CHƯƠNG TRÌNH ÔN TẬP, BỒI DƯỠNG THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12

A. ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Chương I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

1. *Nguyên hàm*: Định nghĩa và các tính chất cơ bản, các nguyên hàm cơ bản, các phương pháp tìm nguyên hàm.
2. *Tích phân*: Định nghĩa và các tính chất cơ bản, công thức Niutơn-Lepnit.
3. Các phương pháp tính tích phân.
4. Phương pháp sử dụng tích phân tính giới hạn của một số dãy số có dạng đặc biệt.
5. Ứng dụng của tích phân trong hình học và vật lí.

Chương II. SỐ PHỨC

1. Số phức. Mặt phẳng phức.
2. Các phép toán về số phức trong dạng đại số.
3. Dạng lượng giác của số phức. Các phép toán về số phức trong dạng lượng giác. Công thức Moa-vrơ. Căn bậc n của một số phức.
4. Đa thức với hệ số phức. Định lí Đa-lăm-be. Ứng dụng của số phức trong lí thuyết đa thức với hệ thức.

Chương III. XÁC SUẤT

1. Khái niệm xác suất.
2. Các tính chất của xác suất.
3. Xác suất có điều kiện.

4. Công thức Bayes. Công thức Bec-nu-li.
5. Hàm phân phối. Một số luật phân phối.
6. Kì vọng và phương sai, ý nghĩa thực tiễn.
7. Liên hệ với một số bài toán về thống kê.

B. HÌNH HỌC

Chương I. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

1. Phương trình đường thẳng : dạng tổng quát, dạng tham số, dạng chính tắc.
2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng. Chùm đường thẳng.
3. Góc giữa hai đường thẳng. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng. Phương trình đường phân giác.
4. Phương trình đường tròn, phương tích của một điểm đối với đường tròn, phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn, phương trình tiếp tuyến của đường tròn, phương trình chùm đường tròn.
5. Elip.
6. Hypebol.
7. Parabol.
8. Khái quát về các đường cônic. Đường chuẩn của các đường cônic.
9. Phương trình tiếp tuyến của đường cônic.
10. Phương pháp toạ độ giải các bài toán hình học phẳng.

Chương II. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Các dạng phương trình mặt phẳng. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng. Chùm mặt phẳng.
2. Các dạng phương trình đường thẳng.
3. Vị trí tương đối của các đường thẳng và các mặt phẳng.

4. Khoảng cách.

5. Góc.

6. Phương trình mặt cầu. Toạ độ giao điểm của đường thẳng với mặt cầu.

7. Phương pháp toạ độ giải các bài toán hình học không gian.

Chương III. **PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN**

1. Phép đối xứng qua tâm. Phép đối xứng qua trục. Phép đối xứng qua mặt phẳng.

2. Phép quay quanh trục.

3. Phép dời hình trong không gian.

4. Phép vị tự và phép đồng dạng trong không gian.

C. CÁC CHUYÊN ĐỀ

Chuyên đề 1. **LÍ THUYẾT ĐỒNG DƯ. HÀM SỐ SỐ HỌC**

1. Các khái niệm cơ bản của số học.

2. Đồng dư thức: khái niệm đồng dư – các tính chất cơ bản. Hệ thặng dư và lớp thặng dư.

3. Định lí Ơle, định lí Phec-ma nhỏ, định lí Uyn-sơn và các ứng dụng.

4. Phương trình đồng dư.

5. Định lí Trung Quốc về các số dư và ứng dụng.

6. Các hàm số số học: hàm phần nguyên của một số thực, hàm số số các ước của một số tự nhiên, hàm tổng các ước của một số tự nhiên, hàm Ơle. Định lí Ơle mở rộng.

7. Phương pháp hình học giải các bài toán số học.

8. Các bài toán cực trị.

Chuyên đề 2. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

1. Các phương pháp tìm nghiệm nguyên của một số dạng phương trình: phương trình Điô-phăng bậc nhất, phương trình Pi-ta-go, phương trình Pell, phương trình Điô-phăng dạng Mác-cốp,... .

2. Biểu diễn số tự nhiên trong hệ cơ số tuỳ ý. Một số dạng biểu diễn một số tự nhiên qua các số tự nhiên khác.

Chuyên đề 3. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Mở rộng các bất đẳng thức cơ bản.

2. Kĩ thuật sử dụng các bất đẳng thức cơ bản và cơ bản mở rộng.

3. Bất đẳng thức đối xứng.

4. Bất đẳng thức liên quan đến tích phân, đạo hàm.

5. Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức. (Phương pháp đại số, phương pháp giải tích, phương pháp hình học,...).

6. Các bài toán cực trị đại số, giải tích.

Chuyên đề 4. ĐA THỨC. PHÂN THỨC

1. Định lí Vi-ét (thuận, đảo) và một số kết quả đơn giản liên quan đến nghiệm của một đa thức.

   Công thức nội suy Lagrange.

2. Phép chia các đa thức. Định lí Bơ-du. Thuật toán Ơ-clit tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức.

3. Đa thức nguyên tố cùng nhau : Định nghĩa và một số tính chất đơn giản. Đa thức khả quy và bất khả quy.

4. Phân tích một phân thức hữu tỉ thành tổng các phân thức hữu tỉ có dạng đơn giản hơn.

5. Đa thức Trê-bư-sép.

6. Đa thức đối xứng.

Chuyên đề 5. DÃY SỐ

1. Phương pháp tìm số hạng tổng quát của một số dạng dãy số.
2. Dãy số Phi-bô-na-xi : Định nghĩa – một số tính chất đơn giản – các bài toán có liên quan.
3. Liên phân số.
4. Sai phân.
5. Các phương pháp tìm giới hạn của một dãy số.
6. Các dạng bài toán thường gặp về dãy số.

Chuyên đề 6. PHƯƠNG TRÌNH HÀM

1. Các phương trình hàm cơ bản.
2. Các phương pháp giải phương trình hàm.
3. Bất đẳng thức hàm.

Chuyên đề 7. ÔN TẬP VỀ HÌNH HỌC PHẲNG

1. Các bài toán chứng minh.
2. Các bài toán tính toán.
3. Các bài toán quỹ tích.
4. Các bài toán dựng hình.
5. Các bài toán cực trị.

Chuyên đề 8. MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Tứ diện đều. Tứ diện gần đều. Tứ diện trực tâm : Định nghĩa và các tính chất.
2. Các bài toán cực trị.
3. Các phương pháp thông dụng giải các bài toán hình học không gian.
4. Phép chiếu xuyên tâm và phương pháp "không gian hoá" giải các bài toán hình học phẳng.

Chuyên đề 9. MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA LÍ THUYẾT GRAF

1. Các khái niệm cơ bản.
2. Một số tính chất đơn giản của graf đơn vô hướng hữu hạn.
3. Graf liên thông.
4. Graf Ơle. Graf Hamintơn.
5. Bài toán tô màu graf.

Chuyên đề 10. MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA HÌNH HỌC TỔ HỢP

1. *Hình lồi* : Các khái niệm và một số tính chất đơn giản.
2. Đường kính của một hình. Bài toán phân chia một hình phẳng.
3. Bài toán chiếu sáng.
4. Lưới điểm trên mặt phẳng. Giải toán bằng phương pháp sử dụng lưới điểm.
5. Bài toán phủ.

Chuyên đề 11. ÔN TẬP TOÁN TỔ HỢP

1. Số phần tử của một tập hữu hạn. Định nghĩa và một số tính chất cơ bản. Số phần tử của một số dạng tập thường gặp.
2. Các phương pháp tìm số phần tử của một tập hữu hạn.
3. Nguyên lí Đirichlet. Nguyên lí cực hạn (hay Nguyên lí khởi đầu cực trị) và các ứng dụng.
4. Đại lượng bất biến, nửa bất biến. Phương pháp sử dụng đại lượng bất biến, nửa bất biến giải các bài toán tổ hợp.
5. Phương pháp tổ hợp chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.
6. Các bài toán cực trị tổ hợp.
7. Các bài toán trò chơi.
8. Các phương pháp thông dụng giải các bài toán tổ hợp.

CÁC ĐỀ THI

HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12

TỪ NĂM HỌC 1996 - 1997 ĐẾN NĂM HỌC 2006 - 2007

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2006–2007

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ **Câu 1** *(4đ)*

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 3z^3 + x = 9z + 8. \end{cases}$

◈ **Câu 2** *(4đ)*

a) Tìm ba số thực x, y, z thoả hệ : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4 \end{cases}$ sao cho x đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho $0 < x < y \le z \le 1$ và $3x + 2y + z \le 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $S = 3x^2 + 2y^2 + z^2$.

◈ **Câu 3** *(2đ)*

Cho a, b, c là các số thực không âm thoả : $a + b + c = 3$.

Chứng minh : $\dfrac{a^2}{b^2+1} + \dfrac{b^2}{c^2+1} + \dfrac{c^2}{a^2+1} \ge \dfrac{3}{2}$.

◈ **Câu 4** *(4đ)*

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có p là nửa chu vi, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp.

Chứng minh : a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \ge p^2 + r^2 + 4Rr$.

◈ **Câu 5** *(4đ)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm các cung nhỏ : $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$. Đường thẳng

AP cắt BC tại L; BQ cắt AC tại M; CR cắt AB tại N.

Chứng minh $\dfrac{LA}{LP}+\dfrac{MB}{MQ}+\dfrac{NC}{NR}\geq 9$.

◈ Câu 6 *(2đ)*

Cho tứ diện ABCD thoả : $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$.

Tính tổng T = $\widehat{ADB}+\widehat{BDC}+\widehat{CDA}$.

GIẢI

☑ Câu 1

$$\begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x-2=2-y \\ 2y^3-6y-4=2-z \\ 3z^3-9z-6=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)^2=2-y \\ 2(y-2)(y+1)^2=2-z \\ 3(z-2)(z+1)^2=2-x \end{cases}$$

* $x>2\Rightarrow y<2\Rightarrow z\geq 2\Rightarrow x\leq 2$ (vô lí)

* $x<2\Rightarrow y\geq 2\Rightarrow z\leq 2\Rightarrow x\geq 2$ (vô lí)

Vậy x = 2. Lí luận tương tự ta được y = 2, z = 2.

Vậy x = y = z = 2.

☑ Câu 2

a)
$$\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ x^2+2y^2+3z^2=4 & (2) \end{cases}$$

(1) ⇔ z = 1 − x − y. Thay vào (2) ta được :

$$x^2+2y^2+3(1-x-y)^2=4$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+2y^2+3(1+x^2+y^2-2x+2xy-2y)=4$$

$$\Leftrightarrow\quad 5y^2+6(x-1)y+4x^2-6x-1=0 \qquad (3)$$

Ta phải có

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 20x^2 + 30x + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -11x^2 + 12x + 14 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{190}}{11} \leq x \leq \frac{6+\sqrt{190}}{11}.$$

Vì x lớn nhất nên $x = \frac{6+\sqrt{190}}{11}$.

Khi $x = \frac{6+\sqrt{190}}{11}$ thì $y = \frac{15-3\sqrt{190}}{55}$ và $z = \frac{10-2\sqrt{190}}{55}$.

Vậy $x = \frac{6+\sqrt{190}}{11}$, $y = \frac{15-3\sqrt{190}}{55}$ và $z = \frac{10-2\sqrt{190}}{55}$.

b) • ***Cách 1 :*** Ta có hằng đẳng thức :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)b_3. \quad (*)$$

Áp dụng (*) ta có :

$$\begin{aligned} S &= z.z + 2y.y + 3x.x \\ &= z(z - y) + (z + 2y)(y - x) + (z + 2y + 3x)x \\ &\leq 1(z - y) + (1 + 2)(y - x) + 4x \\ &= z - y + 3y - 3x + 4x = z + 2y + x \\ &= \frac{1}{3}(z.3 + 2y.3 + 3x.1) \\ &= \frac{1}{3}[z(3 - 3) + (z + 2y)(3 - 1) + (z + 2y + 3x).1] \\ &= \frac{1}{3}[0 + 2(z + 2y) + (z + 2y + 3x)] \leq \frac{1}{3}[2.3 + 4] = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Khi $x = \frac{1}{3}$ và $y = z = 1$ thì $S = \frac{10}{3}$. Vậy Max $S = \frac{10}{3}$.

• ***Cách 2***

Ta có $\quad a^2 \geq b^2 + 2b(a - b)$

nên $1^2 \geq z^2 + 2z(1-z)$

$1^2 \geq y^2 + 2y(1-y) \quad \Rightarrow \quad 2 \geq 2y^2 + 4y(1-y)$

$1^2 \geq 9x^2 + 6x(1-3x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \geq 3x^2 + 2x(1-3x)$

Cộng lại ta được :

$$2 + 1 + \frac{1}{3} \geq 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2z(1-z) + 4y(1-y) + 2x(1-3x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10}{3} \geq S + 2[z(1-z) + 2y(1-y) + x(1-3x)]$$

$$= S + 2[z(1-z) + y(2-2y) + x(1-3x)$$

$$= S + 2[(z-y)(1-z) + (y-x)(3-2y-z) + (4-z-2y-3x)x] \geq S.$$

Do đó $S \leq \frac{10}{3}$. Khi $x = \frac{1}{3}y = z = 1$ thì dấu "=" xảy ra.

Vậy giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{10}{3}$.

☑ **Câu 3**

- ***Cách 1***

Ta có : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 3$.

Suy ra $\frac{a^2}{b^2+1} = \frac{3a^2}{3b^2+3} \geq \frac{3a^2}{3b^2+a^2+b^2+c^2}$.

Tương tự ta có : $\frac{b^2}{c^2+1} = \frac{3b^2}{3c^2+3} \geq \frac{3b^2}{3c^2+a^2+b^2+c^2}$

$\frac{c^2}{a^2+1} = \frac{3c^2}{3a^2+3} \geq \frac{3c^2}{3a^2+a^2+b^2+c^2}$

Đặt $x = \frac{3a^2}{a^2+b^2+c^2}$, $y = \frac{3b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $z = \frac{3c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Ta được : $x + y + z = 3$.

và $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{c^2+1} + \frac{c^2}{a^2+1} \geq \frac{x}{y+1} + \frac{y}{z+1} + \frac{z}{x+1}$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}+\frac{c^2}{p} \geq \frac{(a+b+c)^2}{m+n+p}$ với m, n, p dương

ta có : $\frac{x}{y+1}+\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1} = \frac{x^2}{xy+x}+\frac{y^2}{yz+y}+\frac{z^2}{zx+z}$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{(xy+yz+zx)+x+y+z}$$

$$= \frac{9}{xy+yz+zx+3}$$

$$\geq \frac{9}{\frac{1}{3}(x+y+z)^2+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

- ***Cách 2***

Ta có : $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 = 9 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 3$

$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}+\frac{z^2}{p} \geq \frac{(x+y+z)^2}{m+n+p}$, $\forall m, n, p > 0$.

nên ta có :

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1} = \frac{a^4}{a^2\left(b^2+1\right)}+\frac{b^4}{b^2\left(c^2+1\right)}+\frac{c^4}{c^2\left(a^2+1\right)}$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2}$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+a^2+b^2+c^2} = A\,(1)$$

Đặt $t = a^2+b^2+c^2 \geq 3$, ta được :

$$A = \frac{t^2}{\frac{t^2}{3}+t} = \frac{3t}{t+3} = f(t) \text{ luôn tăng trên } [3\,;+\infty).$$

$$\Rightarrow \quad \forall t \geq 3 \text{ ta có } A = f(t) \geq f(3) = \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

☑ **Câu 4**

a) Ta có :

$$2p^2 - 2r^2 - 8Rr = 2p^2 - 2.\frac{S^2}{p^2} - 8r\frac{abc}{4S}$$

$$= 2p^2 - 2.\frac{S^2}{p^2} - 2\frac{abc}{p}$$

$$= 2p^2 - \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{p} - \frac{2abc}{p}$$

$$= \frac{2p^3 - 2p^3 + 2abc - 2abc + 2p^2(a+b+c) - 2p(ab+bc+ca)}{p}$$

$$= 2p(a+b+c) - 2(ab+bc+ca)$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2.$$

b) • ***Cách 1***

Theo a) ta có : $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} = p^2 - (r^2 + 4Rr)$

$$\Rightarrow \quad r^2 + 4Rr = p^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad p^2 + r^2 + 4Rr = 2p^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$= \frac{4p^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2}$$

$$= ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

- ***Cách 2***

Ta có a = 2RsinA; $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$ mà $\sin A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

Suy ra $\dfrac{a}{2R} = \dfrac{2\left(\frac{r}{p-a}\right)}{1+\left(\frac{r}{p-a}\right)^2} \Leftrightarrow \dfrac{a}{2R} = \dfrac{2r(p-a)}{(p-a)^2+r^2}$

$\Leftrightarrow \quad a(p^2 + a^2 - 2pa + r^2) = 4r(p-a)R$

$\Leftrightarrow \quad a^3 + ap^2 - 2pa^2 + ar^2 = 4Rrp - 4Rra$

$\Leftrightarrow \quad a^3 - 2pa^2 + (4Rr + p^2 + r^2)a - 4Rrp = 0$

Tương tự : $b^3 - 2pb^2 + (4Rr + p^2 + r^2)b - 4Rrp = 0$

$c^3 - 2pc^2 + (4Rr + p^2 + r^2)c - 4Rrp = 0$

Vậy a, b, c là ba nghiệm của phương trình :

$$x^3 - 2px^2 + (4Rr + p^2 + r^2)x - 4Rrp = 0$$

Theo định lí Vi-ét ta có $ab + bc + ca = 4Rr + p^2 + r^2$.

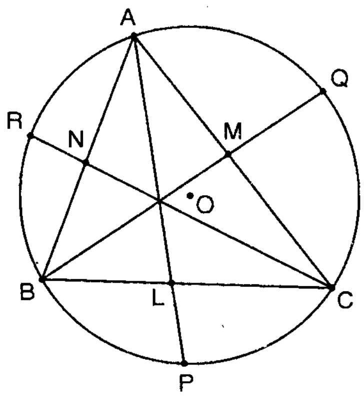
Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

☑ Câu 5



AL là phân giác trong của góc A nên

$$LA = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}; LB = \frac{ac}{b+c}; LC = \frac{ab}{b+c}$$

(BC = a, CA = b, AB = c)

Ta có $LA.LP = LB.LC \Rightarrow LP = \dfrac{a^2}{b+c}.\dfrac{1}{2\cos\dfrac{A}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{LA}{LP} = \frac{2bc}{a^2}.2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2bc}{a^2}(1+\cos A) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{LA}{LP} + \frac{MB}{MQ} + \frac{NC}{NR} = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 3$$

$$\geq \frac{4bc}{a^2} + \frac{4ca}{b^2} + \frac{4ab}{c^2} - 3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{64(bc)(ca)(ab)}{a^2b^2c^2}} - 3 = 12 - 3 = 9.$$

☑ **Câu 6**

Lấy điểm A_1 thuộc tia BC sao cho $BA_1 = DA$.

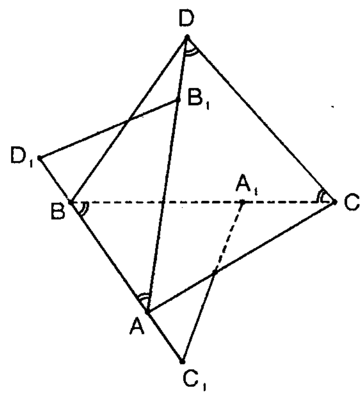
Lấy điểm C_1 thuộc tia BA sao cho $BC_1 = DC$.

Ta có : $\Delta C_1BA_1 = \Delta CDA$ (c–g–c).

Lấy điểm B_1 thuộc tia AD sao cho $AB_1 = CB$.

Lấy điểm D_1 thuộc tia AB sao cho $AD_1 = CD$.

Ta có : $\Delta D_1AB_1 = \Delta DCB$ (c–g–c).



Ta chứng minh AB = CD. Thật vậy :

* Giả sử AB < CD

$\Rightarrow$ A nằm giữa B và C_1

$\Rightarrow$ A_1 nằm giữa B và C (vì $AC = A_1C_1$)

$\Rightarrow$ $BC > BA_1$ mà $BA_1 = DA \Rightarrow BC > DA$ (1)

Mặt khác : Vì $AB < CD \Rightarrow$ B nằm giữa A và D_1

$\Rightarrow$ B_1 nằm giữa A và D ($BD = B_1D_1$)

$\Rightarrow$ $AD > AB_1$ mà $AB_1 = CB \Rightarrow AD > CB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra mâu thuẫn.

* Tương tự nếu AB > CD ta cũng suy ra mâu thuẫn.

Vậy AB = CD.

Lập luận tương tự ta cũng có AD = BC.

Do đó $\Delta ABD = \Delta CDB \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CDB}$

Vậy $\quad T = \widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA}$

$\quad = \widehat{ADB} + \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2005–2006

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 *(6đ)*

a) Cho $y = \dfrac{x^2\cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1}$ $(0 < a < \pi)$.

Chứng minh $-1 \le y \le 1$ với mọi x.

b) Cho $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$. Tìm m để y đạt giá trị nhỏ nhất lớn hơn 1.

Câu 2 *(4đ)*

a) Cho ba số x, y, z thuộc khoảng (0; 1). Chứng minh :

$$2(y^3 + z^3) - y^2z - z^2 - y \le 1.$$

b) Cho ba số x, y, z thuộc khoảng (0; 1). Chứng minh :

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \le 3 + x^2y + y^2z + z^2x.$$

Câu 3 *(2đ)*

Cho dãy số thực $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in [0; 1]$. Chứng minh :

$$(1 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2 \ge 4\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2\right).$$

◈ **Câu 4** *(2đ)*

Cho hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ thoả :

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & (n > 100) \\ f(f(n+11)) & (n \le 100) \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Chứng minh : $f(n) = 91$ với $n \le 100$.

◈ **Câu 5** *(4đ)*

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có hai đáy là hình chữ nhật. Gọi α, β lần lượt là các góc tạo bởi đường chéo AC' với các cạnh AB và AD. Gọi ϕ là góc phẳng của nhị diện (B, AC', D).

Chứng minh : $\cos\phi = -\cot\alpha.\cot\beta$.

◈ **Câu 6** *(2đ)*

Các đỉnh của một tứ giác nằm trên các cạnh khác nhau của một hình chữ nhật cho trước có chiều dài và chiều rộng là a, b. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác ấy theo a và b.

GIẢI

☑ **Câu 1**

a) $y = \dfrac{x^2\cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1}$ $(0 < a < \pi)$.

(Đặt điều kiện mẫu số khác 0, $\forall x$) ($\Delta' = \cos^2 a - 1 < 0$).

y_0 thuộc miền giá trị $\Leftrightarrow y_0x^2 - 2xy_0\cos a + y_0 - x^2\cos a + 2x - \cos a = 0$

$\Leftrightarrow (y_0 - \cos a)x^2 - 2(y_0.\cos a - 1)x + y_0 - \cos a = 0$

- Nếu $y_0 = \cos a$ thì $x = 0$ và $-1 \le y_0 \le 1$ (đpcm)
- Nếu $y_0 \ne \cos a$ ta có :

$$\begin{aligned}\Delta' &= (y_0\cos a - 1)^2 - (y_0 - \cos a)^2 \\ &= (y_0\cos a - 1 + y_0 - \cos a)(y_0\cos a - 1 + y_0 + \cos a) \\ &= -\sin^2 a.\left(y_0^2 - 1\right)\end{aligned}$$

$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le y_0 \le 1$.

b) $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$

$$= \begin{cases} x^2 - 5x + 4 + mx & (x < 1 \vee x > 4) \\ -x^2 - 5x + 4 + mx & (1 \le x \le 4) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + (m-5)x + 4, & (x < 1 \vee x > 4) \\ -x^2 + (m+5)x - 4, & (-1 \le x \le 4) \end{cases}$$

Ta có : $y - 1 = \begin{cases} x^2 + (m-5)x + 3 & (x < 1 \vee x > 4) & (1) \\ -x^2 + (m+5)x - 5 & (1 \le x \le 4) & (2) \end{cases}$

Để y đạt giá trị nhỏ nhất lớn hơn 1 thì $y > 1, \forall x$.

