

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x - 3x^2$ là:

A. $\frac{3^x}{\ln 3} + x^3 + C$

B. $3^x - x^3 + C$

C. $3^x \ln 3 - x^3 + C$

D. $\frac{3^x}{\ln 3} - x^3 + C$

Lời giải

$$\int (3^x - 3x^2) dx = \frac{3^x}{\ln 3} - x^3 + C.$$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$

B. $F(x) = x^3 + x + C$

C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$

D. $F(x) = x^3 + x^2 + C$

Hướng dẫn giải

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

Câu 3: Biết rằng $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + a$. Khi đó a bằng:

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

Khi đó :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos t |\cos t| dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 + 2 \cos 2t) dt$$
$$= (2t + \sin 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Câu 4: Tính $\int_1^e x^2 \ln x dx$

A. $\frac{2e^3 + 1}{9}$

B. $\frac{2e^3 - 1}{9}$

C. $\frac{e^3 - 2}{9}$

D. $\frac{e^3 + 2}{9}$

Lời giải

Chọn A.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, $dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

Suy ra $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3 + 1}{9}.$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2+4x-2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^\pi \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$ bằng

A. $I = \frac{9}{2}$

B. $I = -\frac{9}{2}$

C. $I = -\frac{7}{6}$

D. $I = \frac{7}{6}$

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -2$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \pi \Rightarrow t = -1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin 2x \cdot f(\cos x) dx &= \int_0^\pi 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx = -\int_1^{-1} 2t \cdot f(t) dt = 2 \int_{-1}^1 t \cdot f(t) dt \\ &= 2 \int_{-1}^0 x \cdot f(x) dx + 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx = 2 \int_0^1 x(x^2 + 4x - 2) dx + 2 \int_{-1}^0 x(2x - 2) dx \\ &= 2 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 + 4 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Câu 6: Với hàm $f(x)$ tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}$, $a < b$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx$

B. $S = \pi \int_a^b |f(x)| dx$

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

D. $S = \pi \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2$ và đồ thị hàm số $y = 3x$

A. $\frac{1}{3}$

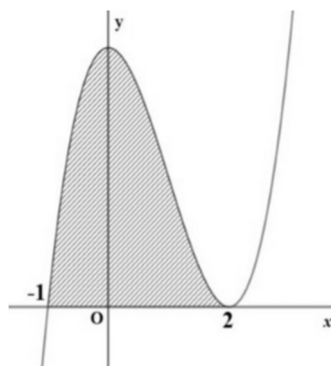
B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

Giải: Ta có: $x^2 + 2 = 3x \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow S = \int_1^2 |(x^2 + 2) - 3x| dx = \frac{1}{6}.$

Câu 8: Phần gạch chéo trong hình bên dưới là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ với trục hoành. Hãy tính diện tích S đó



A. $\frac{15}{2}.$

B. $\frac{27}{4}.$

C. $\frac{27\pi}{4}.$

D. $\frac{15\pi}{2}.$

Giải: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ với trục hoành là

$$S = \int_{-1}^2 (x+1)(x-2)^2 \cdot dx = \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{27}{4}.$$

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3$, $y = 4x$ là:

A.13

B.8

C.9

D.12

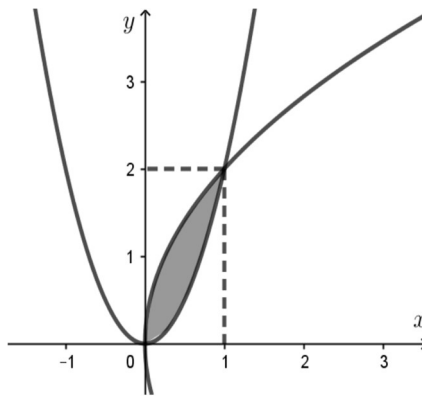
Lời giải

Ta có $x^3 = 4x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$

$$\Rightarrow S = \int_{-2}^2 |x^3 - 4x| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \right|_0^2 = 8.$$

Vậy $S = 8$ (đvdt).

Câu 10: Tính diện tích của hình phẳng (được tô đậm) giới hạn bởi hai đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$.



