Tài liệu bồi dưỡng đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2010

Tháng 6 - 2010

Mục lục

Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh

Trong toán học cũng như trong cuộc sống, cần biết:
Linh hoạt xử lý tình huống, chọn lựa phương án tối ưu

Trần Nam Dũng
Trường Đại học KHTN Tp HCM

Các định lý toán học phát biểu về các tính chất của các đối tượng toán học và mối quan hệ giữa chúng. Và những khẳng định này cần được chứng minh xuất phát từ các tiên đề, các định lý và tính chất đã được chứng minh trước đó. Và để thực hiện bước chứng minh, ta cần có những quy tắc suy diễn để chứng minh là chặt chẽ về mặt toán học.

Với các bài toán Olympic cũng vậy, yêu cầu chứng minh một kết quả nào đó luôn hiện diện, ngay cả trong những bài không có cụm từ "chứng minh rằng". Chẳng hạn để giải phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có thể ta sẽ phải chứng minh tất cả các nghiệm của chúng thuộc đoạn [-2, 2], để giải phương trình hàm $f(x^2 + f(y)) = f^2(x) + y$ có thể ta sẽ phải chứng minh f là toàn ánh ...

Bài viết này nói về hai phương pháp và một số kỹ thuật chứng minh cơ bản: chứng minh phản chứng, chứng minh quy nạp, chứng minh phản chứng, dùng mệnh đề phản đảo, phản ví dụ nhỏ nhất, ví dụ và phản ví dụ, sử dụng nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực hạn, nguyên lý bất biến, sử dụng tô màu, đếm bằng hai cách, sắp xếp thứ tự …

Cách tiếp cận của chúng ta là sẽ thông qua các ví dụ để nói về các phương pháp và kỹ thuật. Ở đây sẽ chỉ có các nhận xét, bình luận, các nguyên tắc chung chứ không được trình bày hệ thống như một lý thuyết.

Bài viết này đầu tiên được viết và trình bày trong chương trình "Gặp gỡ gỡ Toán học 2010", được tổ chức vào tháng 1 năm 2010, sau đó được bổ sung, hoành chỉnh và trình bày tại Hội nghị khoa học "Các chuyên đề chuyên Toán và ứng dụng" tổ chức tại Ba Vì, tháng 5/2010. Cuối cùng, để chuẩn bị cho đội tuyển Việt Nam thi Olympic Toán quốc tế, bài viết được bổ sung thêm các phần về Đếm bằng hai cách, Nguyên lý cực hạn, Sắp xếp thứ tự và ứng dụng của các phương pháp và kỹ thuật chứng minh trong bài toán Tối ưu tổ hợp.

1. Phép chứng minh phản chứng

Một số ví dụ mở đầu

Chứng minh phản chứng có thể nói là một trong những vũ khí quan trọng của toán học. Nó cho phép chúng ta chứng minh sự có thể và không có thể của một tính chất nào đó, nó cho phép chúng ta biến thuận thành đảo, biến đảo thành thuận, nó cho phép chúng ta lý luận trên những đối tượng mà không rõ là có tồn tại hay không. Ví dụ kinh điển nhất về phép chứng minh phản chứng thuộc về Euclid với phép chứng minh

Định lý. *Tồn tại vô số số nguyên tố.*

Ở đây, Euclid đã giả sử ngược lại rằng tồn tại hữu hạn số nguyên tố $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ông xét tích $N = p_1p_2\ldots p_n + 1$. N phải có ít nhất 1 ước số nguyên tố p. Khi đó, do $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là tất cả các số nguyên tố nên tồn tại i sao cho $p = p_i$. Nhưng khi đó $p \mid 1$, mâu thuẫn.

Bài tập

1. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố dạng 4k+3.
2. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố dạng 4k+1.

Phương pháp xuống thang

Một chứng minh nổi tiếng khác bằng phương pháp phản chứng chính là chứng minh của Euler cho định lý nhỏ Fermat với trường hợp n = 4.

