đá:

$$t = \frac{2v_0 \cos \alpha}{3g \cos \beta} = \frac{2v_0}{g\sqrt{3}}$$

Vận tốc theo phương oy tại B:

$$v_y = v_0 \sin \beta - gt$$

$$v_y = v_0 \sin \beta - \frac{2v_0}{\sqrt{3}} = -\frac{v_0}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{\left| -\frac{v_0}{2\sqrt{3}} \right|}{\left| \frac{v_0}{2} \right|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

do $v_y = -\frac{v_0}{2\sqrt{3}} < 0$ nên lúc chạm mặt phẳng nghiêng v hướng xuống.

Lực hướng tâm tại B:

$$F_{ht} = mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{v^2}{g \cos \varphi}$$

$$\text{Với: } v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{12} = \frac{v_0^2}{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2}{3\sqrt{3} \cdot g}$$

Bài 9: Một người đứng ở sân ga nhìn ngang đầu toa thứ nhất của một đoàn tàu bắt đầu chuyển động nhanh dần đều. Toa thứ nhất vượt qua người ấy sau thời gian t_1 .

Hỏi toa thứ n đi qua người ấy trong thời gian bao lâu?

Biết các toa có cùng độ dài là S, bỏ qua khoảng nối các toa.

Giải:

Toa thứ nhất vượt qua người ấy sau thời gian t_1 :

$$s = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a}}$$

n toa đầu tiên vượt qua người ấy mất thời gian t_n :

$$ns = \frac{at_n^2}{2} \Rightarrow t_n = \sqrt{\frac{2nS}{a}} ;$$

$n - 1$ toa đầu tiên vượt qua người ấy mất thời gian t_{n-1} :

$$(n - 1)s = \frac{at_{n-1}^2}{2} \Rightarrow t_{n-1} = \sqrt{\frac{2(n - 1)S}{a}}$$

Toa thứ n vượt qua người ấy trong thời gian Δt :

$$\Delta t = t_n - t_{n-1} = \sqrt{\frac{2S}{a}}(\sqrt{n} - \sqrt{n - 1}).$$

$$\Delta t = (\sqrt{n} - \sqrt{n - 1})t_1$$

Bài 10: Một chất điểm chuyển động từ A đến B cách A một đoạn s . Cứ chuyển động được 3 giây thì chất điểm lại nghỉ 1 giây. Trong 3 giây đầu chất điểm chuyển động với vận tốc $v_0 = 5 \frac{m}{s}$. Trong các khoảng 3 giây tiếp theo chất điểm chuyển động với vận tốc $2v_0, 3v_0, \dots, nv_0$.

Tìm vận tốc trung bình của chất điểm trên quãng đường AB trong các trường hợp:

a. $s = 315 \text{ m}$;

b. $s = 325 \text{ m}$.

Giải:

Đặt: $t_1 = 3(s)$

Gọi quãng đường mà chất điểm đi được sau nt_1 giây là s :

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

Trong đó s_1 là quãng đường đi được của chất điểm trong 3 giây đầu tiên. $s_2, s_3, \dots, s_n$ là các quãng đường mà chất điểm đi được trong các khoảng 3 giây kế tiếp.

Suy ra:

$$S = v_0 t_1 + 2v_0 t_1 + \dots + nv_0 t_1 = v_0 t_1 (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} v_0 t_1 = 7,5n(n+1) \text{ (m)}$$

$$\text{a. Khi } s = 315 \text{ m} \Rightarrow 7,5n(n+1) = 315 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -7 \end{cases} \text{ (loại giá trị } n = -7)$$

Thời gian chuyển động:

$$t = nt_1 + n - 1 = 23(s)$$

$$\text{Vận tốc trung bình: } \bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{315}{23}$$

$$\bar{v} = 13,7(m/s)$$

b. Khi $s = 325 \text{ m}$:

Thời gian đi 315 mét đầu là 23 giây

Thời gian đi 10 mét cuối là:

$$\Delta t = \frac{10}{v_{n+1}} = \frac{10}{7.5} = 0.29(s)$$

Vận tốc trung bình:

$$\bar{v} = \frac{325}{23 + 0,29 + 1}$$

$$\bar{v} = 13,38(m/s)$$

Bài 11: Hai vật chuyển động với vận tốc không đổi trên hai đường thẳng vuông góc với nhau cho $v_1 = 30 \text{ m/s}$, $v_2 = 20 \text{ m/s}$. Tại thời điểm khoảng cách giữa hai vật nhỏ nhất thì vật một giao điểm của quỹ đạo đoạn $S_1 = 500 \text{ m}$, hỏi lúc đó vật hai cách giao điểm trên một đoạn S_2 là bao nhiêu?

Giải:

Gọi khoảng cách trên đầu của vật (1) và (2) tới vị trí giao nhau của hai quỹ đạo là d_1 và d_2 . Sau thời gian t chuyển động khoảng cách giữa chúng là:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(d_1 - v_1 t)^2 + (d_2 - v_2 t)^2} \\ &= \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(v_1 d_1 + v_2 d_2)t + d_1^2 + d_2^2} \\ d &= d_{\min} \Rightarrow t = \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

Khi đạt được khoảng cách ngắn nhất giữa hai vật thì :

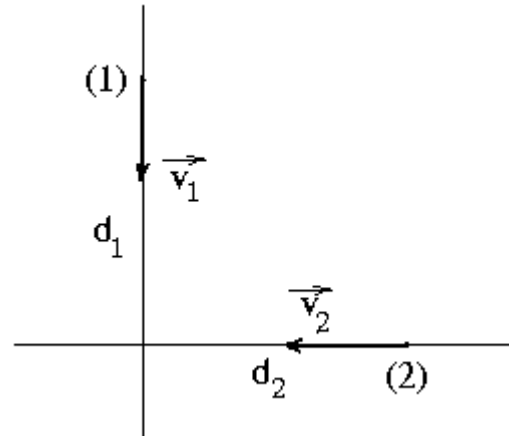
$$S_1 = d_1 - v_1 \cdot \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2(v_2 d_1 - v_1 d_2)}{v_1^2 + v_2^2}$$

Lúc đó: $S_2 = d_2 - v_2 t$

$$S_2 = d_2 - v_2 \cdot \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1(v_1 d_2 - v_2 d_1)}{v_1^2 + v_2^2}$$

$$S_2 = - \frac{v_1 \cdot S_1}{v_2} = - \frac{30 \cdot 500}{20} = -750(m)$$

Vậy lúc hai vật có khoảng cách ngắn nhất thì vật thứ hai cách giao điểm trên một đoạn $S_2 = \boxed{750m}$.



Bài 12: Một chiếc côngtenơ đặt sao cho mặt trên nằm ngang được cần cầu cầu lên thẳng đứng lên cao với gia tốc $a = 0,5m/s^2$. Bốn giây sau khi rời mặt đất người ngồi trên mặt côngtenơ ném một hòn đá với vận tốc $v_0 = 5,4m/s$ theo phương làm với mặt phẳng ngang côngtenơ góc $\alpha = 30^\circ$.

- Tính thời gian từ lúc ném đá đến lúc nó rơi xuống mặt đất. Biết côngtenơ cao $h = 6(m)$
- Tính khoảng cách từ nơi đá chạm đất đến vị trí ban đầu của tấm bê tông (coi như một điểm) lấy $g = 10m/s^2$.

Giải:

- Sau 4s độ cao của người đứng trên mặt côngtenơ là:

$$H + \frac{a \cdot t^2}{2} = 6 + \frac{5 \cdot 4^2}{2} = 10(m)$$

Vận tốc của người lúc đó:

$$v_1 = a \cdot t = 0,5 \cdot 4 = 2 \frac{m}{s}$$

Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của viên đá đối với người thì vận tốc đối với đất :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

Chiếu lên:

$$0x: v_x = v_0 \cos \alpha = 5,4 \cdot 0,86 \approx 4,7(m/s)$$

$$0y: v_y = v_1 + v_0 \sin \alpha = 2 + \frac{5,4}{2} = 4,7(m/s)$$

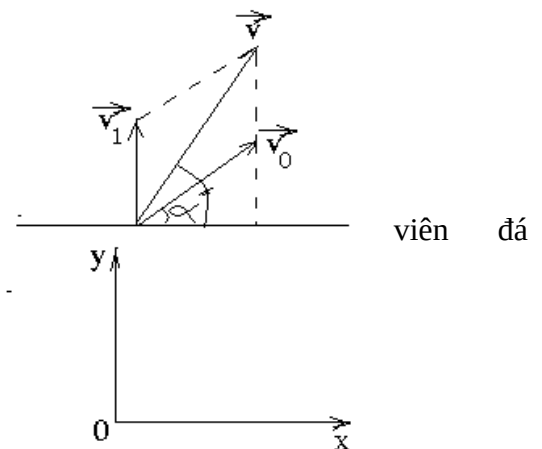
$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{v_y}{v_x} \approx 1$$

vậy $\beta = 45^\circ$

Chọn trục oxy như hình vẽ gắn vào mặt đất. Phương trình chuyển động của viên đá theo phương oy:

$$y = 10 + v \sin \beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{với } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 6,65(m/s)$$



$$\text{vậy: } y = 10 + 4,7 \cdot t - 5t^2$$

$$\text{Lúc đá rơi xuống đất: } y = 0 \Rightarrow 10 + 4,7 \cdot t - 5t^2 = 0 \\ \Rightarrow t \approx \boxed{2 \text{ s}}$$

b. Khoảng cách từ nơi đá rơi đến vị trí ban đầu của côngtenơ:

$$L = v_x t = 4,7 \cdot 2 = \boxed{9,4 \text{ m}}$$

Bài 13: Người ta đặt một súng cối dưới một căn hầm có độ sâu h. Hỏi phải đặt súng cách vách hầm một khoảng l bao nhiêu so với phương ngang để tầm xa S của đạn trên mặt đất là lớn nhất? Tính tầm xa này biết vận tốc đầu của đạn khi rời súng là v_0 .

