



Chương

Bài 1.

DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A

Lý thuyết



Tam thức bậc hai:

- » Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$.
- » Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ được gọi là **nghiệm của tam thức bậc hai** $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- » $D = b^2 - 4ac$ và $D' = b^2 - ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Dấu của tam thức bậc hai:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $D = b^2 - 4ac$.

- » Nếu $D < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- » Nếu $D = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- » Nếu $D > 0$ thì $f(x)$ luôn:

- Cùng dấu với hệ số a khi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
- Trái dấu với hệ số a khi $x \in (x_1; x_2)$.

Trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$.





Chú ý

Xét dấu tam thức bậc hai ta làm các bước:

» **Bước (1):** Tính và xác định dấu của biệt thức D ;

» **Bước (2):** Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có);

» **Bước (3):** Xác định dấu của hệ số a ;

» **Bước (4):** Xác định dấu của $f(x)$.

► **Chú ý:** Khi xét dấu của tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn D' thay cho biệt thức D .



Nhận xét

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

$$(1) \quad ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm nghiệm và biệt thức của tam thức bậc hai



Phương pháp

- » Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$.
- » Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ được gọi là **nghiệm của tam thức bậc hai** $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- » $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Ví dụ 1.1.

Tìm biệt thức và nghiệm của các tam thức bậc hai sau

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

(2) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

(3) $f(x) = 2x^2 - 3x$

(4) $f(x) = -x^2 - 2\sqrt{2}x - 4$

(5) $f(x) = -3x^2 - 2x + 2$

(6) $f(x) = -x^2 + 4$

Lời giải

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Tam thức $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = 2$.

(2) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Tam thức $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ có $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2$.

(3) $f(x) = 2x^2 - 3x$

Tam thức $f(x) = 2x^2 - 3x$ có $\Delta = 1$, nên tam thức có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = 0$.

(4) $f(x) = -x^2 - 2\sqrt{2}x - 4$

Tam thức $f(x) = -x^2 - 2\sqrt{2}x - 4$ có $\Delta = -8$, nên tam thức vô nghiệm.

(5) $f(x) = -3x^2 - 2x + 2$

Tam thức $f(x) = -3x^2 - 2x + 2$ có $\Delta = \sqrt{28}$,



$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}.$$

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt

(6) $f(x) = -x^2 + 4$

Tam thức $f(x) = -x^2 + 4$ có $\Delta = 16$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2; x_2 = 2$.



Ví dụ 1.2.

Tìm biệt thức và nghiệm (nếu có) của các tam thức bậc hai sau:

(1) $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$

(2) $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m$

(3) $f(x) = x^2 + mx - 1$

(4) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 3mx - 1$

Lời giải

(1) $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$

Tam thức $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có $\Delta = 4$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - m; x_2 = 1 + m$.

(2) $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m$

Tam thức $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m$ có $\Delta = 1$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m; x_2 = 1 + m$.

(3) $f(x) = x^2 + mx - 1$

Tam thức $f(x) = x^2 + mx - 1$ có $\Delta = m^2 + 4 > 0$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}; x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}$.

(4) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 3mx - 1$

Tam thức $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 3mx - 1$ có $\Delta = 13m^2 + 4 > 0$,

Nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-3m + \sqrt{13m^2 + 4}}{2(m^2 + 1)}; x_2 = \frac{-3m - \sqrt{13m^2 + 4}}{2(m^2 + 1)}$.



▮ Dạng 2. Xét dấu tam thức bậc hai



Phương

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $D = b^2 - 4ac$.

» Nếu $D < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

» Nếu $D = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.

» Nếu $D > 0$ thì $f(x)$ luôn:

■ Cùng dấu với hệ số a khi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

■ Trái dấu với hệ số a khi $x \in (x_1; x_2)$.

Trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$.



Ví dụ 2.1.

Xét dấu của các tam thức sau:

(1) $3x^2 - 2x + 1$

(2) $-x^2 + 4x + 5$

(3) $4x^2 + 4x + 1$

(4) $2x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

(5) $3x^2 - 2x - 8$

(6) $-x^2 + 2x - 1$

🔗 Lời giải

(1) $3x^2 - 2x + 1$

Ta có $D' = -2 < 0$ và $a = 3 > 0$. Suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $-x^2 + 4x + 5$

$$-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Ta có:

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$-x^2 + 4x + 5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra: $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

(3) $4x^2 + 4x + 1$

Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $D = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số

$a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

(4) $2x^2 - 6x + \frac{9}{2}$



Ta có:
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

Suy ra: $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(5) $3x^2 - 2x - 8$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có:
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

Suy ra: $f(x) > 0 \Leftrightarrow \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ và $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$.