Định lý. *Phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ (1) không có nghiệm nguyên dương.*

Ông đã giả sử rằng phương trình (1) có nghiệm nguyên dương. Khi đó, theo *nguyên lý cực hạn*, tồn tại nghiệm (x_0, y_0, z_0) với $x_0 + y_0 + z_0$ nhỏ nhất. Sau đó, bằng cách sử dụng cấu trúc nghiệm của phương trình Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, ông đi đến sự tồn tại của một nghiệm (x_1, y_1, z_1) có $x_1 + y_1 + z_1 < x_0 + y_0 + z_0$. Mâu thuẫn.

Phương pháp này thường được gọi là *phương pháp xuống thang*.

Bài tập

3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ không có nghiệm nguyên dương.
4. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

Sử dụng mệnh đề phản đảo

Chứng minh sử dụng *mệnh đề phản đảo* cũng là một phương án chứng minh phản chứng hay được sử dụng. Cơ sở của phương pháp là để chứng minh A → B, ta có thể chứng minh $\overline{B} \to \overline{A}$. Về mặt bản chất thì hai phép suy diễn này có vẻ giống nhau, nhưng trong thực tế thì lại khá khác nhau. Ta thử xem xét 1 vài ví dụ.

<u>Ví dụ 1.</u> *Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là một đơn ánh từ R vào R.*

<u>Ví dụ 2.</u> *Chứng minh rằng nếu (p-1)! + 1 là số nguyên tố thì p là số nguyên tố.*

Trong ví dụ 1, rõ ràng việc chứng minh $x_1 \neq x_2$ suy ra $f(x_1) \neq f(x_2)$ khó khăn hơn việc chứng minh $f(x_1) = f(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$, dù rằng về mặt logic, hai điều này là tương đương.

Trong ví dụ 2, gần như không có cách nào khác ngoài cách chứng minh nếu p là hợp số, p = r.s thì (p-1)! + 1 không chia hết cho p.

Bài tập.

5. Cho hàm số f: R → R thoả mãn các điều kiện sau

   1) f đơn điệu ;

   2) f(x+y) = f(x) + f(y) với mọi x, y thuộc R.

6. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \leq 3$.

Phương pháp phản ví dụ nhỏ nhất

Trong việc chứng minh một số tính chất bằng phương pháp phản chứng, ta có thể có thêm một số thông tin bổ sung quan trọng nếu sử dụng *phản ví dụ nhỏ nhất*. Ý tưởng là để chứng minh một tính chất A cho một cấu hình P, ta xét một đặc trưng f(P) của P là một hàm có giá trị nguyên dương. Bây giờ giả sử tồn tại một cấu hình P không có tính chất A, khi đó sẽ tồn tại một cấu hình P_0 không có tính chất A với $f(P_0)$ nhỏ nhất. Ta sẽ tìm cách suy ra điều mâu thuẫn. Lúc này, ngoài việc chúng ta có cấu hình P_0 không có tính chất A, ta còn có mọi cấu hình P với $f(P) < f(P_0)$ đều có tính chất A.

<u>Ví dụ 3.</u> *Cho ngũ giác lồi ABCDE trên mặt phẳng toạ độ có toạ độ các đỉnh đều nguyên.*
a) Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của ngũ giác (khác với A, B, C, D, E) có toạ độ nguyên.
b) Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong ngũ giác có toạ độ nguyên.
c) Các đường chéo của ngũ giác lồi cắt nhau tạo ra một ngũ giác lồi nhỏ $A_1B_1C_1D_1E_1$ bên trong. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong hoặc trên biên ngũ giác lồi $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Câu a) có thể giải quyết dễ dàng nhờ *nguyên lý Dirichlet*: Vì có 5 điểm nên tồn tại ít nhất 2 điểm X, Y mà cặp toạ độ (x, y) của chúng có cùng tính chẵn lẻ (ta chỉ có 4 trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn) và (lẻ, lẻ)). Trung điểm Z của XY chính là điểm cần tìm.

Sang câu b) lý luận trên đây chưa đủ, vì nếu XY không phải là đường chéo mà là cạnh thì Z có thể sẽ nằm trên biên. Ta xử lý tình huống này như sau. Để ý rằng nếu XY là một cạnh, chẳng hạn là cạnh AB thì ZBCDE cũng là một ngũ giác lồi có các đỉnh có toạ độ đều nguyên và ta có thể lặp lại lý luận nêu trên đối với ngũ giác ZBCDE, … Ta có thể dùng *đơn biến* để chứng minh quá trình này không thể kéo dài mãi, và đến một lúc nào đó sẽ có 1 ngũ giác có điểm nguyên nằm trong.

