



## Chương

### Bài 2.

# TỔNG HIỆU HAI VECTƠ

A

## Lý thuyết

### 1. Tổng của hai vectơ



#### Định nghĩa

» Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

▫ Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ .

▫ Vectơ  $\vec{AC}$  được gọi là tổng của hai  $\vec{a}, \vec{b}$ .

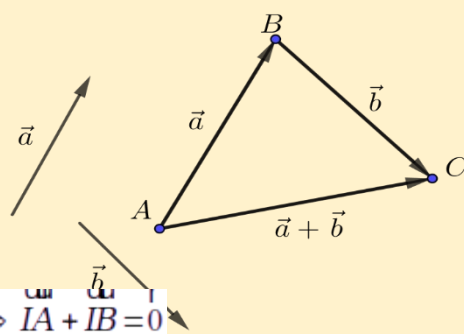
▫ Kí hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ .

► Vậy  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

► **Điểm đặc biệt.**

» Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

» Điểm  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$



### 2. Hiệu của hai vectơ



#### Định nghĩa

» Vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ , là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$ .

» Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

#### Tính chất

Với  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tùy ý, ta có:

(1) Tính chất giao hoán  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

(2) Tính chất kết hợp  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(3) Tính chất của vectơ - không  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$



**Các quy tắc:**

► **Quy tắc ba điểm:**

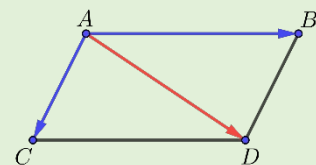
» Với 3 điểm  $A, B, C$ :  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

► **Quy tắc hiệu vectơ:**

» Với 3 điểm  $O, A, B$ :  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

► **Quy tắc hình bình hành:**

» Tứ giác  $A, B, C, D$  là hình bình hành:  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .





## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Liên quan tổng vectơ



#### Phương

#### (1) Định nghĩa tổng hai vectơ:

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

▫ Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ .

▫ Vectơ  $\vec{AC}$  được gọi là tổng của hai  $\vec{a}, \vec{b}$ .

⇒ Vậy  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

#### (2) Điểm đặc biệt:

▫ Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

▫ Điểm  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

#### (3) Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

▫ Tính chất giao hoán  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

▫ Tính chất kết hợp  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

#### ► Quy tắc ba điểm:

» Với 3 điểm  $A, B, C$ :  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

#### ► Quy tắc hình bình hành:

» Tứ giác  $A, B, C, D$  là hình bình hành:  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .



#### Ví dụ 1.1.

Cho hình bình hành  $ABCD$ , xác định các vectơ

(1)  $\vec{t} = \vec{CB} + \vec{CD}$

(2)  $\vec{e} = \vec{AC} + \vec{DA}$

#### Lời giải

(1)  $\vec{t} = \vec{CB} + \vec{CD}$

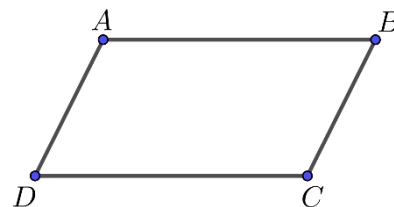
Áp dụng quy tắc hình bình hành:

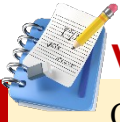
$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$$

(2)  $\vec{e} = \vec{AC} + \vec{DA}$

Áp dụng tính chất giao hoán:

$$\vec{AC} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{DC}$$





### Ví dụ 1.2.

Cho tam giác  $ABC$ , xác định các vectơ

$$(1) \vec{g} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}$$

$$(2) \vec{q} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

**Lời giải**

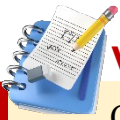
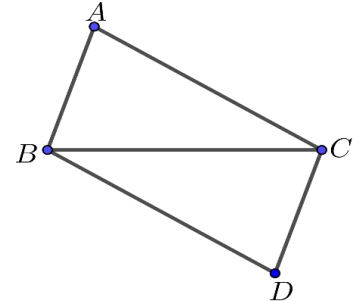
$$(1) \vec{g} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}$$

$$\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} = \left( \vec{AB} + \vec{BC} \right) + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

$$(2) \vec{q} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

Gọi  $D$  là điểm sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

Khi đó  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ .



