ĐỀ 83

ĐỀ THI HSG TOÁN 9 NĂM HỌC 2023-2024 TỈNH THANH HÓA

Bài 1. (4,0 điểm):

1. Rút gọn phân thức

P = $\frac{x}{\sqrt{xy}-2y}+\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}\cdot\frac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; y > 0; x \neq 4y; x \neq 1$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Tính giá trị của biểu thức

Q = $\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}-\sqrt{abc}+2020$

Bài 2. (4,0 điểm):

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x-6}=3\sqrt{(2-x)^5}+(7-19x)\sqrt{(2-x)}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\frac{x^2}{y}=6-\frac{2}{y} \\ x^4+x^2+\frac{x^2}{y}=12-\frac{y-1}{y^2} \end{cases}$

Bài 3. (4,0 điểm):

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

$\frac{a}{4}+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $ab+bc+ca=3c^2$. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương

Bài 4. (6,0 điểm):

Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến A_x và B_y. Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia A_x và B_y theo thứ tự tại D, E. Gọi I là giao điểm của AE và BD , CI cắt AB tại H .

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO

3. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia B_y tại F. Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O,R) ao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo R.

Bài 5. (2,0 điểm):

Cho a, b là các số thực dương .Chứng minh rằng

Q = $\frac{a+b}{1+ab}$ +¿ $\frac{ab}{1+a}$ +¿ $\frac{ab}{1+b}$ +¿ $\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3$

----------HẾT------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (4,0 điểm):

1. Rút gọn phân thức

P = $\dfrac{x}{\sqrt{xy}-2y}+\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x\geq 0; y>0; x\neq 4y; x\neq 1$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Tính giá trị của biểu thức

Q = $\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}-\sqrt{abc}+2020$

LỜI GIẢI

1. Rút gọn phân thức

P = $\dfrac{x}{\sqrt{xy}-2y}+\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x\geq 0; y>0; x\neq 4y; x\neq 1$

Ta có: P = $\dfrac{x}{\sqrt{xy}-2y}+\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}+\dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}+\dfrac{-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Vậy P = $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ với $x\geq 0; y>0; x\neq 4y; x\neq 1$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Tính giá trị

Ta có

- $\sqrt{a(1-b)(1-c)}=\sqrt{a\left(1-(b+c)+bc\right)}=\sqrt{a\left(b+2\sqrt{abc}+bc\right)}$

$=\sqrt{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{bc}\right)^2}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{bc}\right)=a+\sqrt{abc}$

Tương tự

- $\sqrt{b(1-c)(1-a)}=\sqrt{b\left(1-(c+a)+ca\right)}=\sqrt{b\left(b+2\sqrt{abc}+ca\right)}$

$=\sqrt{b\left(\sqrt{b}+\sqrt{ca}\right)^2}=\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{ca}\right)=b+\sqrt{abc}$

- $\sqrt{c(1-a)(1-b)}=\sqrt{c\left(1-(a+b)+ab\right)}=\sqrt{c\left(c+2\sqrt{abc}+ab\right)}$

$=\sqrt{c\left(\sqrt{c}+\sqrt{ab}\right)^2}=\sqrt{c}\left(\sqrt{c}+\sqrt{ab}\right)=c+\sqrt{abc}$

Do đó

$Q = \sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}-\sqrt{abc}+2020$

$= a+\sqrt{abc}+b+\sqrt{abc}+c+\sqrt{abc}-\sqrt{abc}+2020$

$= a+b+c+2\sqrt{abc}+2020$

$= 1+2020 = 2021$

Bài 2. (4,0 điểm):

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x-6} = 3\sqrt{(2-x)^5}+(7-19x)\sqrt{(2-x)}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\dfrac{2}{y} \\ x^4+x^2+\dfrac{x^2}{y}=12-\dfrac{y-1}{y^2} \end{cases}$

LỜI GIẢI

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x-6} = 3\sqrt{(2-x)^5}+(7-19x)\sqrt{(2-x)}$

ĐKCĐ: $\begin{cases} 3x^2-6x-6>0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2>3 \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq 1-\sqrt{3}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x^2-6x-6}=a \\ \sqrt{2-x}=b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x-6=a^2 \\ 2-x=b^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 3x^2-5x-7=x^2-b^2+1$

Ta có $\sqrt{3x^2-6x-6} = 3\sqrt{(2-x)^5}+(7-19x)\sqrt{(2-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-6} = \sqrt{(2-x)}\left[3(2-x)^2+7x-19\right]$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-6} = \sqrt{2-x}\left[3x^2-5x-7\right]$

$\Rightarrow a=b\left[a^2-b^2+1\right] \Leftrightarrow (a-b)(ab+b^2+1)=0$

Xét $a-b=0 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-6} = \sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x-6=2-x$

