

CHỦ ĐỀ 9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

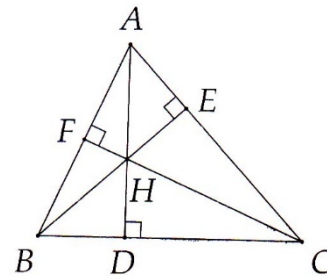
1. Đường cao của tam giác

Đường cao của tam giác là đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện.

2. Tính chất ba đường cao của tam giác

Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tam giác.

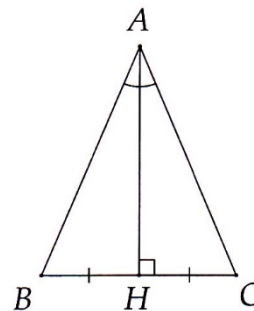
Trong hình vẽ AD, BE, CF là các đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC.



3. Về các đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân

- Trong một tam giác cân, đường cao ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực của tam giác đó.
- Trong một tam giác, nếu có hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực, đường cao) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

- Trong một tam giác vuông, trực tâm của tam giác chính là đỉnh góc vuông của tam giác đó.



II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Phương pháp giải: Để xác định trực tâm của một tam giác, ta cần tìm giao điểm hai đường cao của tam giác đó

1A. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chỉ ra các đường cao của tam giác HBC Từ đó chỉ ra trực tâm của tam giác đó.

b) Chỉ ra trực tâm của các tam giác HAB và HAC.

1.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

1B. Cho tam giác HBC có $\angle H > 90^\circ$, các đường cao BD và CE cắt nhau tại A. Tìm trực tâm của tam giác ABC.

2A. Hãy giải thích tại sao trực tâm của tam giác vuông trùng với đỉnh góc vuông?

2B. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và trung tuyến AM. Chứng minh trực tâm của các tam giác ABC, MAB và MAC thẳng hàng.

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp giải: Nếu H là giao điểm hai đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC thì $AH \perp BC$.

3A. Cho tam giác MNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S.

a) Chứng minh $MS \perp NP$. b) Cho $\angle MNP = 65^\circ$. Tính $\angle SMR$.

3B. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE cắt nhau tại I.

a) Chứng minh $CI \perp AB$.

Cho $\angle ABC = 50^\circ$. Tính $\angle AIE, \angle DIE$.

4A. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH tại D. Chứng minh $AK \perp CD$.

4B. Cho tam giác MNP vuông tại M. Trên cạnh MN lấy điểm Q, kẻ $QR \perp NP$ ($R \in NP$). Gọi O là giao điểm của các đường thẳng PM và RQ. Chứng minh $PQ \perp ON$.

5A. Cho tam giác MNP vuông tại M ($MP < MN$). Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

a) $PQ \perp NR$.

b) $RQ \perp NP$.

5B. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D (D khác A, B), trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AD$. Tia ED cắt BC tại F. Chứng minh:

a) $EF \perp BC$

b) $DF = BF$;

c) $CD \perp BE$.

Dạng 3. Đường cao đối với tam giác cân

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất: Trong một tam giác cân đường cao ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực của tam giác đó.

6A. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BE cắt đường trung tuyến AD ở H. Chứng minh $CH \perp AB$.

6B. Cho tam giác MNP cân tại M, đường cao PQ cắt đường phân giác MS ở K. Chứng minh $NK \perp MP$.

7A. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Chứng minh AH là tia phân giác của $\angle BAC$.

7B. Cho tam giác DEF cân tại D, các đường cao EM, FN cắt nhau tại O. Gọi I là giao điểm của DO với EF. Chứng minh $IE = IF$.

Dạng 4. Sử dụng tính chất trực tâm để chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải: Nếu ba đường thẳng là ba đường cao của một tam giác thì chúng cùng đi qua một điểm.

