
HÃY NHÌN BẰNG “CON MẮT KINH ĐIỂN”

VÕ QUỐC BÁ CẦN

Bài viết số 1. Kỹ thuật thêm - tách - bớt trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Hôm thứ hai, ngày 25/10/2009, đang học thì thầy Nam Dũng gọi cho tôi, thầy bảo tôi soạn một bài về bất đẳng thức để chủ nhật lên giảng ở câu lạc bộ toán học. Soạn một bài để giảng thì không khó nhưng soạn làm sao để học sinh nắm bắt được điều mình muốn nói thì quả thật không dễ chút nào, tôi đã phải mất mấy ngày để nghĩ về vấn đề này. Tôi nghĩ, ở câu lạc bộ, các bạn học sinh đã được các thầy dạy cho rất nhiều phương pháp rồi, chẳng lẽ giờ mình lại lên giảng về các phương pháp đó nữa, SOS, hay dồn biến, hay EV, ... Đó chính là vấn đề khiến tôi đau đầu. Sau mấy ngày suy nghĩ, tôi quyết định soạn một bài về bất đẳng thức kinh điển. Lí do là gì thì tôi nghĩ các bạn cũng hiểu, các phương pháp SOS, dồn biến, ... có tính thiết thực cao trong giải toán nhưng nếu ta cứ dùng chúng để giải trong thi học sinh giỏi thì thật không hay. Thi học sinh giỏi là để chọn những người có sáng tạo chứ không phải để chọn những người giỏi “dao búa”. Vấn đề này xin không bàn nhiều ở đây.

Về bất đẳng thức kinh điển, chúng ta đã biết rất nhiều bất đẳng thức loại này như: AM-GM, Cauchy-Schwarz, Chebyshev, ... Mỗi loại trong chúng đều có những kỹ thuật sử dụng riêng, đòi hỏi phải có sự tư duy tốt. Nếu có thể, tôi sẽ cố gắng giới thiệu hết các kỹ thuật này vào những dịp khác. Còn trong bài này, tôi xin được giới thiệu một kỹ thuật mà tôi vẫn hay dùng - “Kỹ thuật thêm - tách - bớt” trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Trước hết xin được nhắc lại về bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, nó được phát biểu như sau: Với hai bộ số thực bất kì $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_ib_j = a_jb_i$ với mọi $i \neq j$.

Ta có một dạng khác của bất đẳng thức này rất hay được sử dụng, nó được phát biểu như sau: Với hai bộ số thực bất kì $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn b_i dương, ta có

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Đẳng thức cũng xảy ra khi và chỉ khi $a_ib_j = a_jb_i$ với mọi $i \neq j$. (Lưu ý là để sử dụng tốt dạng này, các bạn cần có cái nhìn “hai chiều”)

Chúng ta bắt đầu bằng ví dụ đơn giản sau

Ví dụ 1. Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} + \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải. Lời giải của bài toán thật đơn giản như sau: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1^2}{a+b} + \frac{1^2}{a+c} \geq \frac{(1+1)^2}{(a+b)+(a+c)},$$

suy ra

$$\frac{1}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right).$$

Theo đánh giá này, ta được

$$\sum \frac{bc}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right) = \frac{a+b+c}{4}.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. $\square$

Lời giải này tuy đơn giản nhưng việc tìm ra nó thật không dễ. Điểm đặc biệt ở đây chính là ở việc phát hiện ra hằng đẳng thức

$$\sum \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{ab}{a+c} \right) = a+b+c,$$

để có thể tìm cách tách thích hợp cho các mẫu số của các đại lượng bên vế trái, từ đó đưa đến lời giải Cauchy-Schwarz như trên. Đây là một ý tưởng hay và ta có thể sử dụng nó để giải một số bài toán khác. Sau đây là một ví dụ khác

