nên cũng chả mấy ai quan tâm. Đến đoạn giữa thế kỷ 20- khi máy tính bắt đầu được sử dụng, khi các vấn đề tối ưu trong kinh tế, kỹ thuật trở nên quan trọng thì người ta lại tìm lại các lý thuyết về đa diện. Từ những năm 50 trở lại đây, lý thuyết đa diện phát triển rất nhanh.
Hiện nay có khối thứ lằng nhằng trừu tượng liên quan đến nó, cũng có khá nhiều connection giữa lý thuyết đa diện và các loại tóan khác- mà có lẽ được nhiều người quan tâm nhất là các mối tương quan của nó với hình học đại số (vì số lượng người học HHDS rất đông đảo). Grothendieck sau khi tìm hiểu mấy cuốn sách về đa diện đều của Coxeter cũng có đưa ra một số vấn đề liên quan đến hình học đại số mà hình như đến nay vẫn chưa được giải quyết. Ngoài ra mấy cái lý thuyết mới của hình học vi phân như Hyperkaehler Geometry của Witten- Rolanzky đưa ra năm 1996 (quaternion geometry- tức là hình học vi phân không gian 4n chiều), Correlation polytopes đưa ra năm 1989 (các polytopes với các đỉnh là các ma trận!) với ứng dụng chủ yếu cho các loại quantum theory cũng có ít nhiều liên hệ với lý thuyết đa diện.

6. Schlegel diagram?

Schlegel diagram có thể gọi là một mẹo vặt rất đơn giản của hình học: chiếu tất cả các mặt khác của một hình đa diện lồi bất kỳ xuống một mặt của nó. Hoặc nói một cách khác- chúng ta cầm một khung hình lập phương $ABCDEFGH$ lên chẳng hạn, dí thật sát mắt vào một mặt, tạm gọi là mặt $ABCD$ của nó, thì cuối cùng hình ảnh hiện ra là chúng ta nhìn thấy mọi mặt bên trong của hình lập phương này.
Nếu nói formal, thì để chiếu một hình ảnh nhiều chiều hơn xuống thấp chiều hơn, chúng ta chỉ việc di chuyển điểm nhìn tới sát một mặt sao cho nó nằm ở miền trong giao bởi mọi đường thẳng đi qua các mặt đa diện khác.
Chiếu từ không gian nhiều chiều hơn vì thế, tương tự. Ví dụ cái hình ở post đầu tiên em đưa lên là hình lập phương trong không gian 4 chiều- gồm 16 đỉnh, 32 cạnh, 32 mặt 2 chiều (hình vuông), và 16 mặt 3 chiều (hình lập phương). Còn làm sao để nhìn được nó thành 2 cái hình lập phương lồng vào nhau thế thì là do cách chiếu Schlegel luôn dùng một mặt (n-1) để chiếu. Ở trong không gian 3 chiều, một mặt (n-1) của một đa diện là một mặt 2 chiều. Trong không gian 4 chiều thì một mặt của nó chính là 1 mặt 3 chiều- tức là hình lập phương!

7. Phân lớp các đa diện trong không gian 3 chiều.

Steinitz đã làm việc này khá đơn giản: vẽ một mặt phẳng tọa độ 2 chiều, với trục tung là trục f2 (mặt), trục hòanh là trục $f0$ (đỉnh).
Nhờ công thức $f0-f1+f2=2$ cho đa diện 3 chiều chúng ta có những gì?

1) $f0\geq 4$
2) $f2\geq 4$
3) $f0\leq 2f2-4$
4) $f2\leq 2f0-4$

Chứng minh:
1) và 2) là bất đẳng thức cơ bản, vì bất cứ đa diện 3 chiều nào cũng có ít nhất 4 đỉnh, 4 mặt.
3) và 4) tương tự như nhau:
- Vì một mặt có ít nhất 3 cạnh, và mỗi cạnh là giao của 2 mặt $\Rightarrow 3f2\leq 2f1$.

Thay vào công thức Euler ở trên chúng ta được

$$2 = f0 - f1 + f2 \le f0 - 3f\frac{1}{2} + f2 = f0 - f\frac{2}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Vậy thì, chỉ việc kẻ 2 đường thẳng cắt nhau tại điểm $I = (4,4)$ bị chặn bởi hai nửa mặt phẳng $f0 \le 2f2 - 4$ và $f2 \le 2f0 - 4$ chúng ta được một cách quạt mở (ra vô cùng) mà bất cứ một điểm nguyên nào nằm trong cách quạt mở này cũng là số đỉnh và số mặt của một đa diện (các bạn thử xem!).

Ví dụ, tại điểm $I = (4,4)$ chúng ta được hình tứ diện. Tại điểm $J = (5,5)$ chúng ta được một đa diện có 5 đỉnh, 8 cạnh, 5 mặt. Tại điểm $K = (8,7)$ chúng ta được một đa diện khác .v.v.

Cần chú ý là các điểm nguyên nằm trên đường thẳng $f0 = 2f2 - 4$ gọi là các đa diện simplicial, còn các điểm nằm trên đường thẳng $f2 = 2f0 - 4$ gọi là các đa diện simple. Các đa diện Simplicial n chiều là các đa diện mà tất cả các mặt của nó có đúng n cạnh. Các đa diện simple n chiều là các đa diện mà tất cả các đỉnh của nó là giao của đúng n mặt. Ví dụ hình lập phương 3 chiều là một đa diện simple, vì tất cả các đỉnh của nó là giao của đúng 3 mặt. Hai dạng đa diện simple và đa diện simplicial này là các trường hợp extreme bao lấy toàn bộ tính chất tổ hợp (có nghĩa là số lượng đỉnh, cạnh, mặt v.v.) của các đa diện khác. Các simplicial complex nó chỉ tương ứng với các simplicial polytopes- một lớp polytopes đặc biệt, là lớp polytopes "chặn trên" của tất cả các polytopes. Ví dụ như trong các đa diện 3 chiều thì lớp simplicial polytopes là lớp các polytopes thỏa mãn phương trình f0 = 2f2 - 4, mà em đã viết ở bài phân lớp các đa diện 3 chiều.

Trong không gian 4 chiều, tình thế khác. Kết luận đầu tiên là: các polytopes có thể nằm khá lung tung, chứ không nằm kín các điểm nguyên trong một polyhedral cone 3 chiều cố định, tương tự như tất cả các đa diện 3 chiều nằm kín các điểm nguyên trong cái cone 3 chiều nữa. Giả sử dùng các bất phương trình

$$f0 \ge 5,\ f3 \ge 5,\ f1 \ge 10,\ f1 \ge 4f0 - 10,\ f0 + f3 \ge f1 \quad vì \quad f2 \ge 2f3,\ f1 \le \frac{f0(f0-1)}{2}$$ để tạo ra một hình 3 chiều mở (không bị chặn ra vô cùng) thì vẫn chưa thể biết chính xác một điểm X nằm trong cái mặt cone 3 chiều mở này có phải là một Polytope hay không.