8A. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh $BM \perp AD$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của A trên DM. Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

8B. Cho tam giác ABC vuông tại B, kẻ đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AB = AE$.

a) Chứng minh $DE \perp AC$.

b) Gọi F là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD

Chứng minh ba đường thẳng AB, ED, CF đồng quy.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

9. Trong các câu sau, câu nào đúng?

Cho $\triangle MNP$ không vuông, H là trực tâm, khi đó:

a) M là trực tâm của tam giác HNP;

b) N là trực tâm của tam giác MPH;

c) P là trực tâm của tam giác MHN;

d) M là trực tâm của tam giác MNP.

10. Cho tam giác MNO có ba góc nhọn. Gọi K, P lần lượt là các chân đường cao kẻ từ M và N. Gọi S là giao điểm của MK và NP.

a) Chứng minh $OS \perp MN$. b) Cho $\angle MNO = 70^\circ$. Tính $\angle OSK$.

11. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao CD. Đường trung trực của BC cắt CD tại M.

a) Chứng minh $BM \perp AC$.

b) Tính $\angle BMD$ biết $\angle ABC = 70^\circ$.

12. Cho tam giác ABC có $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

13. Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. Gọi I là giao điểm các đường phân giác của góc B và góc C. Trên cạnh BC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $CD = CA$, $BE = BA$.

a) Chứng minh $BI \perp AE$ và $CI \perp AD$.

b) Gọi M là giao điểm của BI và AD, N là giao điểm của CI và AE. Chứng minh $AI \perp MN$.

14. Cho tam giác AMN cân tại A. Đường trung trực d của AM cắt đường thẳng MN tại P. Gọi D là hình chiếu vuông góc của M trên AP và E là trung điểm của MN. Chứng minh ba đường thẳng d, MD, AE đồng quy.

15*. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HB, HA. Chứng minh AM vuông góc với CN.

HƯỚNG DẪN

1A. Học sinh tự làm.

1B. Học sinh tự làm.

2A. Học sinh tự làm.

2B. Học sinh tự làm.

Các trục tâm cùng nằm trên đường cao AH.

3A. Chú ý S là trục tâm $\triangle MNP$, từ đó

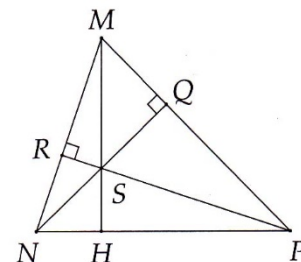
$$MS \perp NP.$$

b) Gọi H là giao điểm của MS với

NP. Chú ý $\triangle MHN$ vuông, từ đó tính

được $\angle SMR = 25^\circ$

3B. a) Chú ý I là trục tâm $\triangle ABC$.

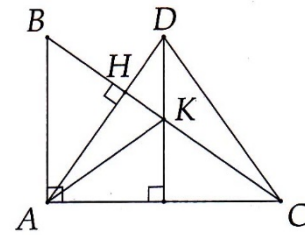


b) Tính được $\angle AIE = 50^\circ, \angle DIE = 130^\circ$

4A. Chú ý $AB \perp AC$, từ đó $DK \perp AC$.

Bởi vậy K là trực tâm $\triangle ADC$, suy ra

$AK \perp CD$.



4B. Chú ý Q là trực tâm $\triangle PNO$.

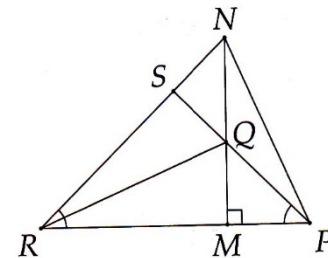
5A. a) Gọi S là giao điểm của PQ và

NR. Tính được $\angle SPR = \angle SRP = 45^\circ$,

từ đó $PQ \perp NR$.

b) Từ kết quả ý a, ta có Q là trực

tâm $\triangle PNR \Rightarrow RQ \perp NP$.



5B. a) Chú ý $\angle FEC = \angle FCE = 45^\circ$ và $\triangle BDF$ vuông cân.

b) Dùng kết quả ý a, để có D là trực tâm $\triangle EBC$.