### Ví dụ 1.3.

Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ , xác định các vectơ.

$$(1) \vec{m} = \vec{AB} + \vec{OD}$$

$$(2) \vec{n} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD}$$

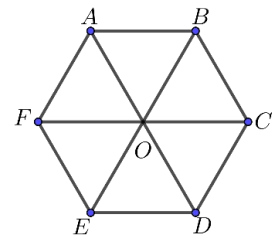
**Lời giải**

$$(1) \vec{m} = \vec{AB} + \vec{OD}$$

$$\vec{AB} + \vec{OD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$(2) \vec{n} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD}$$

$$\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}$$



### Ví dụ 1.4.

Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , xác định vectơ

$$\vec{h} = \vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \vec{A_2A_3} + \vec{A_1A_2}$$

**Lời giải**

$$\vec{h} = \vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \vec{A_2A_3} + \vec{A_1A_2}$$

$$= \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-1}A_n}$$

$$\begin{cases} \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} = \vec{A_1A_3} \\ \vec{A_2A_3} + \vec{A_3A_4} = \vec{A_2A_4} \\ \vec{A_3A_4} + \vec{A_4A_5} = \vec{A_3A_5} \\ \vdots \\ \vec{A_1A_{n-1}} + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n} \end{cases}$$

Thấy rằng:



Do đó 
$$\overbrace{A_{n-1}A_n} + \overbrace{A_{n-2}A_{n-1}} + \overbrace{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overbrace{A_2A_3} + \overbrace{A_1A_2} = \overbrace{A_1A_n}.$$



## Dạng 2. Hiệu hai vector - vector đối



### Phương

#### (1) Định nghĩa tổng hai vector:

Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

▫ Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ .

▫ Vector  $\vec{AC}$  được gọi là tổng của hai  $\vec{a}, \vec{b}$ .

⇒ Vậy  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

#### (2) Định nghĩa hiệu hai vector:

Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

▫ Ta gọi hiệu của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là vector  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

▫ Vector đối của vector  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ , là vector cùng phương nhưng ngược hướng với vector  $\vec{a}$ .

#### (3) Điểm đặc biệt:

▫ Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

▫ Điểm  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

#### (4) Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

▫ Tính chất giao hoán  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

▫ Tính chất kết hợp  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

#### ► Quy tắc ba điểm:

» Với 3 điểm  $A, B, C$ :  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

#### ► Quy tắc hiệu vector:

» Với 3 điểm  $O, A, B$ :  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ .

#### ► Quy tắc hình bình hành:

» Tứ giác  $A, B, C, D$  là hình bình hành:  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .

### Ví dụ 2.1.

Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ .

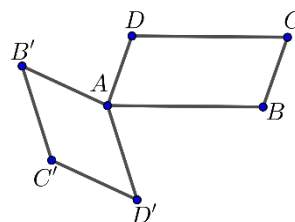
Chứng minh rằng  $\vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{0}$

#### Lời giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = (\vec{AB} - \vec{AB'}) + (\vec{AC'} - \vec{AC}) + (\vec{AD} - \vec{AD'})$$

$$= (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AC} - (\vec{AB'} + \vec{AD'}) + \vec{AC} = \vec{0}$$





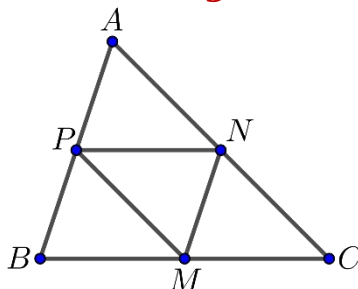
### Ví dụ 2.2.

Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:

(1)  $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$

(2)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$  với  $O$  là điểm bất kì

#### Lời giải



(1)  $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$

Vì tứ giác  $APMN$  là hình bình hành

Nên theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{AP} + \vec{AN} = \vec{AM}$ , kết hợp với quy tắc trừ

$$\Rightarrow \vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{AM} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{CM} + \vec{BM}$$

Mà  $\vec{CM} + \vec{BM} = \vec{0}$  do  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

Vậy  $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$ .