Tuy nhiên, ta có thể trình bày lại lý luận này một cách gọn gàng như sau: Giả sử tồn tại một ngũ giác nguyên mà bên trong không chứa một điểm nguyên nào (phản ví dụ). Trong tất cả các ngũ giác như vậy, chọn ngũ giác ABCDE có diện tích nhỏ nhất (phản ví dụ nhỏ nhất). Nếu có nhiều ngũ giác như vậy thì ta chọn một trong số chúng. Theo lý luận đã trình bày ở câu a), tồn tại hai đỉnh X, Y có cặp toạ độ cùng tính chẵn lẻ. Trung điểm Z của XY sẽ có toạ độ nguyên. Vì bên trong ngũ giác ABCDE không có điểm nguyên nào nên XY phải là một cạnh nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là AB. Khi đó ngũ giác ZBCDE có toạ độ các đỉnh đều nguyên và có diện tích nhỏ hơn diện tích ngũ giác ABCDE. Do tính nhỏ nhất của ABCDE (phản ví dụ nhỏ nhất phát huy tác dụng!) nên bên trong ngũ giác ZBCDE có 1 điểm nguyên T. Điều này mâu thuẫn vì T cũng nằm trong ngũ giác ABCDE.

Bài tập

7. Giải phần c) của ví dụ 3.
8. (Định lý Bezout) Chứng minh rằng nếu (a, b) = 1 thì tồn tại u, v sao cho au + bv = 1.
9. Trên mặt phẳng đánh dấu một số điểm. Biết rằng 4 điểm bất kỳ trong chúng là đỉnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng tất cả các điểm được đánh dấu là đỉnh của một đa giác lồi.

Phản chứng trong các bài toán chứng minh sự không tồn tại

Phương pháp phản chứng thường hay được sử dụng trong các *bài toán bất biến* hoặc *bài toán phủ hình* để chứng minh sự không thực hiện được. Sau đây chúng ta xem xét 2 ví dụ như vậy.

Ví dụ 4. *Xét hình vuông 7×7 ô. Chứng minh rằng ta có thể xoá đi một ô để phần còn lại không thể phủ kín bằng 15 quân trimino kích thước 1×3 và 1 quân trimino hình chữ L.*

Ta chứng minh rằng nếu bỏ đi một ô ở góc trên bên trái thì phần còn lại không thể phủ được bằng các quân triminô đã cho.

Để làm điều này, ta đánh số các ô vuông như sau

1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1

Khi đó, nhận xét rằng 1 quân triminô kích thước 1×3 sẽ che 3 số 1, 2, 3 (nếu nó nằm ngang) hoặc 3 số giống nhau (nếu nó nằm dọc). Như vậy tổng các số mà một quân triminô 1×3 che luôn chia hết cho 3. Trong khi đó dễ thấy quân triminô hình chữ L che 3 số có tổng không chia hết cho 3.
Bây giờ giả sử ngược lại rằng hình vuông 7×7 bỏ đi ô ở góc trên bên trái có thể phủ được bằng 15 quân triminô 1×3 và 1 quân triminô hình chữ L thì theo lý luận trên, tổng số các số mà các quân triminô này che sẽ không chia hết cho 3. Điều này mâu thuẫn vì tổng các số trên các ô còn lại bằng

$$20 \times 1 + 14 \times 2 + 14 \times 3 = 90$$

chia hết cho 3!

Mâu thuẫn trên chứng tỏ điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. *Hình tròn được bởi 5 đường kính thành thành 10 ô bằng nhau. Ban đầu trong mỗi ô có 1 viên bi. Mỗi lần thực hiện, cho phép chọn 2 viên bi bất kỳ và di chuyển chúng sang ô bên cạnh, 1 viên theo chiều kim đồng hồ và 1 viên ngược chiều kim đồng hồ. Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện, ta có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô được không?*

Nếu làm thử thì chúng ta sẽ thấy rằng không thể thực hiện được yêu cầu. Chúng ta có thể cùng lắm là dồn 9 viên bi về 1 ô, còn 1 viên bi khác thì không thể dồn được. Nhưng làm thế nào để chứng minh điều này? Lời giải hóa ra là khá đơn giản. Ta sẽ dùng phản chứng kết hợp với bất biến.