Giải:

Phương trình vận tốc của vật theo phương ox :

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

Phương trình vận tốc của vật theo phương oy:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

Phương trình chuyển động:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t ;$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Phương trình vận tốc:

$$v_x = v_0 \cos \alpha ;$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

Để tầm xa x là lớn nhất thì tại A vận tốc của vật phải hợp với mặt ngang một góc 45° có nghĩa là tại A:

$$v_x = v_y \Rightarrow t = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{g} \cdot v_0 \quad (1)$$

Hơn nữa ta phải có sau thời gian này:

$$\begin{cases} x = l \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 \cos \alpha \cdot t = l \\ v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = h \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow t = \frac{l}{v_0 \cos \alpha} \quad (3) \text{ kết hợp với (1)} \Rightarrow l = \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha) \quad (4)$$

Thay t từ (1) vào (3) ta được:

$$\sin^2 \alpha = \frac{gh}{v_0^2} + \frac{1}{2} ; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}$$

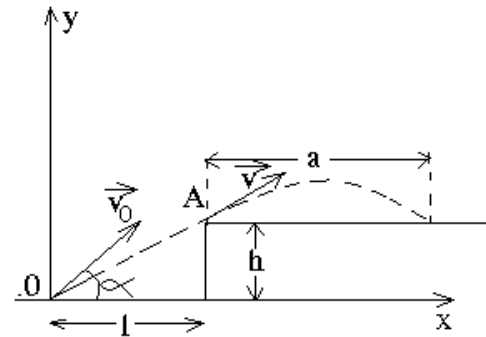
Thế vào (4):

$$l = \frac{v_0^2}{g} (\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$l = \frac{v_0^2}{g} \left(\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2 h^2}{v_0^4}} - \frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2} \right)$$

Từ (1) :

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}}}{g} \cdot v_0 \Rightarrow v_y = v_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}} \right)$$



$$v_y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}} \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) \cdot (v_0^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{v_A^2}{g} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) \cdot (v_0^2 + 1)}{g}$$

Vậy phải đặt súng cách vách hầm một khoảng:

$$l = \frac{v_0^2}{g} \left(\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2 h^2}{v_0^4}} - \frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2} \right) \text{ thì tầm xa của đạn trên mặt đất là lớn nhất và}$$

$$\text{tầm xa này bằng } \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2} \right) \cdot (v_0^2 + 1)}{g}.$$

Bài 14: Một chất điểm chuyển động chậm dần trên một đường thẳng với một gia tốc mà độ lớn w phụ thuộc vận tốc theo định luật $w = a\sqrt{v}$ trong đó a là một hằng số dương. Tại thời điểm ban đầu vận tốc của hạt bằng v_0 .

Hỏi quãng đường mà hạt đi được cho đến khi dừng lại và thời gian đi quãng đường ấy ?

Giải:

Về độ lớn: $w = a\sqrt{v}$

a. Về dấu ta có:

$$w = -a\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -a\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -adt$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{v} = -at + C$$

$$\text{Lúc } t=0, v=v_0 \Rightarrow C=2\sqrt{v_0} \Rightarrow 2\sqrt{v} = -at + 2\sqrt{v_0}$$

$$\Rightarrow v = v_0 - a\sqrt{v_0} \cdot t + \frac{a^2}{4} \cdot t^2$$

Khi chất điểm dừng lại thì $v = 0$:

$$\Rightarrow t = \frac{2}{a}\sqrt{v_0} \quad (*)$$

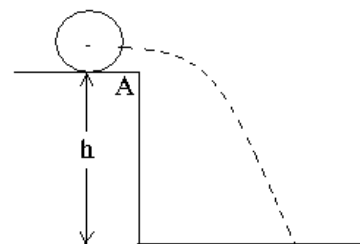
Quãng đường vật đi được cho đến lúc dừng lại:

$$S = \int_0^{\frac{2}{a}\sqrt{v_0}} v dt = \int_0^{\frac{2}{a}\sqrt{v_0}} \left(v_0 - a\sqrt{v_0} \cdot t + \frac{a^2}{4} \cdot t^2 \right) dt$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3a} \cdot v_0^{\frac{3}{2}}$$

b. Từ (*) ta có thời gian đi quãng đường ấy: $t = \frac{2}{a}\sqrt{v_0}$.

Bài 15: ở mép của một chiếc bàn chiều cao h , có một quả cầu đồng chất bán kính $R = 1(\text{cm})$ ($R \leq h$). Đẩy cho tâm O của quả cầu lệch khỏi đường thẳng đứng đi qua A , quả cầu rơi xuống đất vận tốc ban đầu bằng 0. Tính thời gian rơi và tầm xa của quả cầu ($g = 10\text{m/s}^2$).



Giải:

Ban đầu quả cầu xoay quanh trục quay tức thời A. Lúc bắt đầu rơi khỏi bàn vận tốc của nó là v , phản lực N bằng 0, lực làm cho quả cầu quay tròn quanh A là trọng lực $p \cos \alpha$:

$$p \cos \alpha = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = 9R \cos \alpha \quad (1)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$mgR = mgR \cos \alpha + \frac{1}{2} mv^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Thay $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ vào phương trình (1) ta được vận tốc của vật lúc đó:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} gR}$$

Giai đoạn tiếp theo vật như một vật bị ném xiên với góc α và với vận tốc ban đầu:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} gR}$$

Theo đề bài $R \ll h$ do vậy ban đầu ta xem $O \equiv A$.

Chọn trục $O'xy$ như hình vẽ $O' \equiv A$.

$$\begin{cases} x = v \cos \alpha t \\ y = v \sin \alpha t + \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Khi chạm đất $y = h$, nên:

$$v \sin \alpha t + \frac{1}{2} gt^2 = h$$

Thay $\begin{cases} v = \sqrt{\frac{2}{3} gR} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$ vào phương trình trên ta tìm được:

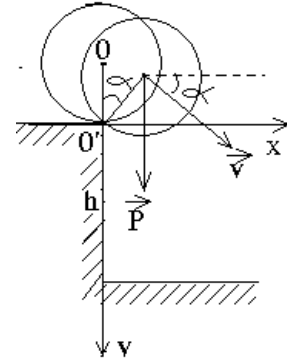
$$\begin{cases} t_1 = \frac{-\sqrt{10gR} + \sqrt{10gR + 54gh}}{3\sqrt{3}.g} \\ t_2 = \frac{-\sqrt{10gR} - \sqrt{10gR + 54gh}}{3\sqrt{3}.g} < 0 \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy sau $t = \frac{-\sqrt{10gR} + \sqrt{10gR + 54gh}}{3\sqrt{3}.g}$ thì vật sẽ rơi xuống đất.

Tầm bay xa của vật:

$$S = x = v \cos \alpha t = \sqrt{\frac{2}{3} gR} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{-\sqrt{10gR} + \sqrt{10gR + 54gh}}{3\sqrt{3}.g}$$

$$S = \frac{2}{27} \sqrt{\frac{2R}{g}} (-\sqrt{10gR} + \sqrt{10gR + 54gh})$$



Bài 16: Một chất điểm chuyển động chậm dần trên bán kính R, sao cho tại mỗi điểm gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến luôn có độ lớn bằng nhau. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, vận tốc của chất điểm đó là v_0 .

Hãy xác định:

- Vận tốc của chất điểm theo thời gian và theo quãng đường đi được.
- Gia tốc toàn phần theo vận tốc và quãng đường đi được.

Giải:

a. Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} a_t = a_n &\Rightarrow -\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R} \\ \Leftrightarrow -\frac{dv}{v^2} &= \frac{dt}{R} \end{aligned} \quad (1)$$

Lấy tích phân 2 vế ta có:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v -\frac{dv}{v^2} &= \int_0^t \frac{dt}{R} \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{R} \\ \Rightarrow v &= \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{R}t} \end{aligned}$$

$$\text{từ (1)} \Rightarrow -\frac{dv}{v} = \frac{ds}{R} \quad (2) \quad (ds = vdt)$$

Lấy tích phân 2 vế phương trình (2):

$$\begin{aligned} -\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= \int_0^s \frac{ds}{R} \Leftrightarrow -\ln \frac{v}{v_0} = \frac{s}{R} \\ \Rightarrow v &= v_0 \cdot e^{-\frac{s}{R}} \end{aligned}$$

b. Gia tốc toàn phần:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_t \sqrt{2} = a_n \sqrt{2}$$

Gia tốc toàn phần theo vận tốc:

$$a = \frac{v^2}{R} \sqrt{2}$$

Gia tốc toàn phần theo quãng đường đi được:

$$a = \frac{v_0^2 \cdot e^{-\frac{2s}{R}}}{R} \sqrt{2}$$

Bài 17: Hai vòng tròn bán kính R, một vòng đứng yên, vòng còn lại chuyển động tịnh tiến sát vòng kia với vận tốc v_0 . Tính vận tốc của điểm cắt C giữa hai vòng tròn khi khoảng cách giữa hai tâm $O_1O_2 = d$.

Giải:

Chọn gốc thời gian $t = 0$ lúc 2 vòng tròn bắt đầu tiếp xúc ngoài.

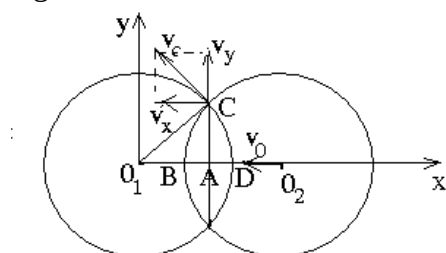
Tại một thời điểm nào đó sau gốc thời gian thì ta có trình chuyển động của điểm C :

$$\begin{cases} x = 0, D - AD = R - \frac{v_0 t}{2} = \frac{d}{2} \\ y = AC = R \sin \alpha = R \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = R \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2R}\right)^2} \end{cases}$$

Ta có:

$$d' = -v_0$$

Ta suy ra:



phương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = \frac{d}{2} \\ y = \sqrt{\frac{4R^2 - d^2}{4}} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} v_{Cx} = \frac{1}{2}d' = -\frac{v_0}{2} \\ v_{Cy} = \frac{-2dd'}{2.2\sqrt{4R^2 - d^2}} = \frac{dv_0}{2\sqrt{4R^2 - d^2}} \end{cases} \\ \Rightarrow & v = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{dv_0}{2\sqrt{4R^2 - d^2}}\right)^2} \\ \Rightarrow & v = \frac{v_0 R}{\sqrt{4R^2 - d^2}} \end{aligned}$$

Bài 18: Hai vật cách nhau 100m chuyển động trên một đường thẳng đến gặp nhau với vận tốc lần lượt là $v_1 = 5 \text{ m/s}$; $v_2 = 5 \text{ m/s}$, trong khoảng 2 vật trên đoạn thẳng mà chúng chuyển động có một vật nhỏ luôn chuyển động thẳng đều với vận tốc $v = 30 \text{ m/s}$ cùng chuyển động trên đường thẳng mà 2 vật (1) và (2) chuyển động. Mỗi khi vật trên đến gặp vật (1) hoặc vật (2) thì vận tốc của nó sẽ đổi hướng ngược trở lại và coi như vẫn giữ nguyên độ lớn vận tốc của nó. Hỏi khi vật (1) và vật (2) gặp nhau thì quãng đường vật nhỏ đi được có tổng chiều dài là bao nhiêu?

Giải:

Vận tốc của vật (1) đối với mốc vật (2) là:

$$\begin{aligned} v_{12} &= v_1 - v_2 \\ \Rightarrow v_{12} &= v_1 + v_2 = 10 \quad (\text{m/s}). \end{aligned}$$

Thời gian từ ban đầu đến lúc vật (1) và vật (2)

$$\text{là: } t = \frac{AB}{v_{12}} = \frac{100}{10} = 10 \quad (\text{s})$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \frac{\frac{a}{g}}{\sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad (6)$$

gặp nhau

Quãng đường vật nhỏ đi được tổng cộng cho đến lúc vật (1) và vật (2) gặp nhau là:

$$s = v.t = 30.10 = 300 \quad (\text{m}).$$

2.