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC SƯU TẦM

1. Kí hiệu S_A, S_B, S_C tương ứng là diện tích của các thất giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7, C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$. Giả sử $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$. Chứng minh rằng:
$$\frac{S_A}{2} < S_B + S_C < S_A$$

Giải:

Đặt $A_1A_2 = a, A_1A_3 = b, A_1A_4 = c.$

Ta có: $\begin{cases} A_1A_2 = A_3A_4 = A_4A_5 \\ A_1A_3 = A_3A_5 = b \qquad ,b \neq c \\ A_1A_4 = A_1A_5 = c \end{cases}$

Sử dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $A_1A_3A_4A_5$ ta có:

$A_1A_4.A_3A_5 = A_1A_5.A_3A_4 + A_1A_3.A_4A_5 = ab + ac$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1$

Ta có:

$\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta B_1B_2B_3$

$\Rightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3} = \frac{A_3A_2}{B_3B_2} \Rightarrow B_1B_2 = \frac{a^2}{b} \Rightarrow C_1C_2 = \frac{a^2}{c}$

Ta có các thất giác đều đồng dạng với nhau.

$\Rightarrow \frac{S_B}{S_A} + \frac{S_C}{S_A} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2$

Ta có:

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)^2 \leq \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1 - \frac{2a^2}{bc} < 1$

$\Rightarrow$ đpcm.

2. Trên mặt phẳng cho hai hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ và $A_2A_4A_6A_8$ có chung tâm O. Các cạnh của hình $A_2A_4A_6A_8$ cắt các tia OA_1, OA_3, OA_5, OA_7 tại F_1, F_3, F_5, F_7. Các cạnh của hình $A_1A_3A_5A_7$ cắt tia OA_2, OA_4, OA_6, OA_8 tại F_2, F_4, F_6, F_8. Với mỗi $k \in \{1, 2, 3, ..., 8\}$ đặt $\lambda_k = \frac{OF_k}{OA_k}$. Chứng minh tồn tại $k \in \{1, 2, 3, ..., 8\}$ để $\lambda_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải:

* Cách dựng:

Cho hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ tâm O. Gọi M, F_1, F_3, F_5, F_7 lần lượt là trung điểm của $A_1A_3, OA_1, OA_3, OA_5, OA_7$. F_1F_3 cắt OM, A_3A_5, A_1A_7 lần lượt tại *P, Q, R*. $A_2 \in PQ, A_8 \in PR$ sao cho $\frac{PQ}{PA_2} = \frac{PR}{PA_8} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dựng hình bình hành $A_2A_4A_6A_8$ nhận tâm O làm tâm thì dễ thấy $\frac{OF_i}{OA_i} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} (i = 1,3,5,7)$ và $\frac{OF_j}{OA_j} = \frac{PQ}{PA_2} < \frac{1}{\sqrt{2}} (j = 2,4,6,8)$.

Để tránh xảy ra trường hợp này ta bổ sung vào giả thiết: Trên mặt phẳng cho 2 hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$, $A_2A_4A_6A_8$ có chung tâm O sao cho không có cạnh nào của hình bình hành này cắt 2 cạnh đối của hình hành kia.

Xét 2 trường hợp:

a) Nếu tồn tại một đỉnh (vd: A_1) của hình bình hành này nằm trong hình hoặc trên cạnh của hình bình hành kia thì $\frac{OF_1}{OA_1} \geq 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Kết luận bài toán đúng.

b) Nếu mọi đỉnh của hình bình hành này nằm ngoài hình bình hành kia thì mỗi cạnh của hình bình hành này phải cắt 2 cạnh kề nhau của hình bình hành kia.

* Bổ đề 1:

Cho ΔABC với BO là trung tuyến. $M \in BO, MB = MO$. Một đường thẳng qua M cắt cạnh BA tại F và cắt BC tại E thì có: $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$ (1)

Chứng minh:

Kẻ $AI // EF$, $AI \cap BO = I, CI // EF, CI \cap BO = J$

Ta có: $\frac{BA}{BF} = \frac{BI}{BM}, \frac{BC}{BE} = \frac{BJ}{BM}$

$$\Rightarrow \frac{BA}{BF} + \frac{BJ}{BE} = \frac{BD}{BM} = 4$$

* Bổ đề 2:

Cho hình bình hành tâm O. Gọi *M,N* lần lượt là trung điểm của *BO,AO*. Lấy điểm F trên cạnh *AB*. Nếu tia *FM* cắt *BC* tại E và *FN* cắt *AD* tại K thì có: $BE + AK \geq BC$

Chứng minh:

Theo (1) ta có: $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4, \frac{AB}{AF} + \frac{AD}{AK} = 4$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên ta có và sử dụng bất đẳng thức Schwartz ta có:

$$8 = \frac{BA}{BF} + \frac{AB}{AF} + \frac{BC}{BE} + \frac{AD}{AK} = \frac{BA}{BF} + \frac{AB}{AF} + \frac{BC}{BE} + \frac{BC}{AK} \geq \frac{4AB}{BF + AF} + \frac{4BC}{BE + AK}$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{BC}{BE + AK} \Leftrightarrow BE + AK \geq BC$$

Trở lại bài toán:

Giả sử $A_2 \in \widehat{A_1OA_3}, OA_2 \cap A_1A_3 = F_2 . A_4A_8$ đi qua O cắt A_3A_5 tại F_4, cắt A_1A_7 tại F_8. Gọi *M,N* lần lượt là trung điểm của OA_3, OA_1. Ta chứng tỏ rằng một trong hai tia F_2M, F_2N phải cắt đoạn F_4F_8.

Gọi *X,Y* lần lượt là giao điểm của tia A_5M và A_7N với cạnh A_1A_3.

Nếu F_2 thuộc XA_3 (hay YA_1) thì F_2M phải cắt OF_4 (hay OF_8).

Nếu F_2 thuộc XY, giả sử F_2M cắt A_3A_5 tại E, F_2N cắt A_1A_7 tại K. Mà $A_3E < A_3F_4$ và $A_1K < A_1F_8$ suy ra $A_3E + A_1K < A_3F_4 + A_1F_8 = A_3A_5$ trái với (2).

Không mất tính tổng quát coi F_2M cắt OF_4 tại D nghĩa là $OF_4 \geq OD$ (3).

Ta chỉ ra rằng nếu $\frac{OF_k}{OA_k} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ với mọi k thì dẫn đến mâu thuẫn.