- Xét (2) :

$$-x^2 + (m + 5)x - 5 > 0 \ (1 \le x \le 4) \qquad (3)$$

Đặt $f(x) = -x^2 + (m + 5)x - 5$.

Để (3) đúng thì các số 1 và 4 nằm trong khoảng nghiệm của tam thức $f(x)$: $\begin{cases} af(1) < 0 \\ af(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$ (I)

- Xét (1) :

$$x^2 + (m - 5)x + 3 > 0 \ (x < 1 \vee x > 4) . \qquad (4)$$

Đặt $g(x) = x^2 + (m - 5)x + 3$.

Để (4) đúng, ta có hai trường hợp sau :

i. $\Delta = (m - 5)^2 - 12 < 0$

$\Leftrightarrow \quad 5 - 2\sqrt{3} < m < 5 + 2\sqrt{3}$ (II)

ii. g(x) có 2 nghiệm thuộc [1 ; 4].

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ ag(1) \ge 0 \\ ag(4) \ge 0 \\ 1 \le \dfrac{S}{2} \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m \le 5 - 2\sqrt{3} \qquad \text{(III)}$$

Từ (I), (II) và (III), ta có đáp số là : $1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$.

☑ **Câu 2**

a) Đặt $g(y) = 2(y^3 + z^3) - y^2z - z^2 - y$.

Ta có $g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1$.

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1}{6}\left(z - \sqrt{z^2+6}\right) < 0 \\ y_2 = \dfrac{1}{6}\left(z + \sqrt{z^2+6}\right) \end{array}\right.$$

Vì $y_1 < 0$ nên $y_1 \notin [0 ; 1]$. Qua y_2 đạo hàm $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương nên y_2 là điểm cực tiểu.

Nếu $y_2 \in [0 ; 1]$ thì $g(y_2) < g(0)$ và $g(y_2) < g(1)$.

Nếu $y_2 \notin [0 ; 1]$ thì $g(y)$ đơn điệu tăng trên $[0 ; 1]$.

Trong cả hai trường hợp thì $g(y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $g(0)$ hoặc $g(1)$.

Ta có $g(0) = 2z^3 - z^2$

$g(1) = 2z^3 - z^2 - z + 1$

vì $z \le 1$ nên $g(1) \ge g(0)$.

Vậy giá trị lớn nhất của $g(y)$ trên $[0 ; 1]$ là $g(1)$.

Ta chứng minh : $g(1) \le 1$

$\Leftrightarrow \quad 2z^3 - z^2 - z + 1 \le 1$

$\Leftrightarrow \quad z(2z^2 - z - 1) \le 0$

$\Leftrightarrow \quad z(z-1)(2z+1) \le 0$ (đúng)

b) $\quad 2(x^3 + y^3 + z^3) \le x^2y + y^2z + z^2x + 3$

$\Leftrightarrow \quad 2x^3 - yz^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z \le 3$

Đặt $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{6}\left(y - \sqrt{y^2+6z^2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{6}\left(y + \sqrt{y^2+6z^2}\right) \end{array}\right.$$

Vì $x_1 < 0$ và $x_2 > 0$ nên lí luận tương tự như trên thì f(x) đạt giá trị lớn nhất tại x = 0 hoặc x = 1.

Ta có $f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z$

và $f(1) = 2(y^3 + z^3) - y^2z - z^2 - y + 2 \geq f(0)$

nên f(1) là giá trị lớn nhất của f(x).

Theo kết quả câu 2a, suy ra :

$$2(y^3 + z^3) - y^2z - z^2 - y + 2 \leq 3.$$

Vậy ta luôn có $f(x) \leq 3$.

☑ Câu 3

Xét tam thức

$$f(X) = X^2 - (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)X + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

Ta có $f(0) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$

$$f(1) = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

$$= -[a_1(1 - a_1) + a_2(1 - a_2) + \ldots + a_n(1 - a_n)] \leq 0.$$

Suy ra f(X) có nghiệm thuộc [0 ; 1] nên

$$\Delta = (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geq 0.$$

☑ Câu 4

- Xét $90 \leq n \leq 100$.

  Ta có $n + 11 > 100$

  và $f(n) = f(f(n + 11)) = f(n + 11 - 10) = f(n + 1)$.

  Vậy $f(90) = f(91) = f(92) = \ldots = f(100) = f(101) = 91$.

- Xét $n < 90$.

  Ta chọn số $m \in \mathbb{N}$ sao cho $90 \leq n + 11m \leq 100$.

  Khi đó $f(n) = f(f(n + 11)) = f[f(f(n + 2.11))]$

  $$= f^4(n + 3.11) = \ldots = f^{m+1}(n + 11m)$$

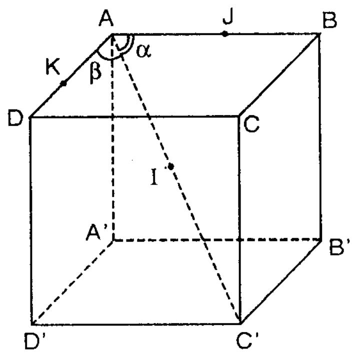
$= f^m(f(n + 11m))$

$= f^m(91) = 91.$

Vậy $f(n) = 91$ với mọi $n \leq 100$.

☑ Câu 5

Lấy điểm I thuộc tia AC′ và ta có thể giả sử AI = 1. Qua I vẽ mặt phẳng vuông góc với AC′ cắt AB tại J, cắt AD tại K.



Ta có : $IJ = \tan\alpha$; $IK = \tan\beta$

$$AJ = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ ; } AK = \frac{1}{\cos\beta}$$

Trong tam giác IJK ta có :

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2 - 2IJ.IK.\cos\phi$$

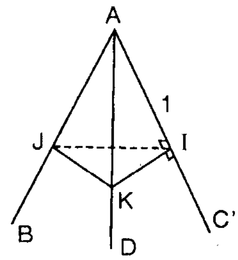
$$= \tan^2\alpha + \tan^2\beta - 2\tan\alpha.\tan\beta.\cos\phi \qquad (1)$$

Trong tam giác AJK ta có :

$$JK^2 = AJ^2 + AK^2 - 2AJ.AK.\cos\widehat{BAD}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{2}{\cos\alpha.\cos\beta}.\cos\widehat{BAD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :



$$\cos\widehat{BAD} = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos\phi$$

mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ nên $\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos\phi = 0$

Vậy $\cos\phi = -\cot\alpha.\cot\beta$.

☑ Câu 6

Ta có : AB = a, AD = b.

Gọi P_1 là điểm đối xứng với P qua đường thẳng AD.

P_2 là điểm đối xứng với P qua đường thẳng BC.

P_3 là điểm đối xứng với P_1 qua đường thẳng AB.

Ta có $P_{MNPQ} = MN + NP + PQ + QM$

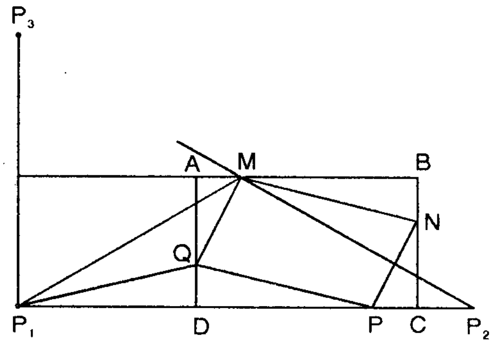
$= MN + NP_2 + QP_1 + QM$

$\geq MP_2 + MP_1 = MP_2 + MP_3$

$\geq P_2P_3$

mà $P_2P_3 = \sqrt{P_3P_1^2 + P_1P_2^2} = \sqrt{4a^2 + 4b^2}$

nên chu vi MNPQ $\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$ (const).



Chu vi MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt{a^2+b^2}$ khi xảy ra dấu bằng. Khi đó M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, AD.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

❖ **Câu 1** *(3đ)*

Cho a > 0, b > 0, c > 0 thoả a + b + c = 1.

Chứng minh : $\sqrt{\dfrac{(1-a)(1-b)}{c}} + \sqrt{\dfrac{(1-b)(1-c)}{a}} + \sqrt{\dfrac{(1-c)(1-a)}{b}} \geq 2\sqrt{3}$.

❖ **Câu 2** *(3đ)*

Cho dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thoả :

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \dfrac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \forall m \geq n \geq 0 \end{cases}$$

Tính a_{2006}.

❖ **Câu 3** *(3đ)*

Một cấp số cộng gồm 15 số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, ..., p_{15}$ có công sai là $d > 0$. Chứng minh $d > 30000$.

Câu 4 *(3đ)*

Cho tam giác ABC có độ dài các đường phân giác trong nhỏ hơn 1. Chứng minh diện tích tam giác ABC nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5 *(4đ)*

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Một đường tròn (J) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại D và tiếp xúc với cạnh AB tại E (D và A nằm về hai phía đối với đường thẳng BC). Tiếp tuyến của (J) kẻ từ C tiếp xúc với (J) tại điểm F (F và D nằm về hai phía đối với đường thẳng BC).

Chứng minh đường thẳng EF đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Câu 6 *(4đ)*

Có bao nhiêu hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn :

$$[f(x)]^3 - (x^2+3)[f(x)]^2 + (x^2+3)f(x) + x^4 - 1 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ?$$

GIẢI

☑ Câu 1

Ta có : $$\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{c}} = \sqrt{\frac{(b+c)(a+c)}{c}} = \sqrt{a+b+c+\frac{ab}{c}}$$

$$\geq \frac{\sqrt{3}\sqrt{a+b+c}+\sqrt{\frac{ab}{c}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{c}}+\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{a}}+\sqrt{\frac{(1-c)(1-a)}{b}}$$

$$\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right) \qquad (1)$$

Ta cũng có $\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} = \frac{ab+bc+ca}{\sqrt{abc}} \geq \sqrt{3(a+b+c)} = \sqrt{3}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

☑ **Câu 2**

$$a_1 = 3\ ;\ a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}). \qquad (1)$$

(1) $\Rightarrow$ $a_{m+n} - (m + n) - 1 + a_{m-n} - (m - n) - 1$

$$= \frac{1}{2}(a_{2m} - 2m - 1 + a_{2n} - 2n - 1)$$

Đặt $b_n = a_n - n - 1$.

Ta có $b_1 = a_1 - 2 = 1$

và $b_{m+n} + b_{m-n} = \frac{1}{2}(b_{2m} + b_{2n})$ $(m \geq n \geq 0$ (2)

Trong (2) lấy m = n ta có :

$$b_{2m} + b_0 = b_{2m} \Rightarrow b_0 = 0$$

Trong (2) cho (m, n) = (1, 0) ta có :

$$2b_1 = \frac{1}{2}(b_2 + b_0) \Rightarrow b_2 = 4b_1 = 4$$

Trong (2) cho (m, n) = (n + 2, n) ta có :

$$b_{2n+2} + b_2 = \frac{1}{2}(b_{2n+4} + b_{2n}) \Rightarrow b_{2n+4} = 2b_{2n+2} - b_{2n} + 8 \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ $b_4 = 2b_2 - b_0 + 8 = 16 = 4^2$; $b_6 = 2b_4 - b_2 + 8 = 36 = 6^2$

Giả sử $b_{2k} = (2k)^2$ và $b_{2k+2} = (2k + 2)^2$. Từ (3) suy ra :

$$b_{2k+4} = 2b_{2k+2} - b_{2k} + 8 = 2(2k + 2)^2 - (2k)^2 + 8$$
$$= 4k^2 + 16k + 16 = (2k + 4)^2.$$

Vậy bằng quy nạp ta đã chứng minh được $b_{2n} = (2n)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $b_{2006} = 2006^2$

Do đó : $a_{2006} = b_{2006} + 2007 = 2006^2 + 2007 = 4\ 026\ 043$.

☑ **Câu 3**

Ta cần chứng minh d chia hết cho 13, 11, 7, 5, 3, 2.

Giả sử (d, 13) = 1 suy ra $p_3, p_4, ..., p_{15}$ có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 13.

Do đó, tồn tại một số tự nhiên i (i > 2) sao cho p_i chia hết cho 13 hay $p_i = 13$.

Mặt khác $p_{i-2} > 1$ nên suy ra $2d < 12 \Rightarrow d < 6$

Nếu $d \in \{1, 3, 5\}$ $\Rightarrow$ $p_{i-1} \in \{12, 10, 8\}$ (vô lí).

Nếu $d = 2$ $\Rightarrow$ $p_{i-2} = 9$ (vô lí)

Nếu $d = 4$ $\Rightarrow$ $p_{i-2} = 9$ (vô lí).

Vậy d chia hết cho 13.

Chứng minh tương tự ta có d chia hết cho 11, 7, 5, 3, 2

$\Rightarrow$ d chia hết cho $13.11.7.5.3.2 = 30030 \Rightarrow d > 30000$.

☑ **Câu 4**

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}.\frac{2S}{h_a}.\frac{2S}{h_c}.\sin B \Rightarrow S = \frac{h_a h_c}{2\sin B}.$$

Xét tam giác ABC có 3 góc nhọn và giả sử B là góc lớn nhất. Ta có

$$60^o \le B < 90^o$$

$$\Rightarrow \quad \sin B \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{h_a h_c}{2\sin B} < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (vì } h_a < 1, h_c < 1).$$

Xét tam giác ABC có góc tù hoặc vuông, chẳng hạn B.

Ta có : $1 > l_a > AB$, $1 > l_c > BC$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}AB.BC.\sin B < \frac{1}{2}.1.1.1 < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

☑ **Câu 5**

Đường thẳng DE cắt (O) tại D và N.

Do đường tròn (J) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại D nên D là tâm vị tự của hai đường tròn suy ra $\overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{JE}$ cùng hướng.

Vậy ON vuông góc với AB nên N là điểm chính giữa cung AB (không chứa C) của đường tròn (O).

Do đó CN là phân giác trong của góc $\widehat{ACB}$. (1)

Gọi I là giao điểm của CN và EF, ta chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Vì BE là tiếp tuyến của (J) nên :

$$\widehat{EFD} = \widehat{BED} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{BD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{NB} + \overset{\frown}{BD}\right) = \widehat{NCD} = \widehat{ICD}$$

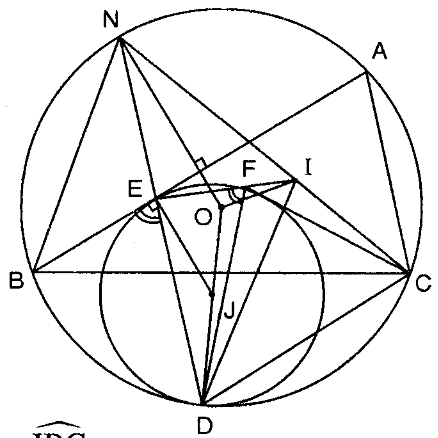
$\Rightarrow$ CDIF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{DIC} = \widehat{DFC} = \widehat{DEF}$

$\Rightarrow$ $\widehat{NEI} = 180^\circ - \widehat{DEF} = 180^\circ - \widehat{DIC} = \widehat{NID}$

$\Rightarrow$ $\Delta NEI \backsim \Delta NID$

$\Rightarrow$ $NI^2 = NE.ND$.



Mặt khác $\widehat{EBN} = \widehat{ABN} = \widehat{NDB}$

$\Rightarrow$ $\Delta NEB \backsim \Delta NBD$

$\Rightarrow$ $NB^2 = NE.ND = NI^2$

$\Rightarrow$ $NB = NI$

$\Rightarrow$ $\widehat{NBI} = \widehat{NIB}$

$\Rightarrow$ $\widehat{IBA} = \widehat{NBI} - \widehat{NBA} = \widehat{NIB} - \widehat{NCB} = \widehat{IBC}$

$\Rightarrow$ BI là đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

☑ Câu 6

$$[f(x)]^3 - (x^2 + 3)[f(x)]^2 + (x^2 + 3)f(x) + x^4 - 1 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $\begin{cases} y = f(x) \\ t = x^2 \end{cases}$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2004–2005

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

❖ Câu 1 *(6đ)*

Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $\begin{cases}(4x+2)^2 = 2y+15 \\ (4y+2)^2 = 2x+15\end{cases}$;

b) $9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}$;

c) $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2+9x-4}$.

❖ Câu 2 *(3đ)*

Cho tam giác ABC thoả 2tanB = tanA + tanC.

Chứng minh : $\cos A + \cos C \le \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

❖ Câu 3 *(3đ)*

Cho dãy số thực a_1, a_2, a_3, a_4, ... được xác định bởi : $a_1 = 2005$ và với mọi n > 1 : $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = n^2.a_n$.

Tính a_{2005}.

❖ Câu 4 *(3đ)*

Giả sử D là một điểm trên cạnh BC (D khác B và khác C) của tam giác ABC. Gọi E và F lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD. Chứng minh rằng nếu B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn thì ta có : $\dfrac{AD+DB}{AD+DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

❖ Câu 5 *(3đ)*

Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích là S. Trên cạnh AB lấy 2 điểm M, N sao cho AM = BN. Trên cạnh CD lấy 2 điểm P, Q sao cho CP = DQ. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích của các tam giác MCD, NCD, PAB, QAB.

Chứng minh $16S_1.S_2.S_3.S_4 = S^4$ khi và chỉ khi ABCD là một hình bình hành.

♦ **Câu 6** *(2đ)*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\frac{n^3+8n^2+1}{3n}$ là một số nguyên tố.

GIẢI

☑ **Câu 1**

a) $\begin{cases}(4x+2)^2 = 2y+15 & (1)\\ (4y+2)^2 = 2x+15 & (2)\end{cases}$ Điều kiện : $\begin{cases}2x+15 \geq 0\\ 2y+15 \geq 0\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được :

$$(4x - 4y)(4x + 4y + 4) = 2y - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x - 2y)(8x + 8y + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}x = y\\ 8x+8y+9=0\end{array}\right.$$

- Với x = y, ta có :

$$(4x + 2)^2 = 2x + 15$$

$$\Leftrightarrow \quad 16x^2 + 14x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ (nhận) hoặc } x = -\frac{11}{8} \text{ (nhận)}$$

- Với 8x + 8y + 9 = 0, ta có :

$$(4x + 2)^2 = 15 - \frac{8x+9}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \quad 64x^2 + 72x - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-9 \pm \sqrt{221}}{16}$$

Vậy hệ có nghiệm : $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{11}{8};-\frac{11}{8}\right),$

$\left(\frac{-9-\sqrt{221}}{16};\frac{-9+\sqrt{221}}{16}\right),$

$\left(\frac{-9+\sqrt{221}}{16};\frac{-9-\sqrt{221}}{16}\right).$

b) $\quad 9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}. \quad (1)$

Điều kiện : $9x^2 + 12x - 2 \geq 0.$

Đặt $3y + 2 = \sqrt{3x+8} \quad \Rightarrow \quad (3y + 2)^2 = 3x + 8$

Khi đó ta có (1) : $\quad (3x + 2)^2 - 6 = \sqrt{3x+8}$

$$\Leftrightarrow \quad (3x + 2)^2 = 3y + 8$$

Vậy ta có hệ : $\begin{cases} (3x+2)^2 = 3y+8 & (2) \\ (3y+2)^2 = 3x+8 & (3) \end{cases}$

Điều kiện : $\begin{cases} 3y+8 \geq 0 \\ 3x+8 \geq 0 \end{cases}$

Trừ (2) cho (3) :

$$(3x - 3y)(3x + 3y + 4) = 3y - 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x - 3y)(3x + 3y + 5) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x = y$ hoặc $3x + 3y + 5 = 0$

- Với $x = y$:

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{1}{3} & (\text{nhận}) \\ x = -\frac{4}{3} & (\text{loại}) \end{array}\right.$$

- Với $3x + 3y + 5 = 0$:

$$(3x+2)^2 = -3x+3$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2 + 15x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{6} & (\text{loại}) \\ x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{6} & (\text{nhận}) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{1}{3}$ hoặc $x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{6}$.

c) $$x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2+9x-4} \qquad (1)$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad y^3 + y = (x+1)^3 + (x+1) \qquad (2)$$

Đặt $f(x) = x^3 + x,\ f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow$ f(x) là hàm đồng biến

$\Rightarrow$ $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Từ (2) suy ra : $y = x + 1$

$$\Rightarrow \quad (x+1)^3 = 7x^2 + 9x - 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-5)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Bài học :

Giải phương trình bằng cách đưa về giải hệ phương trình.

- *Sử dụng thành thạo và linh hoạt hằng đẳng thức.*

- *Chú ý :* $\begin{cases} F(u) = F(v) \\ F \text{ đơn điệu} \end{cases} \Leftrightarrow u = v$

☑ **Câu 2**

Chứng minh $\cos A + \cos C \le \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Ta có : $2\tan B = \tan A + \tan C$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin B}{\cos B} = \frac{\sin(A+C)}{\cos A.\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos A\cos C = \cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A + C) + \cos(A - C) = -\cos(A + C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + C) + \cos(A - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2\frac{A+C}{2} + 2\cos^2\frac{A-C}{2} = 3.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si :

$$3 = 4\cos^2\frac{A+C}{2} + 2\cos^2\frac{A-C}{2}$$

$$\ge 2\sqrt{8}\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}\sqrt{2} \ge 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) \le \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A + \cos C \le \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

☑ **Câu 3**

Từ giả thiết ta có :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = (n-1)^2.a_{n-1}$$

Ta suy ra :

$$(n-1)^2.a_{n-1} + a_n = n^2.a_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1)^2.a_{n-1} = a_n.(n^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n = \frac{n-1}{n+1}.a_{n-1},\ \forall n > 1$$

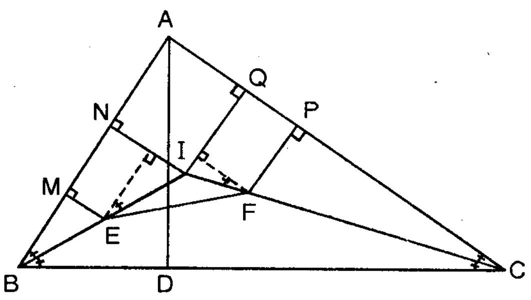
Suy ra $\quad a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdots\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}.a_1 = \dfrac{2a_1}{n(n+1)}$

$$a_{2005} = \frac{1}{2005}\cdot\frac{1}{2006}.2.2005 = \frac{1}{1003}.$$

☑ Câu 4

Tứ giác BCFE nội tiếp $\Rightarrow \dfrac{IE}{IF} = \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$



$$= \frac{IF\cos\frac{C}{2}}{IE\cos\frac{B}{2}} = \frac{PQ}{MN}$$

$$= \frac{\left(\frac{CA+CB-AB}{2}\right)-\left(\frac{CA+CD-AD}{2}\right)}{\left(\frac{BA+BC-AC}{2}\right)-\left(\frac{BA+BD-AD}{2}\right)}$$

$$= \frac{AD+CB-AB-CD}{AD+BC-AC-BD}$$

$$= \frac{AD+BD-AB}{AD+CD-AC} = \frac{AD+DB}{AD+CD}$$

Bài học áp dụng :

1. Định lí sin.

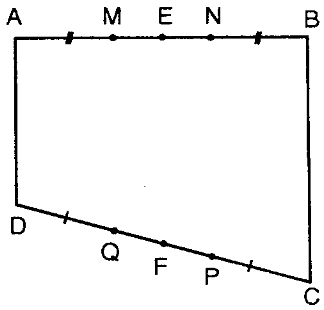
2. Tam giác đồng dạng.

3. Tính chất đường tròn nội tiếp.

☑ **Câu 5**

Ta có AM = NB nên trung điểm E của AB cũng là trung điểm của MN.

Vì CP = DQ nên trung điểm F của CD cũng là trung điểm của PQ.



Ta có : $S_{ECD} = \dfrac{S_{MCD} + S_{NCD}}{2}$

$S_{FAB} = \dfrac{S_{PAB} + S_{QAB}}{2}$

Mà $S_{ECD} = \dfrac{S_{ACD} + S_{BCD}}{2}$

$S_{FAB} = \dfrac{S_{CAB} + S_{DAB}}{2}$

$\Rightarrow \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{ACD} + S_{BCD} + S_{CAB} + S_{DAB}$

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S$

Suy ra $\quad 2S \geq 4\sqrt[4]{S_1.S_2.S_3.S_4}$.