Động lực học chất điểm:

Bài 19: ở mép đĩa nằm ngang bán kính R có đặt một đồng tiền. Đĩa quay với vận tốc $\omega = \beta t$ (β là gia tốc góc không đổi). Tại thời điểm nào đồng tiền sẽ văng ra khỏi đĩa. Nếu hệ số ma sát trượt giữa đồng tiền và đĩa là μ .

Giải:

Tại thời điểm t gia tốc pháp tuyến của vật:

$$a_n = \omega^2 R = \beta^2 t^2 R.$$

Gia tốc tiếp tuyến:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{R\beta dt}{dt} = \beta R$$

Gia tốc toàn phần:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\beta^4 R^2 t^4 + \beta^2 R^2}$$

Lực làm đồng tiền chuyển động tròn chính là lực ma sát nghỉ.

Ta có:

$$F_{msn} = ma = m\sqrt{\beta^4 R^2 t^4 + \beta^2 R^2} = m\beta R \sqrt{\beta^2 t^4 + 1}$$

Vật có thể nằm trên đĩa nếu lực ma sát nghỉ tối đa bằng lực ma sát trượt:

$$F_{msn} \leq F_{mst}$$

$$\text{hay } m\beta R \sqrt{\beta^2 t^4 + 1} \leq \mu mg$$

$$\Rightarrow t^4 \leq \frac{1}{\beta^2} \cdot \left(\frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1 \right) \quad (1)$$

Lúc vật bắt đầu văng ra thì: $F_{msn} = F_{mst}$

hay:

$$t^4 = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left(\frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow t = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1}}$$

Vì $t > 0$ nên $\frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{\beta R}{g}$

Vậy sau $\sqrt{\frac{1}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{\mu^2 g^2}{R^2 \beta^2} - 1}}$ (với $\mu > \frac{\beta R}{g}$) vật sẽ văng ra khỏi đĩa.

Bài 20: Một người đi xe đạp lượn tròn trên một sân nằm ngang có bán kính R . Hệ số ma sát chỉ phụ thuộc vào khoảng cách r từ tâm của sân theo quy luật $\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$ Với μ_0 là một hằng số (hệ số ma sát ở tâm của sân)

Xác định bán kính của đường tròn tâm O mà người đi xe đạp có thể lượn với vận tốc cực đại? Tính vận tốc đó?

Giải:

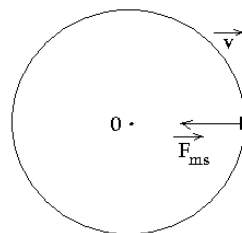
Giả sử người đó đang đi trên quỹ đạo tròn với bán kính r với vận tốc v . Ta phải xác định $v_{\max}$ và giá trị này đạt được khi r bằng bao nhiêu.

Đối với hệ quy chiếu cố định gắn ở tâm O lực tác dụng lên vật là lực ma sát đóng vai trò lực hướng tâm và từ đó ta có:

$$\mu N = m a_{ht}$$

$$\text{hay } \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \cdot mg = m \frac{v^2}{r}$$

$$\text{Suy ra } v^2 = \mu_0 g r - \frac{\mu_0 g}{R} r^2$$



Đây là một tam thức bậc hai ẩn r với hệ số $a = -\frac{\mu_0 g}{R} < 0$. Giá trị của v^2 đạt lớn nhất khi:

$$r = -\frac{\mu_0 g}{2 \cdot \left(-\frac{\mu_0 g}{R} \right)} = \frac{R}{2}$$

$$\text{Lúc đó: } v_{\max}^2 = v^2 = \mu_0 g \frac{R}{2} - \frac{\mu_0 g}{R} \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{\mu_0 g R}{4}$$

Vậy:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_0 g R}{4}}$$

Vậy người đi xe đạp có thể đi với vận tốc lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{\mu_0 g R}}{2}$ trên quỹ đạo có bán kính lớn nhất bằng $\frac{R}{2}$.

Bài 21: Một vật có khối lượng $m = 1 \text{ kg}$ có vận tốc đầu $v_0 = 10 \frac{m}{s}$ và chịu lực cản $F = -kv$ (với $k = 1 \text{ kg/s}$).

- Chứng minh rằng vận tốc của vật giảm dần theo hàm số bậc nhất của đường đi.
- Tính quãng đường mà vật đi được cho tới lúc dừng.

Giải:

a. Vật chịu tác dụng của lực cản $F = -kv$. Theo định luật II Newton ta có:

$$-kv = ma$$

$$\Rightarrow -kv = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{hay } \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\text{Nguyên hàm hai vế: } \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt + C \Leftrightarrow \ln v = -\frac{k}{m} t + C$$

$$\text{Lúc } t=0 \text{ thì } v=v_0 \Rightarrow C = \ln v_0$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m} t \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ $0 \rightarrow t$:

$$S = \int_0^t ds = \int_0^t v dt$$

$$S = v_0 \cdot \int_0^t e^{-\frac{k}{m} t} dt = \frac{mv_0}{k} - \frac{mv_0}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$S = \frac{mv_0}{k} - \frac{mv}{k}$$

$$\Rightarrow v = \boxed{v_0 - \frac{k}{m} \cdot S} \quad (*)$$

b. Quãng đường vật đi được cho tới lúc dừng:

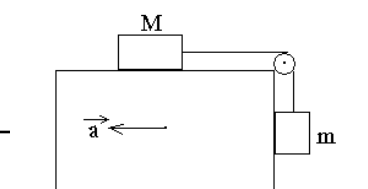
$$S = \int ds$$

Từ (*) vì phân hai vế ta có:

$$dS = -\frac{m}{k} dv \text{ nên } S = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^0 dv$$

$$\Rightarrow S = \boxed{\frac{mv_0}{k}}$$

Bài 22: Cho cơ hệ như hình vẽ. Lúc đầu hệ cân bằng, bàn nhận được gia tốc a theo phương ngang như hình vẽ. Tính gia tốc của M đối với mặt đất, biết hệ số ma sát trượt giữa M và sàn là μ .



Lược Giải:

Chọn hệ quy chiếu oxy gắn vào bàn như hình vẽ. Trong hệ quy chiếu oxy:

- Phương trình chuyển động của vật M

$$T + F_{qt} - F_{ms} = Ma_0$$

Hay:

$$T + Ma - \mu N_1 = Ma_0 \quad (1),$$

trong đó:

a_0 là gia tốc của M đối với bàn

a là gia tốc của bàn đối với đất.

- Phương trình chuyển động của vật m:

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{F_{qt2}}{P_2} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \end{cases} \quad (2)$$

$$F_{qt2} \sin \alpha + mg \cos \alpha - T = ma_0 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra:

$$ma \sin \alpha + mg \cos \alpha - T = ma_0 \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra:

$$a_0 = \frac{Ma - \mu N_1 + ma \sin \alpha + mg \cos \alpha}{m + M} \quad (5)$$

Từ (2) suy ra:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \frac{\frac{a}{g}}{\sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad (6)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 1}} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad (7)$$

$$\text{Và } N_1 = Mg \quad (8)$$

Thế (6), (7), (8) vào (5) ta rút ra:

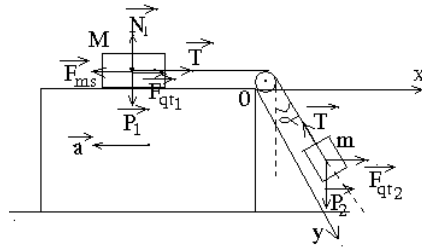
$$a_0 = \frac{Ma - \mu Mg + m\sqrt{a^2 + g^2}}{m + M}$$

Gia tốc của M đối với đất:

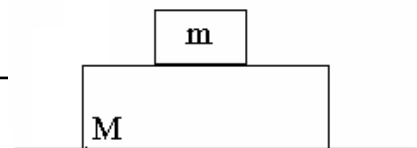
$$a_M = a_0 + a$$

$$\Rightarrow a_M = a_0 - a = \frac{Ma - \mu Mg + m\sqrt{a^2 + g^2}}{m + M} - a$$

$$a_M = \frac{m\sqrt{a^2 + g^2} - \mu Mg - mg}{m + M}$$



Bài 23: Cho cơ hệ như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa M và m là μ_1 , giữa M và sàn là μ_2 . Tìm độ lớn của lực F nằm ngang:

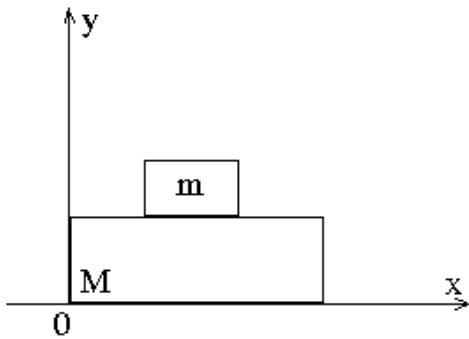


- a. Đặt lên m để m trượt trên M.
b. Đặt lên M để M trượt khỏi m.

Giải:

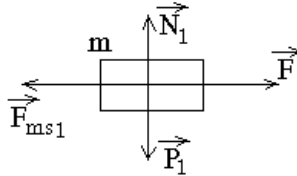
- a. Khi tác dụng lực F lên m.

Phương trình chuyển động của m trượt trên M:



$$\begin{cases} F - F_{ms1} = ma_1 \\ N_1 = N_1 + N_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{F - F_{ms1}}{m}$$

Phương trình chuyển động của M:



$$\begin{cases} F'_{ms1} - F_{ms2} = Ma_2 \\ N = N_1 + N_2 = P_1 + P_2 = (m + M)g \end{cases} \Rightarrow a_2 = \frac{F'_{ms1} - F_{ms2}}{M}$$

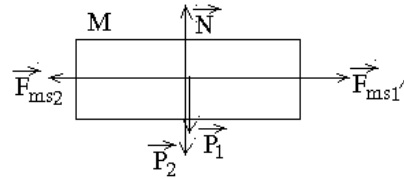
Để m trượt trên M thì:

$$a_1 > a_2; F'_{ms1} = F_{ms1} = \mu_1 mg; F_{ms2} = \mu_2 (m + M)g.$$

hay:

$$\frac{F - \mu_1 mg}{m} > \frac{\mu_1 mg - \mu_2 (m + M)g}{M}$$

$$\Rightarrow F > (\mu_1 - \mu_2)(m + M) \frac{m}{M} g$$



Với điều kiện: $a_1 > 0 \Leftrightarrow F > \mu_1 mg$.