$\Leftrightarrow 3x^2-5x-8=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x-8)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn) hoặc $x=¿\dfrac{8}{3}$ (loại)

Xét $ab+b^2+1= 0$

Do $x\leq 1-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2-x\geq 1+\sqrt{3}>1 \Rightarrow ab+b^2-1>0$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\dfrac{2}{y} \\ x^4+x^2+\dfrac{x^2}{y}=12-\dfrac{y-1}{y^2} \end{cases}$

ĐK: y $\neq 0$

Cộng theo từng vế các phương trình của hệ ta có

$x^4+3x^2+\text{¿}\,\dfrac{2x^2}{y} = 18 -\text{¿}\,\dfrac{3}{y} -\text{¿}\,\dfrac{1}{y^2}$

$\Leftrightarrow\ x^4 +\text{¿}\,\dfrac{x^2}{y} -3x^2 +\text{¿}\,\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y^2} -\text{¿}\,\dfrac{3}{y} +6x^2 + \dfrac{6}{y} -\text{¿}\,18 = 0$

$\Leftrightarrow\ x^2\left(x^2+\dfrac{1}{y}-3\right) + \dfrac{1}{y}\left(x^2+\dfrac{1}{y}-3\right)+6\left(x^2+\dfrac{1}{y}-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\ \left(x^2+\dfrac{1}{y}-3\right)\left(x^2+\dfrac{1}{y}+6\right)=0$

Xét $x^2+\text{¿}\,\dfrac{1}{y} -3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = 3 -x^2$ thay vào phương trình $x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\text{¿}$ y ta được

$x^2 + x^2\left(3-x^2\right)=6-2\left(3-x^2\right) \Leftrightarrow x^2(x^2-2)=0 \Leftrightarrow x=0;x=\pm\sqrt{2}$

Với $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$ (thỏa mãn)

Với $x=\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2=2 \Rightarrow y=1$ (thỏa mãn)

Xét $x^2+\dfrac{1}{y}+6 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = -6-x^2$ thay vào phương trình $x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\text{¿}$ y ta được

$x^2 + x^2\left(-x^2-6\right)=6-2\left(-x^2-6\right) \Leftrightarrow x^4+7x^2+18=0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là (x,y) = $\left\{\left(0;\dfrac{1}{3}\right);\left(-\sqrt{2};1\right);\left(\sqrt{2};1\right)\right\}$

Bài 3. (4,0 điểm):

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

$\dfrac{a}{4}+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $ab+bc+ca=3c^2$. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương

LỜI GIẢI

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

$\frac{a}{4}+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

Ta có $\frac{a}{4}+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{4}+\sqrt[3]{4-b}=¿\ \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{b}\right)^3}$

Đặt $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}=x$; $\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}=y$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-xy=\frac{a}{4} \\ x^3+y^3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-xy=\frac{(x-y)(x^2+y^2-xy)}{a} \\ x^3+y^3=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-xy)\left(\frac{x+y}{a}-1\right)=0 \\ x^3+y^3=4 \end{cases}$

Trường hợp 1:

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-xy)=0 \\ x^3+y^3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-xy)=0 \\ (x+y).0=4 \end{cases}$ Vô nghiệm

Trường hợp 2:

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{a}-1=0 \\ x^3+y^3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{a}=1 \\ x^3+y^3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=4 \end{cases}$

Vì $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=4+3a.xy\le 4+3a\frac{(x+y)^2}{4}$

$a^3\le 4+¿\ \frac{3a^3}{4} \Rightarrow a^3 \le 16$ vì ($a \in N^*$) $\Rightarrow a\in\{1;2\}$

Với a = 1 $\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=4 \end{cases}$

$\Rightarrow xy=-1\Rightarrow\sqrt[3]{4-\sqrt{b}}=-1\Rightarrow$ b = 5 (thỏa mãn)

Với a = 2 $\Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=4 \end{cases}$

$\Rightarrow xy=\frac{2}{3}\Rightarrow\sqrt[3]{4-\sqrt{b}}=\frac{2}{3}\Rightarrow$b = $\frac{1000}{729} \notin Z$ (loại)

Vậy a = 1; b = 5

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $ab+bc+ca=3c^2$. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương

Ta có $ab+bc+ca+c^2=4c^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca+c^2=4c^2$

$$\Leftrightarrow (a+c)(b+c)=4c^2 \ (*)$$

Giả sử $(a+c;b+c)=d \Rightarrow \begin{cases}(a+c) \vdots d \\ (b+c) \vdots d\end{cases} \Rightarrow a-b \vdots d$ vì $a-b$ là số nguyên tố nên $\left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=a-b\end{array}\right.$

Xét $d=a-b$ suy ra tồn tại $x;y \in$ N sao cho $\begin{cases}a+c=(a-b)x \\ b+c=(a-b)y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow a-b=(a-b)(x-y)$$

$x-y=1 \Leftrightarrow x=y+1$ thay vào (*) ta có $y(y+1)(a-b)^2=(2x)^2$

$\Rightarrow y(y+1)$ là số chính phương mà y và y + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên $y=0 \Rightarrow b+c=0 \Rightarrow 4c^2=0$

$\Leftrightarrow$ c = 0. Khi đó $8c+1=1$ là số chính phương.