(2)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$  với  $O$  là điểm bất kì

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = (\vec{OP} + \vec{PA}) + (\vec{OM} + \vec{MB}) + (\vec{ON} + \vec{NC})$$

$$= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) - (\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP})$$

$$= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) + \vec{PA} + \vec{MB} + \vec{NC}$$

$$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0} \text{ suy ra } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}.$$



### Dạng 3. Chứng minh đẳng thức vectơ



#### Phương

► **Tính chất:** Với  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tùy ý, ta có:

▫ Tính chất giao hoán  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

▫ Tính chất kết hợp  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

► **Quy tắc ba điểm:**

» Với 3 điểm  $A, B, C$ :  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

► **Quy tắc hiệu vectơ:**

» Với 3 điểm  $O, A, B$ :  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ .

► **Quy tắc hình bình hành:**

» Tứ giác  $A, B, C, D$  là hình bình hành:  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .

► **Quy tắc trung điểm - trọng tâm:**

» Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

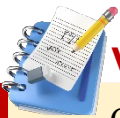
Khi đó  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

» Điểm  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Khi đó  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

Các phương pháp biến đổi:

- » Biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức (xuất phát từ vế phức tạp biến đổi đưa về vế đơn giản).
- » Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về tương đương với một đẳng thức luôn đúng.
- » Xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng để biến đổi về đẳng thức cần chứng minh.



#### Ví dụ 3.1.

Cho bốn điểm bất kỳ  $A, B, C$  và  $D$ . Hãy chứng minh đẳng thức

👉 **Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0} \text{ (Đúng).} \end{aligned}$$



#### Ví dụ 3.2.

Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng:

$$(1) \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$$

$$(2) \vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = \vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}$$

👉 **Lời giải**

$$(1) \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$$

Biến đổi vế trái ta có





$$\begin{aligned} VT &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \\ &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP. \end{aligned}$$

$$(2) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$$

Đẳng thức tương đương với

$$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = 0 \text{ (đúng).}$$



### Ví dụ 3.3.

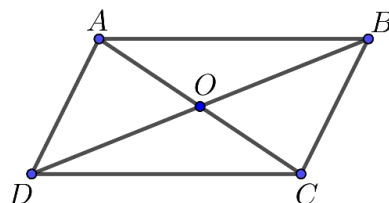
Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ .  $M$  là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

$$(1) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = 0$$

$$(2) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$$

$$(3) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

**Lời giải**



$$(1) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$$

Theo quy tắc hình bình hành:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 0$$

$$(2) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$$

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình bình hành nên ta có: } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = 0$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0.$$

$$(3) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

**Cách 1:**

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

**Cách 2:**

Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ (đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành).}$$



### Ví dụ 3.4.

Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $I$  là trung điểm của  $AM$ .

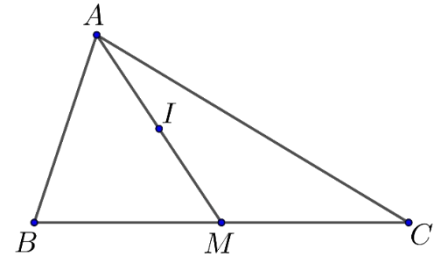
(1) Chứng minh rằng:  $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ .

(2) Với  $O$  là điểm bất kì, chứng minh rằng:  $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$ .

#### Lời giải

(1) Chứng minh rằng:  $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ .

• Ta có:  $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}$   
 $= 2\vec{IA} + 2\vec{IM}$  ( $\vec{IB} + \vec{IC} = 2\vec{IM}$  do  $M$  là trung điểm  $BC$ )  
 $= 2(\vec{IA} + \vec{IM})$   
 $= \vec{0}$  ( $\vec{IA} + \vec{IM} = \vec{0}$  do  $I$  là trung điểm của  $AM$ )  
 (đpcm).



(2) Với  $O$  là điểm bất kì, chứng minh rằng:  $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$ .

• Ta có:  $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 2\vec{IO} + 2\vec{OA} + \vec{IO} + \vec{OB} + \vec{IO} + \vec{OC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 4\vec{IO} + 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = -4\vec{IO} \Leftrightarrow 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$  (đpcm).



### Ví dụ 3.4.

Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  tâm  $O$ .