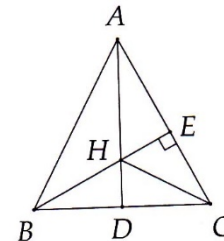
Từ đó $CD \perp BE$.

6A. Chú ý AD cũng là đường cao

của $\triangle ABC$, từ

đó H là trực tâm

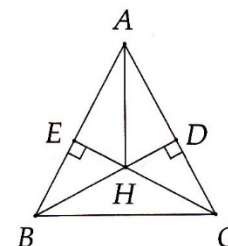
$\triangle ABC$ suy ra $CH \perp AB$.



6B. Tương tự **6A**, chứng minh được K là trực tâm của $\triangle MNP$

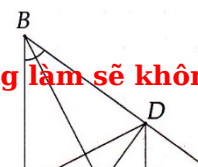
7A. Chú ý H là trực tâm $\triangle ABC$, từ đó AH

vừa là đường cao vừa là đường phân giác.



7B. Tương tự 7A, chứng minh được AI là đường trung tuyến của $\triangle ABC$, từ đó $IE = IF$.

5.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên



8A. Chú ý tam giác ABD cân tại B nên
BM là đường phân giác cũng là đường
Cao, từ đó $BM \perp AD$.

b) Chú ý AK, BM, DH là ba đường cao
của $\triangle AMD$.

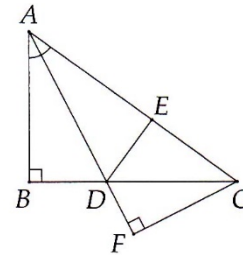
8B. a) Chứng minh được

$$\triangle ABD = \triangle AED(\text{c.g.c})$$

Từ đó $\angle AED = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AC$.

b) Chú ý AB, ED, CF

là ba đường cao của $\triangle ADC$.



9. Học sinh tự làm.

10. a) Tương tự **3A**.

b) OS cắt MN tại Q, chú ý $\triangle ONQ$ vuông, từ đó $\angle SK = 70^\circ$.

11. Tương tự **6A**, chứng minh được M là trực tâm $\triangle ABC$.

Tính được $\angle BAC = 180^\circ - 140^\circ - 40^\circ \Rightarrow \angle ABM = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

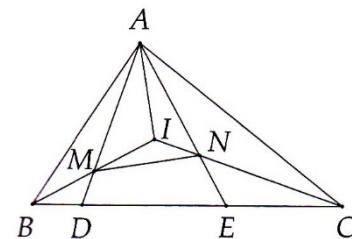
Suy ra $\angle BMD = 40^\circ$.

12. Chú ý AM là đường cao, từ đó dùng Định lý Pytago tính được
 $AM = 12 \text{ cm}$.

13. a) Tam giác ABE cân tại B có BI
là phân giác nên cũng là đường cao,
từ đó $BI \perp AE$.

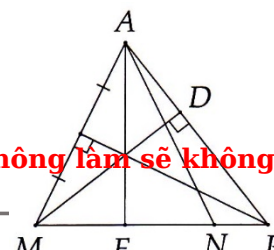
Tương tự $CI \perp AD$.

b) Từ kết quả ý a, chứng minh được
I là trực tâm $\triangle AMN$, từ đó $AI \perp MN$



14. Ta có tam giác AMN cân tại A, do đó

$AE \perp MN$.



Từ đó d, MD, AE là ba đường cao của
 $\triangle AMP$, bởi vậy chúng đồng quy.

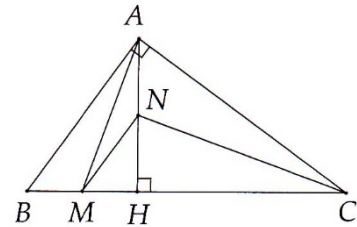
Chú ý: Điểm P ở giữa M và N thì
chứng minh không thay đổi.

- 15.** Dùng tính chất đường trung bình cho
 $\triangle AHB$ ta có:

$$MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp AC.$$

Chúng minh được N là trực tâm

$\triangle AMC$, từ đó dẫn đến $AM \perp CN$



.....
.....