BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI
VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC SUY RỘNG

Lời mở đầu

Bất đẳng thức là một lĩnh vực khó trong chương trình toán học phổ thông, song nó lại luôn có sức hấp dẫn, thu hút sự tìm tòi, óc sáng tạo của những người yêu toán. Dạng toán về bất đẳng thức thường có mặt trong các kì thi tuyển sinh, thi học sinh giỏi hay các kì thi Olympic.

Có rất nhiều phương pháp chứng minh bất đẳng thức ,mỗi phương pháp lại có những vẻ đẹp và sự độc đáo riêng .Ngay cả khi áp dụng cùng một phương pháp thì cái hay của bài toán lại phụ thuộc vào kĩ thuật linh hoat của từng người sử dụng. Do vậy , khó có thể nói rằng một phương pháp chứng minh bất đẳng thức nào đó đă chiếm vị trí độc tôn trong toán học .

Nhưng khi nói về những bất đẳng thức cơ bản ,chúng ta phải nhắc tới bất đẳng thức Cô si . Đây là bất đẳng thức vô cùng quan trọng và rất thiết thực trong chương trình Toán học phổ thông.

Bất đẳng thức Cô si được áp dụng để chứng minh nhiều bài toán ,từ đơn giản đến phức tạp . Các em học sinh Trung học cơ sở cũng có thể hiểu và vận dụng vào các bài toán hai biến .Nhưng , cũng có những bài toán trở thành những thách thức lớn trong giới chuyên môn.

Trong khuôn khổ của bài tập này,em không có tham vọng trình bày tất cả những vấn đề liên quan tới bất đẳng thức Cô si, chỉ xin đưa ra một số cách chứng minh và những bất đẳng thức suy rộng của nó .

Hi vọng vốn kiến thức nhỏ bé này sẽ đem lại chút kiến thức bổ ích cho các bạn trong lớp ,nhất là trong thời điểm chúng ta sắp xuống trường phổ thông thực tập.

Em xin chân thành cảm ơn Phó giáo sư,Tiến sĩ Nguyễn Minh Tuấn đã giảng dạy nhiệt tình cho chúng em về chuyên đề Bất đẳng thức ,giúp em học hỏi thêm nhiều kiến thức và tự tin hoàn thành bài tập này .

PHẦN NỘI DUNG

§1. Bất đẳng thức Côsi.

Trong mục này chúng ta giới thiệu bất đẳng thức Côsi và một số ví dụ minh họa.

Trước hết chúng ta xét trường hợp đơn giản $n = 2$

1. Với $a, b \in R$: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

Giải.

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.(Đúng).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

2. Với $a, b \geq 0$: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Giải

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.(Đúng).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 1. Với $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \qquad \text{(I.1.1)}$$

Giải

(I.1.1) $\Leftrightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc}$

Ta có $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}$

$$\geq 2\sqrt{2\sqrt{ab}2\sqrt[3]{bac}}$$

$$= 4\sqrt[3]{abc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = b \\ c = \sqrt[3]{abc} \\ 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Từ bất đẳng thức (I.1.1) ta thu được các bất đẳng thức sau :

Với $a,b,c \geq 0$, ta có:

a) $(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc$.

b) $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$.

Ví dụ 2. Với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm, chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(I.1.2)}$$

Trong đó $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1.a_2.....a_n$

Giải

***Cách 1*. (Dùng phương pháp quy nạp)**

$n = 1,2$. (I.1.2) hiển nhiên đúng.

Giả sử (I.1.2) đúng với $n = k (k \geq 2)$. Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Ta có

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{k(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i) + a_{k+1}}{k+1}$$

Theo giả thiết quy nạp thu được

$$S_{k+1} \geq \frac{k(\prod_{i=1}^{k} a_i)^{\frac{1}{k}} + a_{k+1}}{k+1}$$

Để chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ ta cần chứng minh

$$\frac{k(\prod_{i=1}^{k} a_i)^{\frac{1}{k}} + a_{k+1}}{k+1} \geq (\prod_{i=1}^{k+1} a_i)^{\frac{1}{k+1}}$$

Kí hiệu $\alpha^{k+1} = (\prod_{i=1}^{k} a_i)^{\frac{1}{k}}, \beta^{k+1} = a_{k+1}$

Ta thu được

$$k.\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} \geq (k+1).\alpha^{k}.\beta$$

$$\Leftrightarrow k.\alpha^{k}(\alpha - \beta) + \beta(\beta^{k} - \alpha^{k}) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)\left[k\alpha^{k} - \beta(\beta^{k-1} + \beta^{k-2}\alpha + \ldots + \alpha^{k-1})\right] \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)\left[(\alpha^{k} - \beta^{k}) + (\alpha^{k} - \beta^{k-1}\alpha) + \ldots + (\alpha^{k} - \beta\alpha^{k-1})\right] \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2\left[(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \beta^{k-1}) + \alpha(\alpha^{k-2} + .\alpha^{k-3}\beta + \ldots + \beta^{k-2}) + \ldots + \alpha^{k-1}\right] \geq 0$$

Bất đẳng thức đúng vì $\alpha, \beta \geq 0$.

Vậy (I.1.2) được chứng minh.

***Cách 2*. (Dùng quy nạp kiểu Côsi).**

$n = 1,2$. (I.1.2) hiển nhiên đúng.

