

DẠNG 9**Bài toán về khoảng cách và góc**

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. M thuộc cạnh $A'D'$ sao cho $A'M = 2a$. Tính khoảng cách giữa AM và BD' theo a

- A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}a$. B. $\frac{\sqrt{14}}{14}a$. C. $\frac{\sqrt{7}}{7}a$. D. $\frac{3\sqrt{7}}{7}a$.

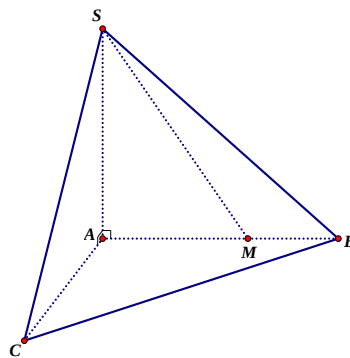
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác vuông tại đỉnh A , $AB = AC = a$. Đường thẳng SA vuông góc với mp ABC , $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{a}$. D. $3\sqrt{3}a$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh $AB = a$, $BAD = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$, $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi M là trung điểm của CD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là

- A. $\frac{3a}{8}$. B. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$. C. $\frac{8a}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{7}a}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC có $AB = 6a$, $AC = 3a$, $BAC = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ (Xem hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

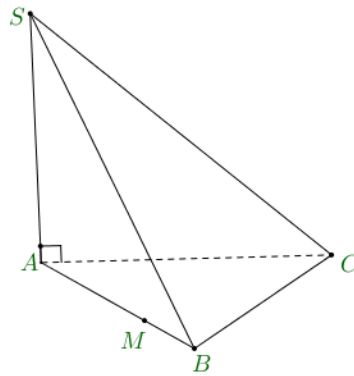


- A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. C. $\frac{4a\sqrt{39}}{13}$. D. $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 5: Cho $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SD bằng

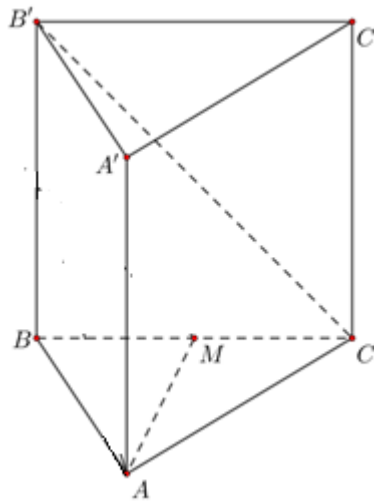
- A. $\frac{a}{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{57}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh $3a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$ (minh họa như hình vẽ). Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



- A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. B. $\sqrt{21}a$. C. $2\sqrt{21}a$. D. $\frac{2\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $BA = BC = 2a$, cạnh bên $AA' = 4a$, M là trung điểm của BC (minh họa như hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng



- A. $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$ biết $AA' = a\sqrt{2}$.

- A. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. D. $2a$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm thuộc AD sao cho $AM = 3MD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD bằng

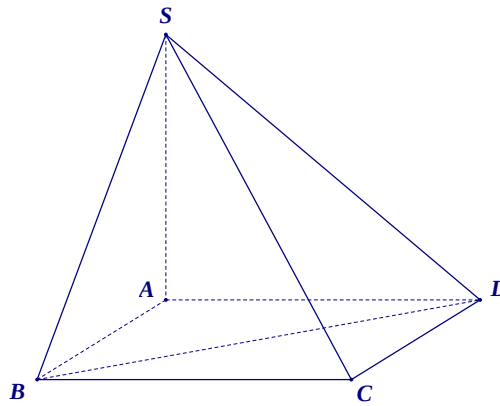
- A. $\frac{a\sqrt{35}}{35}$. B. $\frac{3a\sqrt{35}}{35}$. C. $\frac{2a\sqrt{35}}{35}$. D. $\frac{9a\sqrt{35}}{35}$.

Câu 10: Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB cân tại S . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy nằm trên miền trong hình vuông $ABCD$. Góc giữa đường thẳng SA và

mặt đáy bằng 30° , góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy bằng 45° . Thể tích hình chóp $SABCD$ bằng $\frac{a^3}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA .

- A. $2a$. B. a . C. $\frac{a}{3}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ (hình vẽ minh họa). Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

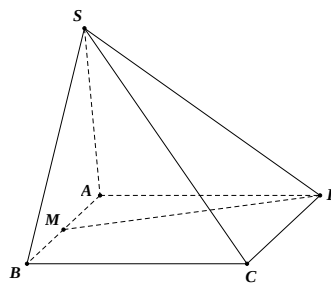


- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{3a}{4}$.

Câu 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{37}}{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh SA . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm AB , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM .



- A. $\frac{4a\sqrt{21}}{21}$. B. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM theo a .

- A. $\frac{2a\sqrt{39}}{\sqrt{13}}$. B. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. C. $\frac{2a\sqrt{11}}{13}$. D. $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$. B. $\frac{a\sqrt{42}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{10}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $AA' = a$. Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và $(SAD) \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh đáy AB . Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM là:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

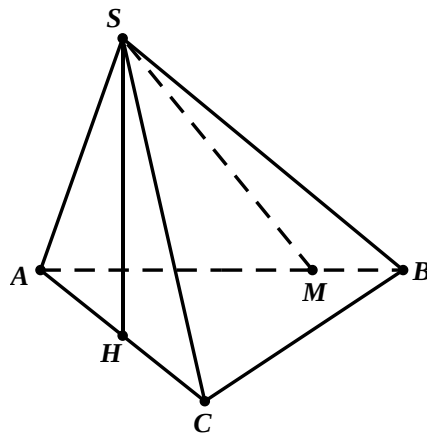
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa AC và SB , biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .

- A. $\frac{\sqrt{5}a}{2}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{2\sqrt{37}a}{185}$. D. $\frac{2\sqrt{185}a}{37}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành thỏa mãn $AB = a\sqrt{6}$, $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD là

- A. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng chứa đáy là trung điểm H của AC và $SH = 2a$. Gọi điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = 3MB$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Khoảng cách giữa SM và BC bằng

A. $a\sqrt{\frac{12}{259}}$. B. $a\sqrt{\frac{259}{12}}$. C. $a\sqrt{\frac{67}{12}}$. D. $a\sqrt{\frac{12}{67}}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa SC và AB theo a .

A. $\frac{\sqrt{3}a}{8}$. B. $\frac{3a}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB , góc giữa SC và đáy bằng 60° . Tính khoảng cách giữa SB và AC .

A. $\frac{3a}{\sqrt{26}}$. B. $\frac{3a}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{3a}{\sqrt{52}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{13}}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều với $AD = 2a, AB = BC = CD = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD theo a .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 24: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là nửa lục giác đều có $AB = BC = CD = a$, $SA \perp ABCD$, góc giữa SC và $ABCD$ là 45° . Khoảng cách giữa SB và CD là

A. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{3a}{5}$. D. $\frac{5a}{3}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $4a$, $\triangle SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $\angle BAD = 120^\circ$. Gọi M là điểm trên cạnh CD sao cho $CM = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\frac{8\sqrt{51}}{17}a$. B. $\frac{\sqrt{51}}{12}a$. C. $\frac{4\sqrt{51}}{17}a$. D. $\frac{\sqrt{51}}{6}a$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $AC = 2a, BC = a, DC = a\sqrt{5}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm OA , $DM \cap AB = N$. Tính $d(N, (SBC))$

A. $\frac{2}{3}a$. B. $\frac{4\sqrt{5}}{15}a$. C. $\frac{1}{2}a$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Độ dài các cạnh $AB = 3a, AD = 4a, SA = 5a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC và $BM = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MD là

- A. $\frac{15a}{\sqrt{259}}$. B. $\frac{29a}{\sqrt{245}}$. C. $\frac{39a}{\sqrt{245}}$. D. $\frac{45a}{\sqrt{259}}$.

Câu 29: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM .

- A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. B. $a\sqrt{22}$. C. $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. D. $a\sqrt{11}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{9}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 75° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB gần bằng giá trị nào sau đây? (lấy 3 chữ số thập phân)

- A. $0.833a$. B. $0.844a$. C. $0.855a$. D. $0.866a$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, với $AB \parallel CD$, $AB = 3a$, $AD = DC = a$, $\angle BAD = 60^\circ$, biết SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AM$. Khoảng cách giữa SM và AD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. C. $\frac{2a}{5}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD là tam giác đều, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa SA và BD .

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\angle ABC = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD .

- A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{13}$. C. $\frac{2a}{\sqrt{13}}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a, AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi E là trung điểm AD , F nằm trên AB sao cho $AF = \frac{1}{4}AB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và EF bằng

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{9a}{8}$. C. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. D. $\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SD vuông góc với $(ABCD)$, $SD = a\sqrt{5}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $CD = 2AD = 2AB = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM .

- A. a . B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $\frac{a}{5}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $ABC = 60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AO . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD .

- A. $\frac{a\sqrt{560}}{112}$. B. $\frac{a\sqrt{560}}{10}$. C. $\frac{a\sqrt{560}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{560}}{28}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$; $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Gọi N là trung điểm SA . Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và DN , biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{33}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của AD . Tính khoảng cách giữa hai đường SD và HK theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{399}}{19}$. B. $\frac{a\sqrt{105}}{15}$. C. $\frac{a\sqrt{399}}{57}$. D. $\frac{a\sqrt{105}}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$; $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của AD . Tính khoảng cách giữa SM và CD .

- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{5a}{6}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông cân tại B , $AB = a$, $SAB = SCB = 90^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = 2a$, $BC = 4a$. Gọi M là trung điểm của BC có $SCB = SMA = 90^\circ$, $(SB, (ABC)) = 60^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{4\sqrt{39}a^3}{3}$. B. $4\sqrt{39}a^3$. C. $\sqrt{39}a^3$. D. $\frac{\sqrt{39}a^3}{3}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = 4a\sqrt{3}$, $ASB > 30^\circ$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 30° . Biết I trung điểm SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Gọi α là góc giữa IB và mặt phẳng (SAC) . Khi $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

- A. $\frac{14\sqrt{3}}{5}a$. B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}a$. C. $3\sqrt{3}a$. D. $4\sqrt{3}a$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, $AC = a$, $SBA = SCA = 90^\circ$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. B. $a^3\sqrt{5}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. D. $2a^3\sqrt{5}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = 2\sqrt{3}a$, $AB = 2\sqrt{2}a$, $SAB = SCB = 90^\circ$, $\left((SB), (ABC) \right) = 30^\circ$, $\left((SBC), (ABC) \right) = 60^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

- A. $\frac{16\sqrt{6}a^3}{27}$. B. $\frac{8\sqrt{6}a^3}{27}$. C. $\frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SBA = SCA = 90^\circ$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a$, $ABC = 120^\circ$, cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên tia $Cx \parallel AB$ (cùng phía với A trong nửa mặt phẳng bờ BC) và nhìn cạnh AC dưới góc 60° .

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có $ABC = 135^\circ$, $AB = a$, $BC = \sqrt{2}a$, $\left((AC), (SAB) \right) = \alpha$, $SAB = SBC = 90^\circ$, thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

- A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\sqrt{5}a^3$. D. $\frac{\sqrt{5}a^3}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC cân tại A , cạnh $AB = a$, góc $BAC = 120^\circ$. Tam giác SAB vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$, $SBA = SCA = 90^\circ$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{4a^3}{6}$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $4a^3$.