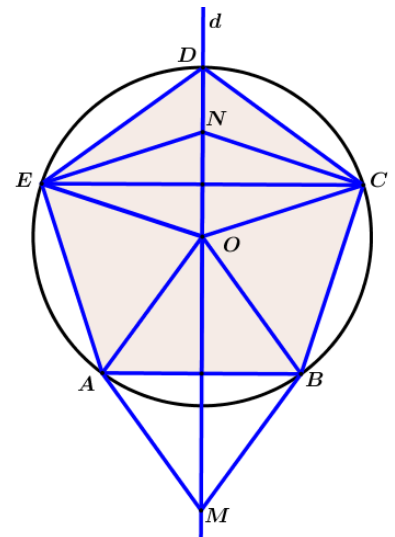
(1) Chứng minh rằng: hai vector  $\vec{OA} + \vec{OB}$  và  $\vec{OC} + \vec{OE}$  đều cùng phương với  $\vec{OD}$ .

(2) Chứng minh hai vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{EC}$  cùng phương.

#### Lời giải

(1) Chứng minh rằng: hai vector  $\vec{OA} + \vec{OB}$  và  $\vec{OC} + \vec{OE}$  đều cùng phương với  $\vec{OD}$ .

• Gọi  $d$  là đường thẳng chứa  $OD$   
 • Thì  $d$  là một trục đối xứng của ngũ giác đều.  
 • Ta có:  
 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM}$ , trong đó  $M$  là đỉnh của hình thoi  $OAMB$  và  $M \in d$ .  
 • Tương tự  $\vec{OC} + \vec{OE} = \vec{ON}$ , trong đó  $N$  là đỉnh của hình thoi  $OENC$  và  $N \in d$ .  
 • Do đó hai vector  $\vec{OA} + \vec{OB}$  và  $\vec{OC} + \vec{OE}$  đều có giá là đường thẳng  $d$





♦ Nên hai vector  $\vec{OA} + \vec{OB}$  và  $\vec{OC} + \vec{OE}$  cùng phương với nhau và cùng phương với vector  $\vec{OD}$ .

(2) Chứng minh hai vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{EC}$  cùng phương.

♦ Ta có:  $OAMB$  và  $OENC$  là các hình thoi nên ta có:  $\begin{cases} EC \perp d \\ AB \perp d \end{cases} \Rightarrow AB \parallel EC$ .

♦ Do đó hai vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{EC}$  cùng phương.

(3) Chứng minh:  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$ .

♦ Theo câu (1) ta có:

$$\vec{r} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = (\vec{OA} + \vec{OB}) + (\vec{OC} + \vec{OE}) + \vec{OD} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OD}$$

♦ Nên  $\vec{r}$  có giá là đường thẳng  $d$ .

♦ Mặt khác:  $\vec{r} = (\vec{OB} + \vec{OC}) + (\vec{OD} + \vec{OA}) + \vec{OE}$  thì  $\vec{r}$  có giá là đường thẳng  $OE$ .

♦ Vì  $\vec{r}$  có 2 giá khác nhau nên  $\vec{r} = \vec{0}$ .

⇒ Vậy  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$  (đpcm).



## Dạng 4. Độ dài vectơ



### Phương

Áp dụng: tính chất, quy tắc (ba điểm, hình bình hành, hiệu vectơ, trung điểm - trọng tâm)

Để tính  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|$  ta thực hiện theo hai bước sau:

- » **Bước 1:** Biến đổi và rút gọn biểu thức vectơ  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{v}$ , tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,... sao cho  $\vec{v}$  đơn giản nhất.



### Ví dụ 3.1.

Cho bốn điểm bất kỳ  $A, B, C$  và  $D$ . Hãy chứng minh đẳng thức  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

(1) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

(2) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$  thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$ .

### Lời giải

Giả sử:  $\vec{a} = \vec{AB}$  và  $\vec{b} = \vec{BC}$  thì  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

(1) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

- Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì 3 điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một đường thẳng và  $B$  nằm giữa  $A, C$ .

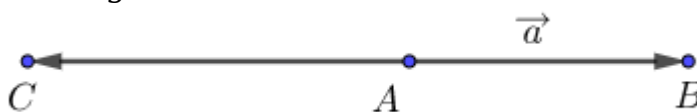


- Do đó  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

⇒ Vậy  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

(2) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$  thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$ .

- Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$  thì ba điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một đường thẳng và  $A$  nằm giữa  $B, C$ .