Giả sử (I.1.2) đúng với n số không âm ta chứng minh (I.1.2) đúng với 2n số không âm.

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{n+i}\right]$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i \geq \frac{1}{2}\left[(\prod_{i=1}^{n} a_i) + (\prod_{i=1}^{n} a_{n+i})\right]$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{2n} a_i)^{\frac{1}{2n}}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức đúng với $n = 2^k$.

Ta chứng minh (I.1.2) đúng với $n = k$ thì đúng với $n = k-1$.Thật vậy:

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i \geq (\prod_{i=1}^{k-1} a_i)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} a_i + (\prod_{i=1}^{k-1} a_i)^{\frac{1}{k-1}} \geq k(\prod_{i=1}^{k-1} a_i)^{\frac{1}{k-1}}$$

Theo giả thiết quy nạp

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i + (\prod_{i=1}^{k-1} a_i)^{\frac{1}{k-1}} \geq k(\prod_{i=1}^{k-1} a_i (\prod_{i=1}^{k-1} a_i)^{\frac{1}{k-1}})^{\frac{1}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} a_i + (\prod_{i=1}^{k-1} a_i)^{\frac{1}{k-1}} \geq k(\prod_{i=1}^{k-1} a_i)^{\frac{1}{k-1}}. \text{ (đpcm).}$$

Cách 3: **(Phương pháp hàm lồi)**

Xét hàm số f(x) = lnx; với x > 0

Ta có f'(x) =1/x; f''(x) = - $\frac{1}{x^2}$ < 0. Vậy f(x) là hàm lồi khi x > 0

Theo bất đẳng thức Jenxen, ta có

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n));$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + ... + \ln x_n}{n}$$

Do y = lnx đồng biến, suy ra

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}, \ \forall x_i > 0, i = \overline{1,n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Xét n số $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ chỉ có 2 khả năng

i > nếu $a_i > 0 \ \forall \ i = \overline{1,n}$ theo (5)

Ta có $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$ (6)

ii) Nếu tồn tại $a_k = 0$, thì hiển nhiên (5) đúng và (6) đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho $a_i \geq 0 (i = \overline{1,n}); \alpha_i (i = \overline{1,n})$ là các số hữu tỉ dương; $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$; chứng minh rằng

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_n^{\alpha_n} . \qquad \text{(I.1.3)}$$

Giải

Vì $\alpha_i (i = \overline{1,n})$ là các số hữu tỉ dương và $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ nên ta có thể viết

$$\alpha_i = \frac{P_i}{N} (i = \overline{1,n})$$

Suy ra

$$\begin{cases} P_i \geq 0, (i = \overline{1,n}) \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = N \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{\overbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}^{P_1} + \overbrace{a_2 + a_2 + ... + a_2}^{P_2} + ... + \overbrace{a_n + a_n + ... + a_n}^{P_n}}{P_1 + P_2 + ... + P_n} \geq \sqrt[P_1 + P_2 + ... P_n]{a_1^{P_1} a_2^{P_2} ... a_n^{P_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_1}{N} a_1 + \frac{P_2}{N} a_2 + ... + \frac{P_n}{N} a_n \geq a_1^{\frac{P_1}{N}} a_2^{\frac{P_2}{N}} ... a_n^{\frac{P_n}{N}}$$

$\Leftrightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_n^{\alpha_n}$.(đpcm).

Ví dụ 4. Với $a_i \geq 0 (i = \overline{1,n}); m_i (i = \overline{1,n})$ là các số hữu tỉ dương; chứng minh rằng

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_n a_n}{m_1 + m_2 + .. + m_n} \geq \sqrt[m_1 + m_2 + ... + m_n]{a_1^{m_1} a_2^{m_2} ... a_n^{m_n}} \qquad \text{(I.1.4)}$$

Giải

Đặt $\frac{m_i}{m_2 + m_2 + ... + m_n} = \alpha_i$; từ giả thiết của bài toán ta suy ra $\alpha_i (i = \overline{1,n})$ là các số hữu tỉ dương và $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Khi đó

(I.1.4) $\Leftrightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_n^{\alpha_n}$. (đúng).

(theo bất đẳng thức (I.1.3).

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} a_i + \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}} \ge k\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{\frac{1}{k-1}}. \text{ (đpcm).}$$

§2.Các dạng trung bình và các bất đẳng thức liên quan .

Ta gọi $\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ là trung bình bậc α . Một số trường hợp đặc biệt

$\alpha = 1 : \frac{a+b}{2}$ gọi là trung bình cộng.

$\sqrt{ab}$ gọi là trung bình nhân.

$\alpha = -1 : \frac{2ab}{a+b}$ gọi là trung bình điều hòa.

Trong mục này chúng ta quan tâm tới các bất đẳng thức được chứng minh nhờ các tính chất của các dạng trung bình như;

1. Trung bình nhân.
2. Trung bình căn.
3. Trung bình điều hòa.
4. Mối liên hệ giữa các dạng trung bình.

I. Trung bình nhân.

Chúng ta có các kết quả cơ bản sau:

Ví dụ 1. Với $a_i, b_i (i = \overline{1,n})$ là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \left[\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\right]^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(I.2.1)}$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1 .$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}$$

$P \le 1$. (đpcm)

Ví dụ 2.Với $a_{ij}\,(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$ là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^{m}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\Big)^{\frac{1}{n}} \le \left[\Big(\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Big)\right]^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(I.2.2)}$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P=\sum_{j=1}^{m}\Big(\prod \frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}\Big)^{\frac{1}{n}} \le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1.\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 3.(Bất đẳng thức Côsi dạng tích).