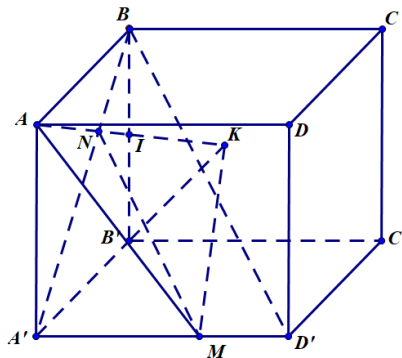
D. $\frac{4a^3}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.A	4.A	5.D	6.A	7.D	8.C	9.A	10.B
11.A	12.D	13.A	14.B	15.A	16.D	17.D	18.D	19.D	20.D
21.B	22.B	23.D	24.A	25.B	26.A	27.B	28.D	29.A	30.C
31.B	32.A	33.D	34.A	35.B	36.D	37.D	38.A	39.C	40.A
41.C	42.A	43.D	44.A	45.A	46.D	47.D	48.A	49.C	50.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A.



Gọi I là trung điểm của BB' . $N = AI \cap BA'$ thì N trọng tâm tam giác ABB' .

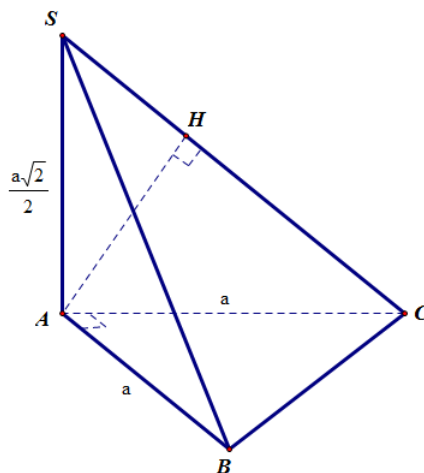
Khi đó $MN \parallel BD'$. Suy ra $BD' \parallel (AMK)$ với $K = A'B' \cap AI$ và $A'K = 6a$.

Ta có $d(AM, BD') = d(D', (AMK)) = \frac{1}{2} \cdot d(A', (AMK)) = \frac{1}{2} \cdot d$.

Do $A'M, A'A, A'K$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{A'K^2} = \frac{7}{18a^2} \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{14}}{7}a. \text{ Vậy } d(AM, BD') = \frac{3\sqrt{14}}{14}a.$$

Câu 2. Chọn A

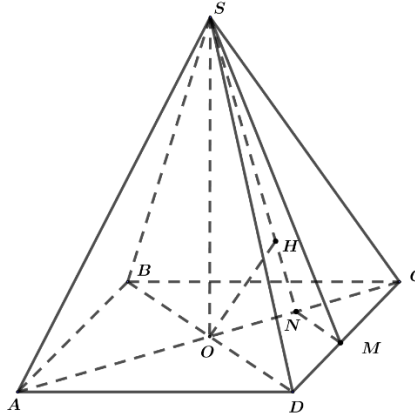


AC là hình chiếu của SC lên $mp \ ABC$, $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp SC$.

Trong mặt phẳng SAC dựng $AH \perp SC$ thì AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng

$$AB \text{ và } SC \text{ và } d(AB, SC) = AH = \frac{AC \cdot SA}{\sqrt{AC^2 + SA^2}} = \frac{\frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3. Chọn A



Gọi N là trung điểm của OC . Trong (SON) , kẻ $OH \perp SN$ ($H \in SN$). (1)

Do M, N lần lượt là trung điểm của CD và OC nên MN là đường trung bình của $\triangle OCD$.

$\Rightarrow MN \parallel OD$ hay $MN \parallel BD$. Do đó $d(BD, SM) = d(BD, (SMN)) = d(O, (SMN))$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel BD \\ BD \perp AC \end{cases}$ nên $MN \perp AC$ hay $MN \perp ON$.

Lại có $MN \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$) nên $MN \perp (SON) \Rightarrow MN \perp OH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SMN) \Rightarrow d(BD, SM) = d(O, (SMN)) = OH$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $AB = AD = a$.

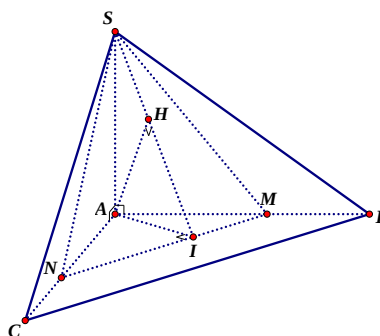
Lại có $\angle BAD = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ là tam giác đều cạnh a .

Mà AO là đường cao của $\triangle ABD$ nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ON = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle SON$ vuông tại O có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$.

Vậy $d(BD, SM) = \frac{3a}{8}$.

Câu 4.



Chọn A

Kẻ $MN \parallel BC$, suy ra $BC \parallel (SMN)$.

Ta có $d(SM, BC) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)) = \frac{1}{2}d(A, (SMN))$.

Kẻ $AI \perp MN, AH \perp SI$, suy ra $AH \perp (SMN)$, $d(A, (SMN)) = AH$.

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AN = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 3a = 2a.$$

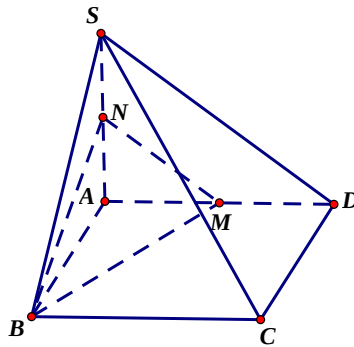
$$MN = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 4a \cdot \cos 120^\circ} = 2a\sqrt{7}.$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin BAC = \frac{1}{2}AI \cdot MN \Rightarrow AI = \frac{AM \cdot AN \cdot \sin BAC}{MN} = \frac{4a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ}{2a\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

$$\text{Vậy } d(SM, BC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{39}}{13} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 5. Chọn D



Gọi N là trung điểm của SA . Do MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN \parallel SD$.

Vậy $SD \parallel (BMN)$ vì vậy $d(SD, BM) = d(SD, (BMN)) = d(D, (BMN)) = d(A, (BMN)) = h$.

Do $ABMN$ là một góc tam diện vuông nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{19}{3a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 6. Chọn A.

Gọi N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = 2a$, ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (SMN).$$

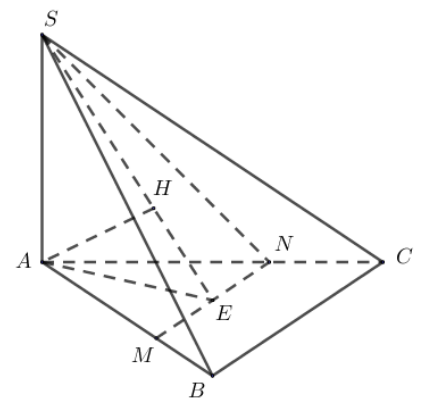
Suy ra

$$d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)).$$

$$d(B, (SMN)) = \frac{BM}{AM} \cdot d(A, (SMN)) = \frac{1}{2}d(A, (SMN)).$$

Gọi E là trung điểm của MN , kẻ $AH \perp SE$, ($H \in SE$) vì

tam giác AMN đều cạnh $2a$ nên $AE = a\sqrt{3}$.

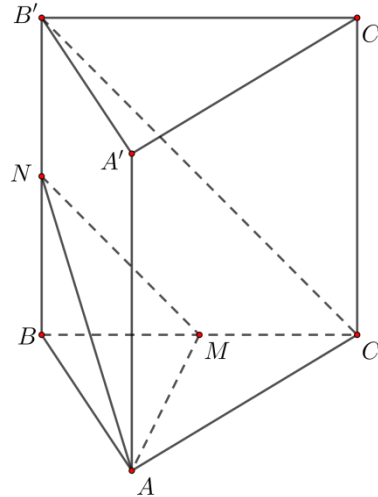


Do $\begin{cases} AE \perp MN \\ SA \perp MN \end{cases} \Rightarrow MN \perp AH$. Mặt khác $AH \perp SE \Rightarrow AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AH$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAE , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{7}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{21}a}{7}. \text{ Vậy } d(BC, SM) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 7. Chọn D



Gọi N là trung điểm của BB' , khi đó MN là đường trung bình của $\triangle BCB'$
 $\Rightarrow MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$

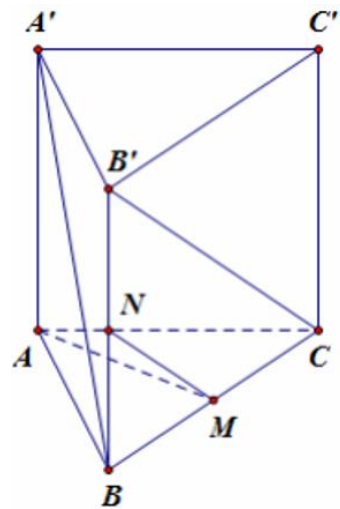
$$\Rightarrow d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN)) = d(B, (AMN)) = h$$

Tính $d(B, (AMN))$. Ta có $BN = \frac{1}{2}BB' = 2a$; $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$

Áp dụng công thức tính đường cao của tứ diện vuông ta có :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{6}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Vậy } d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 8. Chọn C



Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN \parallel B'C$.

Do đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Mà M là trung điểm của BC nên $d(B, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

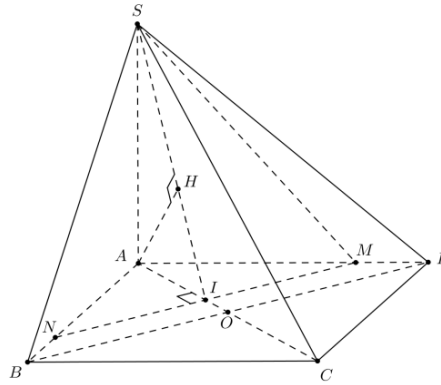
Ta có BA, BM, BN đôi một vuông góc với nhau nên $\frac{1}{d^2(B, (AMN))} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$.

Mặt khác $BM = \frac{BC}{2} = a, AB = a\sqrt{3}, BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\frac{1}{d^2(B, (AMN))} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{10}{3a^2}$.

$\Rightarrow d(B, (AMN)) = \frac{a\sqrt{30}}{10} \Rightarrow d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

Câu 9. Chọn A



Gọi N là điểm thuộc AB sao cho $AN = 3NB \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow BD \parallel (SMN)$,

$d(BD, SM) = d(BD, (SMN)) = d(O, (SMN))$, (với O là tâm hình vuông $ABCD$).

Gọi $I = AO \cap MN$, do $AO \cap (SMN) = I \Rightarrow \frac{d(O, (SMN))}{d(A, (SMN))} = \frac{IO}{IA} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow d(O, (SMN)) = \frac{1}{3}d(A, (SMN))$. Trong (SAI) kẻ $AH \perp SI$.

Ta có $MN \perp AI, MN \perp SA \Rightarrow MN \perp (SAI) \Rightarrow MN \perp AH$.

$AH \perp SI, AH \perp MN \Rightarrow AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AH$.