Vì $\frac{OF_2}{OA_2} \& \frac{OF_3}{OA_3}$ đều $< \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên có thể lấy được điểm P nằm trong đoạn thẳng $A_2F_2\left(OF_2 < OP < OA_2\right)$ và điểm Q nằm trong đoạn $A_3F_3\left(OF_3 < OQ < OA_3\right)$ sao cho

$$\frac{OF_2}{OP} = \frac{OQ}{OA_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Do đoạn PQ cắt đoạn A_2F_3 nên PQ cắt OA_4 tại R với $OR > OA_4$ (5).

Thay $OA_3 = 2OM$ vào (4) ta được: $\frac{OM}{OQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (6)

Từ (4) và (6) suy ra $PQ // MF_2$ nên $\frac{OD}{OR} = \frac{OM}{OQ} = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{OF_4}{OA_4}$

Kết hợp với (3) ta có: $OA_4 > OR; \frac{OF_4}{OD} \geq OR$ mâu thuẫn với (5).

Vậy suy ra đpcm.

3. Cho tứ giác nội tiếp $(O): ABCD, R = \sqrt{5}, AC \perp BD, OI = 1$. Chứng minh: $1 \leq S_{\Delta TCD} \leq 4$

Giải:

Gọi AE là đường kính (O). Ta có: $BD // CD$.

$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = AD^2 + BC^2 = AD^2 + DE^2 = AE^2 = 20$

Mà $IC.IA = IB.ID = R^2 - OI^2 = 4 \Rightarrow IA = \frac{4}{IC}, IB = \frac{4}{ID}$

$$\Rightarrow 20 = \left(IC^2 + ID^2\right)\left(1 + \frac{16}{IC^2ID^2}\right) \geq 2IC.ID\left(1 + \frac{16}{IC^2ID^2}\right) = 4S\left(1 + \frac{16}{4S^2}\right) = 4S + \frac{16}{S}$$

$$\Rightarrow 20 \geq 4S + \frac{16}{S} \Leftrightarrow S^2 - 5S + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq S \leq 4$$

$$S = 1 \Leftrightarrow IC = ID = \sqrt{2}; S = 4 \Leftrightarrow IC = ID = 2\sqrt{2}$$

4. Cho ΔABC có trọng tâm G, đường tròn nội tiếp tâm I. Chứng minh:

$$\max\left\{a^2, b^2, c^2\right\} < 4\min\left\{ab, bc, ca\right\}$$

Giải:

* Cách 1:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Ta cần chứng minh $a^2 < 4bc$.

Kẻ $IT \perp BC$, AM là trung tuyến, $AM \cap (I) = N, P$;

Ta có: $MT^2 = MN \cdot MP$.

Mà $MN \cdot MP < MG \cdot MA$.

$\Rightarrow MT^2 < MG.MA < \frac{1}{3}MA^2$

Ta có: $MT^2 = (MB - BT)^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{c+a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$

$MA^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{(b-c)^2}{4} < \frac{1}{3}\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$\Leftrightarrow a^2 < 2(b^2+c^2) - 3(b-c)^2$

$\Leftrightarrow a^2 < 4bc - (b-c)^2$

$\Rightarrow a^2 < 4bc$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

* Cách 2:

Giả sử *(I)* tiếp xúc với *BC, CA, AB* tại *T,U,V* ta có:

$AU = p - a; BV = p - b, CT = p - c$.

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên theo công thức Lepnit ta có:

$IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3IG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 \leq 3r^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\Rightarrow 3r^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 \leq 3r^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

$\Leftrightarrow (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 5(a^2+b^2+c^2) \leq 6(ab+bc+ca) \quad (1)$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Từ $(1) \Rightarrow 3\left(a-(b+c)^2\right) + 2(b-c)^2 \leq 2(4bc - a^2)$

Vì $a < b + c$ nên dấu bằng không xảy ra.

$\Rightarrow 3\left(a-(b+c)^2\right) + 2(b-c)^2 < 2(4bc - a^2)$

$\Rightarrow 4bc - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 4bc$

$\Rightarrow \max\{a^2, b^2, c^2\} < 4\min\{bc, ca, ab\}$

Điều đặt biệt ta thấy ở bất đẳng thức này là không thể thay số 4 bằng số nhỏ hơn, nhưng dấu bằng lại không xảy ra.

5. Cho $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ đặt $n = \dfrac{2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} + 1$

Hỏi trong không gian có thể dựng được hay không n đường thẳng cùng đi qua một điểm và góc giữa hai đường thẳng bất kì trong chúng không nhỏ hơn α. Tại sao?

Giải:

Giả sử qua điểm O trong không gian ta dựng được n đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Lấy O làm tâm của hình cầu bán kính 1. Lấy mỗi đường thẳng trong số n đường thẳng nói trên làm trục dựng hình nón xoay đỉnh O, đường sinh có độ dài 1 và góc ở đỉnh bằng α. Khi đó ta sẽ có $2n$ hình nón đôi một không có điểm chung trong (do góc giữa 2 trục của hình nón bất kì không nhỏ hơn α.

Thể tích hình cầu lớn hơn 2n lần thể tích 1 hình nón.

$$\frac{4}{3}\pi > 2n\frac{1}{3}\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} + 1 < \frac{2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \quad \text{(Vô lí)}$$

Kết luận: không thể dựng được n đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

6. Trong mặt phẳng hoặc trong không gian cho 1 đường thẳng Δ và 2 điểm $A, B \notin \Delta$. Tìm trên Δ 1 điểm M sao cho $MA + MB$ đạt min và tính giá trị đó theo $AB = d, d(A, \Delta) = a \,\&\, d(B, \Delta) = b$.

Giải:

* Cách 1: (phương pháp hình học)

Xét 2 trường hợp:

a) Δ và AB đồng phẳng:

- Nếu *A,B* cùng phía đối với Δ thì điểm *M* cần tìm là giao của Δ và *AB*.
- Nếu *A,B* khác phía đối với Δ thì điểm $B_1 = Đ_\Delta(B)$ đối xứng với *B* qua Δ, thế thì với mọi M' trên Δ ta luôn có:

$$AB_1 = MA_1 + MB_1 \le M'A + M'B_1 \qquad \left(M' = \Delta \cap (AB_1)\right)$$

$$\Rightarrow (MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow MA_1 + MB_1 \Leftrightarrow M = \Delta \cap (AB_1)$$

b) Δ và *(AB)* không đồng phẳng:

MA+MB không đổi khi quay trong 2 điểm xung quang trục Δ. Suy ra ta giữ một trong 2 điểm, chẳng hạn là điểm *B* và quay *A* quanh trục Δ đến vị trí A_1 mới sao cho A_1B và Δ đồng phẳng, bài tóan trở lại trường hợp đầu.