$\Rightarrow \quad S_1.S_2.S_3.S_4 \leq \dfrac{S^4}{16}$.

Dấu bằng xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

Khi đó ABCD là hình bình hành.

☑ **Câu 6**

Vét cạn trên mod 3 :

- $n = 3k$

$$A = \frac{n^2}{3} + \frac{8n}{3} + \frac{1}{3n} = 3k^2 + 8k + \frac{1}{9k}$$

$[A] = 3k^2 + 8k = k(3k + 8)$

$[A] \in \rho \Leftrightarrow k = 1$

$\Leftrightarrow n = 3$

(ρ : tập hợp số nguyên tố).

- $n = 3k + 1$

$$A = \frac{n^2}{3} + \frac{8n}{3} + \frac{1}{3n} = 3k^2 + 2k + \frac{1}{3} + 8k + \frac{8}{3} + \frac{1}{3n}$$

$$= 3k^2 + 10k + 3 + \frac{1}{3n}$$

$[A] = 3k^2 + 10k + 3 = (k + 3)(3k + 1)$

$[A] \in \rho \Leftrightarrow k = 0$

$\Leftrightarrow n = 1$

- $n = 3k + 2$ $(n > 1)$

$$A = 3k^2 + 4k + \frac{4}{3} + 8k + \frac{16}{3} + \frac{1}{3n}$$

$$= 3k^2 + 12k + 6 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$$

$[A] = 3k^2 + 12k + 6 = 3[k^2 + 4k + 2] \notin \rho$

Vậy : $[A] \in \rho \Leftrightarrow n \in \{1, 3\}$.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 *(4đ)*

Tìm tất cả các hàm f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả phương trình hàm :

$f(x^2) - f(y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Câu 2 *(3đ)*

Hãy tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt :

$$\begin{cases}\left(3.\sqrt{x|x|}+|y|-3\right)\left(|x|+3|y|-9\right)=0\\(x-a)^2+y^2=25\end{cases}$$

◈ **Câu 3** *(3đ)*

Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a + b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a + b)$.

◈ **Câu 4** *(3đ)*

Tìm tất cả các đa thức hệ số thực P(x) thoả :

$$P(a + b + c) = 7P(a) + 4P(b) - 5P(c).$$

với a, b, c là các số thực và

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 2a^3 + b^3 - 2c^3.$$

◈ **Câu 5** *(4đ)*

Tìm các số nguyên dương a, b, c, d, m, n thoả :

$$\begin{cases}a\le b\le c\le d=n^2\\a+b+c+d=m^2\\a^2+b^2+c^2+d^2=2021.\end{cases}$$

◈ **Câu 6** *(3đ)*

Cho tứ diện ABCD có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, AB, BC.

Giả sử AB + BC = AD + CD, BC + CA = BD + AD, CA + AB = CD + BD

Chứng minh rằng $\widehat{MON}=\widehat{NOP}=\widehat{MOP}$.

GIẢI

☑ **Câu 1**

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ thoả } f(x^2)-f(y^2)=(x+y)(f(x)-f(y))\ \forall x, y\in\mathbb{R}$$

Cho y = 0 :

$$f(x^2)-f(0)=x(f(x)-f(0))$$

$\Leftrightarrow \qquad f(x^2) = f(0) + x(f(x) - f(0))$

Cho x = 0 :

$$f(y^2) = f(0) - y(f(0) - f(y)) = f(0) + y(f(y) - f(0))$$

Suy ra : $\quad f(x^2) - f(y^2) = xf(x) - yf(y) - f(0)(x - y) \qquad (1)$

Mặt khác : $f(x^2) - f(y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$

$$= xf(x) - yf(y) - xf(y) + f(x) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) :

$$xf(y) - yf(x) = f(0)(x - y)$$

Cho y = 1 :

$$xf(1) - f(x) = f(0)(x - 1)$$

$\Leftrightarrow \qquad f(x) = x(f(1) - f(0)) + f(0)$

Vậy : $\quad f(x) = kx + b$ với $k = f(1) - f(0)$ và $b = f(0)$

Thử lại, ta thấy $f(x) = kx + b$ thoả mãn bài toán.

☑ **Câu 2**

$$\begin{cases} \left(3\sqrt{x|x|} + |y| - 3\right)\left(|x| + 3|y| - 9\right) = 0 & (1) \\ (x - a)^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

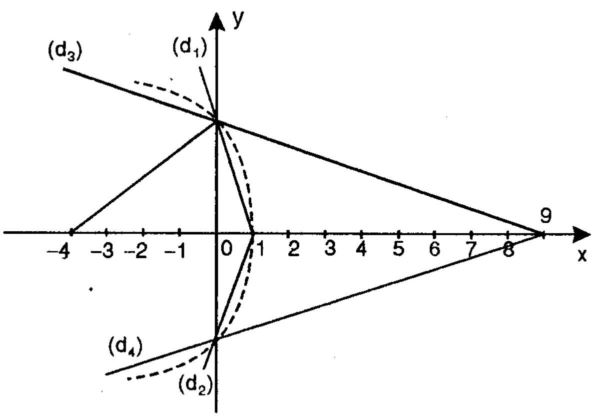
Ta có điều kiện $x \geq 0$ nên (1) được viết thành :

$$(3|x| + |y| - 3)(|x| + 3|y| - 9) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (3x + |y| - 3)(x + 3|y| - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3x + |y| - 3 = 0 \\ x + 3|y| - 9 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} |y| = 3 - 3x & (x \leq 1) \\ |y| = 3 - \dfrac{1}{3}x & (x \leq 9) \end{array}\right.$



Phương trình (2) là phương trình của đường tròn tâm I(a ; 0), R = 5.

Xét trên hệ trục toạ độ Oxy số giao điểm của (1) và (2).

Ta có : $|y| = 3 - 3x$ gồm 2 tia (d_1), (d_2)

$|y| = 3 - \frac{1}{3}x$ gồm 2 tia (d_3), (d_4)

Ta thấy hoành độ a của của tâm I chỉ có các giá trị là –4, 4, 6 thì thoả mãn đề bài.

☑ **Câu 3**

Vì $a(a + b)^2 = a(a^2 + b^2) + 2a^2b$ và p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a + b)^2$ nên p^4 là ước của $2a^2b$. Vì p lẻ nên p^4 là ước của a^2b.

Ta có :

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 lớn nhất chỉ có thể là 2. Vì vậy b phải chứa p^2, nghĩa là b chia hết cho p^2 suy ra b^2 chia hết cho p^4 (vô lí) vì $a^2 + b^2$ khi ấy lại không chia hết cho p^4 (do a^2 không chia hết cho p^4). Vậy a phải chia hết cho p^2.

Vì $a^2 + b^2$ chia hết cho p^4 nên b^2 chia hết cho p^4 suy ra b chia hết cho p^2 và a + b chia hết cho p^2.

Do đó a(a + b) chia hết cho p^4.

☑ **Câu 4**

Ta thấy bộ 3x, 2x, x thoả mãn các điều kiện của a, b, c nên ta có :

$$P(6x) = 7P(3x) + 4P(2x) - 5P(x).$$

Cho P(x) có dạng $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $(a_i \in \mathbb{R})$

Ta có $$\sum_{i=0}^{n} a_i.6^i.x^i = 7\sum_{i=0}^{n} a_i.3^i.x^i + 4\sum_{i=0}^{n} a_i.2^i.x^i - 5\sum_{i=0}^{n} a_i.x^i$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} a_i\,(6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5).x^i = 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \quad a_i(6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Giả sử $6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5 = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \quad 3^i(2^i - 7) - 4(2^i - 7) = 23$

$\Leftrightarrow \quad (3^i - 4)(2^i - 7) = 23$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3^i - 4 = 23 \\ 2^i - 7 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad i = 3$

Vậy với $i \neq 3$ thì $a_i = 0$.

Suy ra $P(x) = a_3.x^3 = kx^3$.

Thử lại, ta có $P(a + b + c) = 7P(a) + 4p(b) - 5P(c)$

$\Leftrightarrow \quad a_3(a + b + c)^3 = 7a_3.a^3 + 4a_3.b^3 - 5a_3.c^3$

$\Leftrightarrow \quad a_3(a + b)(b + c)(c + a) = a_3(2a^3 + b^3 - 2c^3)$

Vậy : $\quad P(x) = kx^3$.

☑ **Câu 5**

Ta có : $\quad \dfrac{m^2}{4} \leq d \leq \sqrt{2021} < 45 \qquad (1)$

và $\quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2021$ (số lẻ)

$\Rightarrow \quad a + b + c + d = m^2$ là số lẻ.

Ta lại có $\quad \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} < a+b+c+d \leq \sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2021} < m^2 \leq 2\sqrt{2021}$

$\Rightarrow \quad 44 < m^2 < 90$

$\Rightarrow \quad m^2 = 49$ hoặc $m^2 = 81$.

- Nếu $m^2 = 49$ thì $(49 - d)^2 = (a + b + c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 = 2021 - d^2$

$\Rightarrow 2d^2 - 98d + 380 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d < \dfrac{49-\sqrt{1641}}{2} < 5 \\ d > \dfrac{49+\sqrt{1641}}{2} > 44 \end{array}\right.$ mâu thuẫn với (1)

- Vậy $m^2 = 81$:

Suy ra : $n^2 = d = 25$ hoặc $n^2 = d = 36$.

Nếu $n^2 = 25$:

Đặt $a = 25 - p, b = 25 - q, c = 25 - r$ $(p, q, r \geq 0)$

Ta có $m^2 - d = 81 - 25 = a + b + c = 75 - (p + q + r)$

$\Rightarrow$ $p + q + r = 19$

$2021 - 25^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (25 - p)^2 + (25 - q)^2 + (25 - r)^2$

$= 3.25^2 - 50(p + q + r) + p^2 + q^2 + r^2$

$\Rightarrow$ $p^2 + q^2 + r^2 = 2021 - 4.25^2 + 50.19 = 471 > 19$

$\Rightarrow$ $p^2 + q^2 + r^2 > (p + q + r)^2$, vô lí.

Vậy $n^2 = 36 = d$.

Ta có $\begin{cases} a+b+c = 81-36 = 45 \\ a^2+b^2+c^2 = 2021-36^2 = 725 \end{cases}$

Đặt $a = 15 + x, b = 15 + y, c = 15 + t$ $(x \leq y \leq t$ và $x, y, t \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ $x + y + t = 0 \Rightarrow x \leq 0, t \geq 0$

$725 = (15 + x)^2 + (15 + y)^2 + (15 + t)^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + t^2 = 725 - 3.15^2 = 50$

Suy ra : $(-y - t)^2 + y^2 + t^2 = 50$ (vì $-y - t = x$)

$\Leftrightarrow$ $2y^2 + 2yt + 2t^2 = 50$

$\Leftrightarrow$ $y^2 + yt + t^2 = 25$

$\Leftrightarrow$ $y^2 + yt + t^2 - 25 = 0$ $(\Delta = t^2 - 4t^2 + 100 = 100 - 3t^2)$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta > 0$ nên t nguyên và $0 \leq t < 6$.

Ta thấy chỉ có $t = 5$ thoả vì y cũng nguyên.

Lúc ấy $y = 0$ và $x = -5$.

Suy ra $a = 10$; $b = 15$; $c = 20$.

Đáp số : *$a = 10$; $b = 15$; $c = 20$; $m = 9$; $n = 6$; $d = 36$.*

☑ **Câu 6**

Gọi M_1, N_1, P_1 lần lượt là trung điểm của BD, CD, AD.

Từ các giả thiết : $\begin{cases} AB + BC = AD + CD \\ BC + CA = BD + AD \\ CA + AB = CD + BD \end{cases}$

ta suy ra : $AB = CD; AC = BC; AD = BC$

Từ đó ta suy ra các tứ giác MPM_1P_1, MNM_1N_1, NPN_1P_1 là các hình thoi nên các đường chéo của chúng vuông góc nhau.

Vậy : $NN_1 \perp MM_1$, $PP_1 \perp MM_1$, $NN_1 \perp PP_1$.

Suy ra : $NN_1 \perp$ mp(MPM_1P_1)

$\Rightarrow$ $NN_1 \perp AB$ và $NN_1 \perp CD$

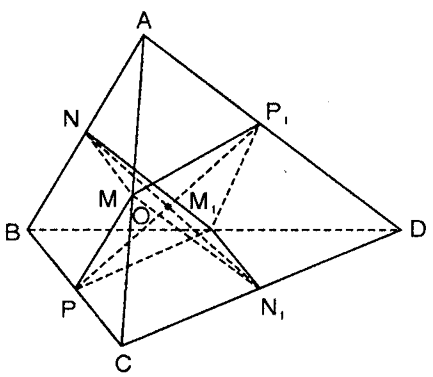
Và tương tự : $PP_1 \perp BC$, $PP_1 \perp AD$.

Gọi O là giao điểm của cá đường chéo NN_1, MM_1, PP_1 thì $OC = OD$ (tam giác OCD có ON_1 vừa là trung tuyến, vừa là đường cao).

Và tương tự : $OA = OB$, $OB = OD$

$\Rightarrow$ O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nên

$$\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{MOP} = 90^\circ.$$



ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2003–2004

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 *(4đ)*

Chứng minh

a) $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}} \geq 3$ với với x, y, z > 0 và x + y + z ≥ 3.

b) $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ và x + y + z = 1.

Câu 2 *(4đ)*

a) Tìm các hàm số f liên tục : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$ với mọi x.

b) Tìm các hàm f và g thoả :

$$\begin{cases} f(2x+1) + 2g(2x+1) = 2x \\ f\left(\frac{x}{x-1}\right) + g\left(\frac{x}{x-1}\right) = x \end{cases}$$ với mọi x khác 1.

Câu 3 *(2đ)*

Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$ với n là số nguyên dương.

Xét dãy số (x_n) với $x_n = \frac{f(1).f(3).f(5)....f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$, n nguyên dương.

Tính giới hạn của dãy số $u_n = n^2.x_n$.

Câu 4 *(3đ)*

Cho tam giác ABC và các điểm K, L, M lần lượt nằm trên các đoạn AB, BC, CA sao cho : $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng nếu các bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AKM, BLK, CML bằng nhau thì các bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác ấy cũng bằng nhau.

◈ **Câu 5** *(4đ)*

Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \log_2(1+3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1+3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 8xy^3 + 2y^3 + 1 \geq 4x^2 + 2\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$

◈ **Câu 6** *(3đ)*

Cho tứ diện ABPM thoả : AM vuông góc với BP, $\widehat{MAB} = \widehat{ABP} = 90°$, $2AM.BP = AB^2$. Chứng minh rằng mặt cầu đường kính AB tiếp xúc với đường thẳng MP.

GIẢI

☑ **Câu 1**

a) Chứng minh $\dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{z}} + \dfrac{z}{\sqrt{x}} \geq 3$, $\forall x, y, z > 0$ và $x + y + z \geq 3$.

Đặt $A = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{z}} + \dfrac{z}{\sqrt{x}}$.

Ta có $A \geq \dfrac{2x}{1+y} + \dfrac{2y}{1+z} + \dfrac{2z}{1+x}$.

Mặt khác :

$$(x+y+z)^2 = \left[\sqrt{\frac{x}{1+y}}\cdot\sqrt{x(1+y)} + \sqrt{\frac{y}{1+z}}\cdot\sqrt{y(1+z)} + \sqrt{\frac{z}{1+x}}\cdot\sqrt{z(1+x)}\right]^2$$

$$\leq \frac{A}{2}(x + xy + y + yz + z + zx)$$

$$\leq \frac{A}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{3}(x+y+z)^2\right)$$

Suy ra $A \geq \dfrac{2(x+y+z)^2}{x+y+z+\dfrac{1}{3}(x+y+z)^2} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x+y+z}+\dfrac{1}{3}}$

nên $A \geq 3$ (do $x + y + z \geq 3$).

b) Ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Ta có : $y \leq x \Rightarrow y^2z \leq xyz$

$z \leq x \Rightarrow z^2x \leq zx^2$

Đặt $A = x^2y + y^2z + z^2x$.

Ta có $A \leq x^2y + xyz + \dfrac{zx^2}{2} + \dfrac{z^2x}{2}$

$\leq xy(x+z) + \dfrac{xz}{2}(x+z)$

$\leq (x+z)x.\left(y+\dfrac{z}{2}\right)$

Mà $x(x + z)(2y + z) \leq \dfrac{(x+x+z+2y+z)^3}{27} = \dfrac{8}{27}$

suy ra : $A \leq \dfrac{4}{27}$.

☑ **Câu 2**

a) $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

Đặt $g(x) = f(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và $g(x) = x^2 - f(x^2)$.

Ta có : $f(x^2) - x^2 = x - f(x)$, $g(x^2) = f(x^2) - x^2$

$\Rightarrow$ $g(x^2) = -g(x)$

$\Leftrightarrow$ $g(x^2) + g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có : $g(-x) = f(-x) + x = x^2 - f(x^2)$

$\Rightarrow \quad g(-x) = g(x).$

Vậy g(x) là hàm chẵn và $g(0) = 0$, $g(1) = 0$.

Ta lại có : $g(x) = -g(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad g(x) = g(x^4)$

$\Rightarrow \quad g(x) = g\left(\sqrt[4]{x}\right), \forall x > 0$

Suy ra : $g(x_0) = g\left(\sqrt[4]{x_0}\right) = g\left(\sqrt[16]{x_0}\right) = \ldots = g\left(\sqrt[4n]{x_0}\right)$ với x_0 tuỳ ý dương.

Vậy : $g(x_0) = 0$, g(x) chẵn, $\forall x_0 > 0$

$\Leftrightarrow \quad g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy : $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

b)
$$\begin{cases} f(2x+1) + 2g(2x+1) = 2x & (1) \\ f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + g\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = x & (2) \end{cases} \quad (x \neq 1)$$

Đặt $u = 2x + 1$, ta có $x = \dfrac{u-1}{2}$, $(u \neq 3)$

(1) : $f(u) + 2g(u) = u - 1 \qquad (3)$

Đặt $u = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{u}{u-1}$, $(u \neq 1)$

(2) : $f(u) + g(u) = \dfrac{u}{u-1} \qquad (4)$

Từ (3) và (4), ta có :

$$g(u) = u - 1 - \frac{u}{u-1} = \frac{u^2 - 3u + 1}{u-1}$$

$$f(u) = \frac{-u^2 + 4u - 1}{u-1}$$

Vậy : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 1}{x-1}$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x-1}$$

☑ **Câu 3**

$$f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n + 1)^2 + 1]$$

$$\frac{f(2n-1)}{f(2n)} = \frac{(4n^2-4n+2)(4n^2+1)}{(4n^2+1)(4n^2+4n+2)} = \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow \qquad x_n = \prod_{i=1}^{n}\frac{f(2i-1)}{f(2i)} = \prod_{i=1}^{n}\frac{(2i-1)^2+1}{(2i+1)^2+1}$$

$$= \frac{1^2+1}{(2n+1)^2+1} = \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

Vậy $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n^2.x_n = \frac{1}{2}$.

☑ **Câu 4**

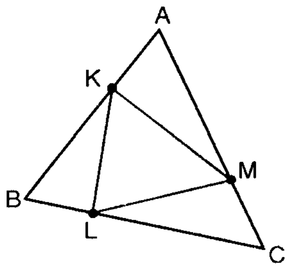
Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AKM, BLK, CML. Ta có :

$$KL = 2R_1.\sin B$$

$$LM = 2R_1.\sin C$$

$$MK = 2R_1.\sin A$$



Suy ra hai tam giác ABC và LMK đồng dạng vì

$$\frac{KL}{AC} = \frac{LM}{AB} = \frac{MK}{BC} = \frac{R_1}{R}$$

Ta có : $\quad S_{AKM} = S_{BKL} = S_{CML} = \frac{2}{9}S_{ABC}$ nên :

$$S_{KLM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$$

Suy ra tỉ số đồng dạng của LMK và ABC là $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó : $\quad KM = \frac{1}{\sqrt{3}}BC = \frac{1}{\sqrt{3}}a$.

Áp dụng định lí hàm số côsin trong các tam giác ABC và AKM, ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\frac{1}{3}a^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 b^2 + \left(\frac{1}{3}c\right)^2 - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}bc.\cos A$$

Suy ra $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Tương tự : $2c^2 = a^2 + b^2$; $2a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow$ $a = b = c$.

$\Rightarrow$ ΔABC đều.

Vậy ba tam giác AKM, BLK và CML bằng nhau nên bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác ấy cũng bằng nhau.

☑ **Câu 5**

Giải các hệ sau :

a) $$\begin{cases}\log_2(1+3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 & (1)\\ \log_2(1+3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 & (2)\end{cases}$$

Điều kiện : $\cos x > 0$, $\sin y > 0$

Lấy (1) trừ (2) :

$$\log_2(1 + 3\cos x) + \log_2(\cos x) = \log_2(1 + 3\sin y) + \log_3(\sin y) \quad (3)$$

Đặt $f(t) = \log_2(1 + 3t) + \log_3 t$

$$f'(t) = \frac{3}{(1+3t)\ln 2} + \frac{1}{(\ln 3)t} > 0, \forall t > 0$$

Vậy f đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ (3) ta có : $f(\cos x) = f(\sin y)$

$\Rightarrow$ $\cos x = \sin y$

Thay vào (1) được : $\log_2(1 + 3\cos x) - \log_3(\cos x) = 2$

Xét hàm số $g(u) = \log_2(1 + 3u) - \log_3 u$ $(u = \cos x, 0 < u \leq 1)$

$$g'(u) = \frac{3}{(1+3u).\ln 2} - \frac{1}{u.\ln 3} = \frac{3u\ln 3 - (1+3u)\ln 2}{(1+3u).u.\ln 2.\ln 3}$$

$$g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = u_0 = \frac{\ln 2}{3(\ln 3 - \ln 2)} \in (0;\ 1)$$

Suy ra : $\quad \cos x = 1$ hoặc $\cos x = \dfrac{1}{3}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
u & 0 & & u_0 & & 1 \\
\hline
g'(u) & & - & 0 & + & \\
\hline
g(u) & +\infty & \searrow & g(u_0) & \nearrow & 2
\end{array}$$

Do đó ta có : $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{3} \\ \sin y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + k'2\pi \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x = \pm\alpha + k2\pi \\ y = \alpha + \dfrac{\pi}{2} + k'2\pi \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x = \pm\alpha + k2\pi \\ y = \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + k''2\pi \end{cases}$$

b) $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} & (1) \\ 8xy^3 + 2y^3 + 1 \geq 4x^2 + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2} & (2) \end{cases}$

Điều kiện : $xy - x^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1$

Ta có : $\quad xy - x^2y^2 = \dfrac{1}{4} - \left(xy - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy - x^2y^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Suy ra : $\quad y^6 + y^3 + 2x^2 \leq \dfrac{1}{2}$ (do (1))

nên $\quad 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 \leq 1 \qquad (3)$

(2) và (3) cho ta :

$$8xy^3 + 2y^3 + 2 \geq 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 + 4x^2 + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8xy^3 + 2 \geq 2y^6 + 8x^2 + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4xy^3 + 1 \geq y^6 + 4x^2 + \sqrt{1+(2x-y)^2}$$

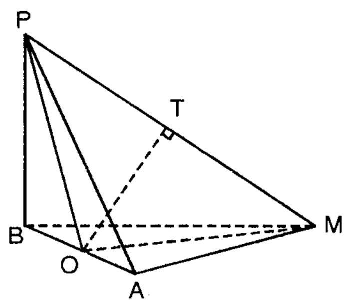
$$\Leftrightarrow \quad 1 - \sqrt{1+(2x-y)^2} \geq (y^3 - 2x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^3 - 2x = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

Ta thấy chỉ có cặp $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$ thoả hệ.

☑ **Câu 6**



Gọi O là trung điểm của AB. Vẽ OT ⊥ MP.