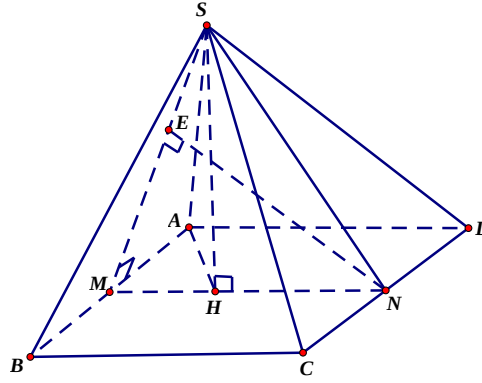
Có $AI = \frac{3}{4}AO = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Tam giác SAI vuông tại A , AH là đường cao nên

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{64}{18a^2} = \frac{35}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{35}}{35}$.

Vậy $d(O, (SMN)) = \frac{1}{3}d(A, (SMN)) = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{35}}{35}$.

Câu 10. Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD , suy ra $AB \perp (SMN)$.

Kẻ $SH \perp MN, H \in MN$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(SA, (ABCD)) = \angle SAH = 30^\circ$ và $((SAB), (ABCD)) = \angle SMH = 45^\circ$.

Kẻ $NE \perp SM, E \in SM$, suy ra $NE \perp (SAB)$.

Ta có $d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(N, (SAB)) = NE$.

$$SA = \frac{SH}{\sin 30^\circ} = 2SH; \quad SM = \frac{SH}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}SH.$$

$$\text{Lại có } SA^2 = SM^2 + AM^2 \Leftrightarrow 4SH^2 = 2SH^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 8SH^2 - AB^2 = 0 \quad (1).$$

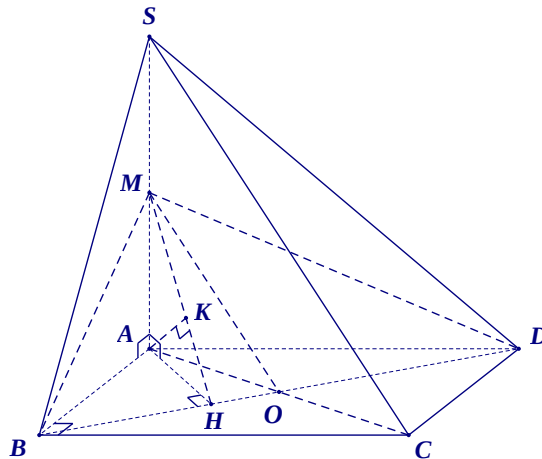
$$\text{Và } V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot AB^2 = \frac{a^3}{3} \Rightarrow SH \cdot AB^2 = a^3 \quad (2).$$

$$\text{Giải (1) và (2) ta được } SH = \frac{a}{2}; \quad AB = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SMN \text{ có } SH \cdot MN = NE \cdot SM \Rightarrow NE = \frac{\frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = a.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng a .

Câu 11. Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M là trung điểm của cạnh SA .

Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM \parallel SC$. Suy ra $SC \parallel (MBD)$.

Lúc đó $d(SC, BD) = d(SC, (MBD)) = d(C, (MBD))$. (1)

Mặt khác, do AC cắt (MBD) tại O và $OA = OC$ nên $d(C, (MBD)) = d(A, (MBD)) = AK$, với K là hình chiếu của A lên (MBD) . (2)

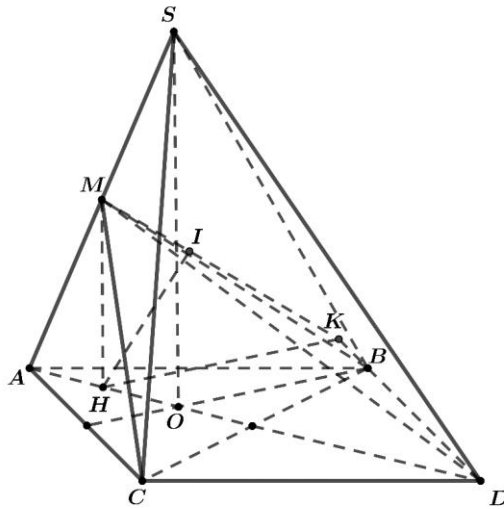
Xét tứ diện $AMBD$ có AB , AD và AM đôi một vuông góc, ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2}. \text{ Suy ra } AK = \frac{2a}{3}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $d(SC, BD) = \frac{2a}{3}$.

Câu 12. Chọn D

Cách 1:



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Khi đó, $AC \parallel BD \Rightarrow AC \parallel (MBD) \Rightarrow d(AC, BM) = d(AC, (MBD)) = d(A, (MBD))$.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC . Suy ra $SO \perp (ABC)$.

Gọi H là trung điểm AO . Suy ra $MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABC)$.

Vẽ $HK \perp BD$ tại K . Suy ra $HK \parallel BO$. Suy ra $\frac{BO}{HK} = \frac{OD}{HD} = \frac{4}{5} \Rightarrow HK = \frac{5}{4}BO$.

Mà $BO = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra $HK = \frac{5}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}$.

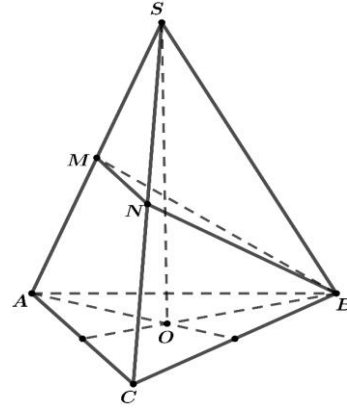
Vẽ $HI \perp MK$ tại I . Suy ra $d(H, (MBD)) = HI$.

Ta có, $SO^2 = SA^2 - AO^2 = \left(\frac{a\sqrt{37}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25a}{9} \Rightarrow SO = \frac{5a}{3} \Rightarrow MH = \frac{5a}{6}$.

Mà $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{HK^2}$ suy ra $HI = \frac{5a\sqrt{3}}{12} \Rightarrow d(H, (MBD)) = HI = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Mà $\frac{d(H, (MBD))}{d(A, (MBD))} = \frac{HD}{AD} = \frac{5}{6} \Rightarrow d(A, (MBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(AC, BM) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2:



Gọi M là trung điểm AC .

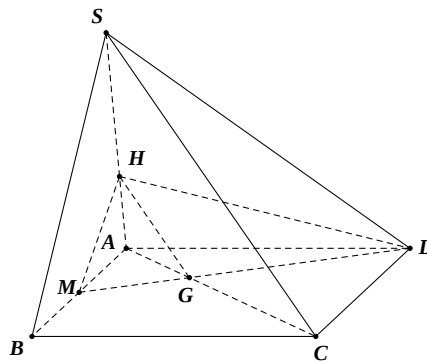
Suy ra $d(AC, BM) = d(AC, (BMN)) = d(A, (BMN)) = d(S, (BMN))$.

Ta có, $d(S, (BMN)) = \frac{3 \cdot V_{S.BMN}}{S_{BMN}} = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{4 \cdot S_{BMN}}$. Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a}{3} \cdot a^2 \sqrt{3} = \frac{5a^3 \sqrt{3}}{9}$.

Ta có $BM = BN = \sqrt{\frac{BS^2 + BC^2}{2} - \frac{SC^2}{4}} = \frac{a\sqrt{109}}{6}$, $MN = a$ suy ra $S_{BMN} = \frac{5a}{6}$.

Vậy $d(AC, BM) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13. Chọn A



Gọi G là giao của AC và DM thì $\frac{GA}{GC} = \frac{MA}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3}$.

Vẽ $GH \parallel SC$ thì $\frac{AH}{AS} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3}$ và $(HDM) \parallel SC$

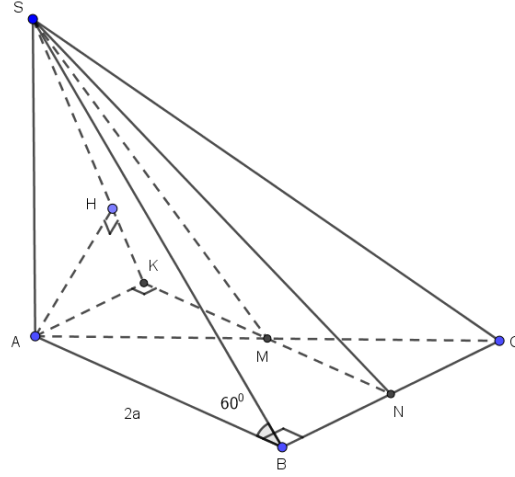
Do đó $d(SC, DM) = d(SC, (HDM)) = d(C, (HDM))$

Xét tứ diện $H.ADM$ thì ta thấy đây là tứ diện vuông, nên gọi $h = d(A, (HDM))$ thì

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{\left(\frac{SA}{3}\right)^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$$

Vậy $d(SC, DM) = d(C, (HDM)) = \frac{GC}{GA} d(A, (HDM)) = 2 \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{4a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 14. Chọn B



Gọi N là trung điểm của BC , khi đó $AB \parallel MN$, vậy $AB \parallel (SMN)$.

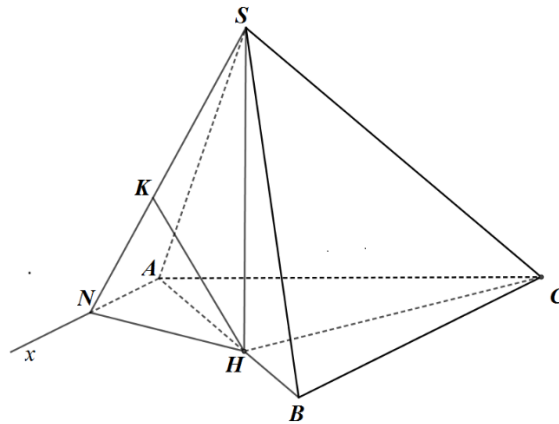
Khi đó $d(AB; SM) = d(AB; (SMN)) = d(A; (SMN))$.

Dựng $AK \perp MN$, dựng $AH \perp SK$. Khi đó $d(A; (SMN)) = AH$.

Góc giữa $mp(SBC)$ và $mp(ABC)$ bằng góc SBA , vậy $SBA = 60^\circ$.

Ta có $SA = AB \cdot \tan SBA = 2a\sqrt{3}$, $AK = BN = a$. Vậy $AH = \frac{AK \times AS}{\sqrt{AK^2 + AS^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 15. Chọn A



Áp dụng định lí cosin trong tam giác HBC ta có:

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cos HBC} = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2a \cdot \frac{a}{3} \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Theo giả thiết ta có góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° nên suy ra

$$\angle SCH = (\angle SC; (ABC)) = 60^\circ$$

Trong tam giác vuông SHC vuông tại H ta có: $SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$. Kẻ $Ax \parallel BC$.

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN .

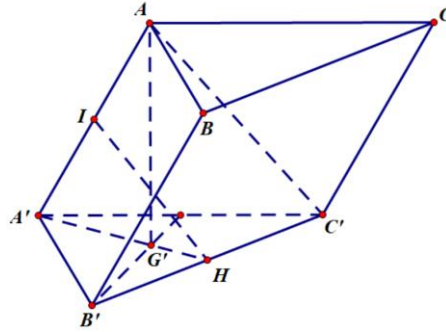
Ta có $BC \parallel (SAN)$ và $BA = \frac{3}{2}AH$ nên $d(SA; BC) = d(B; (SAN)) = \frac{3}{2}d(H; (SAN))$.