Với $a_i\,(i=\overline{1,n})$ là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \ge \left[1+\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\frac{1}{n}}\right]^{n} \qquad \text{(I.2.3)}$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right]^{\frac{1}{n}} \ge 1+\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow P=\Big(\prod\frac{1}{1+a_i}\Big)^{\frac{1}{n}}+\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i}\Big)^{\frac{1}{n}} \le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1.\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4.Với $a_i, b_i\, (i=\overline{1,n})$ là những số thực dương,chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i+b_i) \geq \left[1+(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n}}+(\prod_{i=1}^{n}b_i)^{\frac{1}{n}}\right]^n \qquad \text{(I.2.4)}$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(1+a_i+b_i)\right]^{\frac{1}{n}} \geq 1+(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n}}+(\prod_{i=1}^{n}b_i)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow P=(\prod\frac{1}{1+a_i+b_i})^{\frac{1}{n}}+(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i+b_i})^{\frac{1}{n}}+(\prod\frac{b_i}{1+a_i+b_i})^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i+b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i+b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1+a_i+b_i}$$

$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 = 1.$ (đpcm).

Ví dụ 5.(Mở rộng bất đẳng thức Bunhiacopski)

Với $a_i, b_i, c_i\, (i=\overline{1,m})$ là những số thực dương, chứng minh rằng

$$1.(\prod_{i=1}^{m}a_i+\prod_{i=1}^{m}b_i)^m \leq \prod_{i=1}^{m}(a_i^m+b_i^m) \qquad \text{(I.2.5.1)}$$

$$2.(\prod_{i=1}^{m}a_i+\prod_{i=1}^{m}b_i+\prod_{i=1}^{m}c_i)^m \leq \prod_{i=1}^{m}(a_i^m+b_i^m+c_i^m) \qquad \text{(I.2.5.2)}$$

Giải

Ta chứng minh bất đẳng thức (2.5.2)

Đặt $A_i=a_i^m, B_i=b_i^m, C_i=c_i^m$

Suy ra $A_i^{\frac{1}{m}}=a_i, B_i^{\frac{1}{m}}=b_i, C_i^{\frac{1}{m}}=c_i$ ta thu được

$$(2.5.2) \Leftrightarrow (\prod_{i=1}^{m}A_i)^{\frac{1}{m}}+(\prod_{i=1}^{m}B_i)^{\frac{1}{m}}+(\prod_{i=1}^{m}C_i)^{\frac{1}{m}} \leq (\prod_{i=1}^{m}A_i+B_i+C_i)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Leftrightarrow P=(\prod_{i=1}^{m}\frac{A_i}{A_i+B_i+C_i})+(\prod_{i=1}^{m}\frac{B_i}{A_i+B_i+C_i})+(\prod_{i=1}^{m}\frac{C_i}{A_i+B_i+C_i}) \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta thu được

$$P \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{A_i+B_i+C_i}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{B_i}{A_i+B_i+C_i}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{C_i}{A_i+B_i+C_i}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i+B_i+C_i}{A_i+B_i+C_i}=1 .\text{(đpcm).}$$

Bất đẳng thức (I.2.5.1) là trường hợp riêng của bất đẳng thức (I.2.5.2)

II. Trung bình căn.

Ta có tính chất: tổng trung bình căn lớn hơn hoặc bằng trung bình căn của tổng .

Ví dụ 6. Với $a_i, b_i (i=\overline{1,n})$ là các số thực dương bất kỳ, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{n}b_i)^2} \qquad \text{(I.2.6)}$$

Giải

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=2$

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \ge \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

Bình phương hai vế ta nhận được

$$a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \ge (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \ge a_1a_2+b_1b_2$$

$$\Leftrightarrow (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \ge (a_1a_2+b_1b_2)^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_2-a_2b_1)^2 \ge 0.\text{Đúng.}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{(\sum_{i=1}^{k}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{k}b_i)^2}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2} = \sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{(\sum_{i=1}^{k}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{k}b_i)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$$

$$\geq \sqrt{(\sum_{i=1}^{k+1} a_i)^2 + (\sum_{i=1}^{k+1} b_i)^2} \text{ .(đpcm).}$$

Ví dụ 7. Với $a_i, b_i (i = \overline{1,n})$ là các số thực dương bất kỳ, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{a_i^3 + b_i^3} \geq \sqrt[3]{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^3 + (\sum_{i=1}^{n} b_1)^3} \quad \text{(I.2.7)}$$

Giải

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2$

$$\sqrt[3]{a_1^3 + b_1^3} + \sqrt[3]{a_2^3 + b_2^3} \geq \sqrt[3]{(a_1 + a_2)^3 + (b_1 + b_2)^3}$$

Lập phương hai vế bất đẳng thức ta thu được

$$\sqrt[3]{(a_1^3 + b_1^3)^2 ({a_2}^3 + {b_2}^3)} + \sqrt[3]{(a_1^3 + b_1^3)(a_2^3 + b_2^3)^2} \geq a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski mở rộng (tính chất trung bình nhân) ta thu được

$$\sqrt[3]{(a_1^3 + b_1^3)^2 ({a_2}^3 + {b_2}^3)} \geq a_1 a_1 a_2 + b_1 b_1 b_2 = a_1^2 a_2 + b_1^2 b_2$$

$$\sqrt[3]{(a_1^3 + b_1^3)(a_2^3 + b_2^3)^2} \geq a_1 a_2 a_2 + b_1 b_2 b_2 = a_1 {a_2}^2 + b_1 {b_2}^2$$