Vậy đáp số của bài toán này:

$$\begin{cases} F > (\mu_1 - \mu_2)(m + M) \frac{m}{M} g \\ F > \mu_1 mg \end{cases}$$

- b. Khi tác dụng lực F lên M :

Phương trình chuyển động của m:

$$\begin{cases} F_{ms1} = ma_1 \\ N_1 = P_1 = mg \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{F_{ms1}}{m} = \frac{\mu_1 N_1}{m} = \mu_1 g$$

Phương trình chuyển động của vật M:

$$\begin{cases} F - F_{ms1} - F_{ms2} = Ma_2 \\ N = N_1 + N_2 = P_1 + P_2 = (m + M)g \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{F - F_{ms1} - F_{ms2}}{M}$$

Để M trượt khỏi m thì: $a_2 > a_1$ (chú ý: $\begin{cases} F_{ms1} = F_{ms1'} = \mu_1 mg \\ F_{ms2} = \mu_2 (M + m)g \end{cases}$)

hay

$$\frac{F - F'_{ms1} - F_{ms2}}{M} > \mu_1 g$$

$$\Leftrightarrow \frac{F - \mu_1 mg - \mu_2 (m + M)g}{M} > \mu_1 g$$

Cuối cùng: $F > (\mu_1 + \mu_2)(m + M)g$ (1)

Điều kiện $a_2 > 0$

hay $F > \mu_1 mg + \mu_2 (m + M)g$ (2)

Điều kiện (2) bao hàm trong điều kiện (1).

Do vậy kết quả bài toán :

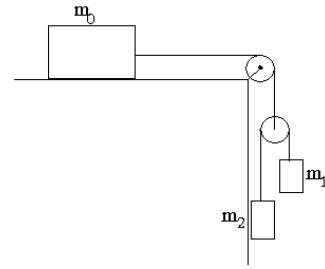
$$\boxed{F > (\mu_1 + \mu_2)(m + M)g} .$$

Bài 24: Cho cơ hệ như hình vẽ.

Tìm gia tốc của m_1 và biện luận kết quả tìm được.

Bỏ qua mọi ma sát.

Khối lượng ròng rọc và dây nối bằng không.



Giải:

Chọn chiều dương như hình vẽ.

Phương trình định luật II Newton cho vật:

$$m_0 : T + P_0 + N = m_0 a_0$$

$$m_1 : T_1 + P_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 : T_2 + P_2 = m_2 a_2$$

Chiếu các phương trình đó lên chiều dương ta được:

$$T = m_0 a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{T}{m_0} \quad (1)$$

$$P_1 - T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{P_1 - T_1}{m_1} \quad (2)$$

$$P_2 - T_2 = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{P_2 - T_2}{m_2} \quad (3)$$

Giả sử ròng rọc quay ngược chiều kim đồng hồ.

Gọi S_0, S_1, S_2 là độ dời của m_0, m_1, m_2 so với ròng rọc A.

S' là độ dời của m_1, m_2 so với ròng rọc B.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S_1 = S_0 - S' \\ S_2 = S_0 + S' \end{cases} \Rightarrow S_1 + S_2 = 2S_0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 2a_0 \quad (*)$$

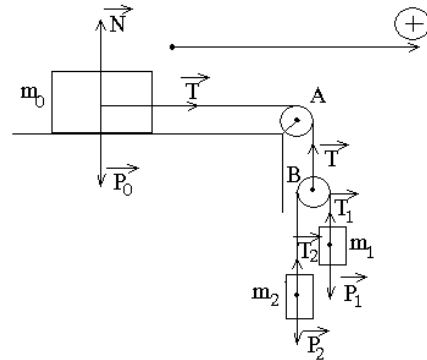
Thế (1), (2) và (3) vào (*) và chú ý $T = 2T_1 = 2T_2$

Rút ra:

$$T = \frac{2}{\frac{2}{m_0} + \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}} \cdot g$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{m_1 g - T_1}{m_1} = \frac{m_1 g - \frac{T}{2}}{m_1} = g - \frac{T}{2m_1}$$

Hay :



$$a_1 = g - \frac{2g}{m_1 \left(\frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$$

$$a_1 = \left[1 - \frac{2}{m_1 \left(\frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \right] \cdot g$$

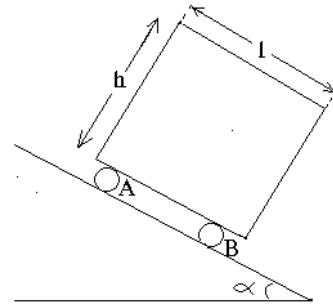
* **Biện luận:**

- Nếu $m_0 = 0$ thì $a_1 = g$, $a_2 = g$: m_1 và m_2 đều rơi tự do.
- Nếu $m_1 = 0$ thì $a_1 = -g$, vật m_2 rơi tự do, m_1 đi lên $|a_1| = g$.
- Nếu $m_2 = 0$ thì $a_1 = g$, vật m_1 rơi tự do.

Bài 25: Một kiện hàng hình hộp đồng chất (có khối tâm ở tâm hình hộp) được thả trượt trên mặt phẳng nghiêng nhờ hai gối nhỏ A và B. Chiều cao của hình hộp gấp n lần chiều dài ($h = nl$). Mặt phẳng

nghiêng một góc α , hệ số ma sát giữa gối A và B là μ .

- Hãy tính lực ma sát tại mỗi gối.
- Với giá trị nào của n để kiện hàng vẫn trượt mà không bị lật.



Giải:

- Xét các lực tác dụng vào kiện hàng: $P, N_A, N_B, F_{msA}, F_{msB}$.

Theo định luật II Newton:

$$P + N_A + N_B + F_{msA} + F_{msB} = ma$$

Chiếu lên oy:

$$P \cos \alpha - (N_A + N_B) = 0 \Rightarrow N_A + N_B = mg \cos \alpha \quad (1)$$

Chọn khối tâm G của kiện hàng làm tâm quay, vật chuyển động tịnh tiến không quay nên từ đó ta có:

$$N_B \frac{l}{2} = N_A \frac{l}{2} + F_{msA} \frac{h}{2} + F_{msB} \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow N_B - N_A = \frac{F_{msA} + F_{msB}}{l} \cdot h = \frac{\mu h}{l} \cdot (N_A + N_B)$$

Cuối cùng:

$$N_B - N_A = \frac{\mu m g h \cos \alpha}{l} = \mu n m g \cos \alpha \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được:

$$N_A = \frac{1}{2} m g \cos \alpha (1 - \mu n)$$

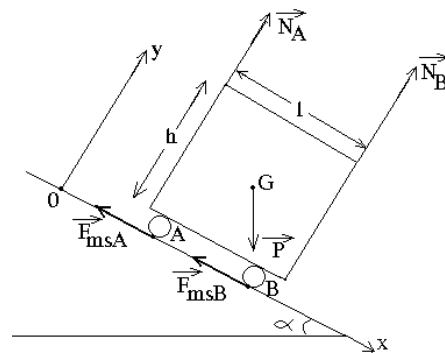
$$N_B = \frac{1}{2} m g \cos \alpha (1 + \mu n)$$

Lực ma sát tại mỗi gối:

$$\begin{cases} F_{msA} = \mu N_A = \frac{1}{2} \mu m g \cos \alpha (1 - \mu n) \\ F_{msB} = \mu N_B = \frac{1}{2} \mu m g \cos \alpha (1 + \mu n) \end{cases}$$

- Kiện hàng vẫn trượt mà không bị lật khi: $N_A \geq 0$

Hay:



$$1 - \mu n \geq 0 \Rightarrow n \leq \frac{1}{\mu}$$

Bài 26: Một vật nhỏ đang nằm yên trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn, lúc $t = 0$ vật đó chịu tác dụng của một lực phụ thuộc thời gian $F = \beta t$ (β là hằng số). Lực hợp với mặt ngang góc không đổi α .

- Tính vận tốc của vật lúc rời mặt phẳng ngang.
- Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó.

Giải:

- Xét các lực tác dụng vào vật:

$$F + p + N = ma$$

Chiếu lên Ox:

$$F \cos \alpha = ma \quad (1)$$

Chiếu lên Oy:

$$N + F \sin \alpha - p = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow N = p - F \sin \alpha = mg - \beta t \cdot \sin \alpha$$

Vật rời khỏi mặt ngang khi: $N = 0$

Hay

$$mg - \beta t \cdot \sin \alpha = 0$$

Thời gian để nó rời khỏi mặt phẳng ngang:

$$\text{Từ (1): } F \cos \alpha = ma$$

$$\text{Hay: } \beta t \cdot \cos \alpha = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow dv = \frac{\beta \cdot \cos \alpha}{m} \cdot t \cdot dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^{t_0} \frac{\beta \cos \alpha}{m} \cdot t \cdot dt \Leftrightarrow v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cdot t_0^2 \cdot \cos \alpha}{m}$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg^2 \cdot \cos \alpha}{\beta \cdot \sin^2 \alpha}$$

- Phương trình vận tốc:

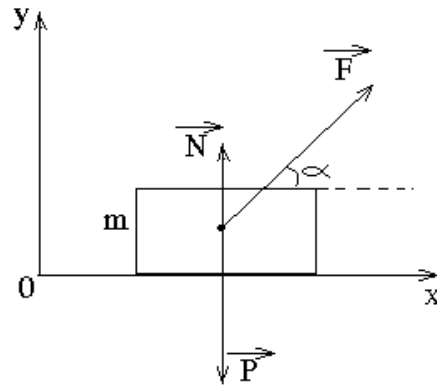
$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cos \alpha}{m} \cdot t^2$$

Quãng đường vật đi được từ $0 \rightarrow t_0$:

$$S = \int ds = \int_0^{t_0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cos \alpha}{m} \cdot t^2 dt = \frac{1}{6} \frac{\beta t_0^3 \cdot \cos \alpha}{m}$$

$$S = \frac{1}{6} \cdot \frac{\beta \left(\frac{mA}{\beta \sin \alpha} \right)}{m} \cdot \cos \alpha$$

$$S = \frac{1}{6} \cdot \frac{m^2 g^3}{\beta^2 \cdot \sin^3 \alpha} \cdot \cos \alpha$$



$$t_0 = \frac{mg}{\beta \sin \alpha}$$

Bài 27: Một ca nô chuyển động trên mặt hồ với vận tốc v_0 lúc $t = 0$ thì tắt máy. Lực cản của nước tỷ lệ với vận tốc $F = -kv$, k là hằng số. Xác định:

- Thời gian chuyển động của ca nô kể từ lúc tắt máy.
- Vận tốc theo quãng đường đi được của ca nô kể từ lúc tắt máy và quãng đường tổng cộng cho đến lúc dừng lại.

c. Tính vận tốc trung bình của canô trong khoảng thời gian mà vận tốc ban đầu giảm đi n lần.