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$. Do đó $HK \perp (SAN) \Rightarrow d(H, (SAN)) = HK$

$$AH = \frac{2a}{3}, HN = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Câu 16. Chọn D



Do hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$, tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a và cạnh $AA' = a$ nên tứ diện $AA'B'C'$ là tứ diện đều.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và AA' , ta có các tam giác $\triangle IB'C'$, $\triangle HAA'$ là các tam giác cân nên $IH \perp AA'$, $IH \perp B'C'$. Do đó $d(AA', B'C') = IH$.

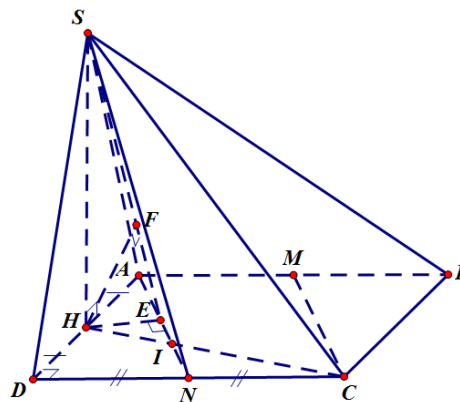
$$\text{Ta có } A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'G' = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AG' = \sqrt{AA'^2 - A'G'^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác $AA'H$ ta có:

$$\frac{1}{2} AG' \cdot A'H = \frac{1}{2} AA' \cdot HI \Rightarrow HI = \frac{AG' \cdot A'H}{AA'} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Chọn D



Gọi N, H lần lượt là trung điểm của AD và CD . Ta có:

$$\text{Tam giác } SAD \text{ đều cạnh } a, H \text{ là trung điểm của } AD \Rightarrow SH \perp AD, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

M, N lần lượt là trung điểm AB, CD mà tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AN \parallel CM$.

$$\Rightarrow CM \parallel (SAN) \Rightarrow d(SA, CM) = d(CM, (SAN)) = d(C, (SAN)).$$

Gọi $I = AN \cap CH \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác $ADC \Rightarrow IC = 2HI$.

$$HC \cap (SAN) = I \Rightarrow \frac{d(C, (SAN))}{d(H, (SAN))} = \frac{CI}{HI} = 2 \Rightarrow d(C, (SAN)) = 2d(H, (SAN)).$$

$$\left. \begin{array}{l} (SAD) \perp (ABCD) \\ \text{Có } (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ SH \perp AD, SH \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Trong $(ABCD)$ kẻ $HE \perp AN, E \in AN$.

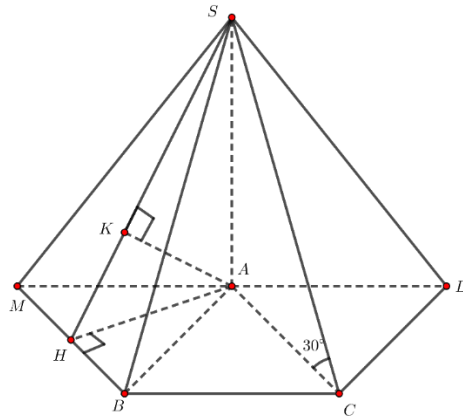
Trong (SHE) kẻ $HF \perp SE, F \in SE \Rightarrow HF \perp (SAN) \Rightarrow h = d(H, (SAN)) = HF$.

$$\triangle AEH \sim \triangle ADN \Rightarrow \frac{HE}{DN} = \frac{HA}{NA} \Rightarrow HE = \frac{HA \cdot DN}{NA} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

$$\triangle SHE \text{ vuông tại } H, HF \text{ là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$$

$$\Rightarrow d(C, (SAN)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 18. Chọn D



Dựng $BM \parallel AC$, khi đó $d(AC, SB) = d(AC, (SBM)) = d(A, (SBM))$.

Dựng $AH \perp MB, AK \perp SH \Rightarrow AK \perp (SBM) \Rightarrow d(A, (SBM)) = AK$.

Hình chữ nhật $ABCD$, $AB = a, AD = 2a \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$.

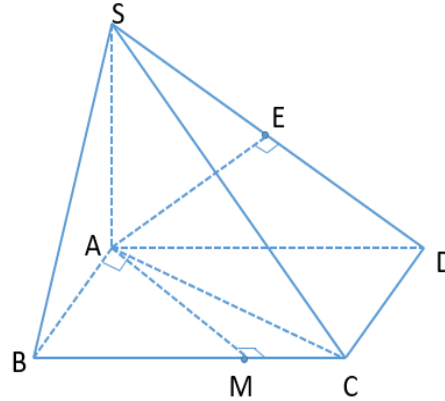
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = SCA \Rightarrow SCA = 30^\circ$.

Tam giác SAC vuông tại A , $AC = a\sqrt{5}, SCA = 30^\circ \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác ABM vuông tại A , $AH \perp BM \Rightarrow AH = \frac{AM \cdot AB}{MB} = \frac{2a \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SAH vuông tại A , $AK \perp SH \Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{185}}{37}$.

$$\text{Vậy } d(AC, SB) = \frac{2a\sqrt{185}}{37}.$$

Câu 19. Chọn D

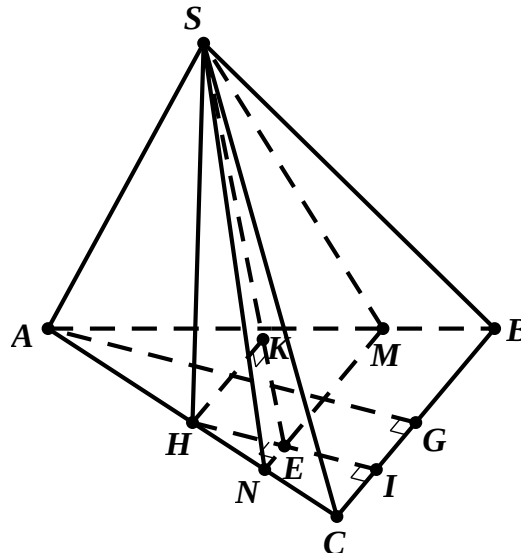
Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABC$ vuông tại A . Do $BM = 2MC$ nên $MC = \frac{1}{3}BC = a$.

Từ $BC \cdot MC = 3a \cdot a = 3a^2 = AC^2$ và $\triangle ABC$ vuông tại A ta suy ra được $AM \perp BC$ hay $AM \perp AD$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $AM \perp SA$, kết hợp $AM \perp AD$ suy ra $AM \perp (SAD)$.

Trên mặt phẳng (SAD) , kẻ AE vuông góc với SD tại E . Khi đó ta có $AM \perp AE$. Do vậy $d(AM, SD) = AE$.

Ta có $SA = AD = 3a$, $SA \perp AD$ suy ra $AE = \frac{1}{2}SD = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20. Chọn D

Gọi N là trung điểm của HC , kết hợp với giả thiết ta có $MN \parallel BC$. Suy ra $BC \parallel (SMN)$.

Khi đó $d(SM, BC) = d(BC, (SMN)) = d(C, (SMN)) = d(H, (SMN))$.

Trong mặt đáy, kẻ $HE \perp MN, E \in MN$, suy ra $MN \perp (SHE)$. Do đó hai mặt phẳng (SHE) và (SMN) vuông góc nhau và cắt nhau theo giao tuyến SE . Trong mặt phẳng (SHE) , kẻ HK vuông góc với SE tại K ta được $HK = d(H(SMN))$.

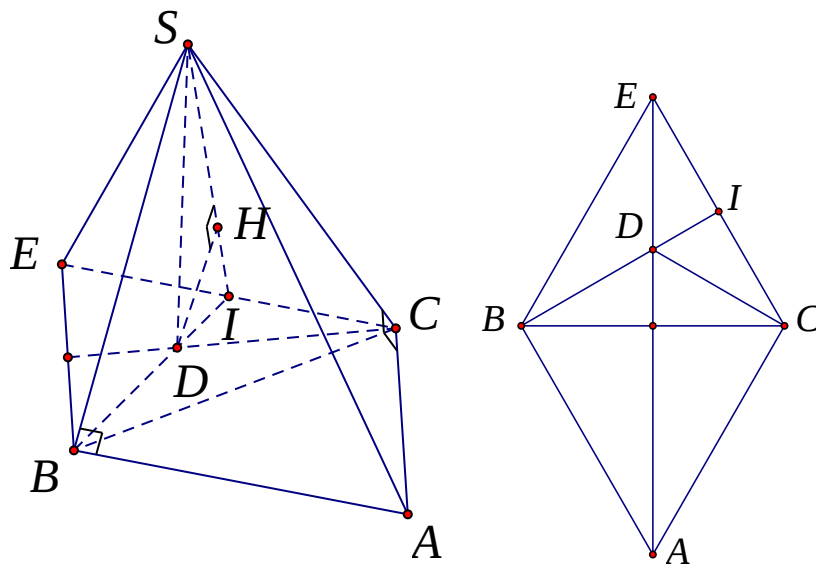
Gọi G là trung điểm BC , suy ra $AG \perp BC$ và $AG = a\sqrt{3}$.

Ta thấy HE kéo dài cắt BC tại trung điểm I của CG và do đó $HE = \frac{1}{2}HI = \frac{1}{4}AG = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác vuông SHE , ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{12}{67}}$.

Vậy $d(SM; BC) = a\sqrt{\frac{12}{67}}$.

Câu 21. Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) , suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt), suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C .

Dễ thấy $\triangle SBA = \triangle SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$.

Từ đó ta chứng minh được $\triangle SBD = \triangle SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC , nên cũng là đường phân giác của góc BAC .

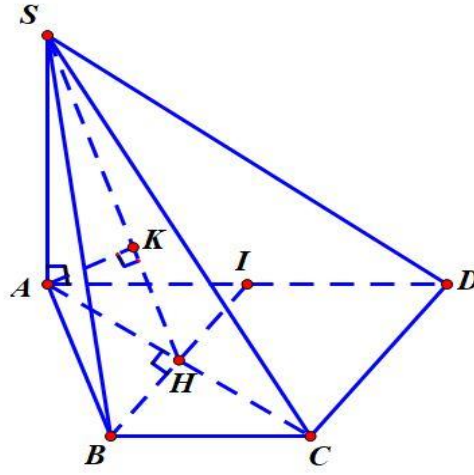
Ta có $\angle DAC = 30^\circ$, suy ra $DC = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là

$\angle SBD = 60^\circ$, suy ra $\tan \angle SBD = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan \angle SBD = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a$.

Dựng hình bình hành $ABEC$, do tam giác ABC là tam giác đều nên tam giác BEC đều.

Có $\angle CBD = \angle ABD - \angle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ nên BD là phân giác trong của góc CBE .

Gọi I là trung điểm của EC thì $BI \perp EC$.



Gọi I là trung điểm AD , H là giao điểm của AC và BI . Ta có $CD \parallel BI$ nên H là trung điểm của AC và $d(CD, SB) = d(CD, (SBI)) = d(C, (SBI)) = d(A, (SBI))$.

Kẻ $AK \perp SH$ tại K (1). Khi đó, $\begin{cases} BI \parallel CD \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BI \perp AH$.