Ta tô màu các ô bằng hai màu đen trắng xen kẽ nhau. Gọi S là tổng số viên bi nằm ở các ô đen thì ở trạng thái ban đầu ta có S = 5. Nếu giả sử ngược lại rằng ta có thể đưa các viên bi về cùng 1 ô thì ở trạng thái cuối cùng này, ta sẽ có S = 0 (nếu ta dồn các viên bi về một ô trắng) hoặc S = 10 (nếu ta dồn các viên bi về một ô đen).
Bây giờ ta sẽ thu được điều mâu thuẫn nếu ta chứng minh được qua các lần thực hiện thì tính chẵn lẻ của S sẽ không thay đổi, tức là nếu ban đầu S là số lẻ thì qua các lần thực hiện, S sẽ luôn là số lẻ (và sẽ không thể bằng 0 hoặc bằng 10).

Nếu nhận xét rằng các ô đen trắng xen kẽ nhau thì điều mà chúng ta cần chứng minh khá hiển nhiên và chúng tôi xin dành phép chứng minh chi tiết cho bạn đọc.

Bài tập

10. Hình vuông 5 x 5 bỏ đi ô ở gốc trên bên trái. Chứng minh rằng có thể phủ phần còn lại bằng 8 quân trimino hình chữ L nhưng không thể phủ được bằng 8 quân trimino hình chữ kích thước 1 x 3. Tìm tất cả các giá trị k sao cho có thể phủ phần còn lại bằng k quân trimino 1 x 3 và 8-k trimino hình chữ L.

11. Xét hình vuông 7×7 ô. Tìm tất cả các ô mà nếu ta xóa đi ô đó thì phần còn lại có thể phủ kín bằng 15 quân trimino kích thước 1×3 và 1 quân trimino hình chữ L.

12. Trên vòng tròn ban đầu theo một thứ tự tuỳ ý có 4 số 1 và 5 số 0. Ở khoảng giữa hai chữ số giống nhau ta viết số 1 và ở khoảng giữa hai chữ số khác nhau ta viết số 0. Các số ban đầu bị xoá đi. Hỏi sau một số lần thực hiện như vậy ta có thể thu được một bộ gồm 9 số 0?

13. Cho trước các hàm số $f_1(x) = x^2 + 2x$, $f_2(x) = x + 1/x$, $f_3(x) = x^2 - 2x$. Cho phép thực hiện các phép toán cộng hai hàm số, nhân hai hàm số, nhân một hàm số với một hằng số tuỳ ý. Các phép toán này có thể tiếp tục được thực hiện nhiều lần trên f_i và trên các kết quả thu được. Chứng minh rằng có thể thu được hàm số $1/x$ từ các hàm số f_1, f_2, f_3 bằng các sử dụng các phép toán trên nhưng điều này không thể thực hiện được nếu thiếu một trong 3 hàm f_1, f_2, f_3.

Phản chứng trong các bài toán bất đẳng thức

Trong chứng minh bất đẳng thức, phương pháp phản chứng thường dùng để đảo điều kiện và kết luận với nhau trong trường hợp điều kiện thì phức tạp, còn bất đẳng thức cần chứng minh thì đơn giản.

<u>Ví dụ 1.</u> Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ thì $a + b + c \le 3$.