Cộng từng vế của hai bất đẳng thức trên ta thu được điều phải chứng minh.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sqrt[3]{a_i^3 + b_i^3} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt[3]{a_i^3 + b_i^3} + \sqrt[3]{a_{k+1}^3 + b_{k+1}^3}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sqrt[3]{a_i^3 + b_i^3} \geq \sqrt[3]{(\sum_{i=1}^{k} a_i)^3 + (\sum_{i=1}^{k} b_1)^3} + \sqrt[3]{a_{k+1}^3 + b_{k+1}^3}$$

$$\geq \sqrt[3]{(\sum_{i=1}^{k+1} a_i)^3 + (\sum_{i=1}^{k+1} b_1)^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

III. Trung bình điều hòa

Ta xét các bất đẳng thức cơ bản sau

Ví dụ 8. Cho $a_i, b_i > 0 (i = \overline{1,n})$,chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\le\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}b_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i} \qquad \text{(I.2.8)}$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}-b_i\right]\le\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}b_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i}-\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i+b_i}\ \ge\ \frac{(\sum_{i=1}^{n}b_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i}$$

Ta có

$$(\sum_{i=1}^{n}b_i)^2=(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\sqrt{a_i+b_i}}\sqrt{a_i+b_i})^2$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i+b_i}(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i)\text{ . (đpcm).}$$

Ví dụ 9.Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$P=\frac{a}{a+1}+\frac{2b}{2+b}+\frac{3c}{3+c}\le\frac{6(a+b+c)}{6+a+b+c} \qquad \text{(I.2.9)}$$

Giải

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương với

$$\frac{a}{a+1}-1+\frac{2b}{2+b}-2+\frac{3c}{3+c}-3\le\frac{6(a+b+c)}{6+a+b+c}-6$$

$$\Leftrightarrow N=\frac{1}{1+a}+\frac{4}{2+b}+\frac{9}{3+c}\ge\frac{36}{6+a+b+c}$$

Ta có

$$36=6^2=(\frac{1}{\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a}+\frac{2}{\sqrt{2+b}}\sqrt{2+b}+\frac{3}{\sqrt{3+c}}\sqrt{3+c})^2$$

Suy ra

$$36 \le N(6+a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow N \ge \frac{36}{6+a+b+c}$$.(đpcm).

IV. Các bất đẳng thức liên hệ giữa các dạng trung bình

Ví dụ 10.Với a,b là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad \text{(I.2.10)}$$

Giải

Ta có

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$$.Đúng.

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0.$$Đúng.

Suy ra

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$.(đpcm) .

Các bất đẳng thức mở rộng:

Bài 1.

Với $a,b>0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \le \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \qquad \text{(I.2.11)}$$

Giải :

Lũy thừa 12 cả hai vế bất đẳng thức trên ta nhận được

$$(a^3+b^3)^4 \le 2(a^4+b^4)^3$$

Áp dụng kết quả của bất đẳng thức (I.2.5.1)

$$(a^3+b^3)^4 = (1.a.a.a+1.b.b.b) \le (1^4+1^4)(a^4+b^4) = 2(a^4+b^4)^3$$.(đpcm).

Bài 2. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{\frac{a^5+b^5+c^5}{3}} \le \sqrt[6]{\frac{a^6+b^6+c^6}{3}} \qquad \text{(I.2.12)}$$

Giải

Lũy thừa 30 cả hai vế ta thu được

$$(a^5+b^5+c^5)^6 \le 3(a^6+b^6+c^6)^5$$

Áp dụng kết quả của bất đẳng thức (I.2.5.2) ta có

$$(a^5+b^5+c^5)^6 = (1.a.a.a.a.a + 1.b.b.b.b.b + 1.c.c.c.c.c)^6$$

$$\le (1^6+1^6+1^6)(a^6+b^6+c^6) \text{. (đpcm).}$$

Bài 3. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \ge (1+ab^2)(1+bc^2)(1+ca^2)$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \ge (1+ab^2)^3$$

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \ge (1+bc^2)^3$$

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \ge (1+ca^2)^3$$

Nhân các vế của 3 bất đẳng thứctrên ta thu được đpcm.

Bài 4. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$(1+a^3+b^3)(1+b^3+c^3)(1+c^3+a^3) \ge (1+2abc)^3$$

Hướng dẫn

Sử dụng

$$(1+a_1+b_1)(1+b_1+c_1)(1+c_1+a_1) \ge (1+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{b_1b_2b_3})^3$$

Bài 5.

Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2} \ge \sqrt{9+(a+b+c)^2}$$

Hướng dẫn

Sử dụng

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{b_1^2+c_1^2}+\sqrt{c_1^2+a_1^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2+(b_1+b_2+b_3)^2}$$

Chọn $a_1=a_2=a_3=1; b_1=a, b_2=b, b_3=c$ ta thu đpcm.