Giải:

Xét các lực tác dụng vào thuyền:

$$F_C + p + N = ma \Rightarrow -kv = ma \Rightarrow -kv = m \frac{dv}{dt}$$

Hay: $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt \Rightarrow \ln v = -\frac{k}{m} t + C$$

Lúc $t = 0$, $v = v_0 \Rightarrow C = \ln v_0$

Vậy: $\ln v = -\frac{k}{m} t + \ln v_0 \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$

a. Để vận tốc thuyền bằng 0 thì: $t \rightarrow \infty$.

b. Quãng đường Ca nô đi được:

$$S = \int dS = \int v \cdot dt$$

$$S = \int_0^t v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t} dt = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$$

$$S = \frac{mv_0}{v} - \frac{m}{k} v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t} = \frac{mv_0}{k} - \frac{m}{k} \cdot v$$

$$v = v_0 - \frac{k}{m} S$$

Quãng đường tổng cộng cho tới lúc dừng:

$$S_0 = \int dS$$

$$S_0 = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^0 dv = \frac{mv_0}{k}$$

c. Thời gian từ ban đầu đến lúc vận tốc giảm n lần:

$$v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t} = \frac{v_0}{n} \Rightarrow -\frac{k}{m} t = -\ln n \Rightarrow t = \frac{m \cdot \ln n}{k}$$

Quãng đường đi được từ ban đầu đến lúc vận tốc giảm n lần:

$$S = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^{\frac{v_0}{n}} dv = \frac{mv_0}{k} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{mv_0 (n-1)}{k \cdot n}$$

Vận tốc trung bình:

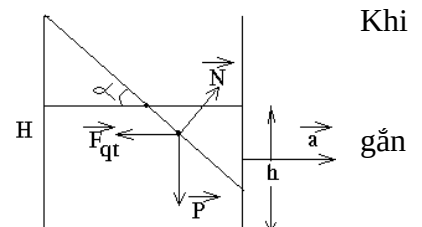
$$\bar{v} = \frac{S}{t} = \frac{v_0 (n-1)}{n \cdot \ln n}$$

Bài 28: Một xe chở nước có chiều cao H. Mặt nước trong xe cách đáy một đoạn h đột nhiên xe chuyển động với gia tốc a không đổi. Xác định gia tốc a để khi xe chuyển động nước không trào ra ngoài.

Giải:

Xét một phần tử chất lỏng có khối lượng m nằm trên mặt thoáng. hình dạng chất lỏng ở giới hạn như hình vẽ thì chất lỏng không bị trào ra ngoài.

Hình chiếu của các lực P, N, F_{qt} cân bằng nhau đối với hệ quy chiếu vào bình.



Trên mặt thoáng:

$$F_{qt} \cos \alpha = p \sin \alpha \Leftrightarrow ma = mg \tan \alpha$$

$$\Rightarrow a = g \tan \alpha = g \cdot \frac{H - h}{\frac{\ell}{2}}$$

Vậy với giá trị lớn nhất của a là $\boxed{g \frac{2(H - h)}{\ell}}$ thì nước không bị trào ra ngoài.

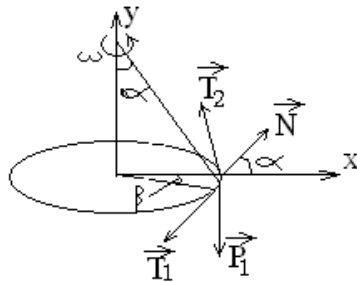
Bài 29: Một vòng dây xích nhỏ có chiều dài ℓ , khối lượng m được đặt lên một mặt hình nón nhẵn tròn xoay có góc ở đỉnh bằng 2α . Cả hệ thống quay đều với vận tốc góc ω_0 chung quanh trục thẳng đứng trùng với trục đối xứng của hình nón. Mặt phẳng của vòng xích nằm ngang. Tìm sức căng của vòng xích ?

Giải:

Chọn trục Oxy cố định như hình vẽ.

Xét 1 đoạn rất nhỏ Δl của vòng xích, nó có khối lượng:

$$m_1 = \frac{m\Delta l}{\ell}$$



Phương trình định luật II Newton đối với trọng vật m_1 :

$$p_1 + N + T_1 + T_2 = m_1 a \quad (T_1 = T_2 = T)$$

Chiếu lên Ox :

$$- 2T \sin \beta + N \cos \alpha = - m_1 \omega^2 r \quad (1)$$

Ta có:

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{\Delta l}{2r} = \pi \frac{\Delta l}{\ell} \\ N = \frac{p_1}{\sin \alpha}; m_1 = \frac{m\Delta l}{\ell} \end{cases} \quad (2)$$

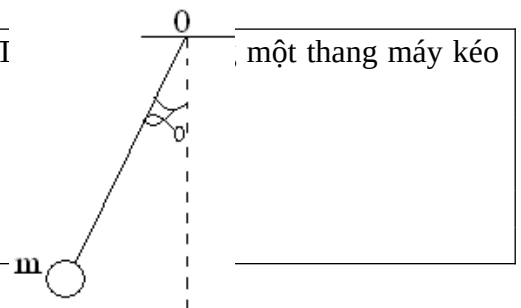
Thế (2) vào (1):

$$\begin{aligned} - 2T\pi \cdot \frac{\Delta l}{\ell} + \frac{m\Delta l}{\ell} \cdot g \cdot \cot \alpha &= - m \frac{\Delta l}{\ell} \cdot \omega^2 \cdot r \\ \Rightarrow T &= \frac{m}{2\pi} (g \cot \alpha + \omega^2 r) \\ T &= \boxed{\frac{m}{2\pi} \left(g \cot \alpha + \frac{\omega^2 \cdot \ell}{2\pi} \right)} \end{aligned}$$

Bài 30: Một con lắc đơn chiều dài ℓ khối lượng quả nặng là m . T lệch sợi dây con lắc một góc α_0 đối với phương thẳng đứng và thả nhẹ khi mà con lắc vừa đi qua vị trí cân bằng thì thang máy rơi tự do.

a. Hỏi quả nặng có lên đến điểm cao nhất không? vì sao?

b. Tính lực căng của sợi dây ở vị trí vật có độ cao cực đại so



c. với sàn thang máy? Nêu nhận xét.

-

Giải:

a. Xét vật trong hệ quy chiếu gắn với thang máy. Vật chịu tác dụng của trọng lực P , lực quán tính F_{dt} và lực căng T của sợi dây.

- Theo định luật II Newton :

$$p + F_{qt} + T = ma$$

- Thang máy rơi tự do:

$$p + F_{qt} = 0 \Rightarrow T = ma \quad (1)$$

Lực căng T luôn có phương vuông góc với vận tốc, nó không thực hiện công, do vậy vật sẽ chuyển động không đổi $\Delta_{wd} = 0$. Hay nói cách khác đối với hệ gắn với thang máy vật sẽ chuyển động tròn đều

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}$$

Sở dĩ ta có lập luận như thế là vì T luôn dương khi thang máy rơi tự do thì đồng thời lúc đó theo thẳng đứng vật cũng rơi tự do và đều với vận tốc $v_{0y} = 0$.

Đối với hệ quy chiếu gắn vào thang máy lực quán tính có độ lớn bằng nhau nhưng ngược hướng với trọng lực, không có lực nào sinh công nên động năng được bảo toàn. Do vậy vật sẽ chuyển động tròn đều đối với thang máy nên nó sẽ lên đến điểm cao nhất.

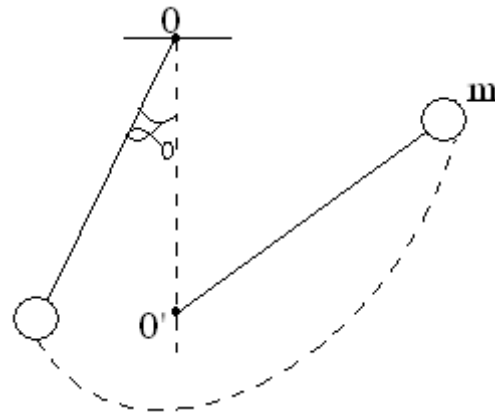
b. Chiều (1) lên chiều hướng tâm :

$$T = ma = \frac{mv^2}{\ell} = \frac{m}{\ell} \cdot 2gl(1 - \cos \alpha_0)$$

$$T = 2mg(1 - \cos \alpha_0)$$

Nhận xét:

Đối với thang máy vật sẽ chuyển động tròn đều bất kể $0 < \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$ và không phụ thuộc vào chiều dài sợi dây và vị trí của vật.



tốc, nó có vận tốc quy chiếu với vận tốc:

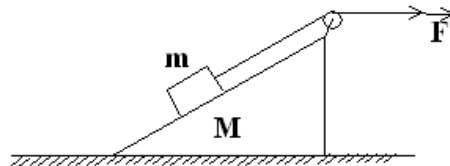
. Thật vậy phương ban đầu là

trọng lực và chiều, lực

Bài 31: Cho cơ hệ như hình vẽ. Nêm có khối lượng M , góc giữa mặt nêm và phương ngang là α . Cần phải kéo dây theo phương

ngang một lực F là bao nhiêu để vật có khối lượng m chuyển động lên trên theo mặt nêm? Tìm gia tốc của m và M đối với mặt đất?

Bỏ qua mọi ma sát, khối lượng dây nối và ròng rọc.



Giải:

Gọi gia tốc của nêm và vật đối với mặt đất lần lượt là a_1 và a_2 .

Phương trình động lực học cho m :

$$F + P_2 + N = ma_2$$

chiều lên ox:

$$F \cos \alpha - N \sin \alpha = ma_{2x} \quad (1)$$

chiều lên oy:

$$F \sin \alpha + N \sin \alpha - mg = ma_{2y} \quad (2)$$

Nêm chịu tác dụng của P_1, N_1 , hai lực F và F' dè rọc và lực nén N' có độ lớn bằng N .

Phương trình chuyển động của M:

$$P_1 + N_1 + N' + F + F' = Ma_1$$

Chiều lên ox:

$$N \sin \alpha + F - F \cos \alpha = Ma_1 \quad (3)$$

Gọi a_{21} là gia tốc của m đối với nêm M.