<u>Ví dụ 2.</u> (IMO 2001) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

Để phá các căn thức, ta đặt:

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},\ y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}},\ z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}.$$

Rõ ràng $x, y, z \in (0, 1)$. Ta cần chứng minh rằng $x + y + z \ge 1$. Chú ý rằng

$$\frac{a^2}{8bc}=\frac{x^2}{1-x^2},\ \frac{b^2}{8ca}=\frac{y^2}{1-y^2},\ \frac{c^2}{8ab}=\frac{z^2}{1-z^2}\Rightarrow \frac{1}{512}=\frac{x^2}{1-x^2}.\frac{y^2}{1-y^2}.\frac{z^2}{1-z^2}$$

Như vậy, ta cần chứng minh rằng

$x + y + z \ge 1$, trong đó $x, y, z \in (0, 1)$ và $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = 512x^2y^2z^2$

Nhưng nếu $x + y + z < 1$ thì theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > ((x+y+z)^2-x^2)((x+y+z)^2-y^2)((x+y+z)^2-z^2)$

$= (y+z)(y+z+2x)(z+x)(z+x+2y)(x+y)(x+y+2z)$

$\ge 2(yz)^{1/2}.4(yzx^2)^{1/4}.2(zx)^{1/2}.4(zxy^2)^{1/4}.2(xy)^{1/2}.4(xyz^2)^{1/4} = 512x^2y^2z^2.$

Mâu thuẫn.

<u>Ví dụ 3.</u> Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 4. Đặt

$F_k = (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)(1+d^k)$

Chứng minh rằng $F_4 \ge F_3$.

Giả sử ngược lại, tồn tại bộ bốn số (a, b, c, d) thỏa mãn: a, b, c, d ≥ 0, a + b + c + d = 4 và $F_4 < F_3$ (1).

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $F_4F_2 \geq F_3^2$, $F_3F_1 \geq F_2^2$, $F_2F_0 \geq F_1^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $F_4 < F_3 < F_2 < F_1 < F_0 = 16$ (3). Từ (3) ta có $F_4 < 16$, suy ra max(a,b,c,d) < 2.

Để dẫn tới mâu thuẫn với (3), ta sẽ chứng minh $F_3 \geq F_1$ (4). Phần này chứng minh bằng dồn biến và được xem như một bài tập.

Ví dụ 4. (Cezar Lupu) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b + c + abc = 4. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.(a+b+c)$$

Giải.

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right) \geq (a+b+c)^2$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz

$$\sqrt{(a+b+c)(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b))} \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.(a+b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}}$$

Như vậy ta chỉ còn cần chứng minh a + b + c $\geq$ ab + bc + ca.

Bất đẳng thức Schur với r = 1 có thể viết dưới dạng

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$$

Bây giờ giả sử **ngược lại,** ta có a + b + c < ab + bc + ca thì

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2 > (a+b+c)(4-(a+b+c)) = abc(a+b+c)$$

Suy ra a + b + c < 3. Nhưng khi đó abc < 1 và suy ra 4 = a + b + c + abc < 4, mâu thuẫn.

Bài tập

14. (MOP) Cho $n \geq 2$ cố định. Cho $x_1, \ldots, x_n$ là các số dương thỏa mãn điều kiện

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{n-1+x_1}+\dfrac{1}{n-1+x_2}+\ldots+\dfrac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$

15. (Pu-Ro Loh) Cho *a, b, c > 1* thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1.$$

16. Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \ge 3abc.$$

17. (IMO 1991) Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác. Chứng minh rằng một trong các góc $\angle$PAB, PBC, PCA nhỏ hơn hoặc bằng 30^0.

Một số định lý và tính chất chứng minh bằng phương pháp phản chứng

Cuối cùng, ta sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh một số tính chất quan trọng trong chương trình toán Olympic.

Định lý.

a) *Nếu p là số nguyên tố dạng 4k+1 thì tồn tại x sao cho x^2 + 1 chia hết cho p;*
b) *Nếu p là số nguyên tố dạng 4k+3 thì không tồn tại x sao cho x^2 + 1 chia hết cho p.*
c) *Nếu p là số nguyên tố dạng 6k+1 thì tồn tại x sao cho x^2 + 3 chia hết cho p;*
d) *Nếu p là số nguyên tố dạng 6k+5 thì không tồn tại x sao cho x^2 + 3 chia hết cho p.*