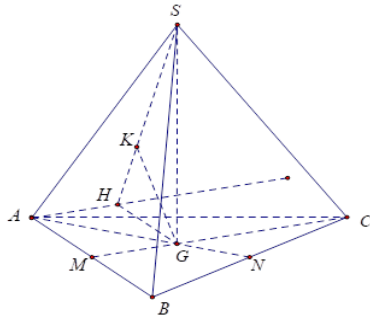
Ta lại có, $BI \perp SA$ nên $BI \perp (SAH) \Rightarrow BI \perp AK$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $AK \perp (SBI)$ nên $d(A, (SBI)) = AK$.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \text{ nên } AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}. \text{ Vậy } d(CD, SB) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 24. Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và BC . Gọi H là hình chiếu của G lên đường thẳng đi qua A và song song với CG . GK là đường cao của tam giác GHS .

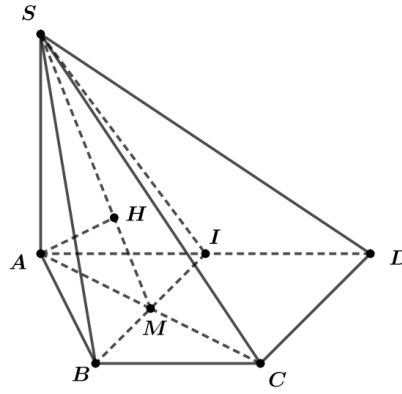
Khi đó, $d(GC, SA) = d(GC, (SAH)) = GK$.

Ta có $AHGM$ là hình chữ nhật và $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$$SA, (ABC) = SAG = 60^\circ \Rightarrow SG = AG \cdot \tan 60^\circ = a, \quad GH = AM = \frac{a}{2}, \text{ suy ra}$$

$$d(GC, SA) = GK = \frac{GS \cdot GH}{\sqrt{GS^2 + GH^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 25. Chọn B



Gọi I là trung điểm AD . Ta có $BCDI$ là hình bình hành nên $BI \parallel CD$.

Suy ra $CD \parallel (SBI)$ nên $d(CD, BI) = d(CD, (SBI)) = d(D, (SBI))$.

Ta có: $AD \cap (SBI) = I \Rightarrow \frac{d(D, (SBI))}{d(A, (SBI))} = \frac{DI}{AI} = 1 \Leftrightarrow d(D, (SBI)) = d(A, (SBI))$.

Vì $ABCD$ là nửa lục giác nội tiếp hình tròn tâm I nên $\angle ACD = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CD$.

Suy ra $AM \perp BI$, mà $SA \perp BI$ nên $BI \perp (SAM) \Rightarrow (SBI) \perp (SAM)$.

Ta lại có $(SBI) \cap (SAM) = SM$ nên trong (SAM) kẻ $AH \perp SM$ thì $AH \perp (SBI)$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC .

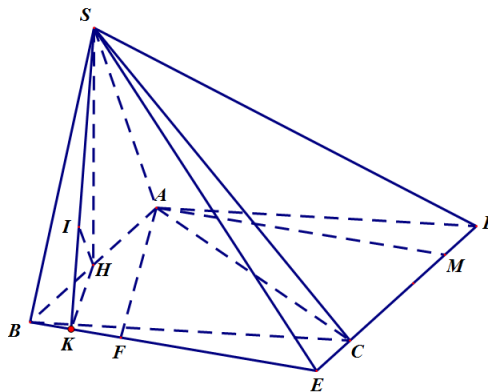
$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = CD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dễ thấy $\triangle ABI$ đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\triangle SAM$ vuông tại A : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d(CD, BI) = d(D, (SBI)) = d(A, (SBI)) = AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 26. Chọn A.



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ \text{Trong } (SAB), SH \perp AB \end{cases}$

Theo giả thiết ta có: $AB = BC = 4a$ và $BAD = 120^\circ \Rightarrow ABD = 30^\circ \Rightarrow ABC = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều, cạnh $4a$.

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}a^2 \text{ và } SH = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a.$$

$$\text{Ta có: } AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2AD \cdot DM \cdot \cos ADM = (4a)^2 + a^2 - 2 \cdot 4a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 13a^2.$$

$$\Rightarrow AM = a\sqrt{13}.$$

Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = a$.

Khi đó, tứ giác $AMEB$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = AM = a\sqrt{13}$.

$$\text{Mặt khác, } \triangle ADM = \triangle BCE \Rightarrow S_{AMEB} = S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot 4\sqrt{3}a^2 = 8\sqrt{3}a^2.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AM \not\subset (SBE) \\ AM \parallel BE \\ BE \subset (SBE) \end{cases} \Rightarrow AM \parallel (SBE).$$

$$\text{Do đó } d(AM, SB) = d(AM, (SBE)) = d(A, (SBE)).$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{d(A, (SBE))}{d(H, (SBE))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A, (SBE)) = 2d(H, (SBE)).$$

Trong $(ABCD)$, gọi K và F lần lượt là hình chiếu của H và A lên BE .

$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{AMEB}}{EB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}a^2}{a\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{39}a}{13} \text{ (do } HK \text{ là đường trung bình của } \triangle ABF \text{)}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BE \perp HK \\ BE \perp SH \text{ (Do } SH \perp (ABCD) \supset BE) \\ HK, SH \subset (SHK) \\ HK \cap SH = H \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SHK).$$

$$\text{Mà } BE \subset (SBE) \Rightarrow (SBE) \perp (SHK). \text{ Ta lại có: } (SBE) \cap (SHK) = SK$$

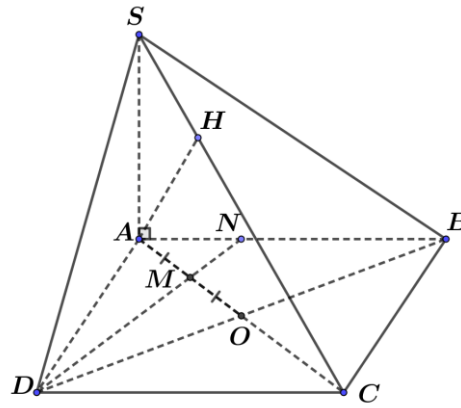
$$\text{Trong } (SHK), \text{ kẻ } HI \perp SK (I \in SK) \Rightarrow HI \perp (SBE) \Rightarrow d(H, (SBE)) = HI.$$

Tam giác SHK vuông tại H , đường cao HI nên

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{(2\sqrt{3}a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{4\sqrt{39}a}{13}\right)^2} = \frac{17}{48a^2}.$$

$$\text{Do đó: } HI = \frac{4\sqrt{51}}{17}a. \text{ Vậy } d(AM, SB) = \frac{8\sqrt{51}}{17}a.$$

Câu 27. Chọn B



Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABO$ với cát tuyến DMN ta có:

$$\frac{AM}{OM} \cdot \frac{AN}{BN} \cdot \frac{DO}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NB}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(N, (SBC)) = \frac{2}{3} d(A, (SBC))$$

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 = CD^2 = 5a^2$; $AC^2 + BC^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BC$

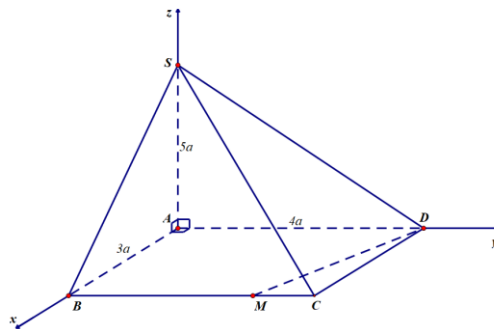
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Suy ra $BC \perp (SAC)$

Kẻ $AH \perp SC$, ta có $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AH$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$

$$\text{Xét } \triangle SAC \text{ vuông tại } A: \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} a$$

$$\text{Vậy } d(N, (SBC)) = \frac{2}{3} d(A, (SBC)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} a = \frac{4\sqrt{5}}{15} a.$$

Câu 28. Chọn D



Từ giả thiết ta có $BM = 3a$, ta giải bằng cách gán hệ trục tọa độ như sau:

Chọn hệ trục tọa độ để các vuông góc $Oxyz$ thỏa $O \equiv A$, điểm B nằm trên Ox , điểm D nằm trên Oy , điểm S nằm trên Oz như hình vẽ:

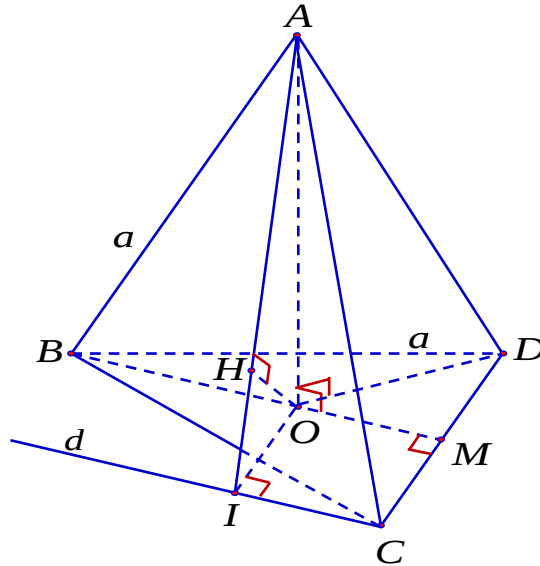
Từ giả thiết ta có tọa độ các điểm $B(3a; 0; 0)$, $D(0; 4a; 0)$, $S(0; 0; 5a)$ và $M(3a; 3a; 0)$ suy ra tọa độ các vector $\overrightarrow{SB} = (3a; 0; -5a)$, $\overrightarrow{MD} = (-3a; a; 0)$, $\overrightarrow{BM} = (0; 3a; 0)$

$$\text{Tích có hướng } [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MD}] = (5a^2; 15a^2; 3a^2)$$

Vận dụng công thức tính khoảng cách

$$d(SB, MD) = \frac{|[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MD}] \cdot \overrightarrow{BM}|}{|[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MD}]|} = \frac{45a^3}{a^2 \sqrt{259}} = \frac{45a}{\sqrt{259}}.$$

Câu 29. Chọn A



Gọi O là tâm của tam giác BCD .

Qua C kẻ đường thẳng d song song với BM .

Khi đó $d(AC, BM) = d(BM, (AC, d)) = d(O, (AC, d))$.

Do tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow AO \perp (BCD)$.

Kẻ $OI \perp d$ và $I \in d$, $OH \perp AI$ và $H \in AI \Rightarrow OH \perp (AC, d)$. Suy ra $d(O, (AC, d)) = OH$.

Ta có $d \parallel BM \Rightarrow d \perp CD$. Tứ giác $IOMC$ là hình chữ nhật, suy ra $IO = MC = \frac{a}{2}$.

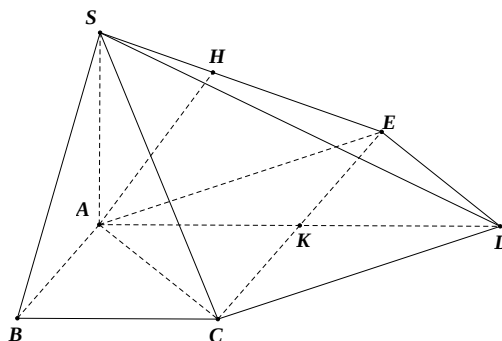
BM là đường cao trong tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} \Rightarrow AO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \frac{OA \cdot OI}{\sqrt{OA^2 + OI^2}} \Rightarrow OH = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Vậy $d(AC, BM) = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 30 Chọn C



Kẻ $CK \perp AD$. Ta có $CK = a$, $AK = BC = a \Rightarrow KD = a$.