Ta chứng minh : OT = OB = OA.

Ta có : $MP^2 = AM^2 + BP^2 + AB^2$

$= AM^2 + BP^2 + 2AM.BP$

$= (AM + BP)^2$

$\Rightarrow \quad MP = AM + BP$

Ta lại có : $MT^2 - PT^2 = OM^2 - OP^2 = MA^2 - PB^2$

$\Rightarrow \quad (MT + PT)(MT - PT) = MA^2 - PB^2$.

Mà MP = AM + BP nên MT – PT = MA – PB

suy ra MT = MA.

Hai tam giác vuông OAM và OTM bằng nhau cho :

$$OT = OA = \frac{AB}{2}.$$

Vậy mặt cầu đường kính AB tiếp xúc với đường thẳng MP.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

❖ **Câu 1** *(4đ)*

Cho tam giác ABC không cân có BC = a, CA = b, AB = c và thoả : $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Đường phân giác trong của góc C cắt AB tại D sao cho CD + DA = a. Chứng minh rằng a > AI với I là trung điểm của BC.

❖ **Câu 2** *(4đ)*

Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả $f[x.f(x) + f(y)] = f^2(x) + y$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

❖ **Câu 3** *(3đ)*

Cho dãy số (x_n) với $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n^{24}}{24} + x_n$, n là số nguyên dương.

Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{x_1^{23}}{x_2} + \frac{x_2^{23}}{x_3} + \ldots + \frac{x_n^{23}}{x_{n+1}}$.

❖ **Câu 4** *(3đ)*

Cho hàm số f(x) lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$. Cho các số a, b, c thoả a + b + c = 0.

Chứng minh $f(a).f(b) + f(b).f(c) + f(c).f(a) \leq 0$.

❖ **Câu 5** *(3đ)*

Cho x, y , z, a, b là các số dương thoả : $x \geq y \geq z$, $a \geq b$.

Chứng minh : $x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geq 0$.

❖ **Câu 6** *(3đ)*

Cho tứ diện ABCD có tâm mặt cầu ngoại tiếp là O. Một mặt phẳng vuông góc với OA cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại các điểm M, N, E. Chứng minh sáu điểm B, C, D, M, N, E cùng thuộc một mặt cầu.

GIẢI

☑ **Câu 1**

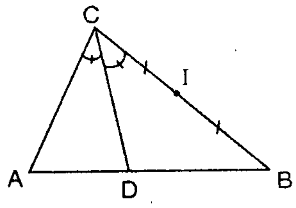
Ta có : CD + DA = a

$\Rightarrow \quad CD^2 = (a - DA)^2$

$\Leftrightarrow \quad CA^2 + DA^2 - 2CA.DA.\cos A = a^2 - 2a.DA + DA^2$

$\Leftrightarrow \quad b^2 + DA\left(2a - 2b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = a^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = DA\left(2a - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{c}\right)$



Ta có : $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \dfrac{DA}{DB+DA} = \dfrac{b}{a+b} \Rightarrow DA = \dfrac{bc}{a+b}$

Nên $\quad a^2 - b^2 = \dfrac{bc}{a+b}\cdot\left(\dfrac{2ac - b^2 - c^2 + a^2}{c}\right)$

$\Leftrightarrow \quad (a+b)(a^2 - b^2) = 2abc - b^3 - bc^2 + ba^2$

$\Leftrightarrow \quad a^3 - ab^2 + ba^2 - b^3 = 2abc - b^3 - bc^2 + ba^2$

$\Leftrightarrow \quad a^3 = ab^2 + 2abc - bc^2$

$\Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 = ab^2 + 2abc - bc^2 + b^3$

$\Leftrightarrow \quad 3ab^2 = ab^2 + 2abc - bc^2 + b^3$

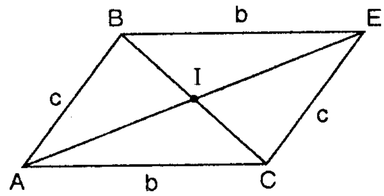
$\Leftrightarrow \quad 2ab = 2ac - c^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \quad 2a(b - c) = b^2 - c^2$

$\Rightarrow \quad 2a = b + c$ (vì $b \neq c$)

$\Rightarrow \quad 2a > 2AI$ (vì $b + c > 2AI$)

$\Rightarrow \quad a > AI.$



☑ **Câu 2**

$$f[x.f(x) + f(y)] = y + f^2(x)\ \forall x, y \qquad (1)$$

- Chọn $x = 0$:

$$f(0 + f(y)) = y + f^2(0),\ \forall y \qquad (2)$$

Cho $y = -f^2(0)$, từ (2) suy ra $f(f(-f^2(0)) = 0$.

Đặt $b = f(-f^2(0))$, ta có $f(b) = 0$. (3)

- Chọn $x = b$, (1) và (3) cho ta : $f(f(y)) = y, \forall y$.

  Thay x bởi f(x) trong (1), ta có :

$$f[f(x).f(f(x)) + f(y)] = y + [f(f(x))]^2, \ \forall x, y$$

mà $\quad f(f(x)) = x$

nên $\quad f[x.f(x) + f(y)] = y + x^2, \forall x, y. \qquad (4)$

Từ (1) và (4) ta có $f^2(x) = x^2, \forall x$

$$\Rightarrow \quad f^2(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \pm 1.$$

- Xét $f(1) = 1$:

  Thay $x = 1$ vào (4), ta có :

$$f(1 + f(y)) = y + 1, \forall y$$

$$\Rightarrow \quad f^2(1 + f(y)) = (y + 1)^2, \forall y$$

$$\Rightarrow \quad (1 + f(y))^2 = (y + 1)^2, \forall y$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2f(y) + f^2(y) = y^2 + 1 + 2y$$

$$\Rightarrow \quad f(y) = y, \forall y.$$

Thử lại thấy thoả (1).

- Xét $f(1) = -1$:

  Trong (4) thay $x = 1$, ta có :

$$f(-1 + f(y)) = y + 1, \forall y$$

$$\Rightarrow \quad f^2(-1 + f(y)) = (y + 1)^2$$

$$\Rightarrow \quad (-1 + f(y))^2 = (y + 1)^2$$

$$\Rightarrow \quad f(y) = -y, \forall y$$

Thử lại thấy thoả (1).

☑ **Câu 3**

Ta có : $\quad x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^{24}}{24}, \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n^{23}}{24x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{23}}{24x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{23}}{x_{i+1}} = 24\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

Ta có : $x_{n+1} - x_n \geq 0 \Rightarrow \{x_n\}$ là dãy tăng ($\forall n \geq 1$).

Nếu $\{x_n\}$ bị chặn trên thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tồn tại.

Ta đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow a \geq 1$ và $a = \dfrac{a^{24}}{24} + a$ (vô lí).

Vậy $\{x_n\}$ không bị chặn trên $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1}} = 0$$

Vậy : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^{23}}{x_{i+1}} = 24$.

☑ **Câu 4**

Đặt $F = f(a).f(b) + f(b).f(c) + f(c).f(a)$

Vì f là hàm lẻ nên F không thay đổi khi đổi dấu cùng lúc a, b, c. Do đó ta có thể giả sử $c \leq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Ta có $c = -a - b$ và f lẻ nên :

$$F \leq 0 \Leftrightarrow f(a).f(b) \leq -f(c)[f(a) + f(b)]$$

$$\Leftrightarrow \quad f(a).f(b) \leq f(a+b).f(a) + f(a+b).f(b) \qquad (*)$$

Ta có $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq a$ và $a + b \geq b$.

Vì f là hàm tăng nên $f(a+b) \geq f(a) \geq f(0) = 0$

$f(a+b) \geq f(b) \geq f(0) = 0$.

Suy ra (*) đúng.

Vậy $F \leq 0$.

☑ **Câu 5**

$a \geq b \geq 0$

$x \geq y \geq z > 0$

Đặt $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$ $\left(\frac{a}{b} \geq 1\right)$

$$f'(x) = \frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-1}$$

$$f''(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}-1\right)x^{\frac{a}{b}-2} \geq 0,\ z^b < x < x^b$$

$\Rightarrow$ $f'(x)$ tăng trong khoảng $(z^b; x^b)$.

Theo định lí Lagrăng :

$$f(y^b) - f(z^b) = f'(c_1)(y^b - z^b)$$

$\Leftrightarrow$ $y^a - z^a = f'(c_1)(y^b - z^b)$

Tương tự :

$$x^a - y^a = f'(c_2)(x^b - y^b)$$

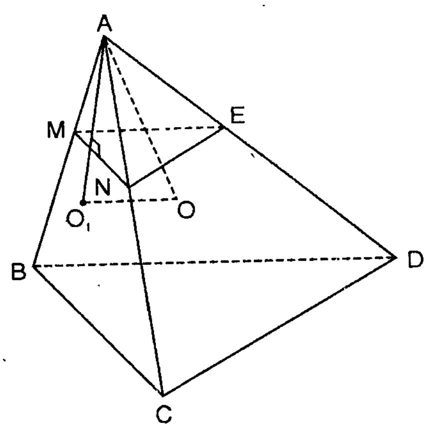
$\Rightarrow$ $(x^a - y^a)(y^b - z^b) = f'(c_2)(x^b - y^b)(y^b - z^b)$

Ta có : $f'(c_2) \geq f'(c_1)$

$\Rightarrow$ $(x^a - y^a)(y^b - z^b) \geq (y^a - z^a)(x^b - y^b)$

$\Leftrightarrow$ $x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geq 0.$

☑ **Câu 6**



Gọi O_1 là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC).

Ta có O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $MN \perp AO$ (giả thiết).

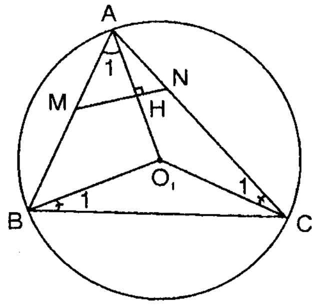
$MN \perp OO_1$

nên $MN \perp AO_1$.

Ta chứng minh MNCB là tứ giác nội tiếp.

Ta có : $2\widehat{A}_1 + 2\widehat{B}_1 + 2\widehat{C}_1 = 180^0$

$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 90^0$.



Mà $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = \widehat{C}$

suy ra $\widehat{A}_1 + \widehat{C} = 90^0$

Vậy $\widehat{AMH} = \widehat{C}$ (vì $\widehat{A}_1 + \widehat{AMN} = 90^0$)

Do đó, $\widehat{C}$ bù với $\widehat{BMN}$. Do đó MNCB là tứ giác nội tiếp.

Tương tự gọi O_2 là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ACD).

Ta có NEDC cũng là tứ giác nội tiếp.

Hai tứ giác MNCB và NEDC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau; có C, N là hai điểm chung và là hai tứ giác nội tiếp được nên sáu điểm M, N, E, B, C, D cùng thuộc một mặt cầu.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2002–2003

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 *(4đ)*

Cho a > 0, b > 0, c > 0. Chứng minh $\frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 8$.

Câu 2 *(3đ)*

Cho x, y, z thoả :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 + 2z(x+y) = 8. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = z(y – x).

◈ **Câu 3** *(3đ)*

Xác định các hàm số f : (0; +∞) → (0; +∞) thoả :

$$\begin{cases} f(xy) = f(x).f\left(\dfrac{2}{y}\right) + f(y).f\left(\dfrac{2}{x}\right), \forall x > 0, \forall y > 0 \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

◈ **Câu 4** *(3đ)*

Giải phương trình :

$$x^3 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)^3} = x.\sqrt{2 - 2x^2}$$

◈ **Câu 5** *(3đ)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$ để đồ thị hàm số :

$$y = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3$$

có điểm chung với trục Ox.

◈ **Câu 6** *(4đ)*

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 6 và chiều cao SH = $\sqrt{15}$. Vẽ mặt phẳng qua B vuông góc với SA tại K, mặt phẳng này cắt SH tại O. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc SA và BC sao cho PQ tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính bằng $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

a) Tính độ dài đoạn IK với I là trung điểm của BC.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của PQ.

GIẢI

☑ **Câu 1**

$$\text{Vế trái } = \frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$= (a + b + c)\left[\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right] - 25 - 16 - 1$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + b + c + c + a)\left(\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 42$$

$$\geq \frac{1}{2}(5 + 4 + 1)^2 - 42 = 8.$$

(Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 6 số :

$$\sqrt{a+b}, \sqrt{b+c}, \sqrt{c+a}, \frac{1}{\sqrt{a+b}}, \frac{5}{\sqrt{b+c}}, \frac{4}{\sqrt{c+a}})$$

Dấu "=" xảy ra khi : $\begin{cases} a+b=k \\ b+c=5k \\ a+c=4k \end{cases} \Rightarrow a = 0,\ c = 4k,\ b = k$ (a = 0 trái giả thiết).

Vậy dấu "=" không xảy ra.

Do đó ta có : $\dfrac{25a}{b+c} + \dfrac{16b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} > 8.$

☑ **Câu 2**

Ta có : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ z^2 + 2z(x+y) = 8 & (2) \end{cases}$

Suy ra : $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2zx + 2zy = 12$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = 6$$

Từ (1) ta có : $(2y)^2 + (-2x)^2 = 8$

Đặt $\vec{u} = \left(x + \frac{z}{2}; y + \frac{z}{2}\right),\ \vec{u}^2 = 6 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{6}$

$\vec{v} = (2y; -2x),\ \vec{v}^2 = 8 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{8}$.

Tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v} = yz - zx = z(y - x) = A$.

Ta có : $A \leq |\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, suy ra :

$$\frac{x+\frac{z}{2}}{2y}=\frac{y+\frac{z}{2}}{-2x}$$

$\Leftrightarrow \quad -2x^2 - xz = 2y^2 + yz$

$\Leftrightarrow \quad 2(x^2 + y^2) = -z(x + y)$

Từ (1) suy ra : $z(x + y) = -4$

Từ (2) ta có $z^2 = 16 \Rightarrow z = \pm 4$

Vậy $\begin{cases} x+y=\pm 1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất của A là $4\sqrt{3}$.

☑ **Câu 3**

$$\begin{cases} f(xy)=f(x).f\left(\frac{2}{y}\right)+f(y).f\left(\frac{2}{x}\right), \forall x,y>0 & (1) \\ f(x)>0, \forall x>0 & (2) \\ f(1)=\frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

Cho $x = y = 1$: $f(1) = f(1).f(2) + f(1).f(2)$

$\Rightarrow \quad f(2) = \frac{1}{2}$

Cho $y = 1$: $f(x) = f(x).f(2) + f(1).f\left(\frac{2}{x}\right)$

$\Rightarrow \quad f(x) = f\left(\frac{2}{x}\right), \forall x > 0$

Cho $y = \frac{2}{x}$: $f(2) = f(x).f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right).f\left(\frac{2}{x}\right)$

$$\frac{1}{2} = 2[f(x)]^2 \Rightarrow (f(x))^2 = \frac{1}{4}$$

Vì $f(x) > 0$ nên $f(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x > 0$

Thử lại $f(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in (0; +\infty)$ thoả mãn các điều kiện đề bài.

Vậy : $f(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x > 0$.

☑ Câu 4

$$x^3 + \sqrt{\left(1-x^2\right)^3} = x.\sqrt{2-2x^2} \qquad (1)$$

Điều kiện : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đặt $x = \cos t$ $(0 \leq t \leq \pi) \Rightarrow \sin t \geq 0$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \cos t.\sqrt{2}.\sin t$

$\Leftrightarrow (\cos t + \sin t)(1 - \cos t.\sin t) = \sqrt{2}.\sin t.\cos t \qquad (2)$

Đặt $u = \cos t + \sin t = \sqrt{2}.\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện : $(-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2})$

$$\Rightarrow \quad \cos t.\sin t = \frac{u^2 - 1}{2}$$

Ta có (2) : $u.\left(1 - \frac{u^2-1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{u^2-1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad -u^3 - \sqrt{2}u^2 + 3u + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(u - \sqrt{2}\right)\left(-u^2 - 2\sqrt{2}.u - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ u = -\sqrt{2} + 1 \\ u = -\sqrt{2} - 1 \quad (\text{loại}) \end{array}\right.$$

- $u = \sqrt{2} \quad \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $u = -\sqrt{2} + 1 \quad \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \pm \varphi + k2\pi \Rightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi\right)$

$$\text{với } \cos\varphi = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \ \left(\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right)$$

* *Cách khác* :

$$x^3 + \sqrt{\left(1-x^2\right)^3} = x\sqrt{2\left(1-x^2\right)} \qquad (1)$$

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-1; \sqrt{2}]$.

Ta được $x\sqrt{\left(1-x^2\right)} = \frac{t^2-1}{2}$ và $x^3 + \sqrt{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{-t^3+3t}{2}$.

$$(1): \ \frac{-t^3+3t}{2} = \frac{t^2-1}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow \quad t^3 + \sqrt{2}.t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0.$

$\Leftrightarrow \quad \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = \sqrt{2}$; $t = -\sqrt{2} + 1$; $t = -(\sqrt{2} + 1)$ (loại).

- Với $t = \sqrt{2}$:

$x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} - x \ \left(x \le \sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad 1 - x^2 = 2 + x^2 - 2\sqrt{2}\,x$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

- Với $t = 1 - \sqrt{2}$:

$x + \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{2}-x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \le 1-\sqrt{2} \\ 1-x^2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(1-\sqrt{2}\right)x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \le 1-\sqrt{2} \\ 2x^2 - 2\left(1-\sqrt{2}\right)x + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - \left(1-\sqrt{2}\right)x + 1 - \sqrt{2} = 0 \\ x \le 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

☑ Câu 5

Đồ thị hàm số $y = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3$ có điểm chung với Ox tương đương với phương trình $3x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3 = 0$ có nghiệm. Vì $x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \ (1)$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, $|t| \ge 2 \Leftrightarrow t^2 \ge 4$

$$\Rightarrow \quad t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Ta có (1) : $3(t^2-2) + at + b = 0$

$$\Rightarrow \quad |at+b| = |3(t^2-2)|$$

Ta có : $|at+b| \le \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(t^2+1\right)}$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 \ge \frac{\left(at+b\right)^2}{t^2+1} = \frac{9\left(t^2-2\right)^2}{t^2+1}.$$

Đặt $u = t^2 + 1$ thì $u \ge 5$.

Ta có : $a^2 + b^2 \geq \dfrac{9(u-3)^2}{u}$.

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{9(u-3)^2}{u}$

Hàm số này có GTNN với $u \geq 5$ là $\dfrac{36}{5}$ đạt được khi u = 5, lúc ấy $t^2 = 4$ và $|x| = 1$, $a = \pm\dfrac{12}{5}$, $b = -\dfrac{6}{5}$.

Vậy $a^2 + b^2$ đạt GTNN là $\dfrac{36}{5}$ khi $a = \pm\dfrac{12}{5}$, $b = -\dfrac{6}{5}$, lúc ấy phương trình $3x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3 = 0$ có nghiệm kép $x = -1$ khi $a = \dfrac{12}{5}$, $b = -\dfrac{6}{5}$ và nghiệm kép $x = 1$ khi $a = -\dfrac{12}{5}$, $b = -\dfrac{6}{5}$.

☑ **Câu 6**

a) Trong tam giác SAB vẽ đường cao BK thì CK vuông góc với SA nên mặt phẳng (BKC) vuông góc với SA tại K.

Ta có IK cắt SH tại O, O chính là giao điểm của mặt phẳng (BKC) và SH.

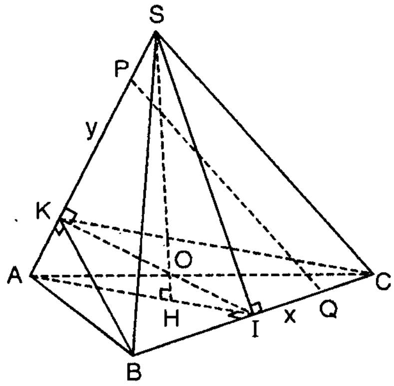
ΔABC đều có AB = 6 nên $AI = 3\sqrt{3}$, $AH = 2\sqrt{3}$, $IH = \sqrt{3}$.

Ta có $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\widehat{SAH} = \dfrac{1}{1+\tan^2\widehat{SAH}} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow \sin^2\widehat{SAH} = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad \sin\widehat{SAH} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Ta có $\sin\widehat{SAH} = \dfrac{IK}{AI}$

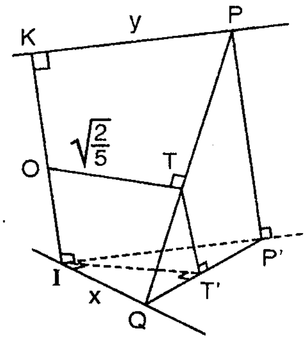
$\Rightarrow \quad IK = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{15}$



b) Ta có $\dfrac{OI}{AI} = \dfrac{IH}{IK} \Rightarrow OI = \dfrac{3\sqrt{15}}{5}$.

Suy ra $OK = IK - OI$

$$= \sqrt{15} - \frac{3\sqrt{15}}{5} = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$



Đặt x = IQ, y = KP.

Ta có $OQ = \sqrt{OI^2 + IQ^2} = \sqrt{x^2 + \frac{27}{5}}$

$OP = \sqrt{OK^2 + KP^2} = \sqrt{y^2 + \frac{12}{5}}$.

Đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{\frac{2}{5}}$ tiếp xúc với PQ tại T.

Ta có $QT^2 = TT'^2 + QT'^2 = OI^2 + x^2 - IT'^2$

$$= x^2 + \frac{27}{5} - \frac{2}{5} = x^2 + 5$$

$\Rightarrow \quad QT = \sqrt{x^2 + 5}$

Ta có $PT^2 = OP^2 - OT^2$

$$= y^2 + \frac{12}{5} - \frac{2}{5} = y^2 + 2$$

$\Rightarrow \quad PT = \sqrt{y^2 + 2}$

Ta có $PT + QT = PQ = \sqrt{PP'^2 + P'Q^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 15}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 + 2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 15}$

$\Leftrightarrow \quad x^2.y^2 + 2x^2 + 5y^2 = 6$

$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{6 - 2x^2}{x^2 + 5}$

Ta có : $PQ = \sqrt{x^2 + y^2 + 15}$.

Xét $PQ^2 = x^2 + y^2 + 15$

$$= x^2 + \frac{6 - 2x^2}{x^2 + 5} + 15 = \frac{x^4 + 18x^2 + 81}{x^2 + 5}$$

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, $\quad f(t) = \dfrac{t^2 + 18t + 81}{t + 5}$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 10t + 9}{(t+5)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -9 \end{array}\right.$$

Với $t = 0$, $f(0) = \dfrac{81}{5}$

$t \in [0; +\infty)$ thì $\min f(t) = \dfrac{81}{5}$

t	$-\infty$		-9		-5		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	‖	−	0	+		+	
$f(t)$					‖					↗	

Vậy GTNN của PQ là $\sqrt{\dfrac{81}{5}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ đạt được khi t = 0, lúc ấy x = 0 và $y = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ Câu 1. *(3đ)*

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2\left(y^4 - x^4\right) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = \left(3x^2 + y^2\right)\left(x^2 + 3y^2\right). \end{cases}$

◈ Câu 2 *(4đ)*

Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b.

Gọi ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c lần lượt là độ dài các đường phân giác trong và r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp của các góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} \geq r_a\ell_a + r_b\ell_b + r_c\ell_c.$$

Khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

◈ Câu 3 *(3đ)*

Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả :

$$\begin{cases} f(0) = 2002, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2003 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).\cos y; \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

◈ Câu 4 *(3đ)*

Cho x, y, z là các số thực thỏa : $\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x). \end{cases}$

Tính tổng S = x + y + z.

◈ Câu 5 *(3đ)*

Giải phương trình : $\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25.$

◈ **Câu 6** *(4đ)*

Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường kính qua A, B, C với các cạnh BC, AC, AB. Cho biết bán kính đường tròn (O) là 2p với p là một số nguyên tố và độ dài các đoạn OD, OE, OF là các số tự nhiên.

Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

GIẢI

☑ **Câu 1**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=2\left(y^4-x^4\right) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\left(3x^2+y^2\right)\left(x^2+3y^2\right) \end{cases}$$ Điều kiện : $x \neq 0, y \neq 0$

Từ hệ trên, ta suy ra :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}=2y^4-2x^4+3x^4+3y^4+10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y}=3x^4+3y^4+10x^2y^2-2y^4+2x^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2=5y^4x+x^5+10x^3y^2 \\ 1=5x^4y+y^5+10x^2y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2+1=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \\ 2-1=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3=(x+y)^5 \\ 1=(x-y)^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[5]{3} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt[5]{3}}{2} & \text{(nhận)} \\ y=\dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2} & \text{(nhận)} \end{cases}$$

☑ **Câu 2**

Chứng minh

$$bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2} \geq r_a\ell_a+r_b\ell_b+r_c\ell_c.$$

Xét vế trái :

$$bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=bc\left(\frac{1+\cos A}{2}\right)+ca\left(\frac{1+\cos B}{2}\right)+ab\left(\frac{1+\cos C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}[2bc + 2ca + 2ab + 2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C]$$

$$= \frac{1}{4}[2bc + 2ca + 2ab + b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2]$$

$$= \frac{1}{4}[a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$$

$$= \frac{1}{4}(a + b + c)^2 = p^2$$ (p : nửa chu vi tam giác ABC).

Xét vế phải :

Ta có :

$$r_a = \frac{S}{p-a},\ r_b = \frac{S}{p-b},\ r_c = \frac{S}{p-c}$$

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},\ r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},\ r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Ta lại có :

$$\ell_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$$

(vì $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$)

và $$\ell_b = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c} = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$$

$$\ell_c = \frac{2ab\cos\frac{A}{2}}{a+b} = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}.$$

Suy ra :

$$r_a.\ell_a = p\cdot\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cdot\sqrt{(p-b)(p-c)} \le p.\sqrt{(p-b)(p-c)} \le p\cdot\frac{a}{2}$$

và $\quad r_b.\ell_b \le p\cdot\frac{b}{2};\ r_c.\ell_c \le p\cdot\frac{c}{2}$

Vậy $r_a.\ell_a + r_b.\ell_b + r_c.\ell_c \le p.\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = p^2$. (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

☑ Câu 3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả

$$\begin{cases} f(0) = 2002,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2003 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).\cos y;\ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Cho $x = \frac{\pi}{2}$, $y = t - \frac{\pi}{2}$, ta có :

$$f(t) + f(\pi - t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin t \qquad (1)$$

- Cho $x = t - \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, ta có :

$$f(t) + f(t - \pi) = 0 \qquad (2)$$

- Cho $x = 0$, $y = t - \pi$, ta có :

$$f(t - \pi) + f(\pi - t) = 2f(0).\cos(t - \pi) = -2f(0).\cos t \qquad (3)$$

Lấy (1) cộng với (2) :

$$2f(t) + f(t - \pi) + f(\pi - t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin t \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có :

$$f(t) = f(0).\cos t + f\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin t$$

Suy ra : $f(x) = 2002.\cos x + 2003.\sin x$

☑ **Câu 4**

$$\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x) \end{cases}$$

Ta có : $3S = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ nên bao giờ cũng có một số không âm trong 3 số x, y, z, chẳng hạn $y \geq 0$.

Vì : $y = z(4 - z) \geq 0$ nên $0 \leq z \leq 4$.

Ta có : $z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$.

Đặt $x = 4\sin^2 t \left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có : $z = 4\sin^2 t(4 - 4\sin^2 t) = 16\sin^2 t.\cos^2 t = 4\sin^2 2t$,

suy ra $y = z(4 - z) = 4\sin^2 4t$ và $x = y(4 - y) = 4\sin^2 8t$.

Vậy ta có phương trình $4\sin^2 8t = 4\sin^2 t$

$$\Leftrightarrow \cos 16t = \cos 2t$$

$$\Leftrightarrow 16t = \pm 2t + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{k\pi}{7} \\ t = \dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right.$$

Vì $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ nên ta chỉ lấy các giá trị : $0, \dfrac{\pi}{7}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{3\pi}{7}, \dfrac{\pi}{9}, \dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{3\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}$.

- Với $t = 0$ ta có $S = x + y + z = 0$.
- Với $t = \dfrac{\pi}{7}$ ta có $S = x + y + z = 4\left(\sin^2\dfrac{\pi}{7} + \sin^2\dfrac{2\pi}{7} + \sin^2\dfrac{4\pi}{7}\right)$

$$= 4.\frac{3 - \left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{8\pi}{7}\right)}{2}$$

$$= 6 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 7.$$

- Tương tự với $t = \dfrac{2\pi}{7}$, $t = \dfrac{3\pi}{7}$ ta có S = 7.

- Với $t = \dfrac{\pi}{9}, \dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}$ ta có S = 6.

- Với $t = \dfrac{3\pi}{9}$ ta có S = 9.

☑ **Câu 5**

Ta có : $\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{3x-5} = (2x-3)^2 - x + 2$ (2)

Đặt $2y - 3 = \sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow (2y-3)^3 = 3x - 5$ (3)

(2) trở thành : $(2x-3)^3 - x + 2 = 2y - 3$

$\Leftrightarrow$ $(2x-3)^3 = x + 2y - 5$ (4)

Lấy (3) trừ (4) :

$$(2y-3)^2 - (2x-3)^2 = 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow (2y-2x)[(2y-3)^2 + (2y-3)(2x-3) + (2x-3)^2] = 2x - 2y$$

Suy ra y = x.

Thay y = x vào (3) :

$$(2x-3)^3 = 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) = 0.$$

Phương trình có ba nghiệm : $x = 2$; $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Thử lại thấy cả ba nghiệm thoả đề bài.

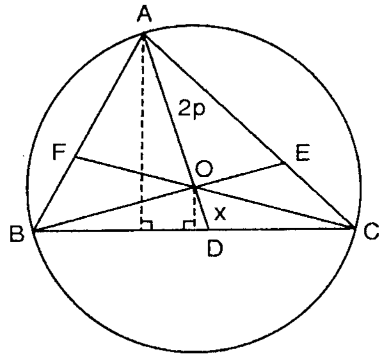
☑ **Câu 6**

Đặt x = OD, y = OE, z = OF, $x, y, z \in \mathbb{N}$

Ta có $\dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{OD}{AD} = \dfrac{x}{2p+x}$ · (1)

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{OE}{BE} = \frac{y}{2p+y} \qquad (2)$$

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{OF}{CF} = \frac{z}{2p+z} \qquad (3)$$



Cộng (1), (2) và (3), ta có :

$$1 = \frac{x}{2p+x} + \frac{y}{2p+y} + \frac{z}{2p+z}$$

$\Leftrightarrow \quad 8p^3 = 2p(xy + yz + zx) + 2xyz$

$\Leftrightarrow \quad 4p^3 = p(xy + yz + zx) + xyz \quad (4)$

Suy ra xyz chia hết cho p và vì p là số nguyên tố nên có một trong ba số x, y, z chia hết cho p, chẳng hạn như x chia hết cho p.

Vì $x < 2p$ nên suy ra $x = p$ (loại $x = 0$ vì lúc ấy tam giác ABC vuông).

Thay $x = p$ vào (4) ta được : $4p^2 = p(y + z) + 2yz$

Vì $4p^2$ chia hết cho p nên 2yz chia hết cho p.

- Nếu $p = 2$:

  Ta có $8 = y + z + yz \Rightarrow y + z + yz + 1 = 9 \Rightarrow (y + 1)(z + 1) = 9$

  Suy ra $\begin{cases} y = 0 \\ z = 8 \end{cases}$ (loại), $\begin{cases} y = 8 \\ z = 0 \end{cases}$ (loại), $\begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ (nhận)

  Vậy $x = y = z = 2$.

  Suy ra tam giác ABC đều và $AB = BC = CA = 4\sqrt{3}$.

- Nếu $p \neq 2$:

  Suy ra yz chia hết cho p, giả sử tồn tại y chia hết cho p.

  $\Rightarrow \quad y = p, z = p.$

  Suy ra tam giác ABC đều và $AB = BC = CA = 2\sqrt{3}.p$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2001–2002

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ **Câu 1** *(6đ)*

Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị là (T).

a) A, B, C lần lượt là ba điểm phân biệt thẳng hàng thuộc đồ thị (T). Các tiếp tuyến của (T) tại A, B, C lần lượt cắt (T) tại các giao điểm thứ nhì : A′, B′, C′. Chứng minh rằng ba điểm A′, B′, C′ cũng thẳng hàng.

b) Tìm số nghiệm của phương trình : $f[f(x)] = 0$.

◈ **Câu 2** *(4đ)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O ; R). Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt BC, CA, AB tại A′, B′, C′.

a) Chứng minh $OA' = \dfrac{R.\cos A}{\cos(B - C)}$.

b) Chứng minh $OA' + OB' + OC' \geq \dfrac{3R}{2}$.

◈ **Câu 3** *(3đ)*

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right).\left(1+\frac{b}{c}\right).\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \text{ với } a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

◈ **Câu 4** *(4đ)*

Giải các phương trình :

a) $\sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$;

b) $x = \sqrt{2 - x}.\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}.\sqrt{5 - x} + \sqrt{5 - x}.\sqrt{2 - x}$.

◈ **Câu 5** *(3đ)*

Cho dãy số (u_n) thoả : $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, $u_{n+1} - 7u_n + 12u_{n-1} = 0$ với n là số nguyên dương.

Hãy xác định (u_n).

GIẢI

☑ **Câu 1**

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ (T)}$$

a) A, B, C là ba điểm phân biệt thẳng hàng thuộc đồ thị (T) có hoành độ lần lượt là a, b, c. Ta có :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Leftrightarrow \frac{b^3 - a^3 - 3b + 3a}{b - a} = \frac{c^3 - a^3 - 3c + 3a}{c - a}$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0$$

Phương trình tiếp tuyến (d) của (T) tại A :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (T) :

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = (3a^2 - 3)(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - a)(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a \vee x = -2a.$$

Vậy hoành độ của A′ là $-2a$.

Tương tự ta có hoành độ của B′ và C′ lần lượt là $-2b$ và $-2c$.

Mà $a + b + c = 0 \Rightarrow -2a - 2b - 2c = 0$.

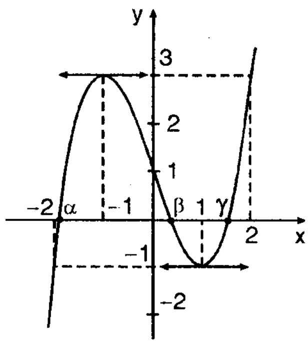
Vậy A′, B′, C′ thẳng hàng.

b) Tìm số nghiệm của phương trình : $f[f(x)] = 0$.

Theo đồ thị ta có $f(x) = 0$ có ba nghiệm là α, β, γ với $-2 < \alpha < -1$; $0 < \beta < 1$; $1 < \gamma < 2$.

$$f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = f(x) \\ f(m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = f(x) \\ m = \alpha \vee m = \beta \vee m = \gamma \end{cases}$$



Theo đồ thị ta có :

$f(x) = \alpha$ có 1 nghiệm vì $-2 < \alpha < -1$,

$f(x) = \beta$ có 3 nghiệm vì $0 < \beta < 1$,

$f(x) = \gamma$ có 3 nghiệm vì $1 < \gamma < 2$.

Vậy $f[f(x)] = 0$ có 7 nghiệm.

☑ **Câu 2**

a) Chứng minh $OA' = \dfrac{R.\cos A}{\cos(B-C)}$.

Ta có : $\dfrac{AA'}{OA'} = \dfrac{AO + OA'}{OA'} = \dfrac{R}{OA'} + 1$

Mặt khác :

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{h_a}{OI} \text{ (I là trung điểm của BC)}$$

$$= \frac{h_a}{R.\cos A} = \frac{c.\sin B}{R.\cos A} = \frac{2\sin C \sin B}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos(B-C) + \cos A}{\cos A} = 1 + \frac{\cos(B-C)}{\cos A}$$

Vậy $\dfrac{R}{OA'} = \dfrac{\cos(B-C)}{\cos A} \Leftrightarrow OA' = \dfrac{R\cos A}{\cos(B-C)}$.

b) Chứng minh $OA' + OB' + OC' \geq \dfrac{3R}{2}$.

Ta có $OA' + OB' + OC' = R\left[\dfrac{\cos A}{\cos(B-C)} + \dfrac{\cos B}{\cos(C-A)} + \dfrac{\cos C}{\cos(A-B)}\right]$

$$= R\left[\frac{\sin 2A}{2\sin A.\cos(B-C)}+\frac{\sin 2B}{2\sin B.\cos(C-A)}+\frac{\sin 2C}{2\sin C.\cos(A-B)}\right]$$

$$= R\left[\frac{\sin 2A}{\sin 2B+\sin 2C}+\frac{\sin 2B}{\sin 2C+\sin 2A}+\frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B}\right]$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sin 2B+\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2C+\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2A+\sin 2B}\right] - 3R$$

$$= \frac{R}{2}(2\sin 2A + 2\sin 2B + 2\sin 2C) \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sin 2B+\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2C+\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2A+\sin 2B}\right] - 3R$$

$$\geq \frac{R}{2}.9 - 3R = \frac{3R}{2}.$$

☑ **Câu 3**

Ta có :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right).\left(1+\frac{b}{c}\right).\left(1+\frac{c}{a}\right) = 2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$$

$$= \left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c}{c}\right) - 1$$

$$\geq 3\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 1$$

$$= 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} - 1$$

$$\geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) + 3 - 1$$

$$= 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+1\right).$$

☑ **Câu 4**

a) $$\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$$

Điều kiện : $x^2-1\geq 0$ và $x-\sqrt{x^2-1}\geq 0$.

Nhận xét : $(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})=1$.

Đặt $u=\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{u^2}$ $(u>0)$

Phương trình trở thành :

$$u+\frac{1}{u^2}=2 \quad \Leftrightarrow u^3-2u^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow (u-1)(u^2-u-1)=0$$

$$\Leftrightarrow u=1;\ u=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Ta chỉ nhận $u=1$, $u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Với $u=1$: ta tính được $x=1$.

Với $u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: ta tính được $x=\dfrac{1+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8}{2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4}$.

b) $$x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}.$$

Điều kiện : $0\leq x\leq 2$.

Đặt $u=\sqrt{2-x}\Leftrightarrow u^2=2-x(u\geq 0)$.

Đặt $v=\sqrt{3-x}\Leftrightarrow v^2=3-x\ (v\geq 0)$.

Đặt $w=\sqrt{5-x}\Leftrightarrow w^2=5-x\ (w\geq 0)$.

Suy ra : $x=2-u^2=uv+vw+wu$

$x=3-v^2=uv+vw+wu$

$x = 5 - w^2 = uv + vw + wu.$

Ta có hệ : $\begin{cases}(u+v)(u+w)=2\\(u+v)(v+w)=3\\(v+w)(u+w)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=\dfrac{\sqrt{30}}{5}\\v+w=\dfrac{\sqrt{30}}{2}\\u+w=\dfrac{\sqrt{30}}{3}\end{cases}$

Tính được $u = \dfrac{\sqrt{30}}{60} \Leftrightarrow x = 2 - u^2 = \dfrac{239}{120}$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \dfrac{239}{120}$.

☑ Câu 5

Cho dãy số (u_n) thoả : $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, $u_{n+1} - 7u_n + 12u_{n-1} = 0$ với n là số nguyên dương.

Phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$ có hai nghiệm là : $x = 3$; $x = 4$.

Ta có: $3^{n+1} - 7.3^n + 12.3^{n-1} = 0$

và $4^{n+1} - 7.4^n + 12.4^{n-1} = 0$ với mọi n nguyên dương.

Đặt $u_n = 3^n + 4^n$.

Ta có $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ và $u_{n+1} - 7.u_n + 12.u_{n-1} = 0$.

Vậy (u_n) thoả đề bài.

Ta phải chứng minh (u_n) như thế là duy nhất.

Thật vậy, nếu có dãy (v_n) cũng thoả đề bài nghĩa là :

$v_0 = 2$, $v_1 = 7$ và $v_{n+1} - 7.v_n + 12.v_{n-1} = 0$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được :

$u_n = v_n, \forall n > 0 \ (n \in \mathbb{N})$.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 *(4đ)*

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đường chéo BD' = d. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các khoảng cách từ A, A', D đến đường thẳng BD'.

a) Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3 là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

b) Tính thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' theo d, d_1, d_2, d_3.

Câu 2 *(4đ)*

Cho các số thực x, y, z thoả :

$$\begin{cases} 0 < x < y \le 1, 0 < x < z \le 1 \\ 3x + 2y + z \le 4 \end{cases}$$

Chứng minh $3x^2 + 2y^2 + z^2 \le \dfrac{10}{3}$.

Câu 3 *(4đ)*

Giải phương trình : $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2}$.

Câu 4 *(4đ)*

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + (z^2 - 8z + 14)\sqrt{x + y - 2} = 1 \\ 2x + 5y + \sqrt{xy + z} = 3. \end{cases}$$

Câu 5 *(4đ)*

Tìm tất cả các hàm f : $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thoả :

f[f(x) + y] = x + f(y) với mọi x, y thuộc $\mathbb{Q}$.

($\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ)

GIẢI

☑ Câu 1

a) Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của A, A′, D lên BD′.

Ta có $d_1 = AH$, $d_2 = A'K$, $d_3 = DL$.

Lấy điểm B″ sao cho B là trung điểm của B′B″.

Vẽ HN // DL (N ∈ B″D). Ta có HN ⊥ BD′.

Ta có BD′ song song và bằng B″D nên HN ⊥ B″D.

Vậy B″D ⊥ mp(AHN) (vì AH ⊥ BD′ ⇒ AH ⊥ B″D)

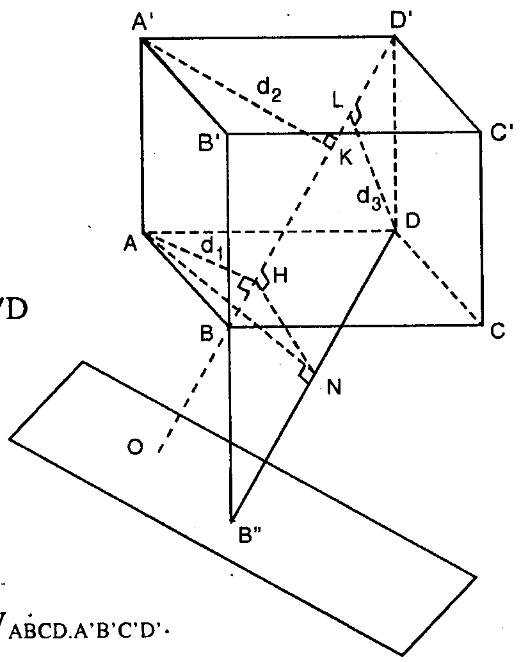
Suy ra B″D ⊥ AN.

Ta có tam giác AHN có $AH = d_1$, $HN = DL = d_3$, $AN = A'K = d_2$ (vì $\Delta BA'D' = \Delta B''AD$). Vậy tam giác AHN có ba cạnh có độ dài là d_1, d_2, d_3.

b) Gọi S là diện tích tam giác AHN.

$$S = \sqrt{p(p-d_1)(p-d_2)(p-d_3)},$$

$$p = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{2}$$



S tính được theo d_1, d_2, d_3.

Ta có :

$$V_{H.AB''D} = V_{H.ANB''} + V_{H.ADN}$$

$$= \frac{1}{3}S_{AHN}.B''D = \frac{1}{3}.S.B''D$$

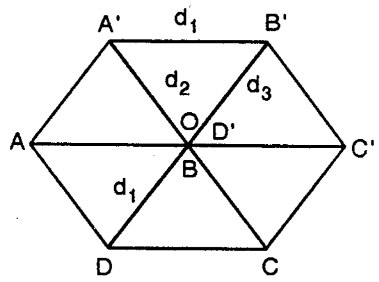
$$= \frac{1}{3}S.d.$$

Ta có BH // B″D

⇒ BH // mp(AB″D).

Suy ra $V_{H.AB'D} = V_{B.AB''D} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2S.d.$



☑ **Câu 2**

Ta có $\begin{cases} 0 < x < y, z \le 1 \\ 3x + 2y + z \le 4 \end{cases}$

Suy ra $0 < 3x \le 4 - 2y - z$

$\Rightarrow \quad 9x^2 \le 16 + 4y^2 + z^2 - 16y + 4yz - 8z$

$\Rightarrow \quad 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 \le 16 + 10y^2 + 4z^2 - 16y + 4yz - 8z$

$\Rightarrow \quad 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 \le 10y^2 - 16y + 16 + 4z(z + y - 2)$

$\Rightarrow \quad 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 \le 10y^2 - 16y + 16$ (vì $z + y \le 2$)

Xét $10y^2 - 16y + 16 \le 10 \Leftrightarrow 10y^2 - 16y + 6 \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} \le y \le 1$$

• Với $\frac{3}{5} \le y \le 1$:

y	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
$10y^2 - 16y + 16$	10 ↘	$\frac{48}{5}$	↗ 10

Vậy $9x^2 + 6y^2 + 3z^2 \le 10y^2 - 16y + 16 \le 10$

$\Rightarrow \quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 \le \frac{10}{3}$.

• Với $0 < y < \frac{3}{5}$ ta có :

$y^2 < \frac{9}{25}; x^2 < y^2 < \frac{9}{25}$.

$\Rightarrow \quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 < 3.\frac{9}{25} + 2.\frac{9}{25} + 1 = \frac{14}{5} < \frac{10}{3}$

Vậy bài toán đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$, $y = z = 1$.

☑ **Câu 3**

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2}$$ Điều kiện : $-1 \le x \le 1$

Đặt $x = \cos t$ $(0 \le t \le \pi) \Rightarrow \sin t \ge 0$.

Phương trình trở thành :

$$\cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\cos t.\sin t$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos t + \sin t)(1 - \cos t.\sin t) = \sqrt{2}\cos t.\sin t \qquad (*)$$

Đặt $u = \cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$, điều kiện : $-\sqrt{2} \le u \le \sqrt{2}$

Ta có $\quad \dfrac{u^2-1}{2} = \cos t.\sin t$

Phương trình (*) trở thành :

$$u.\left(1 - \frac{u^2-1}{2}\right) = \sqrt{2}.\left(\frac{u^2-1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3 + \sqrt{2}u^2 - 3u - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (u - \sqrt{2})(u^2 + 2\sqrt{2}u + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad u = \sqrt{2}$ (nhận); $u = 1 - \sqrt{2}$ (nhận); $u = -1 - \sqrt{2}$ (loại)

- Với $u = \sqrt{2}$ ta có :

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $x = \cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- Với $u = 1 - \sqrt{2}$ ta có :

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \cos\varphi\left(\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t = \varphi + \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $x = \cos t = \cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

☑ **Câu 4**

$$\begin{cases} x+y+(z^2-8z+14)\sqrt{x+y-2}=1 & (1) \\ 2x+5y+\sqrt{xy+z}=3 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện : $\begin{cases} x+y-2\geq 0 \\ xy+z\geq 0 \end{cases}$

Đặt $u = x + y - 2$ $(u \geq 0)$

$v = z^2 - 8z + 14 = (z-4)^2 - 2 \Rightarrow v \geq -2.$

(1) : $u + 1 + v.\sqrt{u} = 0$

$\Rightarrow \quad u + 1 = -v.\sqrt{u} \leq 2\sqrt{u}$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{u}-1)^2 \leq 0.$

$\Rightarrow \quad \sqrt{u} - 1 = 0.$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} u=1 \\ v=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4 \\ x+y=3 \end{cases}$

Từ (2) ta có :

$$2x + 5(3-x) + \sqrt{x(3-x)+4} = 3$$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{-x^2+3x+4} = 3x - 12$

$\Rightarrow \quad x = 4$ và suy ra $y = -1$.

Vậy hệ có nghiệm là $(4\ ;-1\ ;4)$.