A. $S = \frac{2\pi}{3}$

B. $S = \frac{4\pi}{3}$

C. $S = \frac{4}{3}$

D. $S = \frac{2}{3}$

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x^2 - x - 2$ là

A. $\frac{9}{2}$

B. 4

C. 5

D. 9

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = 2x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy $S = \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx = \frac{9}{2}$.

Câu 12: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int_1^4 x dx$

B. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$

C. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$

D. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Câu 13: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{32\pi}{15}$

B. $\frac{64\pi}{15}$

C. $\frac{21\pi}{15}$

D. $\frac{16\pi}{15}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int_0^2 \left| (x^2)^2 - (2x)^2 \right| dx = \frac{64\pi}{15}$

Câu 14: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành.

A. $\frac{7\pi}{5}$

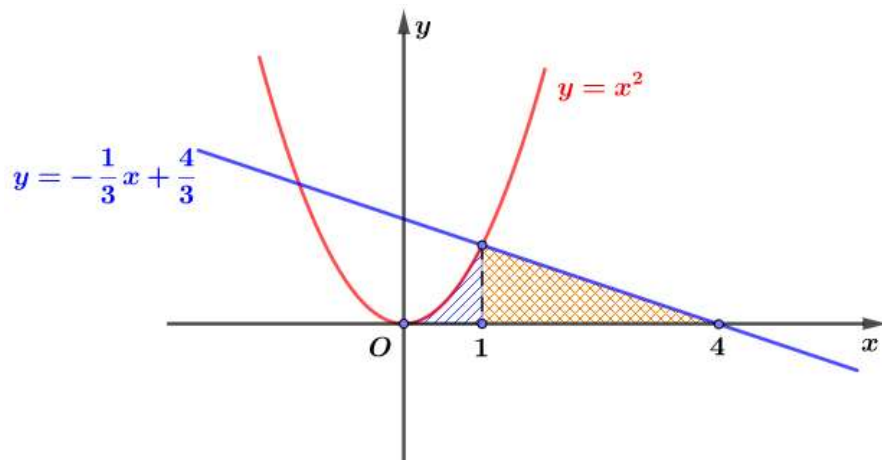
B. $\frac{8\pi}{5}$

C. $\frac{6\pi}{5}$

D. π

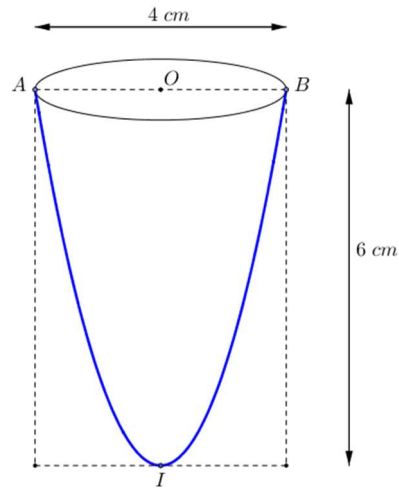
Lời giải:

Vẽ các đồ thị ra mặt phẳng tọa độ Oxy:



$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right)^2 dx = \frac{6\pi}{5}$$

Câu 15: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm . Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V(\text{cm}^3)$ của vật thể đã cho.



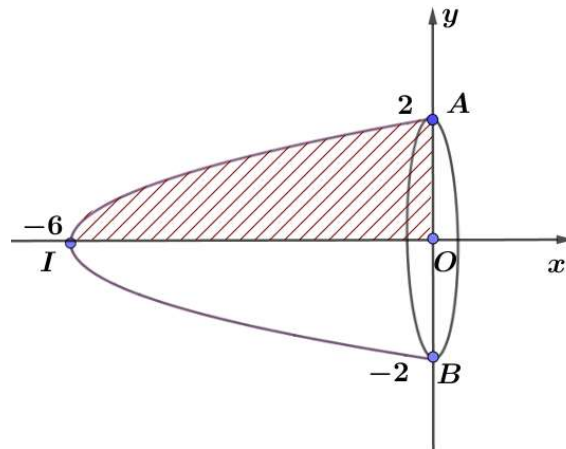
A. $V = 12$

B. $V = 12\pi$

C. $V = \frac{72}{5}\pi$

D. $V = \frac{72}{5}$

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Khi đó parabol có đỉnh $I(-6; 0)$ và đi qua $A(0; 2)$, $B(0; -2)$ nên có phương trình $x = \frac{3}{2}y^2 - 6$.