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC SUY RA TỪ BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

§1.Các bất đẳng thức suy ra từ các dạng trung bình

I. Ta có các kết quả sau

Ví dụ 1.Với $A\geq B\geq 0$,chứng minh rằng :

$$B\leq\frac{2AB}{A+B}\leq\sqrt{AB}\leq\frac{A+B}{2}\leq A \qquad \text{(II.1.1)}$$

Giải

Áp dụng kết quả của bất đẳng thức (I.2.10) ta có

$$\frac{2AB}{A+B}\leq\sqrt{AB}\leq\frac{A+B}{2}$$

Ta chứng minh

$$B\leq\frac{2AB}{A+B}$$

$$\Leftrightarrow B(A+B)\leq 2AB$$

$$\Leftrightarrow BA+B^2\leq 2AB$$

$$\Leftrightarrow B^2\leq AB$$

$B(A-B)\geq 0$.Đúng.($B\geq 0$, $A\geq B$)

Ta chứng minh

$$\frac{A+B}{2}\leq A$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}\leq 2\mathrm{A}$$

$\Leftrightarrow B\leq A$.Đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2. Với $A \geq B \geq 0$,chứng minh rằng

$$B \leq (\frac{A^\alpha + B^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\frac{A^\beta + B^\beta}{2})^{\frac{1}{\beta}} \leq A \qquad (1 \leq \alpha \leq \beta) \quad \text{(II.1.2)}$$

Giải

Dễ thấy $\quad B \leq (\frac{A^\alpha + B^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}$

$$(\frac{A^\beta + B^\beta}{2})^{\frac{1}{\beta}} \leq A$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$(\frac{A^\alpha + B^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\frac{A^\beta + B^\beta}{2})^{\frac{1}{\beta}}$$

Đặt $A^\alpha = a, B^\alpha = b \Rightarrow A = a^{\frac{1}{\alpha}}, B = b^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\Rightarrow A^\beta = a^{\frac{\beta}{\alpha}}, B^\beta = b^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Khi đó

$$(\frac{A^\alpha + B^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\frac{A^\beta + B^\beta}{2})^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a+b}{2})^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\frac{a^{\frac{\beta}{\alpha}} + b^{\frac{\beta}{\alpha}}}{2})^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a+b}{2})^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq \frac{a^{\frac{\beta}{\alpha}} + b^{\frac{\beta}{\alpha}}}{2}$$

Đặt $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$. Do $\beta \geq \alpha \geq 1 \Rightarrow \gamma \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{a^\gamma + b^\gamma}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^\gamma$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{a+b})^\gamma + (\frac{b}{a+b})^\gamma \geq 2.(\frac{1}{2})^\gamma$$

Đặt $t = \frac{a}{a+b} \Rightarrow \frac{b}{a+b} = 1 - t \qquad (0 \leq t \leq 1)$

$$\Leftrightarrow t^\gamma + (1-t)^\gamma \geq 2.(\frac{1}{2})^\gamma$$

Xét $f(t)=t^{\gamma}+(1-t)^{\gamma}$, $(0\le t\le 1)$

$$f'(t)=\gamma t^{\gamma-1}+\gamma(-1)(1-t)^{\gamma-1}$$

$$=\gamma t^{\gamma-1}-\gamma(1-t)^{\gamma-1}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$2(\frac{1}{2})^{\gamma}$	$\nearrow$	

Suy ra $f(t)\ge f(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^{\gamma}$.(đpcm).

Các bất đẳng thức mở rộng:

Bài 1.

Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{2}(ab+bc+ca)\le\sqrt{a^4+b^4+c^4+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)}\le\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Giải

Ta có

$$a^2+b^2\ge 2ab$$

$$b^2+c^2\ge 2bc$$

$$c^2+a^2\ge 2ca$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

Suy ra

$$ab+bc+ca\le\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+(ab+bc+ca)^2}{2}}\le a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(ab+bc+ca)\le\sqrt{a^4+b^4+c^4+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)}\le\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 2. Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a+b+c)+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Giải

Ta chứng minh bổ đề sau

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3}\sqrt{a+b+c}$$

Ta có $\quad (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\le(1+1+1)(a+b+c)=3(a+b+c)$

Vậy $\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3}\sqrt{a+b+c}$

Suy ra

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2+(\sqrt{3}\sqrt{a+b+c})^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{\frac{4(a+b+c)+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(a+b+c)+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

§2. Các bất đẳng thức suy ra từ bất đẳng thức Cô si nhờ hằng đẳng thức

Xuất phát từ ý tưởng đơn giản : Nếu có $A\ge B$ thì bất đẳng thức $(1-\alpha)(A-B)\ge 0\ \ (0\le\alpha\le 1)$ mạnh hơn tùy thuộc vào độ gần 1 của α. Chúng ta xây dựng một số BĐT nhờ việc đưa tham số vào bất đẳng thức và các trường hợp đặc biệt của nó.

