

DẠNG 13**Các bài toán liên quan đến góc****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - z - 2021 = 0$ và $(\beta): -3x + 4y + 5z + 2021 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng
- A. 150° . B. 30° . C. 120° . D. 60° .
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) là
- A. 30° . B. 90° . C. 120° . D. 60° .
- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 1 = 0$. Biết mặt phẳng (P) song song với trục Oy và tạo với trục Oz một góc 45° , cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng
- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.
- Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 4 = 0$. Gọi góc tạo bởi (P) với trục Ox là φ . Giá trị của $\tan \varphi$ bằng
- A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. D. 5 .
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của α để tồn tại một mặt phẳng (Q) chứa d tạo với (P) một góc α° .
- A. 75 . B. 76 . C. 77 . D. 74 .
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 2)$, $B(-1; 1; 3)$. Gọi mặt phẳng (P) đi qua A , B tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Khi đó khoảng cách từ $M(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (P) là
- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ và các điểm $A(-2; 0; -2\sqrt{2})$, $B(-4; -4; 0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) và thỏa mãn $MA^2 - OA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ là đường tròn (C) . Chu vi của (C) bằng
- A. 5π . B. $\frac{3\sqrt{7}}{2}\pi$. C. 3π . D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - z - 2021 = 0$ và $(\beta): -3x + 4y + 5z + 2021 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng
- A. 150° . B. 30° . C. 120° . D. 60° .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{n}_{(\alpha)} = (2; -1; -1)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (-3; 4; 5)$.

$$\text{Nên } \cos((\alpha); (\beta)) = \left| \frac{2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot 5}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{9+16+25}} \right| = \frac{15}{\sqrt{300}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ((\alpha); (\beta)) = 30^\circ.$$

- Câu 2:** Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) là
- A. 30° . B. 90° . C. 120° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; -2; -1)$ và (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; -1; 1)$.

$$\text{Ta có } \cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $((P), (Q)) = 60^\circ$.

- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 1 = 0$. Biết mặt phẳng (P) song song với trục Oy và tạo với trục Oz một góc 45° , cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (a; b; c)$.

Do (P) song song với trục Oy nên $\vec{n} = (a; b; c)$ vuông góc với $\vec{j} = (0; 1; 0)$, dẫn đến $b = 0$ (1).

Mặt khác, (P) tạo với Oz một góc 45° nên $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

Kết hợp (1), (2) thu được $2|c| = \sqrt{2(a^2 + c^2)} \Leftrightarrow 2a^2 = 2c^2 \Leftrightarrow a = \pm c$

Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(1; 0; 1)$ hoặc $\vec{n}(1; 0; -1)$.

Khi đó cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng :

$$\cos \alpha = \frac{|3.1 + 4.0 + 0.(\pm 1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 4 = 0$. Gọi góc tạo bởi (P) với trục Ox là φ . Giá trị của $\tan \varphi$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; 1)$.

Trục Ox có véc tơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Khi đó: $\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Vì $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ nên $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Vậy $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của α để tồn tại một mặt phẳng (Q) chứa d tạo với (P) một góc α° .

A. 75.

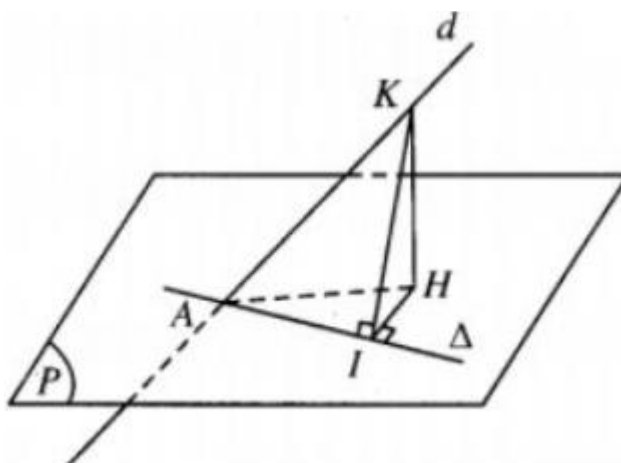
B. 76.

C. 77.

D. 74.

Lời giải

Chọn A



Gọi $A = d \cap (P)$, K là một điểm tùy ý trên d , $K \neq A$. Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của K trên (P) và Δ .