Ta có $x = \frac{3}{2}y^2 - 6 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}(x + 6)}$.

Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x + 6)}$, trục Ox , $x = 0$, $x = -6$.

Khi đó thể tích cần tính bằng thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (D) quanh trục Ox .

Do đó thể tích của vật thể đã cho là: $V = \pi \int_{-6}^0 \frac{2}{3}(x+6) dx = \frac{\pi}{3}(x+6)^2 \Big|_{-6}^0 = 12\pi$.

Câu 16: Cho $z = 1 - 2i$. Phần thực của số phức $\omega = z^3 - \frac{2}{z} + z \cdot \bar{z}$ bằng

A. $\frac{-31}{5}$

B. $\frac{-32}{5}$

C. $\frac{32}{5}$

D. $\frac{-33}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\omega = (1-2i)^3 - \frac{2}{1-2i} + (1-2i)(1+2i)$

$\omega = \frac{-32}{5} + \frac{6}{5}i$. Phần thực là: $\frac{-32}{5}$.

Câu 17: Cho số phức $z = -3 + 4i$. Khi đó mô đun $|z|$ bằng

A. 5

B. $\frac{1}{5}$

C. 25

D. $\frac{1}{25}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Câu 18: Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

A. $1 + 2i$

B. $-1-2i$

C. $2-i$

D. $-1+2i$

Lời giải

Chọn A.

Số phức liên hợp của số phức $z = 1-2i$ là $\bar{z} = 1+2i$.

Câu 19: Cho số thực x, y thỏa mãn: $2x + y + 1 - xi = 2y + (-y + 2)i$. Khi đó: $x^2 + y^2$ bằng:

A. 5

B. 10

C. 17

D. 25

Câu 20: Gọi a và b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{20}$. Tính $a + b$.

A. $1-2^{11}$

B. $1-2^{20}$

C. 1

D. $1+2^{11}$

Lời giải

$$z = \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{21}}{-i} = \frac{i-i(1+i)^{21}}{1} = i-i(1+i)\left[(1+i)^2\right]^{10} = i-(i-1)(2i)^{10}$$

$$\Rightarrow z = i + (i-1).2^{10} = -2^{10} + (1+2^{10})i \Rightarrow a = -2^{10}, b = 1+2^{10} \Rightarrow a+b=1.$$

Câu 21: Cho A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1+i, z_2 = 3+i, z_3 = 3+2i, z_4 = 1+2i$. Chọn kết luận đúng nhất:

A. ABCD là chữ nhật

B. ABCD là hình vuông

C.ABCD là hình bình hành

D.ABCD là hình thoi

Giải: $z_1 = 1 + i \Rightarrow A(1;1), z_2 = 3 + i \Rightarrow B(3;1), z_3 = 3 + 2i \Rightarrow C(3;2), z_4 = 1 + 2i \Rightarrow D(1;2)$

$$\overrightarrow{AB} = (2;0); \overrightarrow{DC} = (2;0)$$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$AB = 2 \neq BC = 1$$

Suy ra ABCD là chữ nhật.

Câu 22: Mô đun của số phức $z = -3i + 4$ bằng

A.-4

B.3

C.-3

D.5

Câu 23: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + i| = 2$ là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$

Giải: Đặt $z = x + yi$. Ta có $|z - 2 + i| = 2 \Leftrightarrow |x - 2 + (y+1)i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 2$

Khi đó $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Câu 24: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tổng $M^2 + m^2$ bằng

A. 58

B. 52.

C. 65.

D. 45

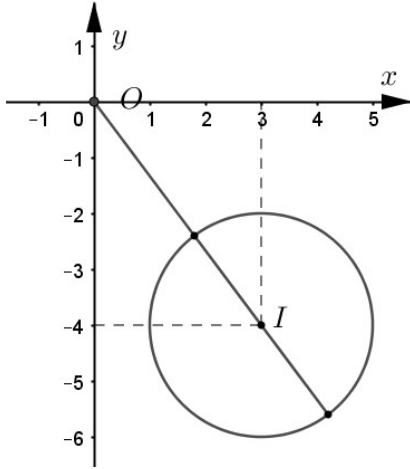
Lời giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $|z - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |x - 3 + (y+4)i| = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4.$$

Tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$ là đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R=2$.