Ví dụ 1. Với $0\le\alpha,\beta,\gamma\le 1$, chứng minh rằng

a) $a^2+b^2\ge 2ab+\alpha(a-b)^2$ (II.2.1.1)

b) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{\alpha}{2}(a-b)^2+\frac{\beta}{2}(b-c)^2+\frac{\gamma}{2}(c-a)^2$ (II.2.1.2)

Giải

a) $$a^2+b^2\ge 2ab+\alpha(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2ab)-\alpha(a-b)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(1-\alpha)\ge 0$$

b) Áp dụng kết quả của câu a ta có :

$$a^2+b^2\ge 2ab+\alpha(a-b)^2$$

$$b^2+c^2\ge 2bc+\beta(b-c)^2$$

$$c^2+a^2\ge 2ca+\gamma(c-a)^2$$

Công vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{\alpha}{2}(a-b)^2+\frac{\beta}{2}(b-c)^2+\frac{\gamma}{2}(c-a)^2$$

Ví dụ 2. Với $a,b,c>0; 0\le\alpha,\beta,\gamma\le 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge(a+b+c)+\frac{\alpha}{b}(a-b)^2+\frac{\beta}{c}(b-c)^2+\frac{\gamma}{a}(c-a)^2 \qquad \text{(II.2.2)}$$

Giải

Ta chứng minh

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a+\frac{\alpha}{b}(a-b)^2$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab+\alpha(a-b)^2$.Đúng.(theo II.2.1.1).

Cộng từng vế của các bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a+\frac{\alpha}{b}(a-b)^2$$

$$\frac{b^2}{c}+c\ge 2b+\frac{\beta}{c}(b-c)^2$$

$$\frac{c^2}{a}+a\ge 2c+\frac{\gamma}{a}(c-a)^2$$

Ta thu được

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c)\ge 2(a+b+c)+\frac{\alpha}{b}(a-b)^2+\frac{\beta}{c}(b-c)^2+\frac{\gamma}{a}(c-a)^2$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge(a+b+c)+\frac{\alpha}{b}(a-b)^2+\frac{\beta}{c}(b-c)^2+\frac{\gamma}{a}(c-a)^2$$.(đpcm).

Ví dụ 3. Với m,n là các số tự nhiên; $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$a^{m+n}+b^{m+n}\ge\frac{1}{2}(a^m+b^m)(a^n+b^n)+\frac{\alpha}{2}(a^m-b^m)(a^n-b^n) \qquad \text{(II.2.3)}$$

trong đó $0\le\alpha\le 1$

Giải

Ta chứng minh bổ đề sau : Với m,n là các số tự nhiên ; $a,b>0$ thì

$$(a^m-b^m)(a^n-b^n)\ge 0$$

Thật vậy:

Nếu $a\ge b$ thì $\left.\begin{matrix} a^m\ge b^m \\ a^n\ge b^n\end{matrix}\right\}\Rightarrow (a^m-b^m)(a^n-b^n)\ge 0$. Đúng.

Nếu $a\le b$ thì $\left.\begin{matrix} a^m\le b^m \\ a^n\le b^n\end{matrix}\right\}\Rightarrow (a^m-b^m)(a^n-b^n)\ge 0$. Đúng.

Áp dụng kết quả của bổ đề ,ta có

(II.2.3) $\Leftrightarrow (1-\alpha)(a^m-b^m)(a^n-b^n)\ge 0$.Đúng.

Ví dụ 4. Với $a,b>0; m,n$ là các số tự nhiên, chứng minh rằng

$$\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m+n}+\frac{\alpha}{4}(a^m-b^m)(a^n-b^n) \qquad \text{(II.2.4)}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (II.2.3) ta có

$$a^{m+n}+b^{m+n}\ge\frac{1}{2}(a^m+b^m)(a^n+b^n)+\frac{\alpha}{2}(a^m-b^m)(a^n-b^n)$$

Suy ra

$$\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m+n}+\frac{\alpha}{4}(a^m-b^m)(a^n-b^n)$$.(đpcm).

(Do $\frac{1}{4}(a^m+b^m)(a^n+b^n)\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m+n}$).

Ví dụ 5. Với $a,b>0; 0<\alpha<1$, chứng minh rằng

$$a^3+b^3 \ge ab(a+b)+\frac{2\alpha}{3}(a^2-b^2)(a-b) \qquad \text{(II.2.5)}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (II.2.4) với $m=2, n=1$ ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge (\frac{a+b}{2})^3+\frac{\alpha}{4}(a^2-b^2)(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3+b^3) \ge a^3+b^3+3ab(a+b)+2\alpha(a^2-b^2)(a-b)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3 \ge ab(a+b)+\frac{2\alpha}{3}(a^2-b^2)(a-b)$$.(đpcm).

Ví dụ 6. Với $a,b,c>0; 0<\alpha,\beta,\gamma<1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge ab+bc+ca+\frac{2\alpha}{3b}(a-b)(a^2-b^2)+\frac{2\beta}{3c}(b^2-c^2)(b-c)+$$
$$+\frac{2\gamma}{3a}(c^2-a^2)(c-a). \qquad \text{(II.2.6)}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (II.2.5) ta có

$$a^3+b^3 \ge ab(a+b)+\frac{2\alpha}{3}(a^2-b^2)(a-b)$$

Suy ra

$$\frac{a^3}{b}+b^2 \ge a^2+ab+\frac{2\alpha}{3b}(a^2-b^2)(a-b)$$

$$\frac{b^3}{c}+c^2 \ge b^2+bc+\frac{2\beta}{3c}(b^2-c^2)(b-c)$$

$$\frac{c^3}{a}+a^2 \ge c^2+ca+\frac{2\gamma}{3a}(c^2-a^2)(c-a)$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge ab+bc+ca+\frac{2\alpha}{3b}(a-b)(a^2-b^2)+\frac{2\beta}{3c}(b^2-c^2)(b-c)+$$
$$+\frac{2\gamma}{3a}(c^2-a^2)(c-a)$$.(đpcm).