Theo công thức cộng gia tốc:

$$a_2 = a_{21} + a_1 \quad (4)$$

$$\text{Chiều (4) lên } 0x: \quad a_{2x} = a_1 - a_{21} \cos \alpha$$

$$0y: \quad a_{2y} = a_{21} \sin \alpha$$

Từ đó suy ra:

$$a_{2y} = (a_{2x} - a_1) \tan \alpha \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3) và (5) suy ra:

$$a_1 = \frac{F(1 - \cos \alpha) + mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (6)$$

$$a_{2x} = \frac{F(m \sin^2 \alpha + M \cos \alpha) - Mmg \sin \alpha \cos \alpha}{m(M + m \sin^2 \alpha)}$$

$$a_{2y} = \frac{\{F \cos \alpha [M + m(1 - \cos \alpha)] - mg(M + m) \sin \alpha \cos \alpha\} \tan \alpha}{m(M + m \sin^2 \alpha)}$$

Để m dịch chuyển lên trên nêm thì:

$$\begin{cases} a_{2y} > 0 & (I) \\ N > 0 & (II) \end{cases}$$

• Giải (I):

$$a_{2y} > 0 \Leftrightarrow F \cos \alpha [M + m(1 - \cos \alpha)] - mg(M + m) \sin \alpha \cos \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow F > \frac{mg(M + m) \sin \alpha}{M + m(1 - \cos \alpha)} \quad (7)$$

• Giải (II):

Thay (6) vào (3) rút ra N và từ điều kiện $N > 0$ ta suy ra:

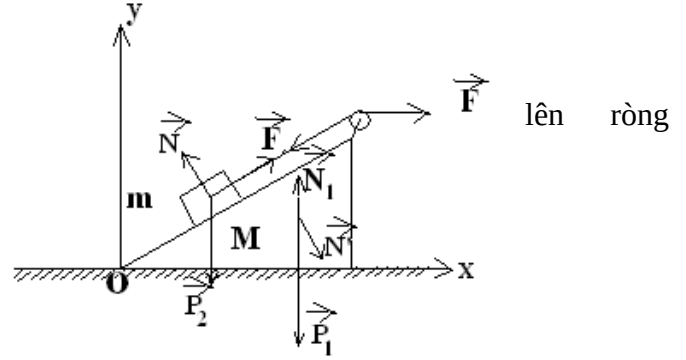
$$F < \frac{Mg \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} \quad (8)$$

Từ (7) và (8) ta suy ra để m leo lên được mặt nêm M thì lực F phải thoả mãn điều kiện

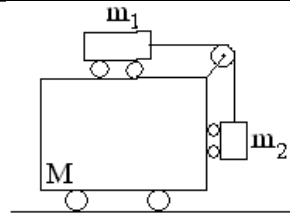
$$\frac{mg(M + m) \sin \alpha}{M + m(1 - \cos \alpha)} < F < \frac{Mg \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha}$$

Lúc đó gia tốc của nêm đối với mặt đất là a_1 ở (6). Gia tốc của vật đối với mặt đất sẽ là :

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2}.$$



Bài 32: Cho cơ hệ như hình vẽ. Hỏi phải truyền cho M một lực F là bao nhiêu và theo hướng nào để hệ thống đứng yên tương đối đối với nhau. Bỏ qua mọi ma sát.



Giải:

Xét hệ thống trong hệ quy chiếu gắn với mặt đất:
Giả sử tìm được gia tốc F thỏa mãn bài toán.

- Xét vật m_2 :

$$P_2 + T' + N_2 = m_2 a$$

chiều lên oy:

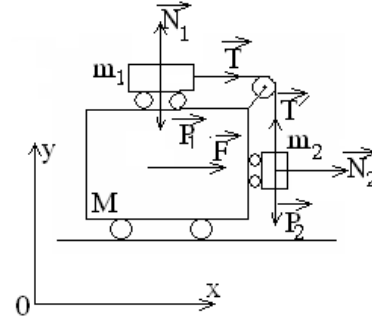
$$P_2 - T' = 0 \Rightarrow T' = T = m_2 g.$$

- Xét vật m_1 :

$$P_1 + N_1 + T = m_1 a$$

chiều lên ox:

$$T = m_1 a \Rightarrow a = \frac{T}{m_1} = \frac{m_2}{m_1} g$$



Ba vật đứng yên tương đối với nhau ta có thể xem chúng như một vật duy nhất có khối lượng $(M + m_1 + m_2)$ chuyển động với gia tốc a . Do vậy lực F cần phải đặt vào M sẽ là :

$$F = (M + m_1 + m_2) a = (M + m_1 + m_2) \frac{m_2}{m_1} g.$$

Bài 33: Trên một mặt nón tròn xoay với góc nghiêng α có thể quay quanh trục thẳng đứng. Một vật có khối lượng m đặt trên mặt nón cách trục quay một khoảng R . Mặt nón quay đều với vận tốc góc ω .

Tính giá trị nhỏ nhất của hệ số ma sát trượt (μ) giữa vật và mặt nón để vật vẫn đứng yên trên mặt nón.

Giải:

Chọn hệ quy chiếu oxy gắn vào hình nón và quay đều cùng mặt nón như hình vẽ.

Trong hệ quy chiếu này các lực tác dụng vào vật: P, N, F_{ms}, F_{qt} .

Vật đứng yên, do vậy:

$$P + N + F_{ms} + F_{qt} = 0$$

Chiều lên Ox:

$$-P \sin \alpha + F_{ms} - F_{qt} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

Chiều lên Oy:

$$-P \cos \alpha + N + F_{qt} \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

Từ (2) ta suy ra:

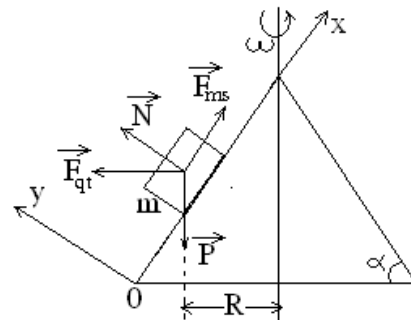
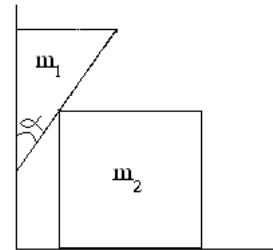
$$-mg \cos \alpha + N + m\omega^2 R \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N = m(g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha)$$

Từ (1) ta có:

$$F_{ms} = m(g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha)$$

Điều kiện để m đứng yên trên mặt nón:



$$\begin{cases} N > 0 \\ F_{ms} \leq \mu N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega < \sqrt{\frac{g}{R}} \cot \alpha \\ m(g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha) \leq \mu m(g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha) \end{cases}$$

Từ hệ trên ta suy ra: $\mu \geq \frac{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hệ số ma sát trượt sẽ cần là:

$$\mu_{\min} = \frac{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha} \text{ với điều kiện } \omega < \sqrt{\frac{g}{R}} \cot \alpha .$$

Bài 34: Khối lăng trụ tam giác có khối lượng m_1 , với góc α như hình vẽ có thể trượt theo đường thẳng đứng và tựa lên khối lập phương khối lượng m_2 còn khối lập phương có thể trượt trên mặt phẳng ngang. Bỏ qua mọi ma sát.

- Tính gia tốc giữa mỗi khối và áp lực giữa hai khối ?
- Xác định α sao cho a_2 là lớn nhất. Tính giá trị gia tốc của mỗi khối trong trường hợp đó ?

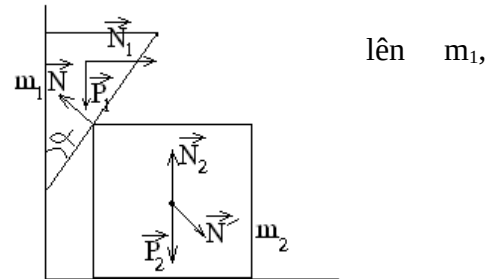
Giải:

a. Vật 1:

Các lực tác dụng vào m_1 : P_1 , phản lực N_1 do bờ tường tác dụng phản lực do m_2 tác dụng N .

Theo định luật II Newton:

$$P_1 + N_1 + N = m_1 a_1$$



Chiều lên ox:

$$- N \cos \alpha + N_1 = 0$$

Chiều lên oy:

$$P_1 - N \sin \alpha = m_1 a_1 \quad (1)$$

Vật 2: Có 3 lực tác dụng lên m_2 : P_2 , phản lực N_2 do sàn tác dụng lên khối lập phương, phản lực N' do m_1 tác dụng lên khối lập phương.

Theo định luật II Newton:

$$P_1 + N_2 + N' = m_2 a_2$$

chiều lên ox:

$$N \cos \alpha = m_2 a_2 \quad (\text{do } N' = N) \quad (2)$$

Mặt khác khi m_2 dời được một đoạn x thì m_1 dời được một đoạn y và ta luôn có:

$$x = y \tan \alpha$$

Hay:

$$a_2 = a_1 \tan \alpha$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{cases} N \sin \alpha = m_1 g - m_1 a_1 \\ N \cos \alpha = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{m_1 (g - a_1)}{m_2 a_2} \quad (3)$$

Thay $a_2 = a_1 \tan \alpha$ vào (3) ta suy ra:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 \tan^2 \alpha} g \\ a_2 = \frac{m_1 \tan \alpha}{m_1 + m_2 \tan^2 \alpha} g \end{cases}$$

áp lực giữa m_1 và m_2 :

$$N = \frac{m_2 a_2}{\cos \alpha} = \frac{m_1 m_2 \tan \alpha}{(m_1 + m_2 \tan^2 \alpha) \cos \alpha}$$

b. Ta có :

$$a_2 = \frac{m_1 \tan \alpha}{m_1 + m_2 \tan^2 \alpha} g = \frac{m_1}{\frac{m_1}{\tan \alpha} + m_2 \tan \alpha} g$$

Do $\frac{m_1}{\tan \alpha} + m_2 \tan \alpha \geq 2\sqrt{m_1 m_2}$

$$\Rightarrow a_{2\min} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cdot g$$

Dấu bằng xảy ra khi : $\frac{m_1}{\tan \alpha} = m_2 \tan \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{m_1}{m_2}$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Lúc đó :

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 \cdot \frac{m_1}{m_2}} \cdot g = \frac{m_1}{m_1 + m_1} g$$

$$a_1 = \frac{g}{2}$$

Bài 35: Một vật nhỏ có khối lượng m đặt trên đỉnh một nêm tam giác nhọn, thả cho m chuyển động trên mặt nêm. Biết nêm có khối lượng M và chuyển động không ma sát trên mặt phẳng ngang.

a. Xác định gia tốc của m và M đối với mặt đất

b. Cho chiều dài mặt nêm là L . Tính vận tốc của M ngay sau khi m trượt xuống chân M .

Giải:

a. Chọn hệ quy chiếu gắn với mặt đất như hình vẽ.

Gọi gia tốc của m và M lần lượt là a_1 và a_2

Phương trình chuyển động của m :

$$P_1 + N_1 = m_1 a_1$$

Chiều lên Ox : $N_1 \sin \alpha = m a_{1x}$ (1)

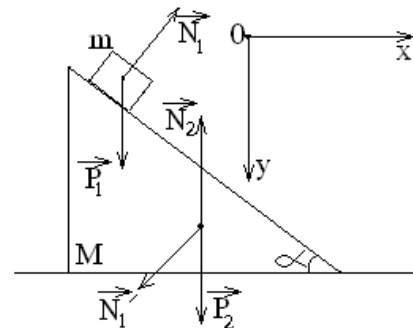
Oy : $P_1 - N_1 \cos \alpha = m a_{1y}$ (2)

Phương trình chuyển động của M :

$$P_2 + N_2 + N_1' = M a_2$$

Chiều lên Ox : $-N_1 \sin \alpha = -M a_2$ (3)

Mặt khác theo công thức cộng gia tốc: $a_1 = a_{12} + a_2$ (4) (a_{12} là gia tốc của m đối với M).



