# **BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN**

## **A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

### **1. Phương trình** (1)

- Nếu  thì phương trình (1) vô nghiệm.

- Nếu  thì tồn tại duy nhất số  thoả mãn .

Khi đó phương trình (1) tương đương với



**Chú ý**

1) Nếu góc  được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:



2) Nếu  là các biểu thức của  thì



### **2. Phương trình  (2)**

- Nếu  thì phương trình (2) vô nghiệm.

- Nếu  thì tồn tại duy nhất số  thoả mãn .

Khi đó phương trình (2) tương đương với



**Chú ý**

1) Nếu góc  được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:



2) Nếu  là các biểu thức của  thì



### **3. Phương trình  (3)**

Phương trình (3) luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số .

Luôn tồn tại duy nhất số  thoả mãn tan .

Khi đó, phương trình (3) tương đương với



**Chú ý**

1) Nếu góc  được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:



2) Nếu  là các biểu thức của  thì .

### **4. Phương trình  (4)**

Phương trình (4) luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số .

Luôn tồn tại duy nhất số  thoả mãn .

Khi đó, phương trình (4) tương đương với 

Chú ý

1) Nếu góc  được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:



2) Nếu  là các biểu thức của  thì .

## **B. VÍ DỤ**

**Ví dụ 1**. Giải các phương trình sau:

a) 

b) 

c) 

d) .

Giải

a) Ta có .

b) Ta có 



c) Giả sử  là góc thoả mãn . Khi đó ta có



d) Ta có 



**Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

a) 

b) ;

c) 

d) .

**Giải**

a) Ta có 



b) Ta có 



c) Ta có 



d) Ta có 



**Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

a) ;

b) ;

c) 

d) .

**Giải**

a) Ta có 



b) Ta có 



Từ đó, ta được nghiệm của phương trình là: .



c) Ta có



d) Điều kiện .



Vì góc  với  thoả mãn điều kiện , nên nghiệm của phương trình là



**Ví dụ 4.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  trên đoạn .

**Giải**

Ta có



Vì  nên .

Mặt khác, vì  nên .

Vậy phương trình đã cho có 15 nghiệm trên đoạn  là  với .

## **C. BÀI TẬP**

1. Giải các phương trình sau:

a) ;

b) ;

c) ;

d) .

**Lời giải**

a) Ta có



b) Ta có .

c) Ta có 



d) Ta có 



1. Giải các phương trình sau:

a) ;

b) 

c) ;

d) .

**Lời giải**

a) Ta có



Vậy phương trình đã cho tương đương với 



Không xảy ra trường hợp .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm .

b) Ta có .

Vậy phương trình đã cho tương đương với



c) Ta có 



Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện . Ta có 



Vì  thoả mãn điều kiện  nên nghiệm của phương trình đã cho là .

1. Giải các phương trình sau:

a) ;

b) ;

c) ;

d) .

**Lời giải**

a) Ta có 

- Phương trình  vô nghiệm.

- Gọi  là góc thoả mãn . Vậy



b) Ta có 



Vì  kéo theo , nên phương trình tương đương với



c) Ta có 



Từ đó ta được  hay .

d) Điều kiện  và .

Ta có .

Ta thấy  không thoả mãn điều kiện . Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

1. Tìm các giá trị của  để giá trị tương ứng của các hàm số sau bằng nhau:

a)  và ;

b)  và .

**Lời giải**

a) Giá trị tương ứng của hai hàm số  và  bằng nhau nếu



b) Giá trị tương ứng của hai hàm số  và  bằng nhau nếu



1. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước  (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách  (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm  trên guồng đến mặt nước là  trong đó 

với  là thời gian quay của guồng , tính bằng phút; ta quy ước rằng  khi gầu ở trên mặt nước và  khi gầu ở dưới mặt nước.



a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

**Lời giải**

a)  nên  và do đó ta có



Suy ra, gầu ở vị trí cao nhất khi 

Vậy gầu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm  phút.

Tương tự, gầu ở vị trí thấp nhất khi



Vậy gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm  phút.

b) Gầu cách mặt nước  khi 



Vậy chiếc gầu cách mặt nước  lần đầu tiên tại thời điểm  phút.

1. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố  trong ngày thứ  (ở đây  là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số 

a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố  có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố  có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố  có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

**Lời giải**

Vì  nên , do đó



a) Ngày thành phố  có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với



Vì  nên , suy ra . Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố  sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

b) Ngày thành phố  có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với



Vì  nên , suy ra . Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố  sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

c) Thành phố  có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu



Từ đó ta được . Vì  nên  suy ra  hoặc . Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố  sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.