Xét $d=1$ suy ra tồn tại m; n ∈ N sao cho

$\begin{cases}a+c=m^2 \\ b+c=n^2\end{cases} \Leftrightarrow a-b=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$ là số nguyên tố, mà $m+n>m-n$

$m-n=1 \Rightarrow m=n+1$ kết hợp với (*) ta có $2c=m.n=n.(n+1)$

$\Rightarrow 8c+1=4n.(n+1)+1=(2n+1)^2$ là số chính phương.

Bài 4. (6,0 điểm):

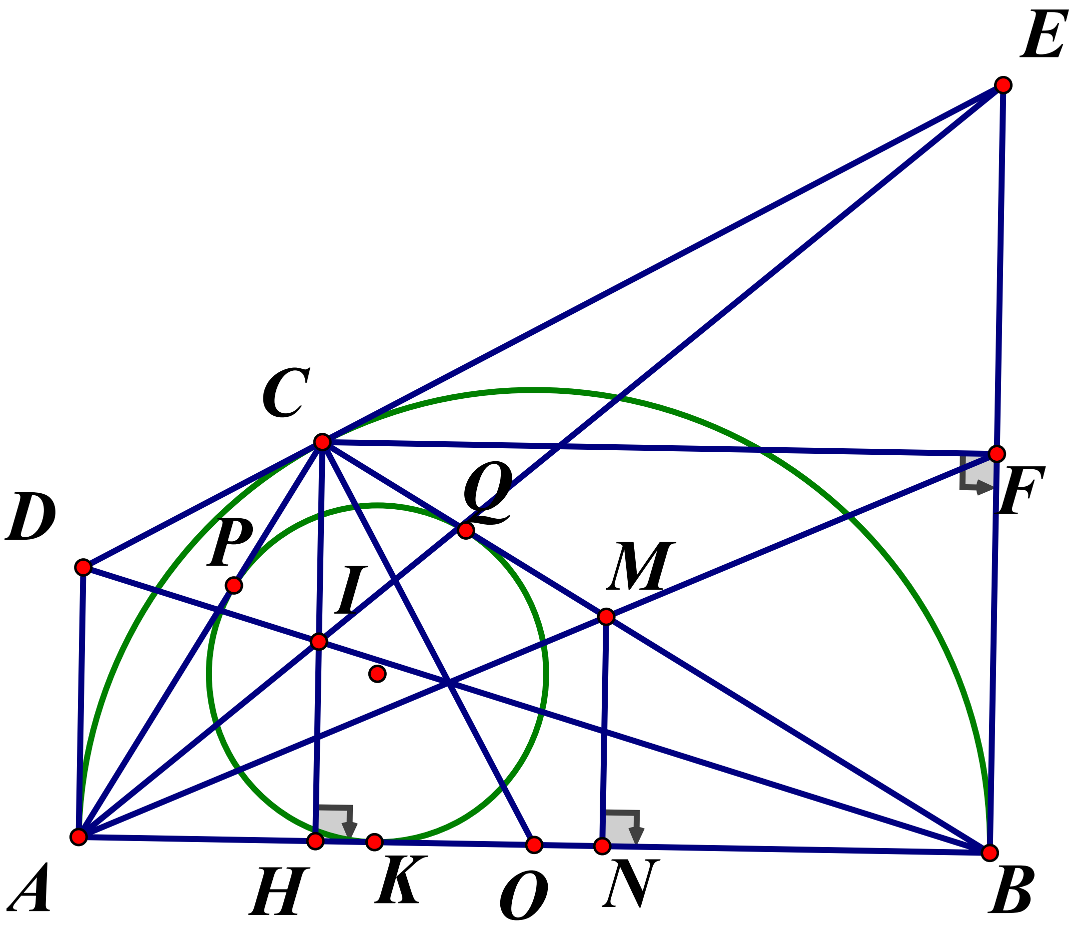
Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến A_x và B_y. Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia A_x và B_y theo thứ tự tại D, E. Gọi I là giao điểm của AE và BD , CI cắt AB tại H .

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO

3. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia B_y tại F. Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O,R) ao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo R.