$$\Rightarrow (MA + MB)_{\min} = MA_1 + MB \Leftrightarrow M = \Delta \cap (A_1B)$$

* Cách 2: (phương pháp đại số, sử dụng các bất đẳng thức cổ điển)
Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên Δ và giả sử $A' \neq B'$. Ta chọn hướng dương của Δ là hướng đi từ A' đến B' thì $A'B' = A'M + MB'(M \in \Delta)$. Đặt $AA' = a, BB' = b,\ A'B' = 2c, A'M = u, MB' = v, (c \neq 0 \,\&\, u + v = 2c = const\,(\forall M \in \Delta))$

Ta có: $NA + MB = \sqrt{u^2 + a^2} + \sqrt{v^2 + b^2}$

Mà $\sqrt{u^2 + a^2} + \sqrt{v^2 + b^2} \geq \sqrt{(u+v)^2 + (a+b)^2}$ (bđt BCS)

$$" = " \Leftrightarrow \frac{u}{a} = \frac{v}{b} \quad hay \quad \frac{u}{v} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow MA + MB = \sqrt{u^2 + a^2} + \sqrt{v^2 + b^2} \geq \sqrt{4c^2 + (a+b)^2}$$

Kết luận : $(MA + MB)_{\min} = \sqrt{4c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{d^2 + 4ab} \quad (d = AB)$

Ở điểm $M \in [A'B']$ và chia trong đoạn đó theo tỉ số $A'M : MB' = a : b$.

* Cách 3: (phương pháp tọa độ)
Xác định tọa độ M trên đường thẳng Δ bằng cách chọn trung điểm O thuộc đoạn $A'B'$ làm gốc tọa độ và tia dương Ox chứa B'.

Đặt $OB' = -OA' = c\,(c > 0), OM = x$.

$$\Rightarrow A'M = OM - OA' = x + c, B'M = OM - OB' = x - c$$

$$\Rightarrow MA + MB = f(x) = \sqrt{(x+c)^2 + a^2} + \sqrt{(x-c)^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x+c}{\sqrt{(x+c)^2 + a^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2 + b^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+c}{x+c}\right)^2 = \frac{(x+c)^2 + a^2}{(x-c)^2 + b^2} = \frac{a^2}{b^2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{c+x}{c-x} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x = \frac{(a-b)c}{a+b} \quad (1)$$

Đẳng thức (1) có dạng hình học là ở điểm cực tiểu M.

$$\frac{A'M}{B'M} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{MA}{MB} \Rightarrow \widehat{MAA'} = \widehat{MBB'} \,\&\, \widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}$$

Thay (1) vào (*) rút gọn ta ra được kết quả giống như sử dụng 2 cách kia.

7. Cho một hình cầu nội tiếp trong một hình tròn xoay. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ.
   a) Chứng minh rằng $V_1 \neq V_2$.
   b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Giải:

a) Ta giả sử hình nón có đường cao $BD = h$, bán kính đáy là $DC = a$, góc giữa đường sinh và trục là α, bán kính hình cầu nội tiếp là r. Ta có: $V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}$,

(*)

$h = OB + OD = \frac{r}{\sin\alpha} + r = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$, $a = h.\tan\alpha = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}.\tan\alpha.$

Thay các kết quả trên vào (*) ta được:

$$V_1 = \frac{\pi.r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{\pi.r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha.(1-\sin\alpha)}.$$

Thể tích hình trụ ngoại tiếp hình cầu là $V_2 = 2\pi r^3$, do đó

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6.\sin\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{(1+x)^2}{6x(1-x)}$$, Từ đây ta xét $x = \sin\alpha, 0 < x < 1$.

Giả sử rằng $\frac{V_1}{V_2} = 1$ (tức là $V_1 = V_2$), ta được phương trình $7x^2 - 4x + 1 = 0$, phương trình bậc hai theo x này vô nghiệm; điều này có nghĩa không tồn tại α để $V_1 = V_2$ và khẳng định ở đề bài được chứng minh.

b) Đặt $\frac{V_1}{V_2} = k$, ta có phương trình $(1+6k)x^2 + 2(1-3k)x + 1 = 0$, để phương trình này có nghiệm, ta phải có $\Delta' = (1-3k)^2 - (1+6k) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2} = k$ là $\frac{4}{3}$, ứng với $x = \sin\alpha = \frac{1}{3}$ & $OB = 3r$.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cố định cạnh a và thể tích không đổi. Tìm vị trí của S để diện tích xung quanh nhỏ nhất.

Giải.

Ta có thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3}hS_{ABCD} \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{ABCD}}$ không đổi.

Xác định S chỉ cần xác định chân đường cao H.

Dựng $HM \perp AB$, $HN \perp BC$, $HP \perp DC$, $HQ \perp AD$. Đặt

$HM = x, HN = y, HP = z, HQ = t$

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SM$ có hình chiếu $HM \perp AB \Rightarrow SM \perp AB$

Tương tự $SN \perp BC, DC \perp SP, SQ \perp AD$.

$$\Rightarrow S_{xq} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCD} + S_{SDA}$$
$$= \frac{1}{2}\left(AB \cdot SM + BC \cdot SN + CD \cdot SP + DA \cdot SQ\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(a\sqrt{x^2+h^2} + a\sqrt{y^2+h^2} + a\sqrt{z^2+h^2} + a\sqrt{t^2+h^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(ax)^2+(ah)^2} + \sqrt{(ay)^2+(ah)^2} + \sqrt{(az)^2+(ah)^2} + \sqrt{(at)^2+(ah)^2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức ta có

$$S_{xq} \geq \frac{1}{2}\sqrt{(ax+ay+az+at)^2+(4ah)^2}$$

Nếu điểm H nằm ngoài hình thoi $ABCD$ thì $ax+ay+az+at > 2S_{ABCD}$

Nếu H nằm trong hình thoi $ABCD$ hay ở trên cạnh thì $ax+ay+az+at = 2S_{ABCD}$

Vậy $S_{xq} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{4S_{ABCD}^2 + 16a^2h^2}\right)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H nằm trong hình thoi & $\frac{ax}{ah} = \frac{ay}{ah} = \frac{az}{ah} = \frac{at}{ah}$

$\Leftrightarrow x = y = z = t$

$\Leftrightarrow H$ là trực tâm đường trong nội tiếp hình thoi

$\Leftrightarrow H$ trùng với tâm O của hình thoi

Vậy S_{xq} nhỏ nhất khi $SO \perp (ABCD)$ và $SO = h$

9. Xét tất cả các tam giác ABC có đáy AB cố định và độ dài tất cả các đường cao kẻ từ C đều bằng hằng số h. Trong các tam giác này thì tam giác nào có tích độ dài ba đường cao lớn nhất?