Gọi điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ là $M(x; y)$.

Khi đó $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$ với O là gốc tọa độ.

$$|z|_{\max} \Leftrightarrow OM_{\max}, \text{ khi đó } OM = OI + R = \sqrt{3^2 + (-4)^2} + 2 = 7 = M$$

$$|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min}, \text{ khi đó } OM = OI - R = \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 2 = 3 = m$$

$$\text{Vậy } M^2 + m^2 = 7^2 + 3^2 = 58.$$

Câu 25: Nếu z là số phức thỏa $|\bar{z}| = |z+2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z-i| + |z-4|$ là

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. 4

D. 5

Lời giải

Chọn D.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ theo giả thiết $|\bar{z}| = |z+2i| \Leftrightarrow y = -1$. (d)

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng (d).

Gọi $A(0;1)$, $B(4;0)$ suy ra $|z-i| + |z-4| = P$ là tổng khoảng cách từ điểm $M(x; -1)$ đến hai điểm A, B .

Thấy ngay $A(0;1)$ và $B(4;0)$ nằm cùng phía với (d). Lấy điểm đối xứng với $A(0;1)$ qua đường thẳng (d) ta được điểm $A'(0; -3)$.

Do đó khoảng cách ngắn nhất là $A'B = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + my + 3z - 5 = 0$ và

$(Q): nx - 8y - 6z + 2 = 0$. Tìm giá trị của các tham số m, n để (P) và (Q) song song.

A. $m = 4, n = 3$

B. $m = -4, n = 4$

C. $m = 4, n = -4$

D. $m = -4, n = 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) và (Q) song song khi và chỉ khi $\frac{2}{n} = \frac{m}{-8} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{2} \Leftrightarrow m = 4, n = -4$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \text{ và } d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

A. 45°

B. 30°

C. 60°

D. 90°

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{u}_{d_1} = (1; -1; 2) \\ \vec{u}_{d_2} = (-1; 1; 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2 \Rightarrow (\widehat{d_1, d_2}) = 90^\circ.$$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(-1; 3; 0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là:

A. $(0; 1; 1)$

B. $(-1; 2; -1)$

C. $(-2; 4; -2)$

D. $(0; 2; 2)$

Lời giải

$$\text{Trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ có tọa độ là } I\left(\frac{1+(-1)}{2}; \frac{(-1)+3}{2}; \frac{2+0}{2}\right) \Rightarrow I(0; 1; 1).$$

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4; 8; -3)$

B. $D(-2; 8; -3)$

C. $D(-2; 2; 5)$

D. $D(-4; 8; -5)$

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $D(x; y; z)$.

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4), \overrightarrow{DC} = (-3 - x; 5 - y; 1 - z)$$

Khi đó để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3 - x \\ -3 = 5 - y \\ 4 = 1 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 8 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy $D(-4; 8; -3)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; -1; 4)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; -1)$. Phương trình của (P) là

A. $2x + 2y - z - 6 = 0$

B. $2x - 2y - z - 6 = 0$

C. $2x + 2y + z - 6 = 0$

D. $2x + 2y - z + 6 = 0$

Hướng dẫn giải

(P) có dạng $2x + 2(y + 1) - (z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 6 = 0$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 2; 3), B(2; 4; 2)$ và tọa độ trọng tâm $G(0; 2; 1)$. Khi đó, tọa độ điểm C là:

A. $C(-1; 0; -2)$

B. $C(1; 0; 2)$

C. $C(-1; -4; 4)$

D. $C(1; 4; 4)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2 + x_C = 0 \\ 2 + 4 + y_C = 6 \\ 3 + 2 + z_C = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = 0 \\ z_C = -2 \end{cases}.$$

Vậy $C(-1; 0; -2)$.

Câu 32: Phương trình mặt phẳng chứa $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$ có dạng:

A. $6x + 9y + z + 8 = 0$

B. $3x + 2y - 5 = 0$

C. $-8x + 19y + z + 4 = 0$

D. $6x + 9y + z - 8 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1; -2; 4)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (-2; 1; 3)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(-1; 0; -2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -1; 3)$.