Ví dụ 7. Với $a,b,c>0; 0<\alpha,\beta,\gamma<1; m,n$ là các số tự nhiên , chứng minh rằng

$$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\geq\frac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)(a^n+b^n+c^n)+\frac{\alpha}{3}(a^m-b^m)(a^n-b^n)+$$

$$+\frac{\beta}{3}(a^m-c^m)(a^n-c^n)+\quad+\frac{\gamma}{3}(b^m-c^m)(b^n-c^n). \quad \text{(II.2.7)}$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(1-\alpha)(a^m-b^m)(a^n-b^n)+(1-\beta)(a^m-c^m)(a^n-c^n)+(1-\gamma)(b^m-c^m)(b^n-c^n)\geq 0.$$

(Đúng).

Ví dụ 8. Với $a,b,c>0; 0<\alpha,\beta,\gamma<1; m,n$ là các số tự nhiên , chứng minh rằng

$$\frac{a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m+n}+\frac{\alpha}{9}(a^m-b^m)(a^n-b^n)+\frac{\beta}{9}(a^m-c^m)(a^n-c^n)+$$

$$+\frac{\gamma}{9}(b^m-c^m)(b^n-c^n). \quad \text{(II.2.8)}$$

Giải

Vì

$$\frac{a^m+b^m+c^m}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m$$

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

Nên bất đẳng thức (II.2.8) được suy trực tiếp từ bất đẳng thức (II.2.7).

Ví dụ 9. Với $a,b,c>0; 0<\alpha,\beta,\gamma<1$; chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{\alpha}{b^2}(a-b)^2+\frac{\beta}{c^2}(b-c)^2+\frac{\gamma}{a^2}(c-a)^2 \quad \text{(II.2.9)}$$

Giải

Áp dung kết quả của bất đẳng thức (II.2.2.1)

$$a^2+b^2\geq 2ab+\alpha(a-b)^2$$

Ta suy ra

$$\frac{a^2}{b^2}+1\ge 2\frac{a}{b}+\frac{\alpha}{b^2}(a-b)^2$$

$$\frac{b^2}{c^2}+1\ge 2\frac{b}{c}+\frac{\alpha}{c^2}(b-c)^2$$

$$\frac{c^2}{a^2}+1\ge 2\frac{c}{a}+\frac{\alpha}{b^2}(c-a)^2$$

Ta cũng có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$$

Cộng vế với vế của 4 bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{\alpha}{b^2}(a-b)^2+\frac{\beta}{c^2}(b-c)^2+\frac{\gamma}{a^2}(c-a)^2$$

(đpcm).

Ví dụ 10. Với $a,b,c>0;0<\alpha,\beta,\gamma<1$; chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^3}{a}+\frac{2\alpha}{3b^2}(a-b)(a^2-b^2)+\frac{2\beta}{3c^2}(b^2-c^2)(b-c)+$$

$$+\frac{2\gamma}{3a^2}(c^2-a^2)(c-a). \qquad \text{(II.2.10)}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (II.2.5) ta có

$$a^3+b^3\ge ab(a+b)+\frac{2\alpha}{3}(a^2-b^2)(a-b)$$

Suy ra

$$\frac{a^3}{b^2}+b\ge \frac{a^2}{b}+a+\frac{2\alpha}{3b^2}(a-b)(a^2-b^2)$$

$$\frac{b^3}{c^2}+c\ge \frac{b^2}{c}+c+\frac{2\alpha}{3c^2}(b-c)(b^2-c^2)$$

$$\frac{c^3}{a^2}+a\ge \frac{c^2}{a}+c+\frac{2\alpha}{3a^2}(c-a)(c^2-c^2)$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^3}{a}+\frac{2\alpha}{3b^2}(a-b)(a^2-b^2)+\frac{2\beta}{3c^2}(b^2-c^2)(b-c)+$$
$$+\frac{2\gamma}{3a^2}(c^2-a^2)(c-a)\text{ .(đpcm).}$$

Ví dụ 11. Với $0\le\alpha\le 1,\ a,b>0$; chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4-8\alpha}{a+b}+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}} \qquad \text{(II.2.11)}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (II.2.1.1) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}+\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$$
$$a+b\ge\sqrt{ab}+\alpha(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

Nhân vế với vế của hai bất đẳng thức trên ta thu được

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\ge 4+\frac{2\alpha}{\sqrt{ab}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\alpha\sqrt{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\alpha^2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

Suy ra

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\ge 4+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\ge 4+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}}(a+b-2\sqrt{ab})$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\ge 4-8\alpha+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}}(a+b)$$

Thu được

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4-8\alpha}{a+b}+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}}\quad\text{.(đpcm).}$$

§3. Các bất đẳng thức suy ra từ bất đẳng thức Côsi nhờ thay thế các biểu thức đối xứng.

Ví dụ 1. Với a,b,c là các số thực, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c)\ge\sqrt{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

Giải

Ta chứng minh

$$\sqrt{a^2+b^2} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

Nếu $(a+b)<0$ bất đẳng thức đúng.

Nếu $(a+b)\ge 0$ bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2) \ge \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \ge a^2+b^2+2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$$. (Đúng).

Vậy

$$\sqrt{a^2+b^2} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

$$\sqrt{b^2+c^2} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$$

$$\sqrt{c^2+a^2} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \ge \sqrt{2}(a+b+c)$$.(đpcm).