Giải:

Bài toán này là một bài trong đề thi Olympic Châu Á Thái Bình Dương lần II. Đây là một bài toán khá hay và được giải bằng nhiều cách, ở đây chúng tôi sẽ đưa ra 3 cách, mỗi cách đều chỉ có một điểm chốt là xét độ dài của h so với AB nhưng lại có cái hay riêng, bạn đọc hãy tự tìm hiểu nhé.

Cách 1:

Gọi a,b,c là độ dài các cạnh đối diện với các góc A,B,C tương ứng; cho h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lầnlượt hạ từ các đỉnh A,B,C.

Ta kí hiệu diện tích tam giác ABC là S. Ta có c và h_c cho trước, do vậy $S = \frac{1}{2}ch_c = const$. Suy ra:

$$8S^3 = (ah_a)(bh_b)(ch_c) = const$$

Như thế, để tích $h_a h_b h_c$ đạt giá trị lớn nhất, ta cần có tích abc đạt giá trị nhỏ nhất, vì c được cho trước. Ta có: $2S = ab\sin C$ không đổi, do đó ab đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sin C$ đạt giá trị lớn nhất.

Nếu $h \leq \frac{AB}{2}$, thì sẽ tồn tại ΔABC vuông tại C. Khi đó , $\sin C$ đạt giá trị lớn nhất.

Nếu $h > \frac{AB}{2}$ thì góc *C* nhọn. Khi đó, $\sin C$ lớn nhất khi và chỉ khi góc *C* lớn nhất. Rõ ràng điều này xảy ra khi ΔABC là tam giác cân tại *C*.

Cách 2:

Do đáy *AB* cố định, có thể giả sử *AB*=1. Kẻ đường vuông góc *AP* xuống *AB*, sao cho *AP* bằng *h*. Lấy điểm *Q* nằm trên đường thẳng qua *P* và song song với *AB* sao cho *BQ* vuông góc *AB*.

Lúc đó, ta phải có *C* nằm trên *PQ* (hoặc trêm đường thẳng tương ứng nằm phía bên kia đối với *AB*). Ta gọi $a(A)$ là độ dài đường cao kẻ từ *A* xuống *BC* và $a(B)$ là độ dài kẻ từ *B* xuống *AC*.

Nếu điểm *C* là điểm mà tích $h.a(A)a(B)$ đạt cực đại, thì *C* phải nằm trên đoạn *PQ*, bởi vì, nếu góc $\widehat{ABC}$ là góc từ thì cả $a(A)$ lẫn $a(B)$ đều ngắn hơn các đường cao của tam giác *ABQ*; nếu $\widehat{BAC}$ là góc tù thì ta cũng có điều tương tự.

Do vậy ta giả sử $PC = x$ với $0 \le x \le 1$. Khi đó,

$$AC = \sqrt{x^2 + h^2} \Rightarrow a(B) = \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Tương tự ta có: $a(A) = \frac{h}{\sqrt{(1-x)^2 + h^2}}$.

Ta cần tính sao cho hàm sau đạt giá trị bé nhất:

$$f(x) = (x^2 + h^2)\left[(1-x^2) + h^2\right] = x^4 - 2x^3 + (2h^2+1)x^2 - 2h^2x + h^4 + h^2$$

Ta có:

$f'(x) = 2(2x-1)(x^2 - x + h^2), f'(x) = 0$ có 3 nghiệm là:

$$x = \frac{1}{2} \,\&\, x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}$$

Từ đó, khi $h \ge \frac{1}{2}$, hàm *f* đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$, trong trường hợp này ta có tam giác *ABC* cân tại *C*. Khi $h < \frac{1}{2}$, hàm *f* đạt cực tiểu tại $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}$.

Lúc này,*M* là trung điểm *AB* và *D* là điểm nằm trên *AB* với

$AD = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - h^2}$, khi đó $DM = \sqrt{\frac{1}{4} - h^2}$

Mà $DC = h \,\&\, \widehat{CDM} = 90^0$, nên $MC = \frac{1}{2}$, suy ra: $\widehat{ACB} = 90^0$.

Cách 3:

Do đáy *AB* cố định, có thể giả sử *AB*=1. Gọi *a,b* là độ dài các cạnh đối diện với các góc *A,B* tương ứng; cho *x,y* là độ dài các đường cao lần lượt hạ từ các đỉnh *A,B*.

Ta có: $ax = by = h$, do đó $hxy = \frac{h^3}{ab}$. Nhưng $h = a\sin B; \frac{b}{\sin B} = \frac{1}{\sin C}; hxy = h^2 \sin C$.

Những điểm C nói trên chạy trên đường thẳng song song với AB và cách AB một khoảng bằng h (ta gọi là đường (K)). (Nói chính xác, một cặp đường thẳng song song như thế ở hai bên AB). Nếu $h \le \frac{1}{2}$, thì tồn tại một điểm C trên đường thẳng (K) đó sao cho $\widehat{ACB} = 90^0$, do vậy, ở trường hợp này ta được $hxy = h^2$ bằng cách chọn C sao cho $\widehat{ACB} = 90^0$, và rõ ràng đây là vị trí cần tìm.

Nếu $h > \frac{1}{2}$, thì không một điểm C nào trên đường thẳng (K) là cho $\widehat{ACB} = 90^0$. Gọi (L) là đường trung trực của AB, giả sử (L) cắt đường thẳng (K) ở C. Lúc đó, điểm C cần tìm là điểm nằm trên (K) mà $\widehat{ACB}$ lớn nhất (lúc này $AC = BC$). Thật vậy, nếu D là điểm khác trên (K) thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cũng sẽ đi qua một điểm tương ứng D' ở khác phía với C, do đó C nằm bên trong đường tròn này. Nếu (L) gặp đường tròn đó ở C', thì $\widehat{ADB} = \widehat{AC'B} > \widehat{ACB}$. Rõ ràng:

$$\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{h}{h^2 + \frac{1}{4}}$$

Nên giá trị lớn nhất của $hxy = \dfrac{h^3}{h^2 + \frac{1}{4}}$.

HÌNH HỌC HAY ĐẠI SỐ?