Nên $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (6; 9; 1) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2; 2; -6) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$ nên d_1, d_2 cắt nhau và phương trình mặt phẳng chứa d_1, d_2 là $6x + 9y + z + 8 = 0$.

Câu 33: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$. Tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (P) là

A. $I(1; -3; -2), R = 9$

B. $I(-1; 3; 2), R = 3$

C. $I(1; 3; 2), R = 3$

D. $I(-1; 3; 2), R = 9$

Hướng dẫn giải

Câu 34: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 3z - 6 = 0$

và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\Delta // (\alpha)$

B. $\Delta \perp (\alpha)$

C. Δ cắt và không vuông góc với (α)

D. $\Delta \subset (\alpha)$

Lời giải

Chọn D.

Số điểm chung của Δ và (α) là số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 - t & (1) \\ y = -1 - t & (2) \\ z = 3 + t & (3) \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được: $0t = 0$: phương trình có vô số nghiệm.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 3 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $(1; -2; 3)$

B. $(1; 2; -3)$

C. $(-1; 2; -3)$

D. $(1; 2; 3)$

Lời giải

Chọn B.

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 2; -3)$.

Câu 36: Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $I(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 4 = 0$. Mặt cầu (S) tâm I cắt (P) theo một đường tròn bán kính $r = 4$. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$

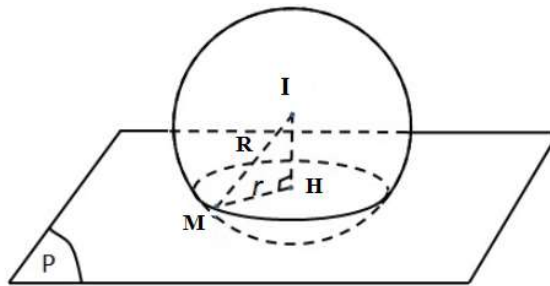
B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

Chọn D.



Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|2+1+2+4|}{\sqrt{2^2+1+2^2}} = \frac{9}{3} = 3$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{d^2(I, (P)) + r^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 37: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2t \\ z = -2 - mt \end{cases}$ và mp(P): $2x - y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của m để

$d \subset (P)$ là:

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = 4$

D. $m = -4$

Câu 38: Cho điểm $A(0;-1;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$. Khoảng cách từ A đến d là:

A. $\sqrt{14}$

B. $\sqrt{8}$

C. $\sqrt{6}$

D. $\sqrt{3}$

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-2;4;3)$ và đi qua $M(0;2;2)$ có phương trình là

A. $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 3$

B. $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 9$

C. $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 3$

D. $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 9$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (1;1;-2)$, $\vec{v} = (1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2$

B. $m = 2 - \sqrt{6}$

C. $m = 2 + \sqrt{6}$

D. $m = 2 \pm \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1-2m}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{1^2+m^2}} = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3}\sqrt{1-m^2}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 3 + 3m^2 \text{ (điều kiện } m < \frac{1}{2}).$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}. \text{Đổi chiều đk ta có } m = 2 - \sqrt{6}.$$

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(1; -2; 0)$ đến mặt phẳng (P) bằng:

A. 5

B. 2

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } d(M; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{5}{3}$$

Câu 42: Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -1; 8)$ lên đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \text{ là:}$$

A. $(1; 2; 1)$

B. $(5; -3; 4)$

C. $(-2; 1; 3)$

D. $(1; 1; 3)$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của M lên d $\Rightarrow H(1+2t; -1-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (-1+2t; -t; -8+2t)$

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(-1+2t) - (-t) + 2(-8+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(5; -3; 4).$$

Câu 43: Góc giữa hai đường thẳng d: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và $\Delta: \begin{cases} x = -7+t \\ y = 2+2t \\ z = -1+t \end{cases} (t \in R)$ bằng

A. 45°

B. 90°

C. 60°

D. 30°

Giải: Gọi α là góc tạo bởi d và Δ

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{a}_d \cdot \vec{a}_\Delta|}{|\vec{a}_d| \cdot |\vec{a}_\Delta|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2;1;0), B(-3;0;4), C(0;7;3)$. Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ bằng