$AC = a\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = a\sqrt{2}$; $AC^2 + CD^2 = AD^2 \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Dựng hình chữ nhật $ACDE$, kẻ $AH \perp SE$ tại H .

Ta có $DE \perp AE$ và $DE \perp SA$ nên $DE \perp (SAE) \Rightarrow DE \perp AH$.

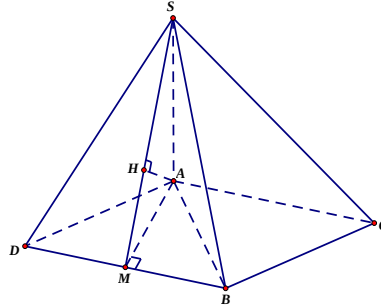
$DE \perp AH$ và $SE \perp AH$ nên $AH \perp (SDE)$ tại H . Suy ra $d(A, (SDE)) = AH$.

Ta có $AC \parallel (SDE) \Rightarrow d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)) = AH$.

Trong tam giác SAE vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 31. Chọn B



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = SBA \Rightarrow SBA = 75^\circ$.

$SA = AB \cdot \tan SBA = a \cdot \tan 75^\circ = a(2 + \sqrt{3})$. Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có $AC \parallel (SBD)$

nên: $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Gọi M là trung điểm BD , suy ra $BD \perp AM$.

Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $BD \perp SA$, do đó $BD \perp (SAM)$. Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $BD \perp AH$

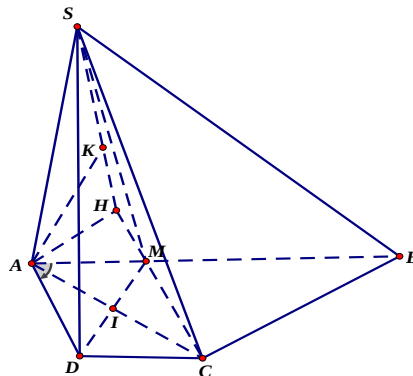
Từ $BD \perp AH$ và $AH \perp SM$ suy ra $AH \perp (SBD)$ nên $d(A, (SBD)) = AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác SAM vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a(2 + \sqrt{3})\right)^2} = \frac{25 - 12\sqrt{3}}{3a^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3}{25 - 12\sqrt{3}}}a \approx 0.844a.$$

Vậy $d(AC, SB) = d(A, (SBD)) = AH \approx 0.844a$.

Câu 32. Chọn A



Do $AB = 3AM = 3a$ nên $AM = a \Rightarrow AD = DC = AM = a$.

Do $AM // DC$ và $AM = CD = AD = a$ nên $AMCD$ là hình thoi có cạnh bằng a .

Suy ra $\begin{cases} CM = a \\ AD // CM \end{cases} \Rightarrow AD // (SCM) \Rightarrow d(AD, SM) = d(AD, (SCM)) = d(A, (SCM)).$

Kẻ $AH \perp CM, (H \in CM), AK \perp SH, (K \in SH)$.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CM$ mà $CM \perp AH$ suy ra $CM \perp (SAH) \Rightarrow CM \perp AK$.

Do $AK \perp AH, AK \perp CM$ nên $AK \perp (SMC) \Rightarrow AK = d(A, (SCM)).$

Do $AM = AD = a, \angle MAD = 60^\circ$ nên $\triangle MAD$ là tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow AC = 2AI = a\sqrt{3}$ với I là tâm hình thoi $AMCD$.

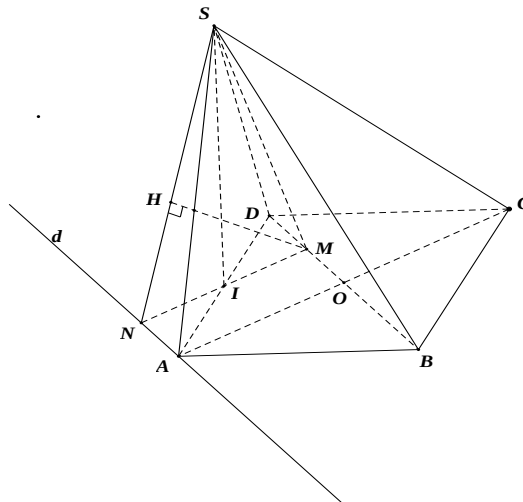
Ta có $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \cdot MI \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot MC \Rightarrow AH = \frac{MI \cdot AC}{MC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại A có $AK \perp SH$. Theo tính chất đường cao tam giác vuông,

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d(AD, SM) = d(AD, (SCM)) = d(A, (SCM)) = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 33.



Chọn D

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD . Gọi O là giao điểm AC và BD ; I, M lần lượt là trung điểm AD và OD ; N là giao điểm d và IM . Nên $BD // d \Rightarrow BD // (SA, d)$

$\Rightarrow d(SA, BD) = d(BD, (SA, d)) = d(M, (SA, d))$

Trong $mp(SMN)$ kẻ $MH \perp SN$ (1), $(H \in SN)$. Theo giả thiết :

$\left. \begin{array}{l} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp d$ (*)

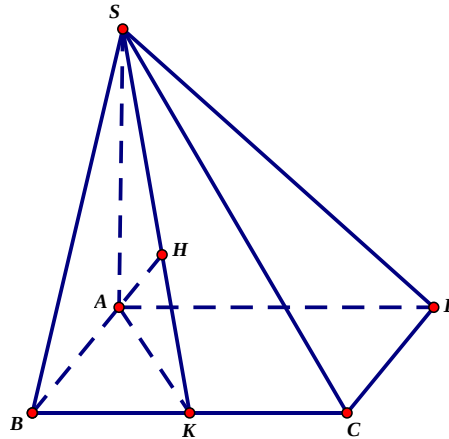
Mặt khác ta có : $\left. \begin{array}{l} d // BD \\ BD \perp AO \\ AO // MN \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp MN$ (**)

Từ (*), (**) suy ra $d \perp (SMN) \Rightarrow d \perp MH$ (2). Từ (1), (2) suy ra $MH \perp (SA, d)$.

$$\text{Xét tam giác } SMN \text{ có: } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} MH \cdot SN = \frac{1}{2} SI \cdot MN \Rightarrow MH = \frac{SI \cdot MN}{SN}$$

$$\text{Với } SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, MN = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IN = \frac{1}{2} MN = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SN = \sqrt{SI^2 + IN^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Do đó } MH = \frac{SI \cdot MN}{SN} = \frac{a\sqrt{21}}{7}. \text{ Vậy } d(SA, BD) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 34. Chọn A

$ABDC$ là hình thoi nên $AD \parallel BC$. Suy ra $AD \parallel (SBC)$.

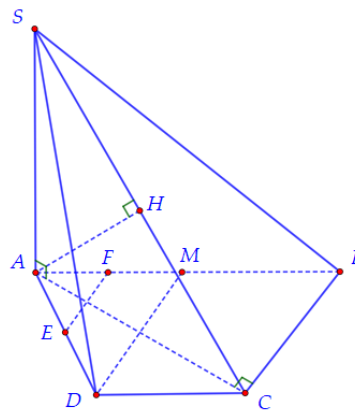
Khi đó $d(SB, AD) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$

(Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BC , H là hình chiếu vuông góc của A lên SK).

Khi đó $AH \perp (SBC)$, suy ra $d(A, (SBC)) = AH$.

Tam giác ABC cân tại B và $ABC = 60^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác đều. Suy ra

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Ta có } SA = AD \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } AH = \frac{AK \cdot SA}{\sqrt{AK^2 + SA^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 35. Chọn B

Gọi M là trung điểm AB

Ta có $BCDM$ là hình bình hành (vì CD song song và bằng BM) nên $DM = BC = \frac{1}{2} AB$ suy

ra tam giác ADB vuông tại D . Tương tự tam giác ACB vuông tại C .

Vì

$$\begin{cases} EF \parallel DM \\ DM \parallel CB \end{cases} \Rightarrow EF \parallel CB \Rightarrow EF \parallel SBC$$

$$\Rightarrow d(EF, SB) = d(EF, SBC) = d(F, SBC) = \frac{3}{4}d(A, SBC)$$

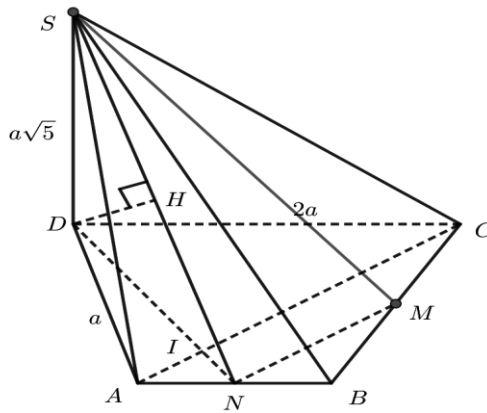
$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SAC \Rightarrow SBC \perp SAC,$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC thì $AH \perp SBC \Rightarrow d(A, SBC) = AH$.

$$\text{Trong tam giác vuông } SAC \text{ ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Vậy } d(SB, EF) = \frac{9a}{8}.$$

Câu 36. Chọn D



Gọi N là trung điểm của AB . Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(I, (SMN)) \quad (\text{với } I = DN \cap AC)$$

Ta có

$$ID \cap (SMN) = N \Rightarrow \frac{d(I, (SMN))}{d(D, (SMN))} = \frac{IN}{DN} = \frac{1}{5} \quad (\text{do } AN \parallel CD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{AN}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{IN}{DN} = \frac{1}{5})$$

$$\Rightarrow d(I, (SMN)) = \frac{1}{5}d(D, (SMN)). \text{ Xét } \triangle ADN \text{ và } \triangle DCA \text{ có: } D = A = 90^\circ$$

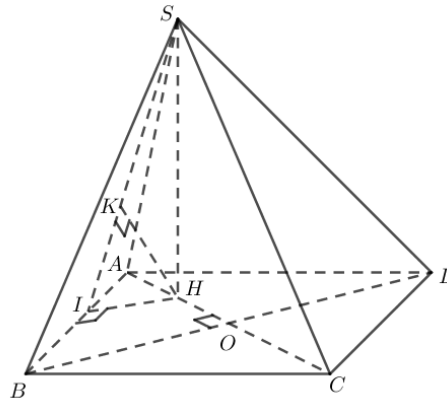
$$\frac{AN}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ADN \sim \triangle DCA (c-g-c) \Rightarrow \angle ADN = \angle DCA \Rightarrow DN \perp AC \Rightarrow MN \perp (SDN).$$

Ta có

$$\begin{cases} (SMN) \perp (SDN) \\ (SMN) \cap (SDN) = SN \Rightarrow d(D, (SMN)) = DH \\ \text{Trong } (SDN), DH \perp SN \end{cases}$$

$$\triangle SDN \text{ vuông tại } D: \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DN^2} \Rightarrow DH = a \Rightarrow d(I, (SMN)) = \frac{1}{5}d(D, (SMN)) = \frac{a}{5}.$$

Câu 37. Chọn D



Gọi H là trung điểm của AO . Theo giả thiết: $SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(SA, CD) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB))$.

Mặt khác: $\frac{d(C, (SAB))}{d(H, (SAB))} = \frac{CA}{HA} = 4 \Rightarrow d(C, (SAB)) = 4d(H, (SAB))$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $HI \perp AB$ tại I ; kẻ $HK \perp SI$ tại K .