Nếu các bạn đã từng tham khảo qua các chuyên đề về dồn biến thì các bạn sẽ dễ hiểu những gì chúng tôi sẽ trình bày.
Nhằm củng cố lại kiến thức bản thân cũng như muốn sơ lược ứng dụng phương pháp này trong hình học có dảng vẻ như đại số. Tôi xin trình bày cụ thể về dạng này bởi những bài toán này tôi tự tìm hướng chứng minh cho riêng mình (hiển nhiên là số lượng bài toán không nhiều và do trình độ còn hạn hẹp nên không tránh khỏi những sai lầm đáng tiếc hay trùng lặp).
Tôi sẽ thông qua 2 pp sau:

- Dồn biến trong hình học (Các bạn có thể tham khảo 1 vài tư liệu khác)
- Phương pháp dI1 (ta sẽ hiểu rõ hơn qua các ví dụ sau)

* Một số ví dụ:

VD1: (IMO 2004) Giả sử n là 1 số tự nhiên lớn hơn 2 và n là số thực dương $x_i(i=\overline{1,n})$ thỏa mãn $\sum x_i \sum \frac{1}{x_i} < n^2+1$. Chứng minh rằng bộ ba trong n số đó là độ dài 3 cạnh tam giác.

Chứng minh:
Trước hết, ta dùng phản chứng:
Giả sử tồn tại $x_i > x_m + x_n$
Khai triển, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta đưa về:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}<10$$

Không mấy khó khăn ta chứng minh được $f(x_1,x_2,x_3) \ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2},x\right)$

$$\Rightarrow \frac{t}{x_3}+\frac{x_3}{t} \le \frac{5}{2}$$

Mà theo giả thiết ta có: $x_3 > 2t \Rightarrow x = \frac{x_3}{t} > 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+x<\frac{5}{2}$; mà ta lại có $\frac{1}{x}+x>\frac{5}{2}$ với $x>2$
Suy ra điều giả sử là sai. Suy ra điều phải chứng minh. Vậy luôn tồn tại bất kì bộ ba tam giác thỏa mãn điều kiện trên.

VD2: (VasileCirtoaje) Nếu a,b,c là 3 cạnh tam giác thì:

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+3$$

Chứng minh:

Với $a \le b \le c$ ta có bất đẳng thức đúng.
Xét $a \ge b \ge c$
Vì 2 vế bất đẳng thức cùng bậc, sử dụng phương pháp dI1 giả sử $b = 1$.
Bất đẳng thức tương đương:

$$3\left(a + \frac{1}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{1}{a} + c + \frac{a}{c}\right) + 3$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 3(a^2c + a + c^2) - 2(c + c^2a + a^2) - 3ac$$

$$f'(a) = 6ac + 3 - 2c^2 - 4a - 3c$$

$$f''(a) = 6c - 4$$

*Xét $c \ge \frac{2}{3}$:

$$\Rightarrow f''(a) \ge 0 \Rightarrow f'(a) > f'(1) > 0 \Rightarrow f(a) > f(1) > 0$$

*Xét $c \le \frac{2}{3} \Rightarrow a < \frac{5}{3}$:

Đặt $f(a,b,c) = 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) - 3$

Ta sẽ chứng minh:

$$f(a,b,c) \ge f(a,\sqrt{ac},c)$$

Thật vậy:

$$BDT \Leftrightarrow f(a,b,c) - f(a,\sqrt{ac},c) = \frac{(b-\sqrt{ac})^2(3a-2c)}{abc} \ge 0$$

Đặt: $t = \sqrt{\frac{a}{c}} \Rightarrow t < \sqrt{\frac{5}{2}}$

$$G(a,\sqrt{ac},c) = 3\left(2\sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{c}{a} - 3\right) - 2\left(2\sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{a}{c} - 3\right)$$

$$= \frac{3}{t^2}(t-1)^2(2t+1) - \frac{2}{t}(t-1)^2(t+2)$$

$$= \frac{1}{t^2}(t-1)^2(3 - 2t^2 + 2t) \ge 0$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bằng cách tương tự ta có giá trị mạnh hơn là :

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) + 3$$

VD3: (Ngô Minh Trí) Nếu a,b,c là 3 cạnh tam giác thì:

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b}\right) \ge \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

<u>Chứng minh:</u>
Với $a \le b \le c$ suy ra điều phải chứng minh.

Xét $a \ge b \ge c$

Ta có thể chứng minh:

$$f(a,b,c) = 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{b+c}-\frac{b}{c+a}-\frac{c}{a+b}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge f(a,\sqrt{ac},c)$$

Sử dụng phương pháp dI1 giả sử c=1;

Ta sẽ chứng minh BĐT đúng khi: $a \ge \sqrt{a} \ge 1$

$$\Leftrightarrow f(a,\sqrt{a},c) = 2\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{a}-\frac{a}{1+\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{1}{a+\sqrt{a}}\right)-a-\frac{2}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow f(a,\sqrt{a},1) = (-a^2+2a+2)(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1)$$

Mà ta lại có: $1+\sqrt{a} > a \Rightarrow a < \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$

$\Rightarrow f(a,\sqrt{a},1) \ge 0$. Suy ra đpcm.

Vd 4: Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh $\sqrt{3}\max\{h_a,h_b,h_c\} \ge p$.

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow h_c = \max\{h_a,h_b,h_c\}$. Lại có

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{2c}$$
$$= \frac{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}{2c}$$

Nên bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\sqrt{3(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)}}{2c} \ge p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4) \ge c^2(a+b+c)^2$$

Do ΔABC nhọn nên a^2,b^2,c^2 là độ dài 3 cạnh của một tam giác, do đó ta có thể đặt

$$a^2 = y+z, b^2 = z+x, c^2 = x+y\ (x,y,z \ge 0) \Rightarrow z \ge y \ge x \ge 0\ (\text{do } a \ge b \ge c)$$

Khi đó bất đẳng thức tương đương

$$3\left[2\sum_{cyc}(x+y)(x+z)-\sum_{cyc}(y+z)^2\right] \ge (x+y)\left(\sum_{cyc}\sqrt{y+z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(z) = 12z(x+y)+12xy-(x+y)\left(\sum_{cyc}\sqrt{y+z}\right)^2 \ge 0$$

Ta có

$$f'(z) = (x+y)\left[12-\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z+x}}+\frac{1}{\sqrt{z+y}}\right)\right]$$

$$f''(z) = \frac{(x+y)\left[(x-y)^2+\sqrt{x+y}[(x+z)^{3/2}+(y+z)^{3/2}]\right]}{2(x+z)^{3/2}(y+z)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f'(z) \ge f'(y) = \sqrt{\frac{x+y}{y}}\left[9\sqrt{y(x+y)} - \sqrt{2}(x+2y)\right] > 0$$

$$\Rightarrow f(z) \ge f(y) = 12(y^2+2xy) - (x+y)\left(\sqrt{2y} + 2\sqrt{x+y}\right)^2$$

$$= \frac{2(y-x)(2x+y)(y^2+17xy-2x^2)}{3y^2+7xy-2x^2+2(x+y)\sqrt{2y(x+y)}} \ge 0$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay tam giác ABC đều.