☑ **Câu 5**

Ta có : $f[f(x)+y] = x + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$

- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

  Thật vậy : $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)+y) = f(f(y)+y)$

  $\Rightarrow x + f(y) = y + f(y)$

  $\Rightarrow x = y$

- $f(f(0)+0) = 0 + f(0) \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

- $f(f(x)) = f(f(x) + 0) = x + f(0) = x, \forall x \in Q$.
- $f(x + y) = f[f(f(x)) + y] = f(x) + f(y), \forall x, y \in Q$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ ta có $f(n) = n.f(1)$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ ta cũng có $f(n) = n.f(1)$

$\forall n \in \mathbb{Q} : x = \dfrac{m}{n}$, ta cũng có $f(x) = x.f(1)$

Mà $f(f(x)) = x \Rightarrow f(x).f(1) = x \Rightarrow x.[f(1)]^2 = x \Rightarrow f(1) = \pm 1$.

Vậy $f(x) = \pm x, \forall x \in \mathbb{Q}$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2001–2002

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

❖ Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ (L)

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng thuộc đồ thị (L). Các tiếp tuyến với (L) tại A, B, C lần lượt cắt (L) tại ba điểm thứ hai : A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 cũng thẳng hàng.

Tìm số nghiệm của phương trình $f[f(x)] = 0$.

❖ Câu 2

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + (z^2 - 8z + 14)\sqrt{x + y - 2} = 1 \\ 2x + 5y + \sqrt{xy + z} = 3 \end{cases}$$

❖ Câu 3

Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2.\left(1 + \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

◈ **Câu 4**

Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn :

$$[f(x)]^2 \geq f(x+y)[f(x)+y].$$

GIẢI

☑ **Câu 1**

Gọi hoành độ của A, B, C, A_1, B_1, C_1 lần lượt là : a, b, c, a_1, b_1, c_1. Ta có :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^3-a^3-3(b-a)}{b-a} = b^2+ab+a^2-3$$

Vì A, B, C thẳng hàng nên

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2+ab+a^2-3 = c^2+ac+a^2-3$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2-c^2+a(b-c)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a+b+c=0$$

Phương trình tiếp tuyến với (L) tại A(a ; f(a)) là :

$$(d) : y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (L) :

$$f(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)-f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)[x^2+ax+a^2-3] = (3a^2-a)(x-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)[x^2+ax-2a^2]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-2a. \end{array}\right.$$

Vậy $a_1 = -2a$, tương tự $b_1 = -2b$, $c_1 = -2c$.

Vì A, B, C thẳng hàng nên $a+b+c=0$

$$\Rightarrow \quad a_1+b_1+c_1=0.$$

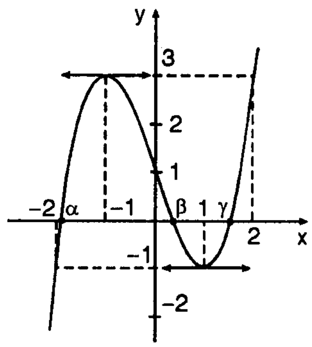
Vậy A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

- $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$

  $f'(x) = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Theo đồ thị ta có :



* $f(x) = 0$ có 3 nghiệm α, β, γ với :

$\alpha \in (-2 ; -1), \beta \in (0 ; 1), \gamma \in (1 ; 2)$

* $f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = f(x) \\ f(m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = f(x) \\ \left[\begin{array}{l} m = \alpha \\ m = \beta \\ m = \gamma \end{array}\right. \end{cases}$

* Theo đồ thị ta có $f(x) = \alpha$ có 1 nghiệm, $f(x) = \beta$ có 3 nghiệm, $f(x) = \gamma$ có 3 nghiệm.

Vậy $f[f(x)] = 0$ có 7 nghiệm.

☑ **Câu 2**

$$\begin{cases} x + y + (z^2 - 8z + 14)\sqrt{x + y - 2} = 1 & (1) \\ 2x + 5y + \sqrt{xy + z} = 3 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện : $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ xy + z \geq 0 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow$ $x + y - 2 + 1 + [(z - 4)^2 - 2]\sqrt{x + y - 2} = 0$ (3)

Đặt $u = x + y - 2 \ (u \geq 0)$

$v = (z - 4)^2 - 2 \Rightarrow v \geq -2$

(3) $\Rightarrow$ $u + 1 = -v\sqrt{u} \leq 2\sqrt{u}$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{u} - 1)^2 \leq 0$

☑ **Câu 4**

Giả sử tồn tại hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$[f(x)]^2 \geq f(x + y)[f(x) + y]$$

Ta có :

- $[f(x)]^2 \geq f(x + y)[f(x) + y]$

$$\Rightarrow \quad f(x + y) \leq \frac{[f(x)]^2}{f(x)+y} < f(x)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ là hàm số giảm nghiêm ngặt

$\Rightarrow$ $f(x)$ là một đơn ánh.

- $f(x + f(x)) \leq \dfrac{[f(x)]^2}{f(x)+f(x)} = \dfrac{f(x)}{2}$

- Lấy $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Đặt $a = f(x_0)$, ta có :

$$\frac{a}{2} = \frac{f(x_0)}{2} \geq f(x_0 + f(x_0)) = f(x_0 + a).$$

Đặt $x_1 = x_0 + a$, ta có :

$$\frac{a}{4} \geq \frac{f(x_1)}{2} \geq f(x_1 + f(x_1)) \geq f\left(x_1 + \frac{a}{2}\right).$$

Đặt $x_2 = x_1 + \dfrac{a}{2}$, ta có :

$$\frac{a}{8} \geq \frac{f(x_2)}{2} \geq f(x_2 + f(x_2)) \geq f\left(x_2 + \frac{a}{4}\right)$$

Tương tự ta có :

$$\frac{a}{2^{n+1}} \geq f\left(x_n + \frac{a}{2^n}\right) = f\left(x_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{2^k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2^{n+1}} \geq f(x_0 + 2a) > f(x_0 + 3a)$$

$$\Rightarrow \quad 0 > f(x_0 + 3a)$$

Điều này vô lí vì $f(x_0 + 3a) \in \mathbb{R}^+$.

Vậy không tồn tại hàm số thoả mãn điều kiện của đề bài.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ Câu 1

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có độ dài đường chéo BD′ = d. Gọi m_1, m_2, m_3 lần lượt là các khoảng cách từ A, A′, D đến đường chéo BD′ của hình hộp.

a) Chứng minh rằng m_1, m_2, m_3 có thể lấy làm độ dài ba cạnh của một tam giác.

b) Tính thể tích hình hộp theo m_1, m_2, m_3, d.

◈ Câu 2

Chứng minh rằng từ một tập S bất kì gồm 14 số tự nhiên phân biệt, ta luôn chọn được hai tập con không giao nhau của S : $\{a_1, a_2,..., a_k\}$; $\{b_1, b_2,..., b_k\}$ thoả :

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_k}\right) \le 0,001.$$

◈ Câu 3

Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực x, y, z :

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=a-1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=a+1\end{cases}$$

◈ Câu 4

Cho đa thức $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ với các hệ số thực, trong đó $a_0 \ne 0$ và f(x) thoả mãn đẳng thức sau với mọi số thực x :

$$f(x).f(2x^2) = f(2x^3 + x)$$

Tìm số nghiệm của phương trình f(x) = 0.

GIẢI

☑ Câu 1

a) Gọi K, H, I lần lượt là hình chiếu của A, A′, D xuống BD′. Ta có

$AK = m_1$, $A'H = m_2$, $DI = m_3$. Lấy điểm B″ thoả $\overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{B'B}$, lấy điểm N trên B″D thoả KN // DI.

Ta có $\quad KN \parallel DI \quad \Rightarrow KN \perp BD'$

mà $\quad AK \perp BD' \Rightarrow BD' \perp (AKN)$

$\Rightarrow B''D \perp (AKN)$

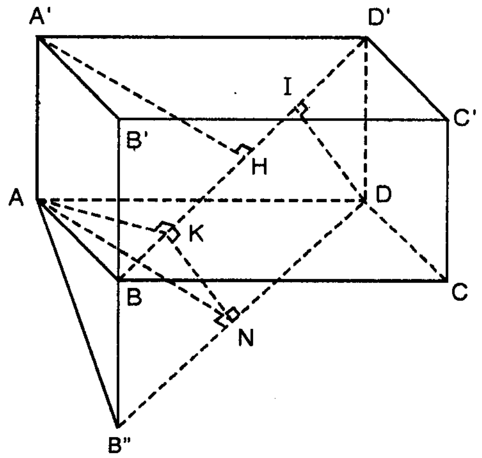
$\Rightarrow B''D \perp AN$.

Hai tam giác BA'D', B″AD bằng nhau nên hai đường cao A'H và AN cũng bằng nhau.

Vậy tam giác AKN có ba cạnh $AK = m_1$, $AN = m_2$, $KN = m_3$.

b) $\quad S = S_{AKN} = \sqrt{p(p-m_1)(p-m_2)(p-m_3)}$

với $\quad p = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{2}$



Ta có : $V_{KAB''D} = \dfrac{1}{3}S.B''D$

Mặt khác BK // (AB″D) suy ra

$$V_{K.AB''D} = V_{B.AB''D}$$

$$= \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

Vậy ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2S.d$.

☑ **Câu 2**

Tập S có 14 phần tử. Số tập con có 7 phần tử của S là :

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{7!7!} = 3432$$

Tổng nghịch đảo của tất cả các phần tử trong mỗi tập con 7 phần tử của S không vượt quá :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7} = \frac{363}{140} < 2,60 = \frac{2600}{1000}$$

Xét 2600 khoảng :

$$\left(0\,;\,\frac{1}{1000}\right];\left(\frac{1}{1000}\,;\,\frac{2}{1000}\right];\ldots;\left(\frac{2599}{1000}\,;\,\frac{2600}{1000}\right]$$

Ta có 3432 tổng nghịch đảo thuộc 2600 khoảng nói trên. Vậy có ít nhất hai tổng cùng thuộc một khoảng.

Lấy hai tập con ứng với hai tổng thuộc cùng một khoảng nói trên, loại bỏ các phần tử chung ta được hai tập A, B thoả đề bài :

$$A = \{a_1, a_2,\ldots, a_k\},\ k \le 7$$

$$B = \{b_1, b_2,\ldots, b_k\}$$

$$\left|\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{1}{b_1}+\ldots+\frac{1}{b_k}\right)\right| \le 0{,}001$$

☑ **Câu 3**

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=a-1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=a+1\end{cases}\qquad (I)$$

$$(I)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}\right)+\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1}\right]=a\\ \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}\right)+\left(\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1}\right)\right]=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}\right)+\left(\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1}\right)\right]=a\\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}}=1\end{cases}\qquad (II)$$

Đặt $X = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, $Y = \dfrac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}$, $Z = \dfrac{1}{\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}}$

Ta có : $x, y, z \in [1\,;+\infty)$; $X, Y, Z \in \left(0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$(II)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}\right)=a\\ X+Y+Z=1\end{cases}\qquad (III)$$

Nếu hệ (I) có nghiệm thì

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}\right)(X+Y+Z) \geq \frac{9}{2}$$

Đảo lại nếu $a \geq \frac{9}{2}$ thì cho $Y = Z = \frac{1-X}{2}$, ta có :

$$X + Y + Z = 1$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X}+\frac{4}{1-X}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3X+1}{-X^2+X}\right)$$

Đặt $f(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{3X+1}{-X^2+X}\right)$, $X \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$$f'(X) = \frac{1}{2}\frac{(3X^2+2X-1)}{(-X^2+X)^2}, \ f'(X) = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}, X = -1$$

X	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$
f'	‖	−	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$

Do $a \geq \frac{9}{2}$ nên tồn tại X thoả f(X) = a.

Vậy tồn tại $X, Y, Z \in \left(0 ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thoả (III) nên tồn tại x, y, z thoả (I).

Kết luận : Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq \frac{9}{2}$.

☑ **Câu 4**

Ta có : $f(x).f(2x^2) = f(2x^3 + x)$ (*)

So sánh hệ số của x^{3n} và x^0 trong khai triển trên ta được

$$\begin{cases} a_0^2 = a_0 & (1) \\ a_n^2 = a_n & (2) \end{cases}$$

Do $a_0 \neq 0$ nên từ (1) suy ra $a_0 = 1$.

(2) $\Rightarrow$ $a_n = 0 \vee a_n = 1$.

- Nếu $a_n = 0$ ta có :

$$f(x) = x^k.g(x) \text{ trong đó } g(0) \neq 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Thay vào (*) ta được

$$x^k.g(x).(2x^2)^k g(2x^2) = (2x^3 + x)^k g(2x^3 + x)$$

$$\Rightarrow \quad g(x).(2x^2)^k g(2x^2) = (2x^2 + 1)g(2x^2 + x).$$

Cho $x = 0$ ta được $g(0) = 0$ (mâu thuẫn).

Vậy $a_n \neq 0$, suy ra $a_n = 1$.

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Ta có : $a_n = 1$, suy ra $x_0 \neq 0$.

Từ (*) ta suy ra $f(2x_0^3 + x_0) = 0$.

Do x_0 và $2x_0^3$ cùng dấu nên :

$$\left|2x_0^3 + x_0\right| = \left|2x_0^3\right| + \left|x_0\right| > \left|x_0\right|$$

và $\quad x_1 = 2x_0^3 + x_0$ cũng là nghiệm của f(x).

Từ đó suy ra f(x) có vô số nghiệm $\{x_m\}$ với $x_{m+1} = 2x_m^3 + x_m$ $(m \geq 0)$

Điều này vô lí vì f(x) là đa thức bậc n.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 1999–2000

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ **Câu 1** *(3đ)*

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền xác định của nó :

$$f(x) = x(2 + \sqrt{4 - x^2}).$$

◈ **Câu 2** *(4đ)*

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(1 ; 2). Tìm điểm B thuộc Ox và điểm C thuộc Oy sao cho ABC là tam giác đều.

◈ **Câu 3** *(4đ)*

Cho tam giác ABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

b) $\dfrac{3}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}} \ge \dfrac{16}{9}$.

◈ **Câu 4** *(3đ)*

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả :

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x).f(yz) \ge \frac{1}{4} \text{ với mọi x, y, z.}$$

Hãy xác định hàm số f.

◈ **Câu 5** *(3đ)*

Định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \le m \\ (x+1)^2 + y^2 \le m \end{cases}$$

◈ Câu 6 *(3đ)*

Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng các hình chiếu của đỉnh A lên các mặt phẳng phân giác trong và ngoài của các nhị diện cạnh BC, CD, DB là sáu điểm đồng phẳng.

GIẢI

☑ Câu 1

Miền xác định : [–2 ; 2]

$$y' = 2 + \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2 = x^2$$

Giải phương trình ta được $x = \pm\sqrt{3}$.

$$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3},\ f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3},\ f(2) = 4,\ f(-2) = -4$$

$$y_{max} = 3\sqrt{3},\ y_{min} = -3\sqrt{3}.$$

☑ Câu 2

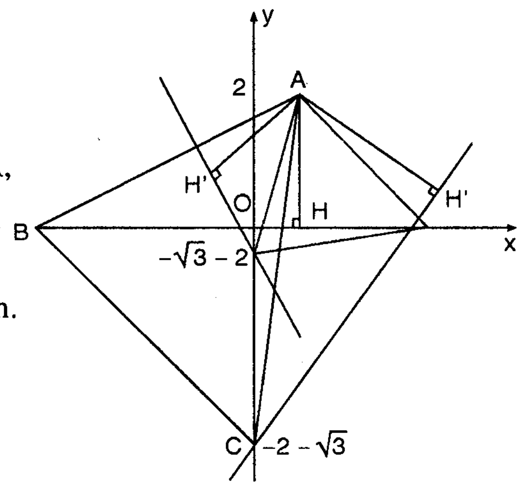
- ***Cách giải 1***

ABC là tam giác đều nên C là ảnh của B qua phép quay tâm A, góc quay $\pm 60^{\circ}$.

Mà $B \in Ox$, nên $C \in \Delta$ là ảnh của Ox trong các phép quay trên.

Ngoài ra $C \in Oy$, nên C là giao điểm của Oy và Δ.

Xác định Δ :



Gọi H là hình chiếu của A xuống trục Ox, ta có H(1 ; 0).

Gọi H'(x ; y) là ảnh của H qua các phép quay trên, ta có :

$$\begin{cases} AH' = AH \\ (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AH'}) = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AH' = 2 \\ \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AH'}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\overrightarrow{AH} = (0\ ;-2)$, $\overrightarrow{AH'} = (x-1\ ;\ y-2)$

$$\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AH'}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 1$$

$AH' = 2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

* Trường hợp $H'(1+\sqrt{3}\ ;\ 1)$, ta có $\overrightarrow{AH'} = (\sqrt{3}\ ;-1)$

  Phương trình của Δ là : $\sqrt{3}x - y - 2 - \sqrt{3} = 0$

  Vậy $C(0\ ;-\sqrt{3}-2)$.

  Điểm $B(x\ ;\ 0)$ thoả $AB = BC$ nên $B(-2\sqrt{3}-1\ ;\ 0)$.

* Trường hợp $H'(1-\sqrt{3}\ ;\ 1)$ ta có $\overrightarrow{AH'} = (-\sqrt{3}\ ;-1)$

  Phương trình của Δ là : $-\sqrt{3}x - y - 2 + \sqrt{3} = 0$

  Vậy $C(0\ ;\ \sqrt{3}-2)$.

  Điểm $B(x\ ;\ 0)$ thoả $AB = BC$ nên $B(2\sqrt{3}-1\ ;\ 0)$.

- ***Cách giải 2***

  * Nếu AB song song Oy thì $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ y)$ không tạo thành tam giác đều.

  * Khi AB không song song với Oy, gọi k là hệ số góc của đường thẳng AB, thì AB có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (1\ ;\ k)$. Gọi h là hệ số góc của AC, thì AC có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AN} = (1\ ;\ h)$.

$$\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+hk}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+h^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(1+2hk+h^2k^2) = 1 + h^2 + k^2 + h^2k^2 \text{ với } 1 + hk \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3k^2-1)h^2 + 8kh + 3 - k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} h = \dfrac{k+\sqrt{3}}{1-k\sqrt{3}} \\ h = \dfrac{k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Phương trình AB là : $y - 2 = k(x-1)$

Phương trình AC là : $y - 2 = h(x-1)$

Áp dụng : $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta có :

$$\frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2}}{2} = \frac{2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}}{2} \le \cos\frac{A+B}{4} = \cos\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{3} \le \cos\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

hay $\quad \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) Chứng minh

$$\frac{3}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}} \ge \frac{16}{9}$$

Đặt : $x = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2}$, $y = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2}$, $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cos\frac{C}{2}$.

Ta có : $x, y, z > 0$ và $1 \ge x + y + z$ nên $1 \ge (x + y + z)^2$.

$$VT \ge \frac{3(x+y+z)^2}{\frac{27}{4}(xy+yz+zx)} + \frac{(x+y+z)^2}{\frac{27}{4}(x^2+y^2+z^2)}$$

$$= \frac{12}{27}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} + 2\right) + \frac{4}{27}\left(1 + 2\frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$= \frac{28}{27} + \frac{4}{27}\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} + \frac{4}{27}2\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} + \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\ge \frac{28}{27} + \frac{4}{27}1 + \frac{4}{27}2.2 = \frac{48}{27} = \frac{16}{9}$$

☑ Câu 4

Cho x = y = z = 0, ta có :

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - [f(0)]^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad [f(0)]^2 - f(0) + \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[f(0) - \frac{1}{2}\right]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

Cho x = y = z = 1, ta có :

$$\frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(1) - [f(1)]^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}.$$

Cho y = z = 1 ta có :

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x) \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq \frac{1}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

nên $\quad f(x) = \frac{1}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

☑ **Câu 5**

- ***Cách 1***

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq m \ \ (1) \\ (x+1)^2 + y^2 \leq m \ \ (2) \end{cases}$$

Với $m \leq 0$ hệ vô nghiệm. Khi $m > 0$, trong mặt phẳng Oxy, tập hợp nghiệm (x ; y) của bất phương trình (1) là hình tròn tâm A(0 ; −1) bán kính $R_1 = \sqrt{m}$, tập hợp nghiệm (x ; y) của bất phương trình (2) là hình tròn tâm B(−1 ; 0) bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

Hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hai hình tròn tiếp xúc nhau, điều này xảy ra khi và chỉ khi $AB = R_1 + R_2$ hay $AB = |R_1 - R_2|$.

$$AB = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{m} - \sqrt{m} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$AB = R_1 + R_2 \quad \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{m} + \sqrt{m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

- ***Cách 2***

  * Nhận xét : nếu (a ; b) là nghiệm của hệ thì (b ; a) cũng là nghiệm của hệ. Vậy nếu hệ có nghiệm duy nhất, ta phải có x = y.

  * $$x^2 + (x+1)^2 \le m$$

  $$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2x + (1-m) \le 0 \qquad (1)$$

  Bất phương trình có nghiệm duy nhất nên ta phải có

  $$\Delta' = 1 - 2(1-m) = 0.$$

  Vậy ta phải có $m = \frac{1}{2}$.

  * Đảo lại, khi $m = \frac{1}{2}$, ta phải chứng minh hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

  $$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \le \frac{1}{2} & (1) \\ (x+1)^2 + y^2 \le \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

  Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp nghiệm (x ; y) của bất phương trình (1) là hình tròn tâm A(0 ; −1) bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tập hợp nghiệm (x ; y) của bất phương trình (2) là hình tròn tâm B(−1 ; 0) bán kính $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mà hai hình tròn tiếp xúc nhau nên hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

☑ **Câu 6**

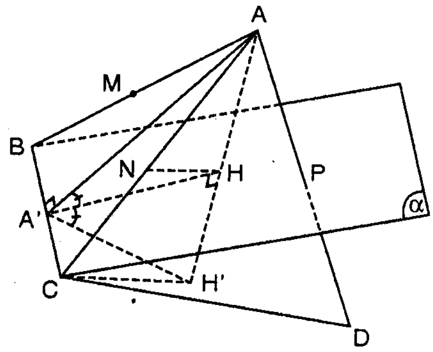
Gọi (α) là mặt phẳng phân giác trong của nhị diện cạnh BC. Đường thẳng qua A vuông góc với (α) cắt (α) tại H và cắt (BCD) tại H'. Hạ AA' vuông góc với BC. Vì AH ⊥ (α) nên AH ⊥ BC.

Vậy BC ⊥ (AA'H).

Do đó $\widehat{AA'H}$ là một góc phẳng của nhị diện cạnh BC.

Vì (α) là mặt phẳng phân giác nên A'H là phân giác của góc AA'H'.

Ngoài ra $A'H \perp AH$ nên AAH' là tam giác cân. Do đó $AH = \frac{1}{2}AH'$.



Gọi N là trung điểm của AC, ta có NH song song với CH', vậy H thuộc mặt phẳng qua N và song song với mặt phẳng (BCD), đó là mặt phẳng đi qua trung điểm M, N, P của ba cạnh AB, AC, AD.

Chứng minh tương tự cho năm điểm còn lại.

Vậy sáu hình chiếu này cùng thuộc mặt phẳng (MNP).

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 *(4đ)*

Cho x, y, z là ba số không âm thoả $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$0 \le xy + yz + xz - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Câu 2 *(4đ)*

Trong mặt phẳng Oxy cho Elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm M(m ; 4). Từ điểm M ta vẽ hai tiếp tuyến phân biệt MT_1, MT_2 đến (E), (T_1, T_2 là các tiếp điểm).

a) Tìm phương trình đường thẳng T_1T_2 theo m.

b) Tìm phương trình đường tròn qua ba điểm M, T_1, T_2 theo m.

◈ **Câu 3** *(4đ)*

Chứng minh rằng với mọi số α ta có :

$$\sqrt{17} \le \sqrt{\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 6} + \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 3} \le \sqrt{2} + \sqrt{11}.$$

◈ **Câu 4** *(4đ)*

Cho hai hàm số f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây :

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $g(x + y) = g(x) + g(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

iii) $f(x).g(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh tồn tại số a sao cho $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

◈ **Câu 5** *(4đ)*

Cho hai đường tròn (C_1), (C_2) có chung đường kính MN và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Xét tứ diện ABCD có đỉnh A lưu động trên (C_1) và các đỉnh B, C, D lưu động trên (C_2) sao cho bốn đường cao của tứ diện đồng quy tại một điểm H. Hỏi điểm H lưu động trên đường cố định nào ?