A. $-\frac{7\sqrt{177}}{178}$

B. $\frac{7\sqrt{177}}{178}$

C. $-\frac{7\sqrt{118}}{177}$

D. $\frac{7\sqrt{118}}{177}$

Giải: $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 4), \overrightarrow{BC} = (3; 7; -1) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{7\sqrt{118}}{177}.$

Câu 45: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua Δ là

A. $M'(0; -3; 3)$

B. $M'(3; -3; 0)$

C. $M'(-1; -2; 0)$

D. $M'(1; -3; 2)$

Giải: Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với Δ . $\Delta \cap d = \{N\}$

Suy ra N là trung điểm $MM' \Rightarrow N(-1+2t; -2-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(-3+2t; 1-t; 2t-1)$

Do $\Delta \perp d \Rightarrow (-3+2t) \cdot 2 - 1(1-t) + 2(2t-1) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow N(1; -3; 2) \Rightarrow M'(0; -3; 3).$

Câu 46: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 2; -1), B'(2; -1; 3), C(3; -4; 1), D'(0; 3; 5)$. Giả sử tọa độ $D(x; y; z)$ thì giá trị của $x + 2y - 3z$ bằng:

A.0

B.1

C.2

D.-2

Giải: Gọi M, N lần lượt là trung điểm $AC, B'D'$

I là trung điểm MN cũng là trung điểm của $B'D$

$$\text{Ta có } M(2; -1; 0) \text{ và } N(1; 1; 4) \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right) \Rightarrow D(1; 1; 1) \Rightarrow x + 2y - 3z = 0.$$

Câu 47: Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Đặt $w = (1 + 2i)z - 1 + 2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

A. 2

B. $3\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Gọi số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có $|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$ (*).

Mà số phức $w = (1 + 2i)z - 1 + 2i$

$$\Leftrightarrow w = (1 + 2i)(a + bi) - 1 + 2i \Leftrightarrow w = (a - 2b - 1) + (2a + b + 2)i.$$

Giả sử số phức $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $\begin{cases} x = a - 2b - 1 \\ y = 2a + b + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = a - 2b \\ y - 2 = 2a + b \end{cases}$.

$$\text{Ta có: } (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (a - 2b)^2 + (2a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab + 4a^2 + b^2 + 4ab$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 \text{ (theo (*)).}$$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Điểm M là điểm biểu diễn của số phức w thì $|w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi OM nhỏ nhất.

Ta có $OI = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $IM = R = 2\sqrt{5}$.

Mặt khác $OM \geq |OI - IM| \Leftrightarrow OM \geq |\sqrt{5} - 2\sqrt{5}| \Leftrightarrow OM \geq \sqrt{5}$.

Do vậy $|w|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$

B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$

C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$

D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Giả sử } M(x; y; z) &\Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} = (x; y; z+1) \\ \overline{BM} = (x+1; y-1; z) \\ \overline{CM} = (x-1; y; z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3[x^2 + y^2 + (z+1)^2] + 2[(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2] \\ &\quad - [(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2] \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 6 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y-1)^2 + (2z+2)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}. \\ \text{Dấu "=" xảy ra} &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1, \text{ khi đó } M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right). \end{aligned}$$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$

D. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$

Lời giải

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là: $\vec{u_d} = (1; 1; 2)$

Gọi giao điểm của đường thẳng Δ và d là B .

Vì B thuộc đường thẳng d nên tọa độ của B có dạng: $B(1+t; t; -1+2t)$. Ta có $\vec{AB} = (t; t; -3+2t)$

Vì đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d nên:

$$\vec{AB} \perp \vec{u_d} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1.t + 1.t + 2.(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Do đó $B(2; 1; 1)$, $\vec{AB} = (1; 1; -1)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 0; 2)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{AB} = (1; 1; -1)$ nên có phương

trình chính tắc: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(5; 7; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - 4y + 3z + 2 = 0$ là:

A. $\frac{x+2}{5} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+3}{1}$

B. $\frac{x-2}{5} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-3}{1}$

C. $\frac{x+5}{2} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z+1}{3}$

D. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-1}{3}$

Lời giải

Gọi d là phương trình đường thẳng cần tìm.

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT $\vec{n} = (2; -4; 3)$.

d vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{u} = \vec{n} = (2; -4; 3)$ là 1 VTCP của d .

Vậy $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-1}{3}$.