Vd 5: Cho tam giác ABC. Chứng minh $l_al_b + l_bl_c + l_cl_a \ge 3\sqrt{3}S$.

Giải:

Sử dụng công thức

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} = \frac{2\sqrt{x(x+y+z)(x+y)(x+z)}}{2x+y+z} \quad (x=p-a, y=p-b, z=p-c)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Ta có bất đẳng thức tương đương

$$4\sum_{cyc}\frac{xy\left(\sum_{cyc}x\right)(x+y)\sqrt{xy(z+x)(z+y)}}{(2x+y+z)(2y+z+x)} \ge 3\sqrt{3xyz\sum_{cyc}x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}}{\sqrt{z}(2x+y+z)(2y+z+x)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\sum_{cyc}x}}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}(2x+y+z)\sqrt{\frac{y+z}{x}} \ge \frac{3\sqrt{3}\prod_{cyc}(2x+y+z)}{\sqrt{\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\prod_{cyc}(x+y)\right)}}$$

$$\Leftrightarrow 8\sum_{cyc}\sqrt{x(y+z)} + 4\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(y+z)^3}{x}} \ge \frac{3\sqrt{3}\prod_{cyc}(2x+y+z)}{\sqrt{\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\prod_{cyc}(x+y)\right)}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(y+z)^3}{x}}\right]^2\left[\sum_{cyc}x(y+z)^3\right] \ge \left[\sum_{cyc}(y+z)^2\right]^3 \Rightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{(y+z)^3}{x}} \ge \sqrt{\frac{\left[\sum_{cyc}(y+z)^2\right]^3}{\sum_{cyc}x(y+z)^3}}$$

Lại có

$$\sum_{cyc}\sqrt{x(y+z)}=\sqrt{\left[\sum_{cyc}\sqrt{x(y+z)}\right]^2}=\sqrt{2\sum_{cyc}xy+2\sum_{cyc}\sqrt{xy(z+x)(z+y)}}$$
$$\ge\sqrt{2\sum_{cyc}xy+2\sum_{cyc}\sqrt{xy}\left(z+\sqrt{xy}\right)}=\sqrt{4\sum_{cyc}xy+2\sum_{cyc}z\sqrt{xy}}\ge\sqrt{4\sum_{cyc}xy+6\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}$$
$$\ge\sqrt{4\sum_{cyc}xy+\frac{18xyz}{\sum_{cyc}x}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$8\sqrt{4\sum_{cyc}xy+\frac{18xyz}{\sum_{cyc}x}}+4\sqrt{\frac{\left[\sum_{cyc}(y+z)^2\right]^3}{\sum_{cyc}x(y+z)^3}}\ge\frac{3\sqrt{3}\prod_{cyc}(2x+y+z)}{\sqrt{\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\prod_{cyc}(x+y)\right)}}$$

Chuẩn hóa cho $x+y+z=1$, đặt $xy+yz+zx=q,r=xyz$, bất đẳng thức trở thành

$$f(r)=\frac{\sqrt{(9r+2q)(q-r)}}{r+q+2}+\frac{(1-q)\sqrt{(1-q)(q-r)}}{(r+q+2)\sqrt{5r+q-2q^2}}\ge\frac{3\sqrt{6}}{16}$$

Ta có

$$f'(r)=\frac{3q^2+14q-(36+25q)r}{2(r+q+2)^2\sqrt{(9r+2q)(q-r)}}-\frac{\sqrt{(1-q)^3}[6q+2q^2-3q^3+(q^2+7q)r-5r^2]}{(r+q+2)^2\sqrt{(q-r)(5r+q-2q^2)^3}}$$

Ta chứng minh

$$f'(r)\le 0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{(1-q)^3}[6q+2q^2-3q^3+(q^2+7q)r-5r^2]}{\sqrt{(5r+q-2q^2)^3}}\ge\frac{3q^2+14q-(36+25q)r}{\sqrt{(9r+2q)}}$$

Ta dễ dàng chứng minh $\dfrac{\sqrt{1-q}}{\sqrt{5r+q-2q^2}}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{9r+2q}}>\dfrac{1}{\sqrt{9r+2q}}$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(1-q)[6q+2q^2-3q^3+(q^2+7q)r-5r^2]}{5r+q-2q^2}\ge 3q^2+14q-(36+25q)r$$
$$\Leftrightarrow g(r)=5(34+25q)r^2-10q(2+6q+5q^2)r+12q-10q^2+19q^3+6q^4\ge 0$$

Ta có $\Delta'_g=-5q(408-60q+276q^2+399q^3-150q^4-125q^5)\le 0$ nên hiển nhiên $g(r)\ge 0$. Do đó $f'(r)\le 0$ nên $f(r)$ nghịch biến, như vậy ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp có 2 biến bằng nhau là đủ. Cho $y=z=1$, bất đẳng thức trở thành

$$8\sqrt{4(2x+1)+\frac{18x}{x+2}}+4\sqrt{\frac{\left[2(x+1)^2+4\right]^3}{2(x+1)^3+8x}}\ge\frac{3\sqrt{3}(2x+2)(x+3)^2}{\sqrt{2(x+2)(x+1)^2}}$$
$$\Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{2(4x^2+19x+4)}{x+2}}+8\sqrt{\frac{(x^2+2x+3)^3}{x^3+3x^2+7x+1}}\ge\frac{3\sqrt{6}(x+3)^2}{\sqrt{x+2}}$$
$$\Leftrightarrow h(x)=\frac{\sqrt{2(4x^2+19x+4)}}{(x+3)^2}+\sqrt{\frac{(x^2+2x+3)^3(x+2)}{(x+3)^4(x^3+3x^2+7x+1)}}\ge\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

Ta có

$$h'(x)=-\frac{(x-1)(8x+41)}{(x+3)^3\sqrt{8x^2+38x+8}}+\frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}(x^2-1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{2(x+3)^3\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)^3}}$$

$$=\frac{x-1}{2(x+3)^3}\left[\frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}(x+1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)^3}}-\frac{2(8x+41)}{\sqrt{8x^2+38x+8}}\right]$$

Ta chứng minh $\frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}(x+1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)^3}}\ge\frac{2(8x+41)}{\sqrt{8x^2+38x+8}}$. Dễ thấy

$$\frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}}{\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8x^2+38x+8}}>\frac{8}{3\sqrt{8x^2+38x+8}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4(x+1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{3(x^3+3x^2+7x+1)}\ge 8x+41$$

$$\Leftrightarrow 4x^4-19x^3+23x^2-53x+297\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng, do đó $h'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Từ đây bằng cách lập bảng biến thiên, ta thấy $h(x)\ge h(1)=\frac{3\sqrt{6}}{8}$. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, tức ΔABC đều.