Gọi $\varphi = (d; (P)) = \angle KAH$; và $\alpha = ((P); (Q)) = \angle KIH$.

Ta có $KH \leq KI \leq KA$, lại có $\sin \alpha = \frac{KH}{KI}$ nên $\frac{KH}{KA} \leq \sin \alpha = \frac{KH}{KI} \leq \frac{KH}{KH} \Leftrightarrow \sin \varphi \leq \sin \alpha \leq 1$.

Mặt khác $\sin \varphi = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_p|} = \frac{\sqrt{6}}{9}$ với $\vec{u}_d(2;1;-2)$ là VTCP của đường thẳng d và $\vec{n}_p(1;-2;1)$ là VTPT của mặt phẳng (P) .

Do đó $\frac{\sqrt{6}}{9} \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 15,8^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow \alpha \in \{16;17;\dots;90\}$. Vậy có 75 số α thỏa mãn.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(-1;1;3)$. Gọi mặt phẳng (P) đi qua A , B tạo với mặt phẳng $(Q):2x-y-2z-2=0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Khi đó khoảng cách từ $M(1;2;3)$ đến mặt phẳng (P) là

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $(P): ax+by+cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

$A, B \in (P)$, ta được $\begin{cases} -a+b+3c+d=0 \\ -b+2c+d=0 \end{cases} (*) \Rightarrow a-2b-c=0 \Rightarrow c=a-2b$.

Gọi α là góc hợp bởi (P) và $(Q):2x-y-2z-2=0$. Ta có

$$\cos \alpha = \frac{|2a-b-2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2a-b-2(a-2b)|}{3\sqrt{a^2+b^2+(a-2b)^2}} = \frac{|2a-b-2a+4b|}{3\sqrt{2a^2-4ab+5b^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2(a-b)^2+3b^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suy ra $\max(\cos \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi và chỉ khi $a=b \neq 0 \Rightarrow c=-a$. Thay vào $(*)$ ta có

$$-3a+d=0 \Leftrightarrow d=3a \text{ nên } d(M,(P)) = \frac{|a+2b+3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{3a^2}} = \frac{|3a|}{\sqrt{3a^2}} = \sqrt{3}.$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+2x+4y+1=0$ và các điểm $A(-2;0;-2\sqrt{2}), B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) và thỏa mãn $MA^2-OA^2+\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB}=4$ là đường tròn (C) . Chu vi của (C) bằng

- A. 5π . B. $\frac{3\sqrt{7}}{2}\pi$. C. 3π . D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu $(S):x^2+y^2+2x+4y+1=0$ có tâm $I(-1;-2;0)$, bán kính $R=2$.

Gọi $M(x;y;z)$ ta được $MA^2=(x+2)^2+y^2+(z+2\sqrt{2})^2=x^2+y^2+z^2+4x+4\sqrt{2}z+12$.

$$\text{và } \begin{cases} \overrightarrow{MO}=(-x;-y;-z) \\ \overrightarrow{MB}=(-4-x;-4-y;-z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB}=x^2+y^2+z^2+4x+4y.$$

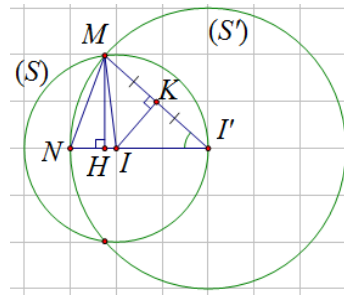
Ta có $MA^2-OA^2+\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB}=4 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+8x+4y+4\sqrt{2}z-4=0$.

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0.$$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S') tâm $I'(-2; -1; -\sqrt{2})$, bán kính $R' = 3$.

Nên $M \in (S) \cap (S')$ là đường tròn (C) có tâm H là hình chiếu của M lên II' .

Vì $II' = 2$ nên $I' \in (S)$.



Gọi K là trung điểm của $I'M$ ta có $IK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Mà $\sin \angle MI'I = \frac{MH}{I'M} = \frac{IK}{II'}$ suy ra $MH = \frac{I'M \cdot IK}{II'} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Vậy bán kính của đường tròn (C) là $r = MH = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Suy ra chu vi của (C) là: $\frac{3\sqrt{7}}{2}\pi$