(6) $-x^2 + 2x - 1$

Ta có:
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Suy ra: $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Ví dụ 2.2.

Xét dấu các biểu thức sau:

(1) $f(x) = 2x^2 + x + 6$

(3) $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

(5) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$

(7) $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$

(2) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

(4) $f(x) = (4 - 3x)(x^2 - 5x + 6)$

(6) $f(x) = -0,3x^2 + x - 1,5$

(8) $f(x) = \sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1$

Lời giải

(1) $f(x) = 2x^2 + x + 6$

$f(x) = 2x^2 + x + 6$ có $\Delta = -47 < 0$, hệ số $a = 2 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$



$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 \text{ có } D = 0, \text{ hệ số } a = 4 > 0 \text{ nên } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$(3) \quad f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2, \text{ hệ số } a = 1 > 0 \text{ nên}$$

$$f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup (2; +\infty) \quad \text{và} \quad f(x) < 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 2 \right).$$

$$(4) \quad f(x) = (4 - 3x)(x^2 - 5x + 6)$$

$$f(x) = (4 - 3x)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	3	$+\infty$
$4 - 3x$	+	0	-	+	-
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	+
$f(x)$	+	0	-	0	-

Ta có, bảng xét dấu:

$$\text{Vậy } f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{4}{3} \right) \cup (2; 3) \quad \text{và} \quad f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{4}{3}; 2 \right) \cup (3; +\infty).$$

$$(5) \quad f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$$

$$f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2} \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1 = 1, x_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -3 - 2\sqrt{2},$$

$$\text{Hệ số } a = 1 - \sqrt{2} < 0 \text{ nên } f(x) < 0, \forall x \in \left(-\infty; -3 - 2\sqrt{2} \right) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{và } f(x) > 0, \forall x \in \left(-3 - 2\sqrt{2}; 1 \right).$$

$$(6) \quad f(x) = -0,3x^2 + x - 1,5$$

$$f(x) = -0,3x^2 + x - 1,5 \text{ có } D = -\frac{4}{5} < 0, \text{ hệ số } a = -0,3 < 0 \text{ nên } f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(7) \quad f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$$

$$f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5} \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1 = 1, x_2 = -\sqrt{5}, \text{ hệ số } a = 1 > 0$$

$$f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; -\sqrt{5} \right) \cup (1; +\infty) \quad \text{và} \quad f(x) < 0, \forall x \in \left(-\sqrt{5}; 1 \right)$$

Nên

$$(8) \quad f(x) = \sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1$$



$f(x) = \sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1, x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, hệ số $a = \sqrt{3} > 0$

Nên $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ và $f(x) < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.



Ví dụ 2.3.

Xét dấu các biểu thức sau:

(1) $f(x) = (x+3)(2x^2 + 5x + 2)$

(3) $f(x) = \frac{2x - x^2}{3 + x}$

(5) $f(x) = x^2 - 2x + 5.$

(7) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 1}.$

(9) $f(x) = x - \frac{x^2 - x + 6}{x^2 + 2x + 4}$

(2) $f(x) = (x^2 - 7x + 12)(1 - x)$

(4) $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 7}{4 - x^2}$

(6) $f(x) = x^2 - 5x - 6.$

(8) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}$

(10) $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 10x + 16}$

Lời giải

(1) $f(x) = (x+3)(2x^2 + 5x + 2)$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

Cho $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$;

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2 + 5x + 2$	$+$	$+$	0	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = -2; x = -\frac{1}{2}.$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

(2) $f(x) = (x^2 - 7x + 12)(1 - x)$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}; 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Cho

Bảng xét dấu:



x	$-\infty$	1	3	4	$+\infty$
$1-x$	+	0	-	-	-
$x^2-7x+12$	+		0	0	+
$f(x)$	+	0	0	0	-

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 3) \cup (4; +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 3; x = 4$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (3; 4)$$

(3) $f(x) = \frac{2x - x^2}{3 + x}$

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}; \quad 3 + x = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$3+x$	-	0	+	+	+
$2x-x^2$	-		0	0	-
$f(x)$	+		0	0	-

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 0) \cup (2; +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (0; 2)$$

$f(x)$ không xác định khi và chỉ khi $x = -3$.