Vd 6: Cho a,b,c là 3 cạnh tam giác, $r\ge 2;1\ge m>0$. Cmr:
$a^rb\left(a^m-b^m\right)+b^rc\left(b^m-c^m\right)+c^ra\left(c^m-a^m\right)\ge 0$

Giải:

* Trường hợp 1: $a\ge b\ge c$

$VT=a^{r-2}a^2b\left(a^m-b^m\right)+b^{r-2}b^2c\left(b^m-c^m\right)+c^2c^{r-2}a\left(c^m-a^m\right)$

$\ge c^{r-2}a^2b\left(a^m-b^m\right)+c^{r-2}b^2c\left(b^m-c^m\right)+c^2c^{r-2}a\left(c^m-a^m\right)$

$=c^{r-2}\left[a^2b\left(a^m-b^m\right)+b^2c\left(b^m-c^m\right)+c^2a\left(c^m-a^m\right)\right]$

* Trường hợp 2: $a\le b\le c$

$VT=a^{r-2}a^2b\left(a^m-b^m\right)+b^{r-2}b^2c\left(b^m-c^m\right)+c^2c^{r-2}a\left(c^m-a^m\right)$

$\ge b^{r-2}a^2b\left(a^m-b^m\right)+b^{r-2}b^2c\left(b^m-c^m\right)+c^2b^{r-2}a\left(c^m-a^m\right)$

$=b^{r-2}\left[a^2b\left(a^m-b^m\right)+b^2c\left(b^m-c^m\right)+c^2a\left(c^m-a^m\right)\right]$

Nên ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $r=2$ là đủ.
Tức là:

$a^2b\left(a^m-b^m\right)+b^2c\left(b^m-c^m\right)+c^2a\left(c^m-a^m\right)\ge 0$

Chuẩn hoá cho $c=1$ và xét hàm số f (Giả sử $c=\max\{a,b,c\}$)

$f(m)=a^2b\left(a^m-b^m\right)+b^2\left(b^m-1\right)+a\left(1-a^m\right)$

Ta có:

$f'(m) = a^2b\left(a^m \ln a - b^m \ln b\right) + b^{m+2}\ln b - a^{m+1}\ln a$

$= a^{m+1}\ln a(ab-1) + b^{m+1}\ln b\left(b-a^2\right)$

$= b^{m+1}\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+1}\ln a(ab-1) + \ln b\left(b-a^2\right)\right)\ (a,b \le 1)$

$+a^2 \ge b \Rightarrow f'(m) \ge 0$ nên $f(m) \ge f(0) = 0$

$+b \ge a^2$:

Ta có:

$f'(m) = b^{m+1}\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+1}\ln a(ab-1) - \ln b\left(-b+a^2\right)\right) = b^{m+1}g(m)$

$g'(m) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+1}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\ln(ab-1)$

$++a \le b \Rightarrow g'(m) \le 0$

Nên *g(m)* nghịch biến:

$+g(0) \le 0 \Rightarrow g(m) \le g(0) \le 0$

Tức $f'(m) \le 0 \Rightarrow f(m)$ nghịch biến.

$\Rightarrow f(m) \ge f(1) = \sum a^2b(a-b) \ge 0\quad (IMO1983)$

$+g(0) \ge 0 \Rightarrow g(m)$ có đúng 1 nghiệm $\in [o,1]$

Lập bảng xét dấu ta có kết quả sau:

$f(m) \ge \min\left\{f(0), f(1)\right\} \ge 0$

$++a \ge b$

$f'(m) \ge b^{m+1}\left(\dfrac{a}{b}\ln a(ab-1) - \ln b\left(a^2-b\right)\right) = b^m\left(a\ln a(ab-1) - b\ln b(a^2-b)\right)$

Ta chứng minh: $a\ln a(ab-1) - b\ln b(a^2-b) \ge 0$ với $a \ge b \ge a^2$

Do $b \ge a^2$ nên $\ln b \ge 2\ln a$

Nên

$a\ln a(ab-1) - b\ln b(a^2-b) \ge -\dfrac{a\ln b}{2}(1-ab) - b\ln b\left(a^2-b\right)$

$= \dfrac{-\ln b}{2}\left(a(1-ab) + 2b\left(a^2-b\right)\right)$

$= \dfrac{1}{2}\ln b\left(2b^2 - a^2b - a\right)$

Ta có: $2b^2 - a^2b - a \le 2b^2 - b^3 - b = -b(b-1)^2 \le 0$

Nên $f'(m) > 0$

$\Rightarrow f(m)$ đồng biến $\Rightarrow f(m) \ge f(0) = 0$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

* Bài tập tự luyện:

Bài toán 1: (Ngô Minh Trí) Cho a,b,c là 3 cạnh tam giác. Chứng minh:
$$\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}>\sum\frac{ab}{(a+b)(c+a)}+\frac{1}{2}\sum\frac{a}{b+c}$$

Bài toán 2: (Ngô Minh Trí) Cho a,b,c là 3 cạnh tam giác. Chứng minh:
$$(a+b+c)(3ab+3bc+3ca-a^2-b^2-c^2)\ge 18abc$$

Bài tóan 3: (Ngô Minh Trí) Chứng minh rằng A,B,C là 3 góc tam giác thì:
$$1+\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^6\ge\left(\frac{3}{2}\right)^6\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{C}{2}\right)$$

Bài tóan 4: (Ngô Minh Trí) Cho $x,y,z>0, xyz=1$. Chứng minh:
$$\left(x+\frac{1}{y}-1\right)\left(y+\frac{1}{z}-1\right)\left(z+\frac{1}{x}-1\right)\le\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)}}$$

Bài toán 5: (Ngô Minh Trí)
Với mọi $a_i, i=\overline{1,n}$ bộ ba bất kì là độ dài 3 cạnh tam giác và $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ thỏa: $\sum a_i=2$. Chứng minh: $(1-a_1)^{a_2}(1-a_2)^{a_3}\ldots(1-a_n)^{a_1}\ge(1-a_1)^{a_n}(1-a_2)^{a_1}\ldots(1-a_n)^{a_{n-1}}$

Bài toán 6: (Phan Thành Việt)
Với a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác, m_a,m_b,m_c,p lần lượt là 3 trung tuyến và nửa chu vi.
CM: $m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3p^2+\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]}$

Bài toán 7: (VMO) Cho ΔABC. Tìm min:
$$f(A,B,C)=(1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B)(1+\cos^2 C)$$

Bài toán 8: Cho ΔABC không tù. Chứng minh:
$$f(A,B,C)=\frac{\sin B.\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C.\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A.\sin B}{\sin C}\ge\frac{5}{2}$$

Bài toán 9: Cho ΔABC. Chứng minh:
$$\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\ge\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B+\sin C)$$