- Do đó  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{AB} + \vec{BC}| = AC = BC - AB = |\vec{b}| - |\vec{a}|$ .

⇒ Vậy  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$ .



(3)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ . Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Từ chứng minh ở câu (1) và (2):

$\Rightarrow$  Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$  hoặc  $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

$\Rightarrow$  Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương thì  $A, B, C$  không thẳng hàng.

♦ Xét  $\triangle ABC$  có hệ thức  $AC < AB + BC$ . Do đó  $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

♦ Như vậy, trong mọi trường hợp ta có:  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ , đẳng thức xảy ra khi  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.



### Ví dụ 3.2.

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AB = 3(\text{cm})$ ,  $AC = 4(\text{cm})$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Xác định và tính độ dài các vectơ:

(1)  $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$

(2)  $\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA}$

### Lời giải

(1)  $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$

♦ Gọi  $K$  là trung điểm  $AC$

Khi đó  $2\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{BC}$  với  $B$  là điểm bất kỳ.

♦ Nên  $|\vec{u}| = |\vec{BA} + \vec{BC}| = |2\vec{BK}| = 2|\vec{BK}|$ .

♦ Xét  $\triangle BAK$ :  $BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$ .

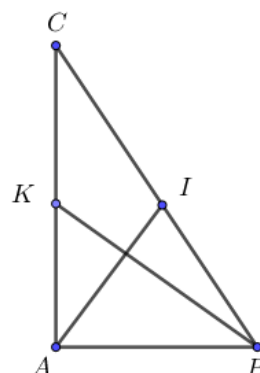
$\Rightarrow$  Vậy  $|\vec{u}| = 2|\vec{BK}| = 2\sqrt{13}$ .

(2)  $\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA}$

♦ Theo giả thiết:  $I$  là trung điểm  $BC$  khi đó  $2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$  với  $A$  là điểm bất kỳ.

$$\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA} = -(\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{CA} = -\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CA} = -\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{AC} = -\vec{AB} - 2\vec{AC}$$

♦ Khi đó:  $|\vec{v}| = |-\vec{AB} - 2\vec{AC}| = |\vec{AB} + 2\vec{AC}|$ .



### Ví dụ 3.3.

Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = a$ . Tính theo  $a$ :

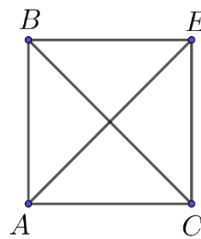
(1)  $|\vec{AB} - \vec{AC}|$

(2)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

(3)  $|\vec{AB} + 2\vec{AC}|$

### Lời giải

♦ Ta có  $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$





$$(1) \quad \left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{CB} \right| = CB = a\sqrt{2}$$

$$(2) \quad \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{AE} \right| = AE = BC = a\sqrt{2}, \text{ với } ABEC \text{ là hình vuông.}$$

$$(3) \quad \left| \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right|$$

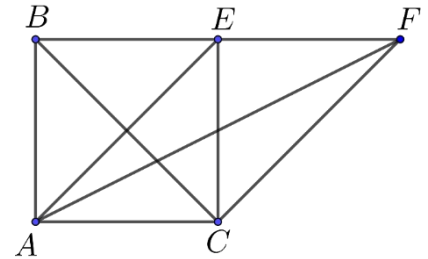
$$\left| \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{AF} \right| = AF$$

với  $AEFC$  là hình bình hành.

• Do  $DABF$  vuông tại  $B$  và  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{a}$

$$\text{Nên ta có } AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{• Vậy } \left| \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = a\sqrt{5}$$



### Ví dụ 3.3.

Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB=3$ ,  $BC=4$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Tính

$$(1) \quad \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \right|$$

$$(2) \quad \left| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \right|$$

**Lời giải**

$$(1) \quad \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \right|$$

$$\text{• Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \right| = \left| \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{AC} \right| + \left| \overrightarrow{AC} \right| = 2AC$$

• Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \right| = 2AC = 10$$

$$(2) \quad \left| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \right|$$

$$\text{• Ta có: } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN}) = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } \left| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \right| = \left| \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OC} \right| = AC + \frac{AC}{2} = \frac{15}{2} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OC} \text{ là hai vec tơ cùng hướng})$$