(4) $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 7}{4 - x^2}$

$$2x^2 - 9x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}; \quad 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1	2	$\frac{7}{2}$	$+\infty$			
$2x^2-9x+7$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$f(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$

Kết luận:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{7}{2}$$



$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup \left(2; \frac{7}{2}\right).$$

$f(x)$ không xác định khi và chỉ khi $x = -2; x = 2$.

(5) $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

Ta có $D' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(6) $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$.

Do $a = 1 > 0$ nên $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty) \\ f(x) < 0, \forall x \in (-1; 6) \end{cases}$

(7) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 1}$.

Ta có $g(x) = x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$.

$h(x) = x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$h(x)$		$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; +\infty) \\ f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1) \end{cases}$

(8) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}$

Lời giải

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$	
$2x^2 - x - 1$	+		+ 0 - 0 +				+
$x^2 - 4$	+ 0 -		-		- 0 +		
$f(x)$	+		- 0 + 0 -				+

(9) $f(x) = x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$



Ta có
$$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{(x-1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$$

$$-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}, -x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ta có

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	$+\infty$					
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	
$-x^2+x+6$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$	
$-x^2+3x+4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$	$-$	0	$+$	$ $	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$

Suy ra $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-2; -1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$,

$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; 4)$.

(10)
$$f(x) = \frac{2x - 5}{4x^2 - 19x + 12}$$

$$4x^2 - 19x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Điều kiện xác định:

Ta có $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$, $4x^2 - 19x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$		
$2x-5$	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$4x^2-19x+12$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{2x-5}{4x^2-19x+12}$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$

Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$f(x)$ không xác định tại $\begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{2} \right) \cup (4; +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{2}; 4 \right)$$



▮ Dạng 3. Điều kiện của tham số để tam thức bậc hai có dấu không đổi



Phương

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$. Đặt $D = b^2 - 4ac$.

$$\gg \quad f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

$$\gg \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$

$$\ll \quad f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

$$\ll \quad f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$



Ví dụ 3.1.

Cho $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)$ luôn dương với mọi x .

🔑 Lời giải

Ta có $a = m^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $D' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$.

Để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $D < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.



Ví dụ 3.2.

Cho $f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị của x .

🔑 Lời giải

Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m \neq -2$, để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m+2 > 0 \\ D' = (m+2)^2 - (m+2)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ -m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Vậy với $m \geq -2$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Ví dụ 3.3.

Cho $f(x) = mx^2 - x - 1$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với mọi giá trị của x .

🔑 Lời giải

Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = -x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Với $m \neq 0$, để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là $\begin{cases} m < 0 \\ D' = 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$.



Vậy với $m < -\frac{1}{4}$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Ví dụ 3.4.

Cho $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải

Với $m=4 \Rightarrow f(x) = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m \neq 4$, để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m-4 < 0 \\ D' = (m-4)^2 - (m-4)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Vậy với $m \leq 4$ thì $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Ví dụ 3.5.

Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - x + m - 1}$.

Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - x + m > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = 1 - 4(m-1) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$



Ví dụ 3.6.

Tìm các giá trị của tham số m để

$$(1) f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } f(x) = (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1$$

$$(2) f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } f(x) = (m+4)x^2 - 2mx + 2m - 3$$

$$(3) f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$$

Lời giải

$$(1) f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } f(x) = (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1$$

Trường hợp 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 2 \end{cases}$$

Xét $2m^2 - 3m - 2 = 0$

$$\text{Nếu } m = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$$

$$\text{Nếu } m = 2 \Rightarrow f(x) = -1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Trường hợp 2.



Xét $2m^2 - 3m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$, khi đó, điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in I$ là.

$$\begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 < 0 \\ D' = (m-2)^2 + (2m^2 - 3m - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq m \leq 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m < 2 \end{cases}$$

(2) $f(x) < 0, \forall x \in I$ với $f(x) = (m+4)x^2 - 2mx + 2m - 3$.

Với $m = -4 \Rightarrow f(x) = 8x - 14 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}$.

Với $m \neq -4$, để $f(x) < 0, \forall x \in I$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m+4 < 0 \\ D' = m^2 - (m+4)(2m-6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m \in (-\infty; -6) \cup (4; +\infty) \Leftrightarrow m \in (-\infty; -6) \end{cases}$$

Vậy với $m < -6$ thì $f(x) < 0, \forall x \in I$.

(3) $f(x) > 0, \forall x \in I$ với $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$.

Ta có $-4x^2 + 5x - 2 < 0, \forall x \in I$.

Để $f(x) > 0, \forall x \in I$ thì $g(x) = -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in I$

$$\Leftrightarrow D' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>