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{4b^2+c^2+a^2} + \frac{1}{4c^2+a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Sử dụng ý tưởng như trên, ta sẽ tìm một hằng đẳng thức thích hợp để có thể giúp ta chứng minh bất đẳng thức đã cho. Các bạn hãy để ý đến hằng đẳng thức sau

$$\sum \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right) = 3.$$

Từ đó, ta nghĩ đến cách tách $4a^2+b^2+c^2 = 2a^2 + (a^2+b^2) + (a^2+c^2)$ và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như sau

$$\frac{(a+b+c)^2}{4a^2+b^2+c^2} \leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}.$$

Theo đánh giá này, ta có

$$9 \sum \frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} \leq \sum \frac{a^2}{2a^2} + \sum \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) = \frac{9}{2}.$$

Và như thế, bằng cách chia cả hai vế của bất đẳng thức cuối cho 9, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. $\square$

Qua hai ví dụ trên, chúng ta có thể thấy kỹ thuật tách nhóm nếu biết sử dụng khéo léo sẽ cho ra những lời giải hay và độc đáo. Tuy nhiên, đôi khi ta không thể tìm ra những hằng đẳng thức thích hợp để có thể giúp ta giải bài toán. Vậy lúc này ta nên làm thế nào? Kỹ thuật tách nhóm không còn hiệu quả? Thật ra, ta không nhất thiết phải tìm các hằng đẳng thức mà ta cũng có thể tìm các bất đẳng thức thích hợp (tất nhiên là phải chặt và dễ chứng minh) để sau khi sử dụng Cauchy-Schwarz, ta có thể sử dụng các bất đẳng thức này để hoàn tất lời giải. Hai bất đẳng thức mà tôi vẫn thường sử dụng là

Kết quả 1. Với ba số thực không âm a, b, c tùy ý, ta có

$$(a) \quad \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1;$$

$$(b) \quad \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} \leq 1.$$

Việc chứng minh hai bất đẳng thức này khá đơn giản, các bạn có thể tự chứng minh. Bây giờ, chúng ta hãy cùng xét ví dụ sau

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta đều có

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}.$$

Lời giải. Để ý rằng

$$(2a+b)(2a+c) = (2a^2 + bc) + a(a+b+c) + a(a+b+c).$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{(1+1+1)^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{a(a+b+c)} + \frac{1}{a(a+b+c)},$$

suy ra

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} &\leq \frac{1}{9} \left(\sum \frac{a^2}{2a^2 + bc} + 2 \sum \frac{a}{a+b+c} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\sum \frac{a^2}{2a^2 + bc} + 2 \right). \end{aligned}$$

Vậy, chúng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1.$$

Đó chính là **Kết quả 1a**. □

Một ví dụ khác cho kỹ thuật tách này là bài kiểm tra câu lạc bộ toán học năm ngoái

Ví dụ 4. Cho a, b, c là ba số thực không âm tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{3b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{3c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức bên trái khá đơn giản, nó được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức

$$(x+y)^2 \leq 3x^2 + 3y^2$$

với mọi $x, y \geq 0$. Bây giờ, ta sẽ xét đến bất đẳng thức bên phải, hãy để ý ở phân tích sau

$$3a^2 + (b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + (2a^2 + 2bc).$$

Theo đó, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho ta

$$\frac{(1+1)^2}{3a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{2a^2 + 2bc} \leq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{2a^2 + bc}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta thu được

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} &\leq \frac{1}{4} \left(\sum \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \sum \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \sum \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right). \end{aligned}$$

Bài toán được đưa về chứng minh

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1.$$

Đó chính là **Kết quả 1a**. □

Kỹ thuật tách nhóm thường cho ta những lời giải rất đẹp và gọn gàng. Nhưng nếu trong trường hợp ta không tìm được cả hằng đẳng thức lẫn bất đẳng thức thích hợp để tách và đánh giá thì sao? Lúc này, ta có thể sử dụng một kỹ thuật khác là thêm - bớt.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là ba số thực tùy ý thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} \geq 0.$$