Khi đó: $d(H, (SAB)) = HK$.

Tam giác SHI vuông tại H nên: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2}$ (1)

Hình thoi có $ABC = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều $\Rightarrow AC = a; BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác AIH đồng dạng tam giác $AOB \Rightarrow \frac{IH}{OB} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow IH = \frac{OB \cdot AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$ (2)

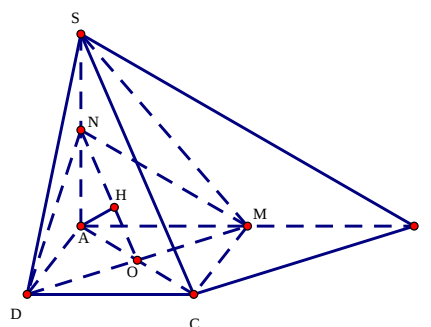
Tam giác SAB đều nên $SA = SB = AB = a$.

Tam giác SAH vuông tại H nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1) ta được: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{112}{5a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{560}}{112}$.

Vậy $d(C, (SAB)) = 4d(H, (SAB)) = 4 \cdot \frac{a\sqrt{560}}{112} = \frac{a\sqrt{560}}{28}$.

Câu 38. Chọn A



$$\text{Ta có } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}; S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + 2a) \cdot a = \frac{3a^2}{2}$$

$$\text{Suy ra } SA = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{3a^2} = a\sqrt{6}.$$

Gọi M là trung điểm của AB , O là giao điểm của AC và DM .

Ta có tứ giác $ADCM$ là hình vuông cạnh a .

Ta có (DNM) chứa ON và $ON \parallel SC$ nên $SC \parallel (DNM)$.

$$\text{Suy ra nên } d(SC, DN) = d(SC, (DMN)) = d(C, (DMN)) = d(A, (DMN)).$$

Trong (SAC) kẻ $AH \perp NO$. Ta có $DM \perp AC$ và $DM \perp SA$ nên $DM \perp (SAC)$.

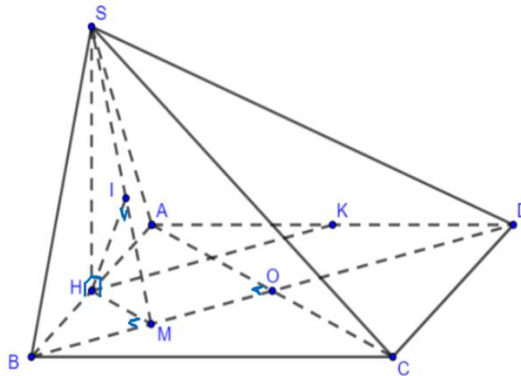
$$\text{Khi đó ta có } \left. \begin{array}{l} AH \perp NO \\ AH \perp DM \text{ (} DM \perp (SAC) \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (DMN)$$

$$\Rightarrow d(A, (DMN)) = AH.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AO^2}; AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}; AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{8}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, DN) = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 39. Chọn C



$$\text{Ta có } HK \parallel BD \Rightarrow HK \parallel (SBD) \Rightarrow d(HK, SD) = d(HK, (SBD)) = d(H, (SBD)).$$

$$\text{Dựng } HM \perp BD. \text{ Ta có } \left\{ \begin{array}{l} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{array} \right. \Rightarrow BD \perp (SHM).$$

$$\text{Dựng } HI \perp SM. \text{ Ta có } \left\{ \begin{array}{l} HI \perp SM \\ HI \perp BD \end{array} \right. \Rightarrow HI \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HI.$$

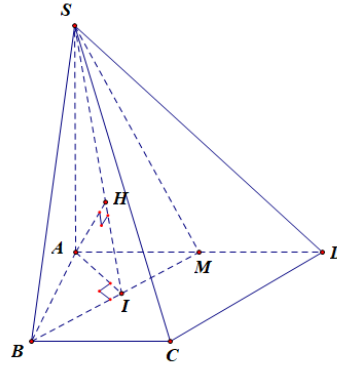
$$HM = \frac{AO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}, HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a\sqrt{7}.$$

Xét $\triangle SHM$ vuông tại H , ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{(a\sqrt{7})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{57}{7a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{399}}{57}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và HK là $\frac{a\sqrt{399}}{57}$.

Câu 40. Chọn A



Do $ABCD$ là hình thang có $AB = BC = a$; $AD = 2a$ và M là trung điểm của AD nên ta có $BM \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SBM)$.

Do đó $d(SM, CD) = d(CD, (SBM)) = d(D, (SBM)) = d(A, (SBM))$.

Ta kẻ $AI \perp BM$, lại có $SA \perp BM \Rightarrow (SAI) \perp (SBM)$.

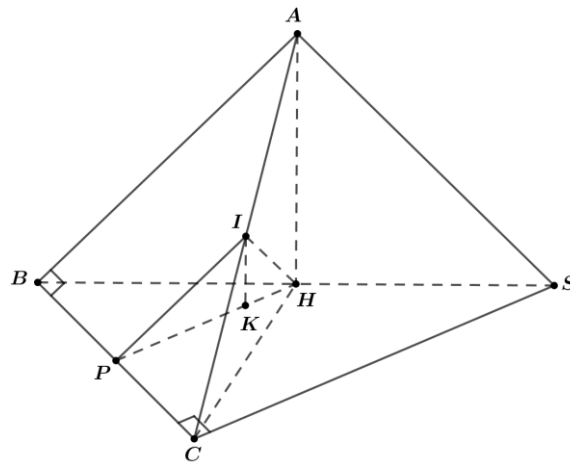
Ta có $(SAI) \cap (SBM) = SI$. Kẻ $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBM)$ hay $d(A, (SBM)) = AH$.

Xét tam giác SAI có $SA = 2a$; $AI = \frac{1}{2}BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SAI = 90^\circ$.

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(SM, CD) = d(A, (SBM)) = AH = \frac{2a}{3}$.

Câu 41. Chọn C



Gọi I là trung điểm của AC , H là trung điểm của SB , P là trung điểm của BC .

Ta có $\triangle SAB$, $\triangle SCB$ vuông tại A và C nên $HS = HA = HB = HC$ và $IA = IB = IC$.

Từ đó suy ra $IH \perp (ABC) \Rightarrow IH \perp BC$ mà $IP \perp BC$ suy ra $BC \perp (IHP)$.

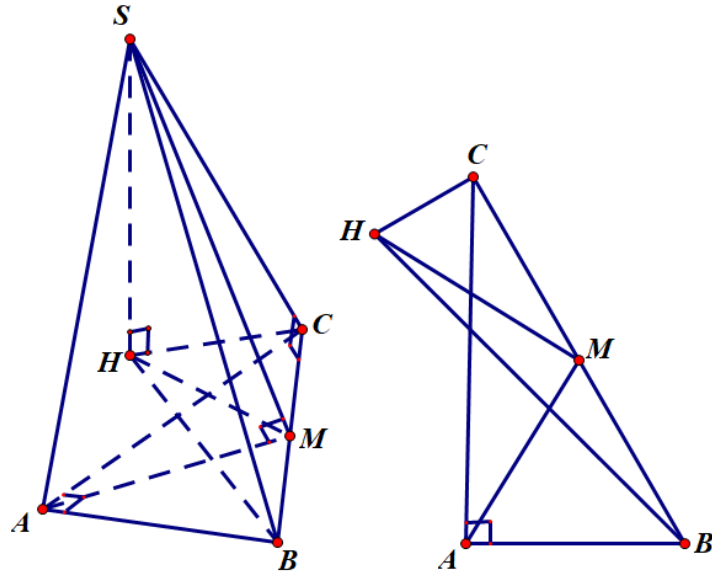
$$\text{Kẻ } IK \perp HP \Rightarrow IK \perp (SBC) \Rightarrow IK = d(I, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IH^2} + \frac{1}{IP^2} \Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{8}{a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow PH = \sqrt{IP^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } SC = 2PH = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}.BC.SC = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}d(A, (SBC)).S_{\Delta SBC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a^2\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Câu 42. Chọn A.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) . Suy ra $(SB, (ABC)) = SBH = 60^\circ$.

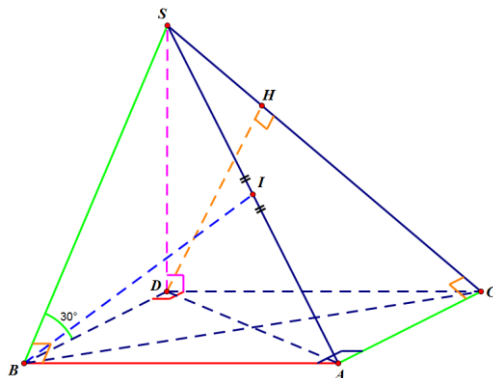
Do $SCB = SMA = 90^\circ$ nên $BC \perp CH, AM \perp MH$.

Ta có ΔABM đều cạnh $2a$ và $AMH = 90^\circ$ nên $HMC = 30^\circ$.

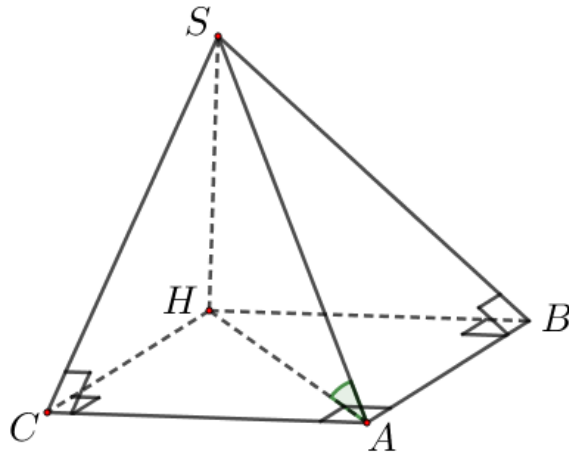
$$\text{Từ đó } CH = CM.\tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow HB = \sqrt{CH^2 + BC^2} = \frac{2\sqrt{39}}{3}a$$

$$\Rightarrow SH = HB.\tan 60^\circ = 2\sqrt{13}a. \text{ Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{4\sqrt{39}}{3}a^3.$$

Câu 43. Chọn D



Ta có: I trung điểm SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC \Rightarrow SBA = SCA = 90^\circ$.
Dựng hình chữ nhật $ABDC$.



Trong mặt phẳng (ABC) dựng hình chữ nhật $ABHC$, khi đó ta có

$$\begin{cases} AB \perp HB \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp SH \quad (1) \quad \text{và} \quad \begin{cases} AC \perp CH \\ AC \perp SC \end{cases} \Rightarrow AC \perp SH \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $SH \perp (ABC)$.

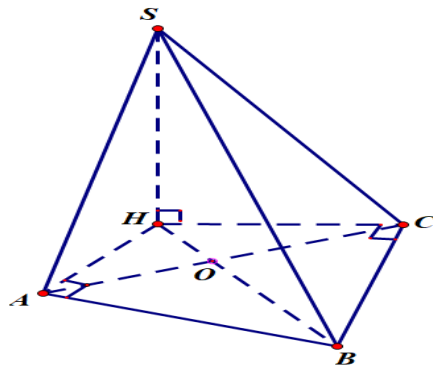
Nên ta có HA là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (ABC) .

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng SA, HA và bằng góc SAH nên suy ra $SAH = 45^\circ$.

Theo cách dựng trên ta có $HA = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$ và tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH = HA = a\sqrt{5}$.

