

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP HUYỆN**  
**NĂM HỌC 2013-2014**

**Câu 1. (2 điểm)**

Cho 
$$P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$$

- a) Rút gọn P
- b) Tìm giá trị nguyên của  $a$  để P nhận giá trị nguyên.

**Câu 2. (2 điểm)**

- a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9
- b) Tìm các giá trị của  $x$  để biểu thức:

$$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$
 có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Câu 3. (2 điểm)**

- a) Giải phương trình: 
$$\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$
- b) Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

**Câu 4. (3 điểm)**

Cho tam giác đều  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của BC. Một góc  $\angle M$  bằng  $60^\circ$  quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh  $Mx, My$  luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

- a)  $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$
- b)  $DM, EM$  lần lượt là tia phân giác của các góc  $BDE$  và  $CED$
- c) Chu vi tam giác  $ADE$  không đổi

**Câu 5. (1 điểm)**

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

## ĐÁP ÁN

### Câu 1.

a)

$$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a - 1)(a + 1)(a - 4)$$

$$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a - 2)(a - 1)(a - 4)$$

Nêu ĐKXD:  $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

Rút gọn  $P = \frac{a+1}{a-2}$

b)

$$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2};$$

ta thấy  $P$  nguyên khi  $a-2$  là ước của 3, mà  $U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}$ , từ đó tìm được  $a \in \{-1; 3; 5\}$

### Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là  $a$  và  $b$ , ta có  $a+b$  chia hết cho 3.

Ta có:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$$

Vì  $a+b$  chia hết cho 3 nên  $(a+b)^2 - 3ab$  chia hết cho 3

Do vậy  $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$  chia hết cho 9

b)  $P = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$

Ta thấy  $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$  nên  $P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

Do đó 
$$\text{Min} P = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

**Câu 3. a)**

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 6)(x + 5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$$

ĐKXĐ:  $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) Đặt  $b + c - a = x > 0; c + a - b = y > 0; a + b - c = z > 0$

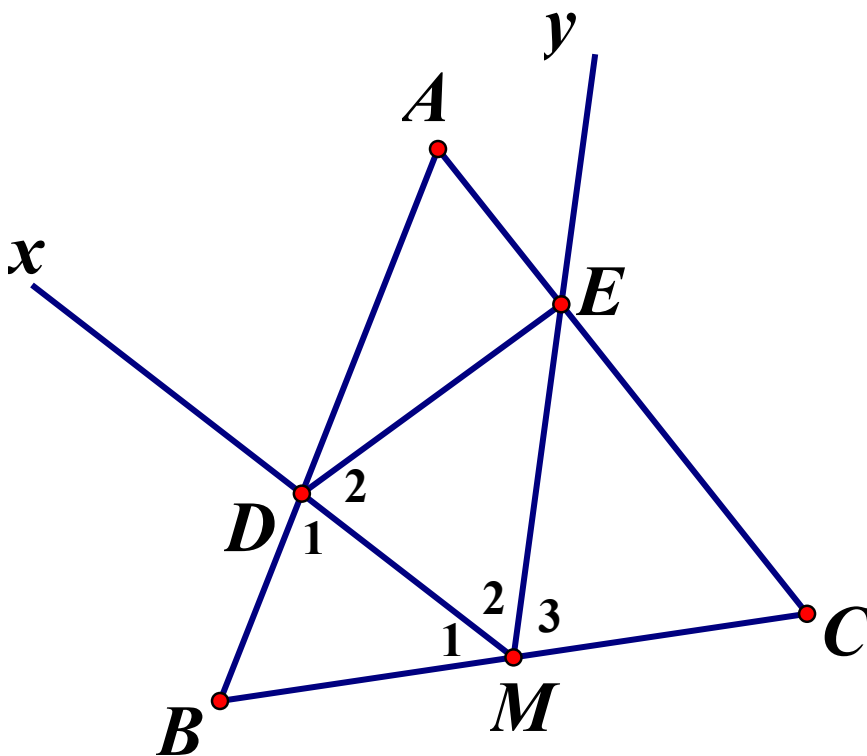
từ đó suy ra  $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2};$

Thay vào ta được

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra  $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$  hay  $A \geq 3$

**Câu 4.**



a) Trong tam giác  $BDM$  ta có:  $\widehat{B_1} = 120^\circ$  -  $\widehat{M_1}$

Vì  $M_2 = 60^\circ$  nên ta có:  $M_3 = 120^\circ - M_1$

Suy ra  $D_1 = M_3$ . Chứng minh  $\Delta BMD \sim \Delta CEM$  (1)

$$\frac{BD}{CM}$$

Suy ra  $\frac{BM}{CE} = \frac{BD}{CM}$ , Từ đó  $BD.CE = BM.CM$

Vì  $BM = CM = \frac{BC}{2}$ , nên ta có:  $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

$$\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$$

b) Từ (1) suy ra  $CM = EM$

Chứng minh  $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ , do đó  $DM$  là tia phân giác  $\widehat{BDE}$

Chúng minh tương tự ta có :  $EM$  là tia phân giác  $\angle ED$

c) Gọi  $H, I, K$  là hình chiếu của  $M$  trên  $AB, DE, AC$ .

Chứng minh  $DH = DI, EI = EK$

Tính chu vi tam giác bằng  $2AH$  - không đổi

**Câu 5.**

Gọi các cạnh của tam giác vuông là  $x, y, z$  trong đó cạnh huyền là  $z$

( $x, y, z$  là các số nguyên dương)

Ta có:  $xy = 2(x + y + z)(1)$  và  $x^2 + y^2 = z^2(2)$

Từ (2) suy ra  $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$ , thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

Suy ra  $z + 2 = x + y - 2 \Rightarrow z = x + y - 4$ ; thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của  $x, y, z$  là:

$$(x; y; z) \in \{ (5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10) \}$$