|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN CAO BẰNG**  **ĐỀ ĐỀ XUẤT**  *(Đề gồm 01 trang)* | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI**  **CÁC TRƯỜNG CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2022**  **ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC 11**  *Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1 (4,0 điểm):**

Cho dãy số thực  xác định bởi  và  Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tính giới hạn đó.

**Câu 2 (4,0 điểm):**

Cho tam giác nhọn có  và . Các đường cao  đồng quy tại trực tâm . Đường thẳng cắt  tại . Gọi là trực tâm tam giác  và đường tròn  là đường tròn ngoại tiếp tam giác . Gọi  là trung điểm của đoạn thẳng  ; đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai , đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai .

a) Chứng minh rằng  thuộc đường tròn đường kính .

b) Chứng minh rằng .

**Câu 3 (4,0 điểm):** Tìm tất cả các bộ số nguyên dương  thỏa mãn:

.

**Câu 4 (4,0 điểm):** Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn:



**Câu 5 (4,0 điểm):** Một công ty muốn xây một công trình có kích thước  gồm 4088483 phòng, mỗi phòng có kích thước  , một số phòng kề nhau (chung cạnh) được nối với nhau bằng một cửa giữa hai phòng. Hỏi có thể xây dựng mà mỗi phòng có đúng hai cửa hay không?

**----------------HẾT---------------**

*(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)*

Họ và tên thí sinh:…………………………………………..Số báo danh:……………

**ĐÁP ÁN**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| **1**  **(4,0 điểm)** | Cho dãy số thực  xác định bởi  và  Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tính giới hạn đó.  **Hướng dẫn:**  Bước 1: Ta chứng minh dãy sô  là dãy số giảm, bằng cách chứng minh  hay ta cần chứng minh    Bước 2: Ta chứng minh, (1) đúng với mọi  bằng phương pháp quy nạp.  +) Với  nên (1) đúng khi  +) Với  Giả sử (1) đúng đến  , ta có: .  Ta chứng minh (1) đúng đến  , thật vậy:    Có:    .  Như vậy ta đã chứng minh được dãy số  là dãy số giảm và  nên dễ thấy dãy số  bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số  có giới hạn hữu hạn. Chẳng hạn  Ta được:    Kết luận: | **1,0**  **1,5**  **1,0**  **0,5** |
| **2**  **(4,0 điểm)** | Cho tam giác nhọn có  và . Các đường cao  đồng quy tại trực tâm . Đường thẳng cắt  tại . Gọi là trực tâm tam giác  và đường tròn  là đường tròn ngoại tiếp tam giác . Gọi  là trung điểm của đoạn thẳng  ; đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai , đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai .  a) Chứng minh rằng  thuộc đường tròn đường kính .  b) Chứng minh rằng .  ***Hướng dẫn:***  a) Để chứng minh  thuộc đường tròn đường kính  ta chứng minh tứ giác  nội tiếp.  Thật vậy, có:  Xét tam giác .  Theo giả thiết .  Giả sử đường thẳng đường thẳng  tại điểm .  Ta được:  (kề bù)  Xét tứ giác  nên tứ giác  nội tiếp đường tròn đường kính  vì  thuộc đường tròn đường kính . (đpcm)  b) Theo cách dựng có  mà  là trung điểm của đoạn thẳng  nên theo hệ thức Newton có .  Lại có .  Suy ra .  Theo chứng minh a)  thuộc đường tròn đường kính  nên .  Do đó . (1)  Gọi  là trung điểm  thì theo hệ thức Maclaurin, ta có:  Lại có  nên tứ giác  nội tiếp.  Theo chứng minh a)  thuộc đường tròn đường kính  nên  .  Theo cách dựng của giả thiết, tam giác  cân tại  nên .  Vậy  thẳng hàng . (2)  Từ (1) và (2) . (đpcm) | **0,5**  **1,0**  **1,0**  **1,0**  **0,5** |
| **3**  **(4,0 điểm)** | Tìm tất cả các bộ số nguyên dương  thỏa mãn  .  ***Hướng dẫn:***  Không mất tính tổng quát ta giả sử .  Trước tiên ta chứng minh  Ta có , mà theo giả thiết  (1)  Lại có theo giả thiết:  .  Kết hợp với (1) ta được:  .  Lại từ (1) có . Theo giả thiết  Tiếp theo ta chặn điều kiện của  Giả sử  từ biểu thức đầu bài ta có  phương trình này không có nghiệm nguyên dương nên giả sử là sai hay  Khi . Khi đó:    Từ giả thiết  (2)  Theo giả thiết:  do (2). Cũng lại từ (2)  .  Trường hợp 1:  có nghiệm nguyên dương  Trường hợp 2:  không có nghiệm nguyên dương.  Trường hợp 3: không có nghiệm nguyên dương.  Vậy  là thỏa mãn bài toán,  Kết luận: bộ ba số cần tìm là  và các hoán vị của nó. | **0,5**  **1,0**  **1,0**  **1,0**  **0,5** |
| **4**  **(4,0 điểm)** | Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn  ***Hướng dẫn:***  Đầu tiên, ta chứng minh  Theo giả thiết, có:  (1)  + Trong (1) cho  ta được  Giả sử  (2)  + Trong (1) cho  ta được  (3)  + Trong (1) cho  ta được:  (4)  Bây giờ ta tính  theo hai cách.  Cách 1: theo (2)  , theo (1) có  + Trong (4) thay  được:  Vậy  Cách 2: Trong (3) cho  có  nên , lại có theo (1)  .  Do đó, ta có: .  Tóm lại ta có:  Với  ta được:  (5)  Giả sử  theo công thức (5) ta được  . (6)  Lại có,  Với    Hay ta được:  Cho  Ta có:  Với  bất kì, giả sử  (theo (6))  +) Nếu  nên:    +) Nếu  nên:    Hay với mọi trường hợp, nếu  thì  Mặt khác, nếu  theo (5) thì  , điều này là mâu thuẫn hay  Kết luận: hàm số thỏa mãn bài toán là: | **1,0**  **1,0**  **1,0**  **1,0** |
| **5**  **(4,0 điểm)** | Một công ty muốn xây một công trình có kích thước  gồm 4088483 phòng, mỗi phòng có kích thước  , một số phòng kề nhau (chung cạnh) được nối với nhau bằng một cửa giữa hai phòng. Hỏi có thể xây dựng mà mỗi phòng có đúng hai cửa hay không?  ***Hướng dẫn:***  Giả sử có thể xây được số phòng thỏa mãn bài toán mà mỗi phòng có đúng hai cửa.  Xét đồ thị  có 4088483 đỉnh, hai đỉnh được nối với nhau nếu có cửa nối hai phòng tương ứng.  Khi đó, mỗi đỉnh có bậc đúng bằng hai suy ra đồ thị là hợp của các chu trình rời nhau.  Trên thực tế, để đi từ một phòng qua các phòng khác rồi quay lại đúng phòng đó thì phải qua chẵn cửa. Nên mỗi chu trình của  có độ dài chẵn đỉnh do đó đồ thị  cũng có chẵn đỉnh. Điều này là mâu thuẫn do 4088483 là số lẻ.  Vậy điều giả sử là sai, hay không thể xây dựng số phòng thỏa mãn bài toán mà mỗi phòng có đúng hai cửa. | **0,5**  **0,5**  **1,0**  **1,5**  **0,5** |