GIẢI

☑ **Câu 1**

Giả sử z là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z, ta có : $0 \le z \le \frac{1}{3}$.

$$S = xy + yz + zx - 2xyz$$

$$= xy(1 - 2z) + z(x + y) \ge \frac{1}{3}xy + z(x + y) \ge 0$$

$$S = xy(1 - 2z) + z(x + y) \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.(1 - 2z) + z(x + y)$$

$$\Leftrightarrow \quad S \le \frac{(1-z)^2}{4}.(1 - 2z) + z(1 - z)$$

$$\Leftrightarrow \quad S \le \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1) = f(z)$$

Xét hàm số $f(z) = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1)$.

$$f'(z) = \frac{1}{4}(-6z^2 + 2z)$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên

z	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'(z)	0	$+$	0	$-$	
f(z)		$\nearrow$	$\frac{7}{27}$	$\searrow$	

Vậy $f(z) \le \frac{7}{27}$.

$\Rightarrow \quad S \le f(z) \le \frac{7}{27}$

Vậy $0 \le S \le \frac{7}{27}$.

☑ **Câu 2**

a) Gọi $T_1(x_1\,;\,y_1)$ và d_1 là tiếp tuyến MT_1, ta có :

$$d_1 : \frac{x_1x}{9} + \frac{y_1y}{4} = 1$$

$$M(m\,;\,4) \in d_1 \Rightarrow \frac{mx_1}{9} + y_1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad T_1 \in d : \frac{mx}{9} + y = 1$$

Tương tự $T_2 \in d$.

Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là : $\frac{mx}{9} + y = 1$.

b) Ta có : $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1 \\ \dfrac{mx_1}{9} + y_1 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 1 - \frac{mx_1}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{9} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{mx_1}{9}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 = \frac{18mx_1 + 243}{36 + m^2}$$

$$\Rightarrow \quad y_1^2 = 4\left(1 - \frac{x_1^2}{9}\right) = \frac{4(m^2 - 2mx_1 + 9)}{36 + m^2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = \frac{10mx_1 + 4m^2 + 279}{36 + m^2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 - \frac{10mx}{36 + m^2} - \frac{4m^2 + 279}{36 + m^2} = 0$$

Vậy T_1 thuộc đường tròn (C_1) :

$$x^2 + y^2 - \frac{10mx}{36 + m^2} - \frac{4m^2 + 279}{36 + m^2} = 0$$

Tương tự : $T_2 \in (C_1)$

Ta có $T_1, T_2 \in (C_1)$ và $T_1, T_2 \in d : \dfrac{mx}{9} + y - 1 = 0.$

Vậy phương trình đường tròn (C) qua T_1, T_2 có dạng :

$$x^2 + y^2 - \frac{10mx}{36 + m^2} - \frac{4m^2 + 279}{36 + m^2} + k\left(\frac{mx}{9} + y - 1\right) = 0$$

M(m ; 4) ∈ (C) nên

$$m^2 + 4^2 - \frac{10m^2}{36 + m^2} - \frac{4m^2 + 279}{36 + m^2} + k\left(\frac{m^2}{9} + 4 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{-9(m^4+38m^2+297)}{(m^2+36)(m^2+27)} = \frac{-9(m^2+11)}{m^2+36}$$

Phương trình (C) là :

$$(36 + m^2)(x^2 + y^2) - m(m^2 + 21)x - 9(m^2 + 11)y + 5m^2 - 180 = 0$$

☑ **Câu 3**

$$\sqrt{17} \le \sqrt{\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 6} + \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 3} \le \sqrt{2} + \sqrt{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{17} \le \sqrt{(\cos\alpha + 2)^2 + 2} + \sqrt{(\cos\alpha - 1)^2 + 2} \le \sqrt{2} + \sqrt{11}$$

Chọn $N(2\sqrt{2}\ ; 3)$, $M(\sqrt{2}\ ; 1 - \cos\alpha)$ thì

$$OM = \sqrt{(\cos\alpha - 1)^2 + 2}$$

$$MN = \sqrt{(\cos\alpha + 2)^2 + 2}.$$

Vậy ta chứng minh :

$$\sqrt{17} \le MN + OM \le \sqrt{2} + \sqrt{11}$$

Ta có : $OM + MN \ge ON = \sqrt{17}$

Ngoài ra, gọi $M'(\sqrt{2}\ ; 0)$, $M''(\sqrt{2}\ ; 2)$.

Vì $0 \le 1 - \cos\alpha \le 2$ nên M di chuyển trong đoạn M'M''.

Vậy ta có : $OM + MN \le \text{Max}(OM' + M'N, OM'' + M''N)$

$$\Rightarrow \quad OM + MN \le \text{Max}(\sqrt{2} + \sqrt{11}, \sqrt{6} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{11}.$$

☑ **Câu 4**

Đặt $a = f(1)$ ta có $g(1) = \frac{1}{a}$.

Từ i) và ii) suy ra $f(x + 1) = f(x) + a$

$$g(x + 1) = g(x) + \frac{1}{a}$$

Sử dụng iii) ta có :

$$f(x+1).g(x+1) = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[f(x)+a\right]\left[g(x)+\frac{1}{a}\right] = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x).g(x) + a.g(x) + \frac{1}{a}.f(x) + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + a.g(x) + \frac{1}{a}.f(x) = x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad a.g(x) + \frac{1}{a}.f(x) = 2x$$

Nhận xét : $f(0) = 0$.

Khi $x \neq 0$ thay $g(x) = \dfrac{x^2}{f(x)}$, ta có :

$$\frac{ax^2}{f(x)} + \frac{1}{a}.f(x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad [f(x)]^2 - 2ax.f(x) + a^2x^2 = 0$$

$$\text{hay} \quad [f(x) - ax]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = ax \text{ với } x \neq 0$$

Kết luận : $f(x) = ax, \forall x$.

☑ **Câu 5**

Chứng minh : Tứ diện trực tâm có các cạnh đối vuông góc nhau.

Vẽ hình hộp AC′BD′.A′CB′D.

Vì AB $\perp$ CD nên A′B′ $\perp$ CD. Vậy A′CB′D là hình thoi. Tương tự các mặt còn lại của hình hộp cũng là hình thoi.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có : C′A = C′B = C′C và OA = OB = OC, suy ra OC′ $\perp$ (ABC)

mà DH $\perp$ (ABC) nên OC′ song song DH.

Tương tự OD' song song với CH, suy ra :

$$\Delta DHC = \Delta C'OD' \Rightarrow DH = OC'$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác } DHOC' \text{ là hình bình hành.}$$

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $\Rightarrow$ G là trung điểm của C'D.

Do DHOC' là hình bình hành nên G cũng là trung điểm của OH.

$AH \perp (BCD)$ tại A_1.

Xét tam giác AA_1O :

Gọi G_1 là trọng tâm của tam giác BCD ta có A_1, G_1, O thẳng hàng và $A_1G_1 = 2.OG_1$.

Do G là trung điểm của OH nên H là trung điểm của AA_1.

Trong mặt phẳng chứa (C_1), chọn MN là trục hoành, trung điểm O là gốc toạ độ, trung trực của MN là trục tung.

Ta có : $H(x\,;\,y) \Rightarrow A(x\,;\,2y)$

$A(x\,;\,2y) \in (C_1)$ nên $x^2 + (2y)^2 = R^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{4y^2}{R^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 1 \qquad (1)$$

Vậy H thuộc đường elip có phương trình (1).

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 1998–1999

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ Câu 1 *(4đ)*

Chứng minh rằng, với mọi giá trị của x, ta luôn luôn có bất đẳng thức sau :

$$\sum_{i=0}^{1998}(-1)^i.\frac{x^i}{i!} > 0 \text{ (i! là giai thừa của số i)}$$

◈ Câu 2 *(4đ)*

Cho Parabol (P) : $y = x^2$ và điểm $A\left(-1;\frac{19}{4}\right)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM^2 nhỏ nhất.

◈ Câu 3 *(4đ)*

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n luôn luôn tồn tại một số nguyên dương k sao cho k là bội số của n và k chỉ chứa các chữ số 0 hay 1.

◈ Câu 4 *(4đ)*

Cho hàm số f(x) xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm tại điểm x = 0 và thoả mãn điều kiện : f(x + t) = f(x).f(t) với mọi x và mọi t thuộc $\mathbb{R}$. Hãy xác định f(x).

◈ Câu 5 *(4đ)*

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường phân giác trong của các góc A, B, C của tam giác ABC cắt đường tròn (O) lần lượt tại A′, B′, C′. Chứng minh diện tích tam giác A′B′C′ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác ABC. Khi nào xảy ra đẳng thức ?

GIẢI

☑ Câu 1

Chứng minh $\sum_{i=0}^{1998}(-1)^i.\frac{x^i}{i!} > 0$.

Đặt $f(x) = 1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$

Xét $x \le 0$: Hiển nhiên $f(x) > 0$

Xét $x > 0$:

- Nếu $x \ge 2k$. Ta có :

$$f(x) = 1 + \frac{x(x-2)}{2!} + \frac{x^3(x-4)}{4!} + ... + \frac{x^{2k-1}(x-2k)}{(2k)!}$$

$\Rightarrow \quad f(x) > 1 > 0$

- Nếu $0 \le x \le 2k$.

Ta có $\quad f(x) > 0 \Leftrightarrow \text{Min } f(x) > 0$

Min $f(x)$ chỉ có thể là $f(0)$, $f(2k)$ hoặc $f(x_0)$ với $f'(x_0) = 0$.

+ Nếu Min $f(x) = f(0)$ hoặc Min $f(x) = f(2k)$ thì đã chứng minh trong trường hợp trên.

+ Nếu Min $f(x) = f(x_0)$ ($x_0 \ne 0$, $x_0 \ne 2k$) với $f'(x_0) = 0$ thì

$$f'(x_0) = -1 + \frac{x_0}{1!} - \frac{x_0^2}{2!} + ... + \frac{x_0^{2k-1}}{(2k-1)!} = -f(x_0) + \frac{x_0^{2k}}{2k!}$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} > 0$$

Vậy $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

☑ Câu 2

(P) : $y = x^2$, $A\left(-1 ; \dfrac{19}{4}\right)$. Tìm M sao cho AM^2 nhỏ nhất, $M \in (P)$.

Đặt $M(t ; t^2)$. Ta có :

$$f(t) = AM^2 = (t+1)^2 + \left(t^2 - \frac{19}{4}\right)^2$$

$$f'(t) = 4t^3 - 17t + 2 = (t-2)(4t^2 + 8t - 1)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

t	$-\infty$		$-1-\frac{\sqrt{5}}{2}$		$-1+\frac{\sqrt{5}}{2}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$$f(2) = 9 + \frac{9}{16}$$

$$f\left(-1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{25}{2} - 5\sqrt{5} < 9 + \frac{9}{16},\ f\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{25}{2} + 5\sqrt{5}$$

Vậy $\min AM^2 = \frac{25}{2} - 5\sqrt{5}$ khi $M\left(-1-\frac{\sqrt{5}}{2}\,;\ \frac{9}{4}+\sqrt{5}\right)$.

☑ Câu 3

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$, sao cho k là bội của n và k chỉ chứa các chữ số 0 hoặc 1.

Xét n số tự nhiên : $a_1 = 1$

$a_2 = 11$

$a_3 = 111$

$a_4 = 1111$

...

$a_n = \underbrace{1111...11}_{\text{n chữ số}}$

Chia a_i cho n ta được các số dư r_i.

Ta có : $r_i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Nếu $r_i = 0$ thì $k = a_i$ là số tìm được.

Nếu $r_i \neq 0, \forall i = 1, 2, ..., n$ thì có $j, l \in \{1, 2, ..., n\}$ thoả $r_j = r_l$ $(j \neq l)$

Đặt $k = |a_j - a_l|$

Ta có k chia hết cho n và k chỉ chứa các chữ số 0 hoặc 1.

$$k = \underbrace{11...1}_{j-l}\underbrace{00...0}_{l} \text{ (giả sử } j > l\text{)}.$$

☑ **Câu 4**

f(x) xác định trên $\mathbb{R}$, có f'(0), thoả mãn :

$$f(x + t) = f(x).f(t), \forall x, t \in \mathbb{R}$$

Ta có : $f(0) = f(0 + 0) = f(0).f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

- Xét $f(0) = 0$:

$$f(x) = f(x + 0) = f(x).f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thoả đề bài.

- Xét $f(0) = 1$:

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x).f(-x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta có $\quad f'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - 1}{t}$

Ta lại có $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x)[f(t) - 1]}{t}$$

Vậy $\quad f'(x) = f(x).f'(0), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = f'(0), \forall x \in \mathbb{R}$$

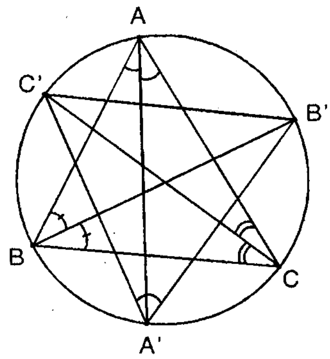
$$\Rightarrow \quad \ln(f(x)) = f'(0).x + C, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = e^{f'(0).x + C}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0$

Vậy $f(x) = e^{ax}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thoả đề bài.

☑ **Câu 5**



Gọi S là diện tích tam giác ABC,

S' là diện tích tam giác A'B'C'.

Ta có :

$$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$S' = \frac{a'b'c'}{4R}$$

$$= 2R^2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+A}{2}\right)$$

$$= 2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Do đó : $$\frac{S}{S'} = 8.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} - 4\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= -\left[2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]^2 + \cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) \le 1$$

Vậy : $S \le S'$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

❖ Câu 1

Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm.

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

❖ Câu 2

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp và R_A, R_B, R_C, R_D lần lượt là bán kính các mặt cầu bàng tiếp ứng với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện ABCD.

Đặt $T = \frac{R_A + R_B + R_C + R_D}{r}$.

a) Khi ABCD thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của T.

b) Xác định tứ diện ABCD sao cho T đạt giá trị nhỏ nhất đó.

❖ Câu 3

Cho Hyperbol (H) : $y = \frac{1}{x}$ và hai điểm cố định A, B thuộc (H) với $0 < x_A = a < x_B = b$. Lấy ba điểm tùy ý M, N, P thuộc cung AB của (H). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MNP.

❖ Câu 4

Chứng minh $4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \geq -7$ với mọi giá trị của x.

❖ Câu 5

Cho a, b, c, d là các số thực thoả $a^2 + b^2 = 1$ và $c + d = 3$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$ac + bd + cd \leq \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}.$$

GIẢI

☑ Câu 1

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình :

$$x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \ (x_0 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 = -1 - x_0^4$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2) \geq (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2 = (1 + x_0^4)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{x_0^8 + 2x_0^4 + 1}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2}$$

Ta chứng minh $\dfrac{x_0^8 + 2x_0^4 + 1}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2} \geq \dfrac{4}{3}$ (1)

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \quad 3x_0^8 + 6x_0^4 + 3 \geq 4x_0^6 + 4x_0^4 + 4x_0^2$

$$\Leftrightarrow \quad 3x_0^8 + 2x_0^4 - 4x_0^6 - 4x_0^2 + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0^2 - 1)^2(3x_0^4 + 2x_0^2 + 3) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

☑ Câu 2

Dựng mp($B_1C_1D_1$) song song với mp(BCD) và tiếp xúc với mặt cầu bàng tiếp, bán kính R_A và cắt các cạnh tứ diện tại B_1, C_1, D_1. Đường cao AH của tứ diện ABCD cắt mp($B_1C_1D_1$) tại H_1. Đặt $AH = h_a$. Xét phép vị tự tâm A, tỉ số $\dfrac{AH}{AH_1}$:

$$\frac{r}{R_A} = \frac{h_a}{2R_A + h_a} = \frac{h_a - 2r}{2R_A + h_a - 2R_A} = 1 - \frac{2r}{h_a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_A} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h_a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} = \frac{4}{r} - 2\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}\right)$$

Ta lại có : $\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_D} = \frac{4}{r}-\frac{2}{r}=\frac{2}{r}$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki :

$$(R_A + R_B + R_C + R_D)\left(\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_D}\right) \geq 16$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}(R_A + R_B + R_C + R_D) \geq 8$

$\Rightarrow \quad T \geq 8$

a) T đạt giá trị nhỏ nhất là 8.

b) $T = 8 \Leftrightarrow R_A = R_B = R_C = R_D$

$\Leftrightarrow h_a = h_b = h_c = h_d$

$\Leftrightarrow S_a = S_b = S_c = S_d$

$\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện đều.

☑ **Câu 3**

Gọi $M\left(m\,;\frac{1}{m}\right), N\left(n\,;\frac{1}{n}\right), P\left(p\,;\frac{1}{p}\right)$.

Có thể giả sử $m \leq n \leq p$.

Ta có $0 < a \leq m \leq n \leq p \leq b$

$$\overrightarrow{MN} = \left(n-m\,;\,\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) = \left(n-m\,;\,\frac{m-n}{mn}\right).$$

$$\overrightarrow{MP} = \left(p-m\,;\,\frac{m-p}{mp}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S_{MNP} = \frac{1}{2}\left|(n-m)\left(\frac{m-p}{mp}\right)-(p-m)\left(\frac{m-n}{mn}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(n-m)(nm-np+p^2-mp)}{mnp}\right|$$

$$= \frac{1}{2mnp}\,|(n-m)(p-m)(p-n)|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)\left[m+p-\left(n+\frac{mp}{n}\right)\right]$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left[m+p-2\sqrt{mp}\right]$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(\sqrt{m}-\sqrt{p})^2$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$$

Dấu "=" xảy ra khi :

$$\begin{cases} m = a \\ p = b \\ n = \dfrac{mp}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a \\ p = b \\ n = \sqrt{ab} \quad (\sqrt{ab} \in [a\,;\,b]) \end{cases}$$

Vậy Max $S_{MNP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2$

☑ **Câu 4**

Ta có : $4\cos 8x + 8\cos 4x = 8\cos^2 4x + 8\cos 4x - 4$

$$= 8\cos^2 4x + 8\cos 4x + 2 - 6$$

$$= 2(2\cos 4x + 1)^2 - 6 \ge -6$$

và $\cos x \ge -1$

Suy ra

$$4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \ge -7$$

Dấu "=" không xảy ra nên

$$4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x > -7.$$

☑ **Câu 5**

Tập hợp các điểm M(a ; b) thoả $a^2 + b^2 = 1$ là đường tròn tâm O, R = 1.

Tập hợp các điểm N(c, d) thoả c + d = 3 là đường thẳng y = –x + 3

Ta có : $ac + bd + cd \le \dfrac{9+6\sqrt{2}}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{20-11+6\sqrt{2}}{4} \ge ac + bd + cd$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 - \frac{11}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{2} \ge 2(ac + bd + cd)$$

Thay $1 = a^2 + b^2$ vào :

$$a^2 + b^2 + 9 - 2cd - 2ac - 2bd \ge \frac{11-6\sqrt{2}}{2}$$

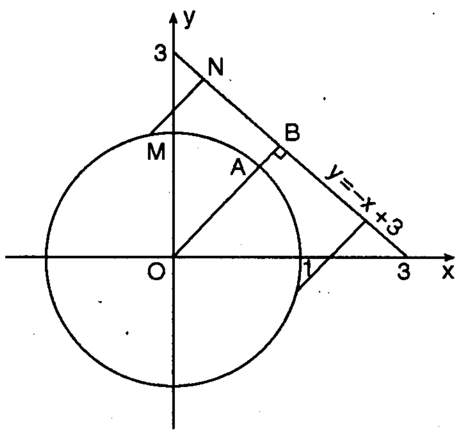
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \ge \left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-c)^2 + (b-d)^2 \ge \left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \ge \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Vế trái là khoảng cách MN, vế phải là đoạn AB.

Ta có MN ≥ AB.



ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 1997–1998

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

❖ Câu 1

Cho $0 \le x, y, z, t \le \pi$ và $x + y + z + t = \pi$.

Tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = \sin^2x + \sin^2y + \sin^2z + \sin^2t$.

❖ Câu 2

Cho tứ diện cố định ABCD có BC = DA = a, CA = DB = b, AB.CD = c^2.

a) Tìm điểm P trong không gian sao cho biểu thức S = PA + PB + PC + PD đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tính giá trị nhỏ nhất đó theo a, b, c.

❖ Câu 3

Tìm a để phương trình : $4x^2 + 31y^2 = a + 6 - 17xy$ có nghiệm nguyên duy nhất.

❖ Câu 4

Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol (P) : $y = x^2$ và các điểm A(0 ; 1), B(0 ; 5). Tìm điểm M thuộc (P) có hoành độ dương sao cho góc $\widehat{AMB}$ lớn nhất.

❖ Câu 5

Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn : $f(x).f(x^2) = 1$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

GIẢI

☑ Câu 1

$$x + y + z + t = \pi$$

$$\Rightarrow \quad x + y \le \frac{\pi}{2} \text{ hoặc } z + t \le \frac{\pi}{2}.$$

Giả sử $x + y \le \frac{\pi}{2}$:

Ta có : $\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z + \sin^2t \le \sin^2(x + y) + \sin^2z + \sin^2t$

Thật vậy :

$$\begin{aligned}\sin^2x + \sin^2y - \sin^2(x + y) &= \sin^2x + \sin^2y - (\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2\\ &= \sin^2x(1 - \cos^2y) + \sin^2y(1 - \cos^2x) - 2\sin x \cos y \cos x \sin y\\ &= 2\sin^2x \sin^2y - 2\sin x \sin y \cos x \cos y\\ &= -2\sin x \sin y(\cos x \cos y - \sin x \sin y)\\ &= -2\sin x \sin y \cos(x + y) \le 0\end{aligned}$$

Vậy $S = \sin^2x + \sin^2y + \sin^2z + \sin^2t \le \sin^2(x + y) + \sin^2z + \sin^2t$

Đặt $A = x + y$, $B = z$, $C = t$

Ta có : $A + B + C = \pi$ và $0 \le A, B, C \le \pi$

$$\begin{aligned}\text{Vì : } \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C &= \sin^2A + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2}\\ &= -\cos^2A + \cos(B - C)\cos A + 2\\ &= -\left[\cos A - \frac{1}{2}\cos(B-C)\right]^2 + \frac{1}{4}\cos^2(B - C) + 2\\ &\le \frac{9}{4}\end{aligned}$$

nên $S \le \frac{9}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$, $y = z = t = \frac{\pi}{3}$.

Vậy : $\max S = \frac{9}{4}$.

☑ **Câu 2**

Đặt $m = AB$, $n = CD$ $(m.n = c^2)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Lấy P là điểm bất kì trong không gian và P′ là điểm đối xứng với P qua MN. Ta có :

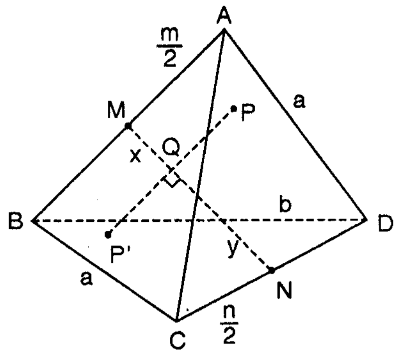
$$AP' = BP$$

$$DP = CP'$$

$$S = AP + BP + CP + DP$$

$$= AP + AP' + CP + CP'$$

PP′ cắt MN tại Q, ta có AQ là trung tuyến của tam giác APP′ và CQ là trung tuyến của tam giác CPP′.



Từ đó : $AP + AP' \geq 2AQ$

và $CP + CP' \geq 2CQ$.