LỜI GIẢI



1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

Vì AD//BE $\Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{DI}{IB}$ mà AD = DC; BE = CE nên

$\frac{DC}{CE} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow$ CI//BE//AD $\Rightarrow$ CH//BE.

$$\left.\begin{array}{r} CI/¿BE \Rightarrow \frac{CI}{BE} = \frac{DI}{IB} = \frac{AI}{AE} \\ IH/¿BE \Rightarrow \frac{AI}{AE} = \frac{IH}{BE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CI}{BE} = \frac{IH}{BE} \Rightarrow \text{CI = IH}$$

Hay I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO

Ta có: $AB + AC - BC = (AK + BK) + (AP + CP) - (CQ + BQ)$

$$= AK + BK + AK + CQ - CQ - BK = 2AK$$

2AK¿ $AB + AC - BC$

Tương tự ta có $2BK = AB + BC - AC$

$$\Rightarrow 2AK.BK=(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)$$

$\Leftrightarrow 4AK.BC=AB^2+AB.BC-AB.AC+AC.AB+AC.BC-AC^2-AB.AC-BC^2+AC.BC$

$\Leftrightarrow 4AK.BC=AB^2-(AC^2+BC^2)+2AC.BC=2CH.AB=2CH.AB=2CH.CO=4CH.CO$

$\Leftrightarrow$ AK.BK = CH.CO

3. Kẻ MN $\perp$ AB tại N

BHCF là hình chữ nhật

Đặt BH = x

Ta có $\frac{MN}{CH}=\frac{MN}{BF}=\frac{BN}{BH}=\frac{AN}{AB}=\frac{BN+AN}{BH+AB}=\frac{2R}{x+2R}$

$\Rightarrow$ MN = $\frac{2R.CH}{x+2R}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

CH = $\sqrt{AH.BH}=\sqrt{x(2R-x)}=¿\frac{2\sqrt{2x(2R-x)}}{2\sqrt{2}}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+2R)$

Suy ra MN $\le\frac{R}{\sqrt{2}}$. Diện tích lớn nhất khi MN lớn nhất (Vì AB cố định). Hay MN = $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Dấu "=" xảy ra khi 2x = 2R $-x$ $\Leftrightarrow$ x = $\frac{2R}{3}$. Điểm C nằm trên đường tròn (O) sao cho

CH = $\sqrt{\frac{2R}{3}\left(2R-\frac{2R}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}R}{3}$

Khi đó $S_{ABM}=\frac{1}{2}$ MN.AB = $\frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{2}}$.2R = $\frac{R^2}{\sqrt{2}}$

Bài 5. (2,0 điểm):

Cho a, b là các số thực dương .Chứng minh rằng

Q = $\frac{a+b}{1+ab}+¿\frac{ab}{1+a}+¿\frac{ab}{1+b}+¿\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}\ge 3$

LỜI GIẢI

Ta có $\frac{a+b}{1+ab}+¿\frac{ab}{1+a}+¿\frac{ab}{1+b}+¿\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}=\frac{a+b}{1+ab}+¿\frac{ab}{1+a}+¿\frac{ab}{1+b}+¿\frac{a+ab+b+ab}{(1+a)(1+b)ab}$

$=\frac{a}{1+ab}+¿\frac{ab}{1+a}+¿\frac{1}{a+ab}+¿\frac{b}{1+ab}+¿\frac{ab}{1+b}+¿\frac{1}{b+ab}$

Áp dụng BĐT Svacxơ ta có

$$\frac{a}{1+ab} + \text{¿} \frac{ab}{1+a} + \text{¿} \frac{1}{a+ab} = \frac{a^2}{a+a^2b} + \text{¿} \frac{(ab)^2}{ab+a^2b} + \text{¿} \frac{1}{a+ab} \geq \frac{(a+ab+1)^2}{2(a^2b+ab+a)}$$

Áp dụng BĐT phụ $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$ ta có

$$(a+ab+1)^2 \geq 3(a^2b+ab+a)$$

Suy ra $\frac{a}{1+ab} + \text{¿} \frac{ab}{1+a} + \text{¿} \frac{1}{a+ab} \geq \frac{3}{2}$ (1)

Tương tự ta có

$$\frac{b}{1+ab} + \text{¿} \frac{ab}{1+b} + \text{¿} \frac{1}{b+ab} = \frac{b^2}{b+ab^2} + \text{¿} \frac{(ab)^2}{ab+ab^2} + \text{¿} \frac{1}{b+ab} \geq \frac{(b+ab+1)^2}{2(ab^2+ab+b)} \geq \frac{3}{2} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a+b}{1+ab} + \text{¿} \frac{ab}{1+a} + \text{¿} \frac{ab}{1+b} + \text{¿} \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = ab = 1

----------HẾT------------