Lời giải. Với việc xuất hiện “đa phần” các đại lượng a^2, b^2, c^2 cho ta thấy rằng các đại lượng bc, ca, ab trở nên “lẻ loi”. Từ đó ta nảy ra ý tưởng sử dụng những đánh giá thích hợp để làm triệt tiêu những đại lượng lẻ loi này. Đơn giản nhất là sử dụng bất đẳng thức AM-GM,

$$bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2}, \quad ca \leq \frac{c^2 + a^2}{2}, \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau là đủ

$$\frac{2x - y - z}{x + 2y + 3z} + \frac{2y - z - x}{y + 2z + 3x} + \frac{2z - x - y}{z + 2x + 3y} \geq 0,$$

trong đó $x = a^2, y = b^2$ và $z = c^2$. Ta muốn sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức này. Nhưng để có thể làm được điều đó, trước tiên các tử số của các phân thức phải là những số không âm, mà ở đây thì ta chưa biết chắc được tính chất này (cụ thể là trong ba tử số luôn có một số không dương!). Cho nên để có thể áp dụng được bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta nên cộng vào mỗi phân số một lượng thích hợp để mỗi tử số đều là số không âm. Ta nên chọn lượng thêm vào sao cho các tử số “càng nhỏ càng tốt” dù vẫn không âm. Một cách tự nhiên, ta chọn được $\frac{1}{2}$ là số thích hợp để thêm vào. Khi đó, ta viết lại bất đẳng thức trên như sau

$$\left(\frac{2x - y - z}{x + 2y + 3z} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2y - z - x}{y + 2z + 3x} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2z - x - y}{z + 2x + 3y} + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{5x + z}{x + 2y + 3z} + \frac{5y + x}{y + 2z + 3x} + \frac{5z + y}{z + 2x + 3y} \geq 3.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum \frac{5x + z}{x + 2y + 3z} \geq \frac{36(x + y + z)^2}{\sum (5x + z)(x + 2y + 3z)}.$$

Vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$12(x + y + z)^2 \geq \sum (5x + z)(x + 2y + 3z).$$

Khai triển ra và thu gọn, ta thấy rằng bất đẳng thức này tương đương với

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Một kết quả quen thuộc. □

Ví dụ 6. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1.$$

Lời giải. Các tử số của các phân thức trong bất đẳng thức đều là những số dương, có vẻ như nếu ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì sẽ ra. Nhưng nếu các bạn thử trực tiếp sẽ thấy sau khi áp dụng là bị ngược chiều. Bây giờ, ta hãy thử bỏ bớt mỗi phân số một lượng nhưng vẫn đảm bảo tử số của chúng dương (nghĩa là dương nhưng càng nhỏ càng tốt). Với để ý rằng $4a - (3a - b + c) = a + b - c > 0$, ta có thể chọn ngay được lượng bỏ bớt thích hợp là $\frac{1}{4}$. Khi đó, ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\left(\frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{b}{3b-c+a} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{c}{3c-a+b} - \frac{1}{4} \right) \geq \frac{1}{4},$$

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có thể đưa bài toán về chứng minh

$$(a+b+c)^2 \geq \sum (a+b-c)(3a-b+c).$$

Nhưng bất đẳng thức này thực chất chính là một hằng đẳng thức! $\square$

Các kỹ thuật thêm - tách - bớt là những kỹ thuật cơ bản của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz hay được sử dụng trong thi olympic toán. Tuy nhiên, để có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz hiệu quả hơn, các bạn không nên dùng riêng lẻ từng kỹ thuật mà nên kết hợp chúng lại. Sau đây là hai ví dụ để minh họa cho tư tưởng đó mà việc bình luận xin được dành cho các bạn

Ví dụ 7. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4a+4b+c} + \frac{b}{4b+4c+a} + \frac{c}{4c+4a+b} \leq \frac{1}{3}.$$