Đặt x = MQ ; y = NQ. Ta có :

$$AQ + CQ = \sqrt{x^2 + \frac{m^2}{4}} + \sqrt{y^2 + \frac{n^2}{4}}$$

$$\geq \sqrt{(x+y)^2 + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2}$$

Ta có : $\dfrac{m^2}{4} + \dfrac{n^2}{4} + (x+y)^2 = BN^2 + \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{a^2+b^2}{2}$

(vì $\dfrac{m^2}{4} = BN^2 - MN^2 = BN^2 - (x+y)^2$)

Vậy : $S \geq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

a) $S_{min} = \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{P trùng với Q} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n} \end{cases}$

b) $S_{min} = \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$

☑ Câu 3

Nhận xét phương trình :

$$4x^2 + 31y^2 = a + 6 - 17xy$$

nếu có nghiệm nguyên $(x ; y)$ thì cũng có nghiệm nguyên $(-x ; -y)$.

Do đó để phương trình có nghiệm nguyên duy nhất thì $x = -x$ và $y = -y$

$\Rightarrow \quad x = 0$ và $y = 0$

Thế $x = 0$ và $y = 0$ vào phương trình ta được $a = -6$.

Với $a = -6$ ta có $4x^2 + 31y^2 + 17xy = 0$

Đặt $f(x) = 4x^2 + 17xy + 31y^2$

$\Delta = 289y^2 - 16.31y^2 \le 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow y = 0.$

Vậy $x = 0$, $y = 0$ là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình (ứng với $a = -6$).

☑ **Câu 4**

$A(0 ; 1), B(0 ; 5)$

$M \in (P), x_M > 0 \Rightarrow 0 < \widehat{AMB} < \pi.$

Đặt $m = x_M \Rightarrow y_M = m^2$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-m ; 1 - m^2)$, $\overrightarrow{MB} = (-m ; 5 - m^2)$

$$\cot\widehat{AMB} = \cot\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$$

$$= \frac{m^2 + (1-m^2)(5-m^2)}{\left|-m(5-m^2) + m(1-m^2)\right|}$$

$$= \frac{m^4 - 5m^2 + 5}{4m} = \frac{1}{4}\left(m^3 - 5m + \frac{5}{m}\right)$$

Xét $y = \dfrac{1}{4}\left(m^3 - 5m + \dfrac{5}{m}\right)$ $(m > 0)$

$$y' = \frac{1}{4}\left(3m^2 - 5 - \frac{5}{m^2}\right) = \frac{1}{4m^2}(3m^4 - 5m^2 - 5)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = \dfrac{5-\sqrt{85}}{6} \text{ (loại)} \\ m^2 = \dfrac{5+\sqrt{85}}{6} \Leftrightarrow m = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{85}}{6}} \end{array}\right.$$

m	0		$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{85}}{6}}$		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

$\cot\widehat{AMB}$ nhỏ nhất khi $m = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{85}}{6}}$

$\Rightarrow$ $\widehat{AMB}$ lớn nhất khi và chỉ khi $M\left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{85}}{6}}\ ;\ \dfrac{5+\sqrt{85}}{6}\right)$.

☑ **Câu 5**

Ta có : $f(x).f(x^2) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $f(x) \neq 0$ và $f(x) = f(-x)$.

- Xét $0 \leq x < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{f\left(x^2\right)} = f(x^4) = f\left(x^{4^2}\right) = \ldots = f\left(x^{4^n}\right) = \ldots = f(0)$$

- Xét $x \geq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{f(x^{1/2})} = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \ldots = f\left(x^{\frac{1}{4^n}}\right) = \ldots = f(1)$$

Vì f liên tục nên $f(0) = f(1)$.

Vậy $f(x)$ là hằng số.

Ta có $f(x).f(x^2) = 1 \Rightarrow [f(x)]^2 = 1 \Rightarrow f(x) = \pm 1$.

Vậy có hai hàm $f(x) = 1$ và $f(x) = -1$ thoả mãn.

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ Câu 1

Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2$ có đồ thị (C).

a) Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) có hơn một tiếp điểm.

b) Biện luận theo m số tiếp tuyến của (C) vẽ từ điểm M(3 ; m).

◈ Câu 2

Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Gọi A, B, C là ba điểm tuỳ ý thuộc (E). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

◈ Câu 3

Cho m máy tính và n máy in (m > n). Mỗi sợi dây cáp chỉ có thể nối được từ một máy tính tới một máy in. Biết rằng một máy tính có thể nối với nhiều máy in và mỗi máy in có thể nối với nhiều máy tính, nhưng tại một thời điểm mỗi máy tính chỉ có thể điều khiển một máy in và ngược lại mỗi máy in chỉ có thể in cho một máy tính.

Hỏi phải dùng ít nhất bao nhiêu sợi dây cáp để n máy tính bất kì có thể đồng thời in được.

◈ Câu 4

Chứng minh rằng trong một tam giác bất kì, tổng bình phương của ba bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác ấy không nhỏ hơn tổng bình phương của ba độ dài của ba đường phân giác trong :

$$R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 \geq \ell_A^2 + \ell_B^2 + \ell_C^2$$

GIẢI

☑ Câu 1

Cho $y = x^4 - 6x^2$ (C).

1. Phương trình tiếp tuyến của (C) có hơn một tiếp điểm : $y = -9$.

2. Phương trình tiếp tuyến vẽ từ M(3 ; m) có dạng $y = k(x - 3) + m$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình :

$$x^4 - 6x^2 = (4x^3 - 12x)(x - 3) + m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad m = x^4 - 6x^2 - (4x^3 - 12x)(x - 3)$$

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 6x^2 - (4x^3 - 12x)(x - 3)$

$$g'(x) = 4x^3 - 12x - (12x^2 - 12)(x - 3) - (4x^3 - 12x)$$

$$= -(12x^2 - 12)(x - 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \vee x = 3$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0	+	0	−	
g(x)	$-\infty$	↗	27	↘	-21	↗	27	↘	$-\infty$

Bảng kết quả :

m	$-\infty$		-21		-9		27		$+\infty$
Số nghiệm của (1)		2	3	4	4	4	2	0	
Số tiếp tuyến		2	3	4	3	4	2	0	

☑ **Câu 2**

$$(E) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$

Gọi $A'\left(x_A ; \frac{a}{b}y_A\right)$, $B'\left(x_B ; \frac{a}{b}y_B\right)$, $C'\left(x_C ; \frac{a}{b}y_C\right)$

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$, $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A ; y_C - y_A)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \left(x_B - x_A ; \frac{a}{b}(y_B - y_A)\right), \ \overrightarrow{A'C'} = \left(x_C - x_A ; \frac{a}{b}(y_C - y_A)\right)$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)\frac{a}{b}(y_C - y_A) - \frac{a}{b}(y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$$

$$= \frac{a}{b} S_{ABC}$$

Vậy S_{ABC} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $S_{A'B'C'}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta lại có : $OA' = \sqrt{x_A^2 + \frac{a^2}{b^2} y_A^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2}\right)} = \sqrt{a^2} = |a| = a$

Tương tự : $OB' = a$, $OC' = a$

$\Rightarrow$ A′, B′, C′ thuộc đường tròn tâm O, bán kính a.

$$\Rightarrow \quad S_{A'B'C'} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4a} = \frac{8a^3 \sin A' \sin B' \sin C'}{4a}$$

$$= 2a^2 \sin A' \sin B' \sin C'$$

$$\leq 2a^2 \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ A′B′C′ là tam giác đều.

$$\Rightarrow \text{Max} S_{A'B'C'} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\Rightarrow \text{Max} S_{ABC} = \frac{b}{a} \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab.$$

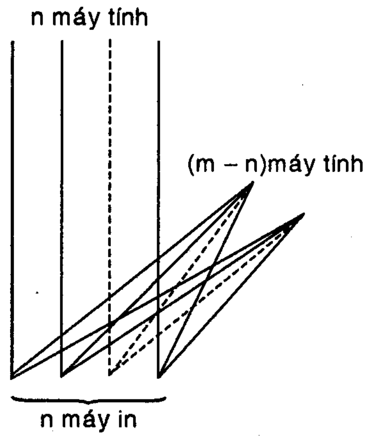
☑ **Câu 3**

- Gọi S là số dây cáp cần thiết để nối thoả điều kiện đề bài. Ta chứng minh :

  $$S \geq n(m - n + 1)$$

  Thật vậy, giả sử :

  $S < n(m - n + 1)$, suy ra trung bình mỗi máy in có ít hơn $(m - n + 1)$ dây cáp, suy ra tồn tại một máy in (giả sử đó là máy in thứ 1) được nối với không quá $m - n$ máy tính



⇒ Tồn tại n máy tính không được nối với máy in thứ 1 (giả sử đó là máy tính thứ 1, 2, ..., n)

⇒ Các máy tính 1, 2, ..., n không thể in đồng thời.

- Ta chứng minh khi X = n(m − n + 1) thì tồn tại cách mắc thoả điều kiện đề bài :

– n máy tính đầu tiên, mỗi máy nối với 1 máy in ;

– m – n máy tính còn lại mỗi máy đều nối với tất cả n máy in ;

– Số dây cáp là n + n(m − n) = n(m − n + 1).

Hiển nhiên cách mắc trên thoả điều kiện đề bài vì :

– n máy tính đầu tiên thoả ;

– Nếu thay k máy đầu tiên bằng k trong số m − n máy tính còn lại thì cũng thoả vì k máy tính này mỗi máy đều có nối với đủ n máy in.

☑ **Câu 4**

Ta có :

$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

$$l_A^2 = \frac{4b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2} = \frac{2b^2c^2(\cos A + 1)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{4bc(p-a).p}{(b+c)^2} \le p(p-a) \text{ (bất đẳng thức Cô-si)}$$

Tương tự : $l_B^2 \le p(p-b)$

$l_C^2 \le p(p-c)$

Suy ra $\quad l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 \le p(p - a + p - b + p - c) = p^2 \qquad (1)$

Mặt khác :

$$R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 = p^2\left(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq p^2\left(\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right) = p^2 \qquad (2)$$

vì trong tam giác ABC ta luôn có :

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$$

Vậy từ (1) và (2) suy ra :

$$l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 \leq R_A^2 + R_B^2 + R_C^2.$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 1996–1997

ĐỀ 1 (Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 *(4đ)*

Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Chứng tỏ (C) có ba điểm cực trị không thẳng hàng.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm cực trị đó.

Câu 2 *(4đ)*

Cho n số nguyên dương tuỳ ý $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Đặt $b_k = k\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

a) Chứng minh : $\sqrt[k]{a_1a_2a_3\ldots a_k} = \frac{1}{k+1}\sqrt[k]{(a_1b_1)(a_2b_2)(a_3b_3)\ldots(a_kb_k)}$.

b) Chứng minh : $\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{a_1a_2a_3...a_k} \le e.\sum_{k=1}^{n} a_k$ (e là cơ số logarit Nê-pe).

◈ **Câu 3** *(4đ)*

Các mặt phẳng (α), (β), (γ), (δ) tiếp xúc với hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD lần lượt tại A, B, C, D. Chứng minh rằng nếu giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (β) đồng phẳng với CD thì giao tuyến của hai mặt phẳng (γ), (δ) cũng đồng phẳng với AB.

◈ **Câu 4** *(4đ)*

Cho hàm số $y = x^4$ có đồ thị (C) và điểm I(1; 2). Viết phương trình đường thẳng qua I cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho I là trung điểm của AB.

◈ **Câu 5** *(4đ)*

Tính tổng của tất cả 7! số nhận được từ các hoán vị các chữ số của số 1234567.

GIẢI

☑ **Câu 1**

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y' = x - 3 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$$

Phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên (C) có 3 cực trị phân biệt.

Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là điểm cực trị :

$$y_0 = \frac{x_0^3 - 6x_0^2 - 2}{2x_0} = \frac{3x_0^2 - 12x_0}{2} \qquad (1)$$

Ta có M thuộc parabol nên ba điểm cực trị không thẳng hàng.

b) (1) $\Rightarrow$ $x_0^2 = \dfrac{2y_0 + 12x_0}{3}$ và

$$y_0^2 = \frac{9}{4}(x_0^4 - 8x_0^3 + 16x_0^2)$$

$$= \frac{9}{4}[(x_0 - 5)(x_0^3 - 3x_0^2 + 1) + x_0^2 - x_0 + 5]$$

$$= \frac{9}{4}[(x_0^2 - x_0 + 5) = \frac{9}{4}\left(\frac{2y_0 + 12x_0}{3} - x_0 + 5\right)$$

Suy ra $x_0^2 + y_0^2 = \frac{43}{4}x_0 + \frac{13}{6}y_0 + \frac{45}{4}$ (phương trình đường tròn).

☑ Câu 2

a) $$b_k = k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$$

Ta có : $b_1.b_2...b_k = (k + 1)^k$

Suy ra : $\sqrt[k]{a_1.a_2...a_k} = \frac{1}{k+1}\sqrt[k]{(a_1b_1)(a_2b_2)...(a_kb_k)}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$\sqrt[k]{a_1.a_2...a_k} \le \frac{1}{k(k+1)}(a_1b_1 + ... + a_kb_k)$$

$$\le \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k} a_jb_j .$$

Suy ra $$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k} a_jb_j$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left(a_jb_j\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} a_jb_j.\frac{1}{j} \le e.\sum_{j=1}^{n} a_j$$

(Ta có $\frac{b_k}{k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \le e$)

☑ **Câu 3**

Gọi S(O, R) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$

Ta có $X \in (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AX} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{x} - R^2 = 0$.

Tương tự $X \in (\beta) \Leftrightarrow \vec{b}.\vec{x} - R^2 = 0$.

$X \in (\gamma) \Leftrightarrow \vec{c}.\vec{x} - R^2 = 0$.

$X \in (\delta) \Leftrightarrow \vec{d}.\vec{x} - R^2 = 0$.

Phương trình mặt phẳng (P) chứa giao tuyến của (α) và (β) :

$$m(\vec{a}.\vec{x} - R^2) + n(\vec{b}.\vec{x} - R^2) = 0$$

$$CD \subset (P) \Leftrightarrow \begin{cases} m(\vec{a}.\vec{c} - R^2) + n(\vec{b}.\vec{c} - R^2) = 0 \\ m(\vec{a}.\vec{d} - R^2) + n(\vec{b}.\vec{d} - R^2) = 0 \end{cases} \text{(tồn tại } m \neq 0, n \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a}.\vec{c} - R^2)(\vec{b}.\vec{d} - R^2) = (\vec{a}.\vec{d} - R^2)(\vec{b}.\vec{c} - R^2).$$

Tương tự ta cũng có AB đồng phẳng với giao tuyến của hai mặt phẳng (γ) và (δ) khi và chỉ khi

$$(\vec{a}.\vec{c} - R^2)(\vec{b}.\vec{d} - R^2) = (\vec{a}.\vec{d} - R^2)(\vec{b}.\vec{c} - R^2).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

☑ **Câu 4**

Đặt $a = x_A$. Ta có $y_A = a^4$

$$x_B = 2x_I - x_A = 2 - a;\ y_B = 2y_I - y_A = 4 - a^4 = x_B^4$$

Suy ra $(2 - a)^4 = 4 - a^4$.

Đặt $t = 1 - a$, ta có phương trình : $(1 + t)^4 = 4 - (1 - t)^4$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^4 + 12t^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 = -3 + \sqrt{10}.$$

Suy ra $1 - 2a + a^2 = -3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 4 - \sqrt{10} = 0$.

Mà $y_A = a^4 = (a^2 - 2a + 4 - \sqrt{10})(a^2 + 2a + \sqrt{10}) + 4a(\sqrt{10} - 2) + 10 - 4\sqrt{10}$

nên : $y_A = 4x_A(\sqrt{10} - 2) + 10 - 4\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ Vậy A thuộc đường thẳng (Δ) : $y = 4x(\sqrt{10} - 2) + 10 - 4\sqrt{10}$.

Tương tự $B \in (\Delta)$. Vậy (Δ) chính là đường thẳng cần tìm.

☑ **Câu 5**

$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ta có số các số mà chữ số j đứng ở hàng thứ i là 6!.

Do đó tổng các số bằng

$$6!(1 + 2 + ... + 7) + 6!(1 + 2 + ... + 7)10 + 6!(1 + 2 + ... + 7)10^2 + ... + 6!(1 + 2 + ... + 7)10^6$$

$$= 6!(1 + 2 + ... + 7)[1 + 10 + 10^2 + ... + 10^6]$$

$$= 720 \times 28 \times 1\,111\,111 = 22\,399\,997\,760.$$

ĐỀ 2 (Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút *(không kể thời gian phát đề)*

◈ **Câu 1** *(4đ)*

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn I của (C).

b) Tìm tập hợp các điểm mà từ đó vẽ được ba tiếp tuyến phân biệt đến đồ thị (C) và biểu diễn tập hợp này trên hình vẽ.

◈ **Câu 2** *(4đ)*

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = 1 \\ y + z^2 + x^2 = 1 \\ z + x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

◈ **Câu 3** *(4đ)*

Cho hàm số f(x) xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ thoả cả ba điều kiện sau :

i) $f(1) = 1$;

ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$;

iii) $f(x) = x^2.f\left(\frac{1}{x}\right)$ với $x \neq 0$.

Tính $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ và $f\left(\sqrt[1996]{\frac{1995}{1997}}\right)$.

◈ **Câu 4** *(4đ)*

Tìm tất cả giá trị của hai tham số a và b sao cho đa thức :

$$f(x) = x^4 + (2a + 1)x^3 + (a - 1)^2x^2 + bx + 4$$

được phân tích thành tích của hai đa thức bậc hai g(x) và h(x) có hệ số ở bậc cao nhất là 1 và thoả cả hai điều kiện :

i) Phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2;

ii) $h(x_1) = x_2$, $h(x_2) = x_1$.

◈ **Câu 5** *(4đ)*

Cho tam giác ABC. Lấy trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt các điểm C_1, A_1, B_1 sao cho $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = k$ $(k > 0)$. Lấy trên các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 lần lượt các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{1}{k}$$

a) Chứng minh AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

b) Định k để diện tích tam giác $A_2B_2C_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

GIẢI

☑ **Câu 1**

a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn là : $y = -3x + 2$.

b) Gọi $M(\alpha\ ;\ \beta)$ là điểm mà từ đó vẽ được ba tiếp tuyến phân biệt đến (C). Phương trình tiếp tuyến qua M :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \beta = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) \qquad (1)$$

Vì các tiếp tuyến không có quá 1 tiếp điểm nên số tiếp tuyến vẽ từ $M(\alpha ; \beta)$ chính là số nghiệm x_0 của (1) và cũng là số giao điểm của hai đường $y = \beta$ và $y = g(x) = f(x) + f'(x)(\alpha - x)$.

Ta lại có :

$$g'(x) = f'(x) + [f''(x)](\alpha - x) - f'(x)$$
$$= [f''(x)](\alpha - x) = 6(x - 1)(\alpha - x)$$

Bảng biến thiên của g(x) :

- Với $\alpha = 1$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$

- Với $\alpha < 1$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

- Với $\alpha > 1$:

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Ta có : $g(\alpha) = f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 1$

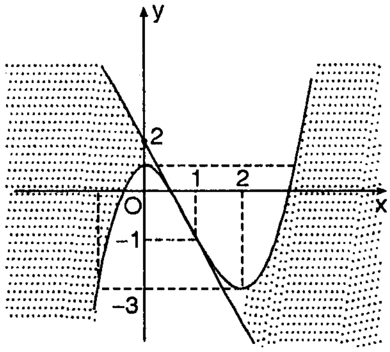
$g(1) = f(1) + f'(1)(\alpha - 1) = -3\alpha + 2$

Vậy tập hợp các điểm $M(\alpha ; \beta)$ cần tìm thoả mãn

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ g(\alpha) < \beta < g(1) \end{cases}$$

hay $$\begin{cases} \alpha > 1 \\ g(1) < \beta < g(\alpha) \end{cases}$$

Biểu diễn trên hình vẽ là phần có dấu chấm.



❖ Câu 2

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ y + z^2 + x^2 = 1 & (2) \\ z + x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$(x - y)(x + y - 1) = 0$$

* Nếu $x = y$:

Từ (1), (3) ta được : $\begin{cases} x + x^2 + z^2 = 1 & (4) \\ z + 2x^2 = 1 & (5) \end{cases}$

Từ (5) suy ra : $z^2 = 4x^4 - 4x^2 + 1 \quad (6)$

Thay (6) vào (4) : $4x^4 - 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{1}{2} \vee x = -1$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

* Nếu $x + y = 1$

Lấy (1) + (2) – (3) ta được :

$$2z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{1}{2}$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình đã cho có 5 nghiệm :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

☑ **Câu 3**

Ta có :

$$f(1+\sqrt{2}) + f(-1+\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2})$$

Do đó :

$$f(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2 f(\sqrt{2}-1) = (1+\sqrt{2})^2\left[f(2\sqrt{2}) - f(1+\sqrt{2})\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + f(\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2\left[2f(\sqrt{2}) - 1 - f(\sqrt{2})\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + f(\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2\left(f(\sqrt{2}) - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + (1+\sqrt{2})^2 = f(\sqrt{2}).\left[(1+\sqrt{2})^2 - 1\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad f(\sqrt{2}) = \frac{4+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Vậy : $f(1 + \sqrt{2}) = f(1) + f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$.

Tương tự $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

Ta chứng minh $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có : $f(0) = 0, f(-1) = -1$

Xét $x \neq 0, x \neq -1$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x^2}{(x+1)^2} f\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} f(x+1)$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right) = \frac{f(x)+f(1)}{(x+1)^2} + \frac{x^2\left[f(1)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad (x+1)^2 = x^2 + 2f(x) + 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x.$$

Vậy : $f\left(\sqrt[1996]{\frac{1995}{1997}}\right) = \sqrt[1996]{\frac{1995}{1997}}$.

☑ **Câu 4**

Giả sử : $h(x) = x^2 + px + q$

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} x_1^2 + px_1 + q = x_2 & (1) \\ x_2^2 + px_2 + q = x_1 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$: $-p - 1 = x_1 + x_2$

$(1) + (2)$: $p + q + 1 = x_1x_2$

Do đó : $g(x) = x^2 + (p + 1)x + p + q + 1$

Đồng nhất các hệ số

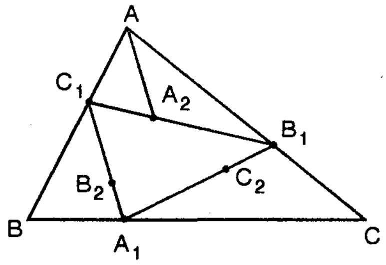
$x^4 + (2a + 1)x^3 + (a - 1)^2x^2 + bx + 4 = (x^2 + px + q)[x^2 + (p + 1)x + p + q + 1]$

ta được $\begin{cases} 2p+1 = 2a+1 \\ p(p+1)+q+p+q+1 = (a-1)^2 \\ q(p+q+1) = 4 \\ p(p+q+1)+q(p+1) = b \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=2 \\ b=-14 \end{cases}$

☑ **Câu 5**

a) $\overrightarrow{AB_1} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{1+k}$; $\overrightarrow{AC_1} = \dfrac{k\overrightarrow{AB}}{1+k}$



$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AA_2} = \frac{k\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}}{1+k}$$

$$= \frac{k}{(1+k)^2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Do đó AA_2 chính là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Tương tự BB_2, CC_2 cũng là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Vậy AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

b) Ta có $S_{AB_1C_1} = S_{BC_1A_1} = S_{CA_1B_1} = \dfrac{kS_{ABC}}{(1+k)^2}$

$$\Rightarrow \quad S_{A_1B_1C_1} = \left(1 - \frac{3k}{(1+k)^2}\right)S_{ABC}$$

Đặt $y = 1 - \dfrac{3k}{(1+k)^2}$ $(k > 0)$ y đạt giá trị nhỏ nhất tại k = 1 và $y_{min} = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $S_{A_1B_1C_1} \geq \dfrac{S_{ABC}}{4}$, dấu bằng xảy ra khi k = 1.

Lí luận tương tự ta có :

$$S_{A_2B_2C_2} \geq \frac{S_{A_1B_1C_1}}{4} \geq \frac{S_{ABC}}{16}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{A_2B_2C_2}$ là $\dfrac{S_{ABC}}{16}$ đạt được khi k = 1.