Chiếu (4) lên ox và oy ta có:

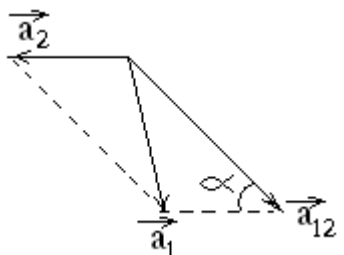
$$a_{1x} = a_{12} \cos \alpha - a_2$$

$$a_{1y} = a_{12} \sin \alpha$$

Từ đó suy ra:

$$a_{1y} = (a_{1x} + a_2) \tan \alpha \quad (5)$$

Giải hệ (1), (2), (3) và (5) ta được:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{mM \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g \\ a_{1x} = \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g \\ a_{1y} = \frac{(m + M) \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g \\ a_2 = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g \end{cases} \quad (*)$$


Gia tốc của m đối với M:

$$a_{12} = \frac{a_{1y}}{\sin \alpha} = \frac{(M + m) \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g$$

Gia tốc của m đối với mặt đất:

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2}.$$

(Với a_{1x} và a_{1y} được tính ở (*))

Gia tốc của M đối với đất sẽ là:

$$a_2 = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g$$

b. Thời gian cần để m chuyển động trên mặt nêm M là:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{12}}} = \sqrt{\frac{2L(M + m \sin^2 \alpha)}{(M + m)g \sin \alpha}}$$

Vận tốc của M lúc đó:

$$v_2 = a_2 t = m \cos \alpha \sqrt{\frac{2gL \sin \alpha}{(M + m)(M + m \sin^2 \alpha)}}.$$

Bài 36: Một thanh đồng chất, tiết diện không đổi, chiều dài l chịu sự tác dụng của 2 lực kéo căng đặt ở 2 đầu thanh $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ($F_2 > F_1$). Tính lực căng của thanh xuất hiện cách đầu đặt $\vec{F}_1$ một đoạn x. Biết $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ngược chiều.

Giải:

Gọi khối lượng cả thanh là m. Do thanh đồng chất khối lượng phần trái: $m_1 = \frac{x}{\ell} \cdot m$. Phần phải là:

$$\frac{\ell - x}{\ell} \cdot m$$

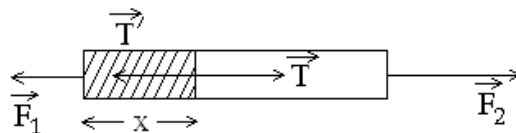
Phương trình định luật II Newton đối với phần:

Bên trái:

$$T - F_1 = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{(T - F_1) \ell}{mx}$$

Bên phải:

$$F - T' = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{(F - T') \ell}{m(\ell - x)}$$



Do hai phần có gia tốc chung $a_1 = a_2$ và chú ý $T = T'$ ta suy

$$\frac{(T - F_1)\ell}{m \cdot x} = \frac{(F - T)\ell}{m(\ell - x)}$$

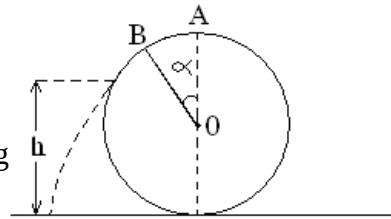
$$\Rightarrow T = \left[\frac{F_2 x}{\ell} + \frac{F_1(\ell - x)}{\ell} \right]$$

Bài 37: Vật có khối lượng m trượt từ điểm cao nhất của một hình cầu bán kính R đang đứng yên trên mặt phẳng nằm ngang.

a. Tới độ cao h nào thì nó rời hình cầu ?

b. Tính áp lực của nó tại điểm B, bán kính OB nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với OA.

Bỏ qua mọi ma sát, vận tốc ban đầu rất nhỏ.



Giải:

a. Khi vật trượt theo mặt cầu xuống đến điểm C. Theo định luật bảo toàn cơ năng:

$$mgR(1 - \cos \beta) = \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 \Rightarrow v_C^2 = 2gR(1 - \cos \beta) \quad (1)$$

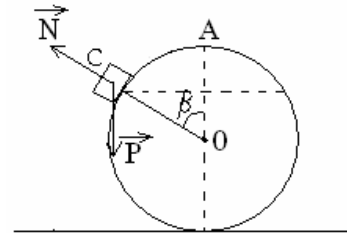
Tại C:

$$\vec{P} + \vec{N} = m \vec{a}_{ht}$$

Chiều lên chiều hướng tâm :

$$P \cos \beta - N = m \frac{v_C^2}{R}$$

Vật rời hình cầu khi $N = 0$.



$$\Rightarrow v_C^2 = gR \cos \beta \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{3}$$

Vật rời mặt cầu lúc:

$$h = R + R \cos \beta = \frac{5}{2} R \quad h = R + R \cos \beta = \frac{5}{2} R$$

b. Tại B:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} > \cos \beta \text{ Do vậy tại B vật chưa rời mặt cầu.}$$

Định luật bảo toàn cơ năng :

$$mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2gR(1 - \cos \alpha)$$

Tại B :

$$P \cos \alpha - N_B = \frac{m v_B^2}{R} \Rightarrow N_B = mg \cos \alpha - \frac{m v_B^2}{R}$$

$$\Rightarrow N_B = m \left[\frac{gR \cos \alpha - 2gR(1 - \cos \alpha)}{R} \right]$$

$$\Rightarrow N_B = \boxed{mg(3 \cos \alpha - 2)}.$$

Bài 38: Trên một tấm ván nghiêng một góc α so với phương ngang. Khi ván đứng yên thì vật cũng đứng yên. Cho ván chuyển động sang phải

với gia tốc a song song với đường nằm ngang. Tính giá trị cực đại của a để vật vẫn đứng yên trên ván. Biết hệ số ma sát trượt là μ .

Giải:

Xét vật trong hệ quy chiếu Oxy gắn với tấm ván:

Các lực tác dụng vào vật : $P; F_{qt}; N; F_{ms}$. Theo định luật II Newton ta có:

$$P + F_{qt} + N + F_{ms} = 0$$

Chiếu lên Ox :

$$P \sin \alpha + ma \cos \alpha - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

Chiếu lên Oy :

$$- P \cos \alpha + ma \sin \alpha + N = 0 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra:

$$N = m(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$$

Thế vào (1):

$$mg \sin \alpha + ma \cos \alpha - F_{ms} = 0$$

$$\Rightarrow F_{ms} = mg \sin \alpha + ma \cos \alpha$$

Vật vẫn nằm yên trên ván khi: $F_{ms} \leq \mu N$

Hay:

$$mg \sin \alpha + ma \cos \alpha \leq \mu m(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow a \leq \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \cdot g \quad (3)$$

Mặt khác còn điều kiện vật phải luôn áp vào ván có nghĩa là $N > 0$. Điều này cho ta:

$$m(g \cos \alpha - a \sin \alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow a < g \cot \alpha \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta rút ra đáp số của bài toán:

$$\Rightarrow a \leq \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \cdot g.$$

Bài 39: Vật m được kéo đều trên mặt phẳng nghiêng góc α lực kéo F hợp với mặt phẳng một góc β , hệ số ma sát là μ . Giá trị nhỏ nhất của F là bao nhiêu để thực hiện được việc này. Lúc đó β bằng bao nhiêu?

Giải:

Chọn hệ trục như hình vẽ.

Các lực tác dụng vào vật:

$$F_{ms}, p, N, F$$

Theo định luật II Newton:

$$F + F_{ms} + p + N = 0$$

Chiếu lên Ox :

$$F \cos \beta - F_{ms} - mg \sin \alpha = 0$$

Chiếu lên Oy :

$$F \sin \beta - mg \cos \alpha + N = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha - F \sin \beta$$

$$F_{ms} = \mu \cdot N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta)$$

$$\Rightarrow F \cos \beta - \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) - mg \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\mu \sin \beta + \cos \beta}.$$

Để lực F nhỏ nhất thì $\mu \sin \beta + \cos \beta$ lớn nhất.

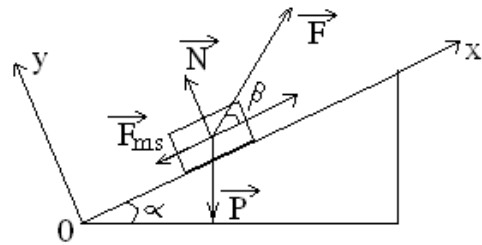
Đặt:

$$\mu \sin \beta + \cos \beta = m$$

$$\Rightarrow \mu \sin \beta + \cos \beta - m = 0$$

Đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin \beta$ và $\cos \beta$. Điều kiện có nghiệm của phương trình:

$$\mu^2 + 1 \geq m^2 \Rightarrow m \leq \sqrt{\mu^2 + 1}$$



Vậy:

$$F_{\min} = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Để tìm β ta giải phương trình:

$$\mu \sin \beta + \cos \beta = \sqrt{\mu^2 + 1}$$

$$\sin(\beta + \varphi) = 1 \Rightarrow \beta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{với} \quad \cos \varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Ta có:

$$\tan \beta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cot \varphi = \mu$$

Vậy:

$$\beta = \arctan \mu.$$

Bài 40: Tính gia tốc trọng trường ở độ sâu h so với mặt đất. Coi trái đất là hình cầu đồng chất bán kính R . Cho gia tốc ở mặt đất là g_0 .

