Đáp án bài 1: ***(4 điểm).***

Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$.

Giải:

Phương trình đã cho tương đương $(x+1)^3 = 3\sqrt[3]{3x+5} + 2$ (1). **(0,5)**

Đặt $\sqrt[3]{3x+5} = y+1$, suy ra $3x+5 = (y+1)^3$ và (1) trở thành $(x+1)^3 = 3y+5$. **(0,5)**

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^3 = 3y+5\\(y+1)^3 = 3x+5\end{cases}$ **(1,0)**

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ trên, ta được

$(x+1)^3 - (y+1)^3 = -3(x-y)$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3\right] = 0$ **(0,5)**

$\Leftrightarrow x = y$. **(0,25)**

(Vì $(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$). **(0,5)**

Vậy ta có phương trình: $(x+1)^3 = 3x+5$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$. **(0,5)**

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = 1$ và $x = -2$. **(0,25)**

Đáp án câu 2 (4 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số nguyên dương n,x,y thỏa mãn: $p^n = x^3 + y^3$ (*).

Giải:

- Với p = 2 ta có $2^1 = 1^3 + 1^3$. **(0,5)**

- Với p = 3 ta có $3^2 = 1^3 + 2^3$. **(0,5)**

- Ta chứng minh khi $p > 3$ thì không tồn tại các số n,x,y thỏa đề bài.

Thật vậy, giả sử ngược lại, chọn n,x,y thỏa (*) sao cho n bé nhất.

Do $p \neq 2$ nên $(x,y) \neq (1,1)$; khi đó:

$$x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy > 1 \text{ và } x + y > 1.$$ **(0,5)**

Do đó $x^2 - xy + y^2$ và $x + y$ đều là bội của p. **(0,5)**

$\Rightarrow (x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy \vdots p$. **(0,5)**

Do $p > 3$ nên $x \vdots p$ hoặc $y \vdots p$.

Mà $x + y \vdots p$ nên ta có x và y đều chia hết cho p. **(0,5)**

Điều này cho ta:

(*) $p^{n-3} = \left(\frac{x}{p}\right)^3 + \left(\frac{y}{p}\right)^3 \Leftrightarrow p^{n'} = x'^3 + y'^3$ với $(n',x',y') = \left(n-3, \frac{x}{p}, \frac{y}{p}\right)$

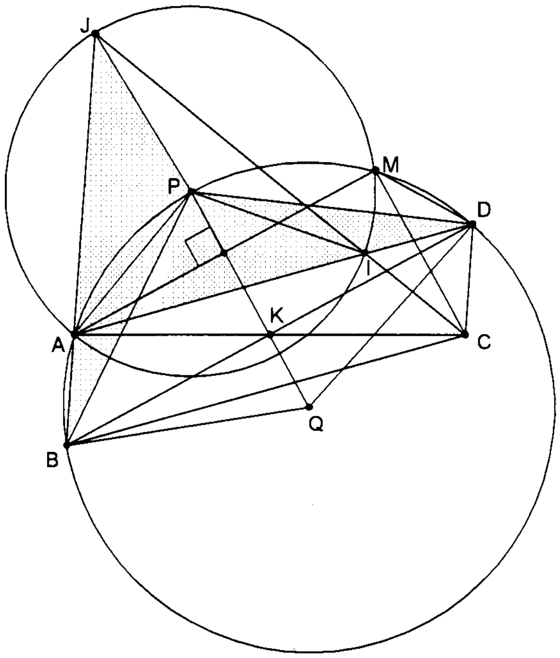
mà $n' < n$ (trái giả thiết). **(0,5)**

Vậy chỉ có $p = 2$ và $p = 3$ thỏa đề bài. **(0,5)**

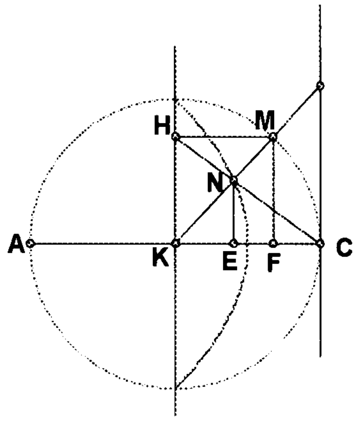
Câu hỏi 3: (*4 điểm*)

Cho đoạn thẳng AC cố định với K là trung điểm. Hai điểm B và D phân biệt, di động và luôn đối xứng nhau qua K và đường thẳng BD không trùng với đường thẳng AC. Đường phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt AD và AB lần lượt tại I và J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ cắt nhau tại điểm M khác A. Gọi H là hình chiếu của M trên trung trực của AC và N là giao điểm của CH và KM. Chứng minh khi B di động như trên thì N di động trên một đường cố định.