Hiển nhiên

$$\sqrt{2}(a+b+c) \ge \sqrt{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

Ví dụ 2. Với a,b,c là các số thực, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b^2+ab}+\sqrt{b^2+c^2+bc}+\sqrt{c^2+a^2+ca} \ge \sqrt{3}(a+b+c)$$

Giải

Ta chứng minh

$$\sqrt{a^2+b^2+ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$$

Nếu $(a+b)<0$ bất đẳng thức đúng.

Nếu $(a+b)\geq 0$ bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+ab) \geq \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+ab) \geq 3(a^2+b^2+2ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. (Đúng).

Vậy

$$\sqrt{a^2+b^2+ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$$

$$\sqrt{b^2+c^2+bc} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$$

$$\sqrt{c^2+a^2+ca} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a)$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta thu được

$\sqrt{a^2+b^2+ab}+\sqrt{b^2+c^2+bc}+\sqrt{c^2+a^2+ca} \geq \sqrt{3}(a+b+c)$.(đpcm).

Ví dụ 3. Với a,b,c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b^2+3ab}+\sqrt{b^2+c^2+3bc}+\sqrt{c^2+a^2+3ca} \leq \sqrt{5}(a+b+c)$$

Giải

Ta chứng minh

$$\sqrt{a^2+b^2+3ab} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+3ab) \leq \frac{5}{4}(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+3ab) \geq 5(a^2+b^2+2ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. (Đúng).

Vậy

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 3ab} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$$

$$\sqrt{b^2 + c^2 + 3bc} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(b+c)$$

$$\sqrt{c^2 + a^2 + 3ca} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(c+a)$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta thu được

$\sqrt{a^2 + b^2 + 3ab} + \sqrt{b^2 + c^2 + 3bc} + \sqrt{c^2 + a^2 + 3ca} \leq \sqrt{5}(a+b+c)$.(đpcm).

Ví dụ 4. Với a,b,c là các số thực, $-2 \leq \alpha \leq 2$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + b^2 + \alpha ab} + \sqrt{b^2 + c^2 + \alpha bc} + \sqrt{c^2 + a^2 + \alpha ca} \geq \sqrt{2+\alpha}(a+b+c)$$

Giải

Ta chứng minh

$$\sqrt{a^2 + b^2 + \alpha ab} \geq \frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}(a+b)$$

Nếu $(a+b) < 0$ bất đẳng thức đúng.

Nếu $(a+b) \geq 0$ bất đẳng thức

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + \alpha ab) \geq \dfrac{2+\alpha}{4}(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + \alpha ab) \geq (2+\alpha)(a^2 + b^2 + 2ab)$

$\Leftrightarrow (2-\alpha)(a^2 + b^2) \geq (2-\alpha)2ab$

$\Leftrightarrow (2-\alpha)(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0$

$\Leftrightarrow (2-\alpha)(a-b)^2 \geq 0$. (Đúng).

Vậy

$$\sqrt{a^2 + b^2 + \alpha ab} \geq \frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}(a+b)$$

$$\sqrt{b^2+c^2+\alpha bc} \geq \frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}(b+c)$$

$$\sqrt{c^2+a^2+\alpha ca} \geq \frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}(c+a)$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{a^2+b^2+\alpha ab}+\sqrt{b^2+c^2+\alpha bc}+\sqrt{c^2+a^2+\alpha ca} \geq \sqrt{2+\alpha}\,(a+b+c)$$. (đpcm).

Ví dụ 5. Với a,b,c là các số thực, chứng minh rằng

$$\sqrt{2a^2+b^2+ab}+\sqrt{2b^2+c^2+bc}+\sqrt{2c^2+a^2+ca} \geq \sqrt{4}(a+b+c)$$

Giải

Ta có

$$2a^2+b^2+ab=(a^2+b^2+ab)+a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2+b^2+ab=\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2+a^2$$

Suy ra

$$2a^2+b^2+ab \geq \frac{3}{4}(a+b)^2+a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2+b^2+ab \ \geq \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\right]^2+a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2+b^2+ab \ \geq \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)\right]^2+a^2\right\}\left[(\sqrt{3})^2+1^2\right]$$

$$\Rightarrow 2a^2+b^2+ab \geq \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(a+b)+a\right]^2$$

$$\Rightarrow 2a^2+b^2+ab \geq \frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2+b^2+ab} \geq \frac{1}{2}\left|\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a^2+b^2+ab} \geq \frac{1}{2}(\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b)$$

Vậy

$$\sqrt{2a^2+b^2+ab} \geq \frac{1}{2}(\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b)$$

$$\sqrt{2b^2+c^2+bc} \geq \frac{1}{2}(\frac{5}{2}b+\frac{3}{2}c)$$

$$\sqrt{2c^2+a^2+ca} \geq \frac{1}{2}(\frac{5}{2}c+\frac{3}{2}a)$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{2a^2+b^2+ab}+\sqrt{2b^2+c^2+bc}+\sqrt{2c^2+a^2+ca} \geq \sqrt{4}(a+b+c)$$. (đpcm).

Lời kết

Mặc dù đã có nhiều cố gắng song chắc hẳn bài làm không tránh khỏi những thiếu sót. Em rất mong nhận được những lời góp ý ,nhận xét quý báu của thầy giáo và các bạn .

Em xin chân thành cảm ơn .