Lời giải. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức cho $4(a+b+c)$ và để ý rằng

$$\frac{a(4a+4b+4c)}{4a+4b+c} = \frac{3ca}{4a+4b+c} + a,$$

ta có thể viết lại nó ở dạng tương đương là

$$\sum \frac{ca}{4a+4b+c} \leq \frac{a+b+c}{9}.$$

Tiếp theo, với để ý ở phân tích

$$4a+4b+c = (2a+b) + (2a+b) + (2b+c),$$

sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\frac{(1+1+1)^2}{4a+4b+c} \leq \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum \frac{ca}{4a+4b+c} &\leq \frac{1}{9} \sum \left(\frac{2ca}{2a+b} + \frac{ca}{2b+c} \right) \\ &= \frac{1}{9} \sum \left(\frac{2ca}{2a+b} + \frac{bc}{2a+b} \right) = \frac{a+b+c}{9}. \end{aligned}$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. $\square$

Ví dụ 8. Cho a, b, c là ba số thực tùy ý thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - bc}{4a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{4b^2 + 4c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{4c^2 + 4a^2 + b^2} \geq 0.$$

Lời giải. Để ý rằng

$$\frac{4(a^2 - bc)}{4a^2 + 4b^2 + c^2} - 1 = -\frac{(2b+c)^2}{4a^2 + 4b^2 + c^2}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại dưới dạng

$$\frac{(2b+c)^2}{4a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{(2c+a)^2}{4b^2 + 4c^2 + a^2} + \frac{(2a+b)^2}{4c^2 + 4a^2 + b^2} \leq 3.$$

Bây giờ, sử dụng phân tích

$$4a^2 + 4b^2 + c^2 = (2a^2 + 4b^2) + (c^2 + 2a^2)$$

kết hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\frac{(2b+c)^2}{4a^2 + 4b^2 + c^2} \leq \frac{(2b)^2}{2a^2 + 4b^2} + \frac{c^2}{c^2 + 2a^2}.$$

Theo đó, ta có

$$\begin{aligned} \sum \frac{(2b+c)^2}{4a^2 + 4b^2 + c^2} &\leq \sum \left(\frac{2b^2}{a^2 + 2b^2} + \frac{c^2}{c^2 + 2a^2} \right) \\ &= \sum \left(\frac{2b^2}{a^2 + 2b^2} + \frac{a^2}{a^2 + 2b^2} \right) = 3. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Cuối cùng, xin nêu ra một số bài tập để bạn đọc có thể tự rèn luyện thêm

1. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}.$$

2. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c , bất đẳng thức sau đây luôn đúng

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

3. Cho a, b, c là các số thực tùy ý thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{3}{4}.$$

4. Cho a, b, c là các số thực tùy ý thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} + \frac{1}{1-ab} \leq \frac{9}{2}.$$

5. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2} + \frac{2b^2-ca}{c^2-ca+a^2} + \frac{2c^2-ab}{a^2-ab+b^2} \geq 3.$$

6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2a+b}{2a+c} + \frac{2b+c}{2b+a} + \frac{2c+a}{2c+b} \geq 3.$$

7. Cho a, b, c là ba số thực tùy ý thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \geq 0.$$

8. Cho a, b, c, d là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{a+2b+c} + \frac{b-c}{b+2c+d} + \frac{c-d}{c+2d+a} + \frac{d-a}{d+2a+b} \geq 0.$$

9. Cho a, b, c, d là các số thực tùy ý thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{sym} \frac{1}{1-ab} \leq 8.$$

10. Với mỗi số tự nhiên $n \geq 3$, ta đặt

$$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2-2n-1}}.$$

Xét các số thực tùy ý $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[\frac{1}{a_n}, a_n \right]$. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{2}.$$

Tài liệu

- [1] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, nhà xuất bản Tri Thức, 2006.
- [2] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL publishing house, 2004.
- [3] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities: Old and New Methods*, GIL publishing house, 2006.
- [4] Vasile Cirtoaje, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Inequalities with Beautiful Solutions*, to be published.
- [5] Võ Quốc Bá Cẩn, Cosmin Pohoata, *Old and New Inequalities*, volume 2, GIL publishing house, 2008.
- [6] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, nhà xuất bản Hà Nội, 2009.