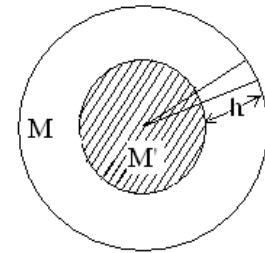
Giải:

Gọi M , m lần lượt là khối lượng của trái đất và vật. Khi vật đặt ở mặt đất thì gia tốc trọng trường của nó là:

$$g_0 = \frac{F_{hd}}{m} = \frac{GM}{R^2}$$

Khi vật ở độ sâu h lực hấp dẫn của trái đất chỉ còn lại là lực hấp dẫn của quả (M') sau khi bóc lớp vỏ có bề dày h đi (vì lớp vỏ sẽ gây ra những lực cân nhau đối với các vật đặt ở trong lòng nó) nên lực hấp dẫn của trái đất lúc

$$F'_{hd} = \frac{GM'}{(R-h)^2}$$



cầu
bằng
này sẽ là:

Ta tính M' :

Ta có:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\frac{4}{3}\pi R'^3 \cdot \rho}{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho} = \left(\frac{R-h}{R} \right)^3 \quad (\text{do trái đất đồng tính}).$$

R' là bán kính của phần cầu còn lại của trái đất.

$$\Rightarrow M' = \left(\frac{R-h}{R} \right)^3 \cdot M$$

Vậy lực hấp dẫn mà vật phải chịu:

$$F'_{hd} = \frac{G \frac{(R-h)^3}{R^3} \cdot M \cdot m}{(R-h)^2} = \frac{GMm(R-h)}{R^2 \cdot R}$$

Vậy gia tốc trọng trường ở độ sâu h sẽ là:

$$g' = \frac{F'_{hd}}{m} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R-h}{R} = \left[g_0 \left(1 - \frac{h}{R} \right) \right].$$

Bài 41: Một hình trụ đặc có khối lượng $m_1 = 6$ kg, bán kính R xuyên dọc theo một hình trụ đặc. Một thanh nhỏ không khối lượng tì vào các ổ bi. Dùng dây nối một vật $m_2 = 2$ kg vào thanh. Hệ đặt trên một mặt phẳng

ngiêng góc $\alpha = 30^\circ$. Tìm gia tốc của hệ vật biết hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng là $\mu = 0,2$, trụ lăn không trượt. Bỏ qua sức cản các ổ bi, dây không giãn và không khối lượng, $g = 10 \text{ m/s}^2$.
(Trích đề dự tuyển thi Olympic quốc gia 2002)

Giải:

Phương trình định luật II Newton cho vật 1 và vật 2:

$$p_1 \sin \alpha - F_{msn} - T = m_1 a \quad (1) \quad (\text{bỏ qua ma sát lăn})$$

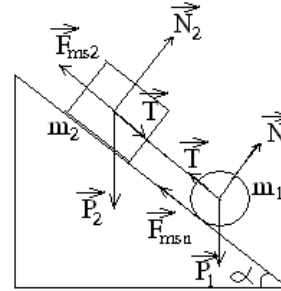
$$p_2 \sin \alpha + T - F_{ms2} = m_2 a \quad (2),$$

$$N_2 = p_2 \cos \alpha$$

$$\text{Cộng (1) và (2): } m_1 g \sin \alpha - F_{msn} - F_{ms2} + m_2 g \sin \alpha = (m_1 + m_2) a \quad (3)$$

Trụ lăn không trượt:

$$\begin{cases} F_{msn} \cdot R = I \cdot \gamma \\ a = \gamma \cdot R \\ I = \frac{m_1 R^2}{2} \end{cases} \Rightarrow F_{msn} = \frac{m_1 a}{2} \quad (4)$$



Thế (4) vào (3):

$$m_1 g \sin \alpha - \frac{m_1 a}{2} + m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha = (m_1 + m_2) a$$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha}{\frac{3m_1}{2} + m_2} = 3,3 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Bài 42: Một vật có khối lượng $m = 1 \text{ kg}$ đặt trên một tấm gỗ rồi cả hai đặt lên mặt sàn nằm ngang. Vật được treo vào một điểm O bằng một sợi dây nhẹ đàn hồi, lúc đầu sợi dây có chiều dài tự nhiên $l_0 = 40 \text{ cm}$. Hệ số ma sát trượt giữa vật và tấm gỗ là $\mu = 0,2$. Kéo từ từ tấm gỗ cho đến khi vật bắt đầu trượt trên gỗ, khi ấy dây lệch khỏi phương thẳng đứng một góc $\alpha = 30^\circ$. Tính công của lực ma sát trong hệ quy chiếu gắn với mặt sàn kể từ lúc đầu đến lúc vật bắt đầu trượt $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Giải:

Các lực tác dụng vào vật $N + P + T + F_{ms} = 0$

$$\text{Chiều lên Oy: } N - p + T \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N = mg - T \cos \alpha$$

$$\text{Chiều lên Ox: } -T \sin \alpha + F_{msn} = 0 \quad (1)$$

Lúc vật bắt đầu trượt lực ma sát nghỉ bằng ma sát trượt:

$$F_{msn} = F_{ms} = \mu N = \mu(mg - T \cos \alpha) \quad (2)$$

$$T = \frac{\mu mg}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \frac{0,2 \cdot 1 \cdot 10}{\frac{1}{2} + 0,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 3 \text{ (N)}$$

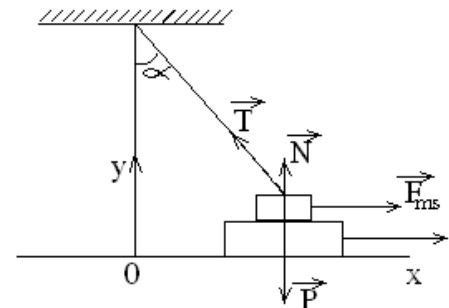
Gọi k là hệ số đàn hồi của dây:

$$T = k \cdot \Delta l = 3 \text{ (N)}$$

Độ giãn của lò xo khi vật bắt đầu trượt:

$$\Delta l = l - l_0 = \frac{l_0}{\cos \alpha} - l_0 = 40 \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \right) = 6,2 \text{ (cm)}$$

Công của lực ma sát trong quá trình trên sẽ biến hoàn toàn thành thế năng đàn hồi của sợi dây.

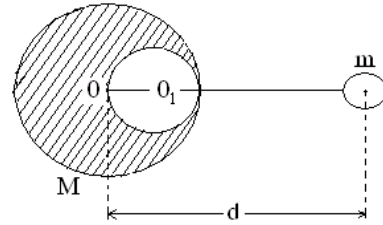


$$A_{ms} = w_t = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} T \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,2 \cdot 10^{-2}$$

Vậy:

$$A_{ms} = 0.092(J) = \boxed{92(mJ)}.$$

Bài 43: Trong một quả cầu đồng chất khối lượng M bán kính R. Người ta khoét một lỗ hình cầu bán kính R/2. Tìm lực do quả cầu tác dụng lên vật nhỏ m trên đường nối tâm hai hình cầu, cách tâm hình cầu lớn một đoạn d như hình vẽ(xem m như một chất điểm).



Giải:

Xét lực hấp dẫn của quả cầu tâm o khi chưa khoét và vật m:

$$F_{hd} = \frac{GMm}{d^2}$$

Khối lượng phần bị khoét :

$$m' = \frac{M}{8}.$$

Lực hấp dẫn do phần bị khoét và vật m sẽ là:

$$F_{hd2} = \frac{Gmm'}{(d - R/2)^2} = \frac{GMm}{8(d - R/2)^2}$$

Nếu khoét m' ta coi như vật m không chịu tác dụng của phần này. Do đó lực hấp dẫn do phần cầu 0 khi đã khoét cầu O_1 và vật m sẽ là:

$$F_{hd} = F_{hd1} - F_{hd2} = GMm \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d - \frac{R}{2})^2} \right]$$

$$F_{hd} = \boxed{GMm \left(\frac{7d^2 - 8dR + 2R^2}{8d^2(d - R/2)^2} \right)}.$$

Bài 44: Một viên đạn xuyên qua tấm ván có chiều dày là h, có vận tốc giảm từ v_0 đến v. Tìm thời gian chuyển động của đạn trong tấm ván, biết rằng lực của tấm ván tỉ lệ với $b \times nh$ phương vận tốc của viên đạn.

Giải:

Xét trong khoảng thời gian rất nhỏ dt khi đi trong tấm ván ta có phương trình định luật II Newton:

$$F = ma$$

Hay:

$$-kv^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Từ (1) ta suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{l} -kvds = m dv \\ -\frac{k}{m} dt = \frac{dv}{v^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array}$$

Lấy tích phân (2):

$$-\frac{k}{m} \int_0^h ds = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} \Rightarrow h = -\frac{m}{k} \ln \frac{v}{v_0} \quad (4)$$

Lấy tích phân (3):

$$-\frac{k}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} \Rightarrow -\frac{k}{m} t = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra:

$$t = \frac{h \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right)}{\ln \frac{v}{v_0}}$$

Vậy thời gian chuyển động của viên đạn trong tấm ván là:

$$t = \frac{h \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right)}{\ln \frac{v}{v_0}}.$$

Bài 45: Một vật có khối lượng 3kg chuyển động trong trường lực F phụ thuộc thời gian trong hệ trục tọa độ oxy:z:

$$F = [15ti + (3t - 12)j + 6t^2k] \text{ với } i, j, k \text{ là các véc tơ đơn vị trên}$$

trục ox,oy,oz.

Giả sử điều kiện ban đầu: $r_0 = 5i + 2j - 3k$, (m) và $v_0 = 2i + k$ (m/s)

Tìm sự phụ thuộc của vị trí và vận tốc của vật theo thời gian ?

Giải

Gia tốc của hạt là:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{F_x}{m} = 5t & (m/s^2) \\ a_y &= \frac{F_y}{m} = t - 4 & (m/s^2) \\ a_z &= \frac{F_z}{m} = 2t^2 & (m/s^2) \end{aligned}$$

Vận tốc của vật:

$$\begin{aligned} v_x &= \int_0^t a_x dt = \int_0^t 5t dt = \frac{5}{2}t^2 + c_1 \\ v_y &= \int_0^t a_y dt = \int_0^t (t - 4) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + c_2 \\ v_z &= \int_0^t a_z dt = \int_0^t 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + c_3 \end{aligned}$$

Thời điểm ban đầu ta có:

$$\begin{cases} v_{0x} = 2 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Vận tốc của vật theo thời gian:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(2 + \frac{5}{2}t^2\right)^2 + \left(\frac{t^2}{2} - 4t\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t^3 + 1\right)^2}$$

Hay:

$$\begin{aligned} v &= v_x i + v_y j + v_z k \\ v &= \left(2 + \frac{5}{2}t^2\right) i + \left(\frac{t^2}{2} - 4t\right) j + \left(\frac{2}{3}t^3 + 1\right) k \end{aligned}$$

Vị trí của vật:

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_0^t v_x dt = 5 + \int_0^t \left(2 + \frac{5}{2} t^2 \right) dt = 5 + 2t + \frac{5}{6} t^3 \\ y = y_0 + \int_0^t v_y dt = 2 + \int_0^t \left(\frac{t^2}{2} - 4t \right) dt = 2 + \frac{t^3}{6} - 2t^2 \\ z = z_0 + \int_0^t v_z dt = -3 + \int_0^t \left(1 + \frac{2}{3} t^3 \right) dt = -3 + t + \frac{t^4}{6} \end{cases}$$

Vậy vị trí của vật phụ thuộc vào thời gian như sau:

$$\vec{r} = xi + yj + zk = \left(5 + 2t + \frac{5}{6} t^3 \right) \vec{i} + \left(2 + \frac{t^3}{6} - 2t^2 \right) \vec{j} + \left(-3 + t + \frac{t^4}{6} \right) \vec{k}.$$