Ta cũng có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2$. Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{5} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 45. Chọn A.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$SAB = SCB = 90^\circ \Rightarrow HAB = HCB = 90^\circ, \left(SB, (ABC) \right) = 30^\circ \Leftrightarrow \left(SB, HB \right) = SBH = 30^\circ$$

Trong tam giác vuông SHB : $SH = SB \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}; HB = SB \cdot \cos 30^\circ = 3a$,

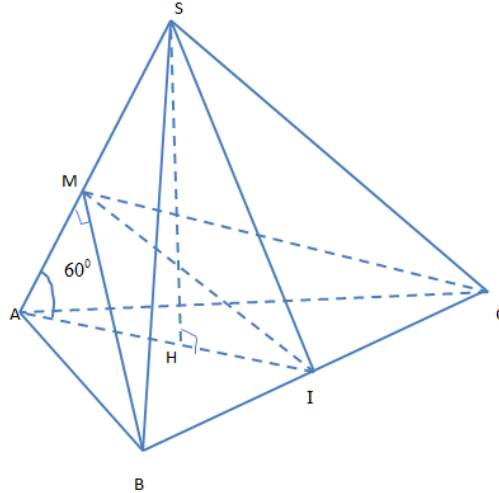
$$\Rightarrow HA = \sqrt{HB^2 - AB^2} = a$$

Ta có $\left((SBC), (ABC) \right) = 60^\circ \Leftrightarrow \left(HC, SC \right) = SCH = 60^\circ \Rightarrow HC = SH \cdot \cot 60^\circ = a; CB = 2a\sqrt{2}$.

Gọi O là giao điểm của AC, HB ; trong tam giác HAB : $\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{9}{8a^2}$

$$\Rightarrow AO = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \Rightarrow OB = \frac{8a}{3}. \text{ Vậy thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}OA.OB.SH = \frac{16\sqrt{6}a^3}{27}$$

Câu 46. Chọn D



Dễ thấy $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow SB = SC$. Gọi I là trung điểm của BC .

Ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$. Kẻ $SH \perp AI \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Vậy $(SA, (ABC)) = \angle SAH = \angle SAI = 60^\circ$

Kẻ $BM \perp SA$, do $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SA$, vậy nên $SA \perp (MBC)$.

Tam giác IMA vuông tại M có $IA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos 60^\circ = \frac{AM}{AI} \Rightarrow AM = AI \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$$

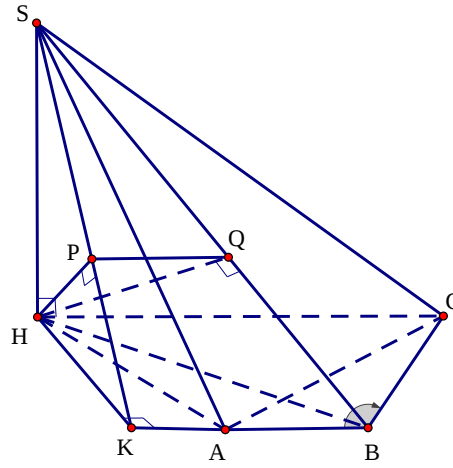
$$\sin 60^\circ = \frac{IM}{AI} \Rightarrow IM = AI \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{4}.$$

Tam giác SAB vuông tại B , BM là đường cao. Ta có: $AB^2 = AM \cdot SA \Rightarrow SA = \frac{AB^2}{AM} = \frac{4a}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Xét } \Delta SAI \text{ có: } SH \cdot AI = IM \cdot SA \Rightarrow SH = \frac{IM \cdot SA}{AI} = 2a.$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

Câu 47. Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

ΔBAC cân tại B và $ABC = 120^\circ \Rightarrow ACB = BAC = 30^\circ$

Theo bài $HC \parallel AB \Rightarrow HCA = CAB = 30^\circ \Rightarrow BCH = 60^\circ = AHC \Rightarrow ABCH$ là hình thang cân.

Do đó $AH = BC = a$. Trong mp $(ABCH)$ dựng $HK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK)$.

Trong mp (SHK) kẻ $HP \perp SK \Rightarrow AB \perp HP \Rightarrow HP \perp (SAB)$ (1).

Trong mp (SHB) kẻ $HQ \perp SB$. Dễ dàng chứng minh được

$$BC \perp HB \Rightarrow BC \perp (SHB) \Rightarrow BC \perp HQ. \text{ Vì } \begin{cases} HQ \perp SB \\ BC \perp HQ \end{cases} \Rightarrow HQ \perp (SBC) \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $((SAB), (SBC)) = (HP, HQ) = PHQ$. Đặt $SH = x$

$$\text{Xét } \Delta AHK \text{ vuông tại } K: HK = AH \cdot \sin HAK = AH \cdot \sin AHC = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét } \Delta AHK \text{ vuông tại } K: \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HP = \frac{a\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}.$$

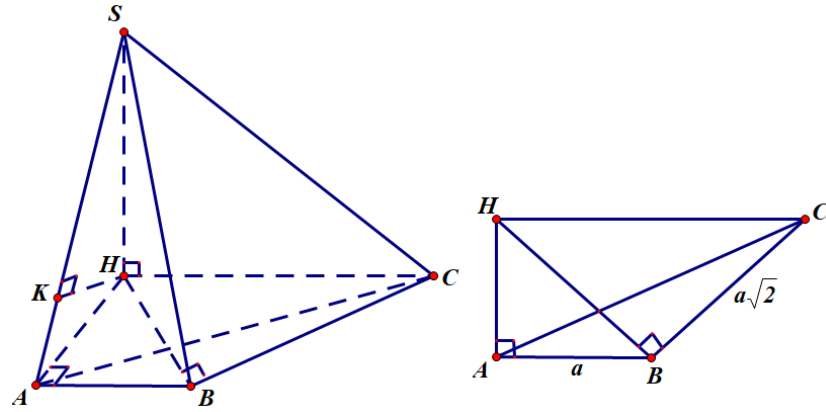
$$HB = BC \cdot \tan BCH = a \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}a.$$

$$\text{Xét } \Delta SHB \text{ vuông tại } H: \frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} \Rightarrow HQ = \frac{a\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{3a^2 + x^2}}.$$

$$\Delta HPQ \text{ vuông tại } P \text{ nên: } \cos PHQ = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{HP}{HQ} \Rightarrow x = \sqrt{3}a \Rightarrow SH = \sqrt{3}a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{a^3}{4}.$$

Câu 48. Chọn A.



Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{5} \cdot a$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) , $\Rightarrow SH \perp AB, SH \perp BC$

Do $SAB = SBC = 90^\circ$ nên $AB \perp (SHA), BC \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp AH, BC \perp BH$.

Do $ABC = 135^\circ \Rightarrow ABH = 45^\circ$ nên $\triangle ABH$ vuông cân tại A . Từ đó $HB = a\sqrt{2}$ suy ra $\triangle HBC$ vuông cân tại B . Suy ra $BHC = 45^\circ \Rightarrow HC \parallel AB$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SA , khi đó $HK \perp (SAB)$ nên $KH = d(H, (SAB)) = d(C, (SAB))$.

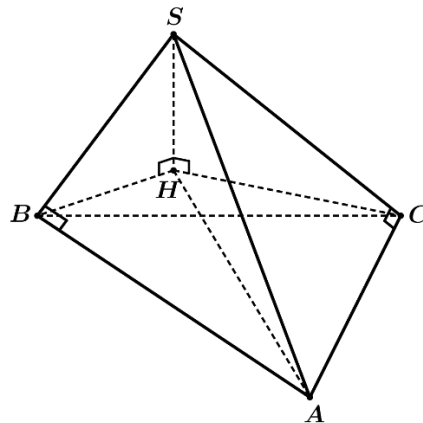
Ta có $\sin \alpha = \frac{d(C, (SAB))}{AC} = \frac{HK}{AC} = \frac{1}{5} \Rightarrow KH = \frac{\sqrt{5}}{5} a$.

Tam giác SAH vuông tại A có đường cao HK . Ta có

$$\frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HA^2} = \frac{5}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow HS = \frac{a}{2}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \sqrt{2} \cdot \sin 135^\circ = \frac{a^3}{12}.$$

Câu 49. Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp BH$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SB \subset (SAB), SB \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABC)) = (SB, BH) = SBH = 60^\circ. \\ BH \subset (ABC), BH \perp AB \end{cases}$$

Theo giả thiết, $\triangle ABC$ cân tại A nên

$$AB = AC \Rightarrow \triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \triangle SHB = \triangle SHC \Rightarrow HB = HC.$$

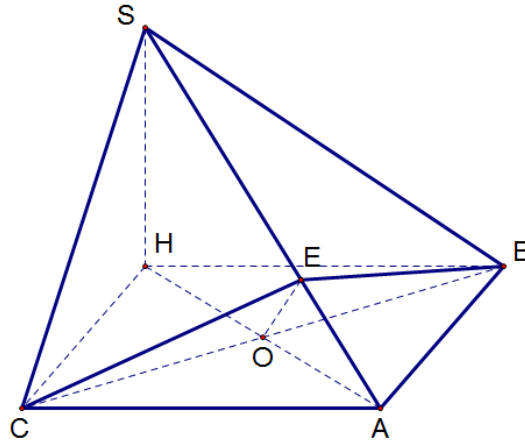
Suy ra HA là đường trung trực của BC , suy ra HA là đường phân giác góc BAC , suy ra $HAB = 60^\circ$.

$$\text{Xét } \triangle HAB \text{ vuông tại } B \text{ suy ra } \tan HAB = \frac{BH}{BA} \Rightarrow BH = BA \cdot \tan HAB = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Xét } \triangle SHB \text{ vuông tại } H \text{ suy ra } \tan SBH = \frac{SH}{BH} \Rightarrow SH = BH \cdot \tan SBH = a\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{a}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}.$$

Câu 50. Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) .

$$\text{Theo bài ra, ta có } \begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHC) \Rightarrow AC \perp HC \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HB \quad (2).$$

$$\text{Mặt khác } BAC = 90^\circ; AB = AC = a \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow ABHC$ là hình vuông cạnh a .

Gọi $O = HA \cap BC$, E là hình chiếu vuông góc của O lên $SA \Rightarrow OE \perp SA$ (4).

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SA \quad (5).$$

$$\text{Từ (4), (5)} \Rightarrow SA \perp (BEC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp EB \\ SA \perp EC \end{cases}.$$

Từ đó, ta được: góc giữa (SAC) và (SAB) là góc giữa EB và EC .

Xét hai tam giác $\triangle BEC$, $\triangle BAC$ ta có: $BE = CE < BA = AC$

$\Rightarrow BEC > BAC$. Vì $CAB = 90^\circ$ nên $BEC > 90^\circ \Rightarrow BEC = 120^\circ$.

Ta dễ dàng chỉ ra được $OEB = OEC = 60^\circ$.

$$\text{Đặt } SH = x \Rightarrow SA = \sqrt{x^2 + 8a^2} \Rightarrow OE = \frac{AO \cdot SH}{SA} = \frac{a\sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{x^2 + 8a^2}}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } \triangle OCE \text{ ta có: } \tan 60^\circ = \frac{OC}{OE} \Rightarrow a\sqrt{2} : \frac{a\sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{x^2 + 8a^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.HBAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 4a^2 = \frac{4a^3}{3}.$$