Giải:



Hình 1



Hình 2

➢ **(Xem *hình 1*)**

Gọi P, Q là tâm đường tròn (AIJ) và (ADB) ⇒ PQ vuông góc AM (1)

Ta có $\widehat{AIJ} = \widehat{BCJ} = \widehat{DCJ} = \widehat{AJI}$ (2)

$$\widehat{PJA} = \frac{180^0 - \widehat{APJ}}{2} = 90^0 - \widehat{AIJ} \quad (3)$$

$$\widehat{PAD} = \frac{180^0 - \widehat{API}}{2} = 90^0 - \widehat{AJI} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) suy ra $\widehat{PJA} = \widehat{PAI}$ (5) **(0,5)**

Mà PA = PJ (6)

Vì $\widehat{BJC} = \widehat{DCJ} = \widehat{BCJ}$ nên ΔBCJ cân tại B ⇒ AD = BC = BJ (7)

Từ (5), (6) và (7) suy ra ΔPAD = ΔPJB ⇒ PB = PD mà QB = QD **(0,5)**

⇒ PQ là trung trực của BD ⇒ PQ vuông góc BD (8)

Từ (1) và (8) suy ra AM // BD (9) **(0,5)**

(9) ⇒ AMDB là hình thang cân (do AMDB nội tiếp)

⇒ $\widehat{MDB} = \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{DBC} = \widehat{BDA} = \widehat{DBM}$

Do đó ΔDBM = ΔDBC ⇒ BD vuông góc MC (10)

(9) và (10) ⇒ $\widehat{AMC} = 90^0$ ⇒ M thuộc đường tròn (K) đường kính AC cố định. **(0,5)**

➢ (***Xem hình 2***) Dựng NE ⊥ AC và MF ⊥ AC.

Ta có: $\dfrac{CE}{KC} = \dfrac{NE}{HK} = \dfrac{NE}{MF} = \dfrac{KN}{KM}$ **(0,5)**

mà KC = KM ⇒ NK = EC **(0,5)**

⇒ NK = d(N; (Δ)) với Δ là đường thẳng vuông góc AC tại C. **(0,5)**

⇒ N thuộc parabol (P) có tiêu điểm K và đường chuẩn (Δ). **(0,5)**

Đáp án câu 4: ***(4 điểm)***

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\le 3.$$

Giải:

Đặt $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y=\sqrt{\frac{c}{b}}$, $z=\sqrt{\frac{a}{c}}$, ta có $x,y,z>0$ và $xyz=1$.

Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le 3$$ **(1,0)**

Giả sử $xy\le 1 \Rightarrow z\ge 1$.

- Ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\le\frac{2}{1+xy}$ (1).

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow (2+x^2+y^2)(1+xy)\le 2(1+x^2)(1+y^2)$

$\Leftrightarrow (1-xy)(x-y)^2\ge 0$ (đúng) **(0,5)**

- Ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)\le\frac{8}{1+xy}=\frac{8z}{1+z}$$ **(0,5)**

Suy ra $\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\le 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}$. **(0,5)**

Mặt khác, ta lại có $\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le\frac{2}{1+z}$.

Suy ra $\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}$.

Do vậy, ta sẽ chứng minh $2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}\le 3$. **(0,5)**

Thật vậy, ta có:

$2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}\le 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2z(z+1)}+2\le 3(1+z)$ **(0,5)**

$\Leftrightarrow 2z-2\sqrt{2z(z+1)}+(z+1)\ge 0$

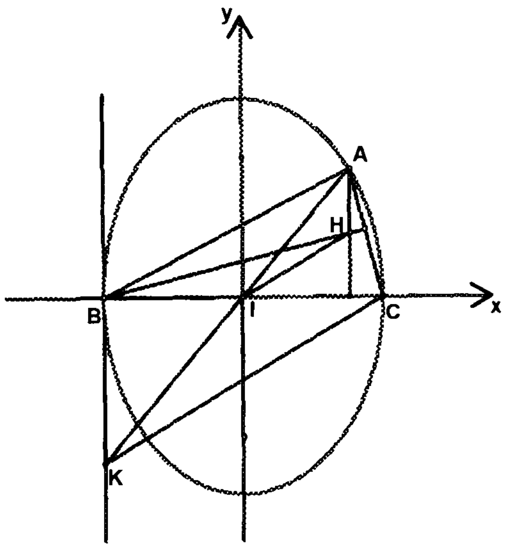
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2z}-\sqrt{z+1}\right)^2\ge 0$. **(0,5)**

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đáp án câu 5: ***(4 điểm)***

Cho tam giác ABC không cân có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A di động. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt trung tuyến AI của tam giác ABC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu IH song song với KC thì điểm A di động trên đường cố định.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ Oxy với O trùng I và trục Ox là đường thẳng BC.

Chuẩn hóa BC = 2. Khi đó, tọa độ B(–1; 0) và C(1; 0).

Giả sử tọa độ điểm $A(x_0; y_0)$ với $y_0 \neq 0$ và $x_0 \neq 0$. **(0,5)**

Khi đó, trực tâm H(x, y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ (x_0 - 1)(x+1) + y_0 y = 0 \end{cases}$$ **(0,5)**

$$\Leftrightarrow H\left(x_0; \frac{1 - x_0^2}{y_0}\right).$$ **(0,5)**

Gọi K là giao điểm của d và AI, khi đó tọa độ K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{y_0}{x_0} x \end{cases} \qquad (x_0 \neq 0)$$ **(0,5)**

$$\Rightarrow \quad K(-1; -\frac{y_0}{x_0}).$$ **(0,5)**

Theo giả thiết ta có:

$$IH \,//\, KC \Rightarrow \overrightarrow{IH}; \overrightarrow{KC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{y_0}{x_0}.x_0 - 2\frac{1 - x_0^2}{y_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{1} + \frac{y_0^2}{2} = 1.$$ **(1,0)**

Vậy A di động trên đường (E): $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ cố định. **(0,5)**