<u>Chứng minh</u>

a) Giả sử ngược lại, không tồn tại x sao cho $x^2 + 1$ chia hết cho p. Xét a bất kỳ thuộc A = {1, 2, …, p-1}. Dễ dàng chứng minh được rằng tồn tại duy nhất m(a) thuộc A sao cho a.m(a) ≡ -1 (mod p). Hơn nữa, nếu a ≠ b thì m(a) ≠ m(b). Cuối cùng, do không tồn tại x để $x^2 + 1$ chia hết cho p nên a ≠ m(a). Như vậy các số 1, 2, …, p-1 được phân thành (p-1)/2 cặp (a, b) với a.b ≡ -1 (mod p). Nhân các đồng dư thức này lại với nhau, chú ký (p-1)/2 = 2k, ta có

$$(p-1)! \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod p$$

Điều này mâu thuẫn với định lý Wilson: (p-1)! ≡ -1 (mod p)!

b) Giả sử tồn tại x sao cho $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$

⇨ $x^2 \equiv -1 \pmod p$

⇨ $(x^2)^{2k+1} \equiv -1 \pmod p$ ⇔ $x^{4k+2} \equiv -1 \pmod p$

Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat, ta có

$$x^{4k+2} \equiv 1 \pmod p$$

Từ đây suy ra 2 ≡ 0 (mod p), mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là không tồn tại x sap cho $x^2 + 1$ chia hết cho p.

c) d) Được chứng minh tương tự dựa vào dãy mệnh đề tương đương sau
Phương trình đồng dư $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod p$ có nghiệm
⇔ Phương trình $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod p$ có nghiệm
⇔ Phương trình $x^3 \equiv 1 \pmod p$ có nghiệm $x \neq 1 \pmod p$.

Định lý.

Nếu f: R → R là một hàm cộng tính nhưng không tuyến tính, thì đồ thị G(f) = (x, f(x)) trù mật trong R^2.

Có nghĩa là nếu f(x+y) = f(x) + f(y) với mọi x, y thuộc R và không tồn tại a thuộc R sao cho f(x) = ax thì G(f) trù mật trong R^2.

Chứng minh. Giả sử f là một hàm cộng tính nhưng không tuyến tính. Ta đặt c = f(1) và chọn số thực α sao cho $f(\alpha) \neq c\alpha$. Ta xét hàm số g mới

$$g(x) = \frac{f(x) - cx}{f(\alpha) - c\alpha}.$$

Tính cộng tính của f suy ra g cũng cộng tính trên R. Hơn nữa g(1) = 0. Sử dụng tính cộng tính của g, ta suy ra rằng g(q) = qg(1) với mọi q hữu tỷ. Như vậy ta có g(q) = 0 với mọi q hữu tỷ.

Xét một đĩa $D_r(x, y)$ bất kỳ. Chọn số hữu tỷ q sao cho $|q-y| < r/2$ và số hữu tỷ p sao cho $|p - (x-q\alpha)| < r/2$. Khi đó ta có

$$(p + q\alpha - x)^2 + (q-y)^2 < r^2/4 + r^2/4 = r^2/2 < r^2.$$

Như vậy điểm $(p + q\alpha, q)$ nằm trong đĩa $D_r(x, y)$. Hơn nữa, theo tính cộng tính của g, ta có

$$g(p+q\alpha) = g(p) + qg(\alpha) = qg(\alpha) = q$$

Suy ra điểm $(p + q\alpha, q)$ nằm trên G(g), đồ thị của g.

Điều này chứng tỏ rằng mọi đĩa mở trong R^2 đều chứa một điểm nào đó của g. Ta và như vậy G(g) là trù mật trong R^2. Ta quay trở lại với f và sẽ sử dụng thông tin này. Ta có

$$f(x) = ug(x) + cx,$$

trong đó $u = f(\alpha) - c\alpha$. Xét đĩa $D_r(a, b)$ bất kỳ trong R^2. Xét đĩa D được cho bởi

$$D = D_s(a, (b-c\alpha)/u),$$

với $s = \sqrt{\dfrac{r^2}{2\beta}}, \beta = \max\{2u^2, 1 + 2c^2\}$.

Vì G(g) trù mật trong R^2, ta tìm được số thực y sao cho (y, g(y)) thuộc D. Bây giờ xét điểm (y, ug(y) + cy) thuộc G(f), phép kiểm tra trực tiếp cho thấy điểm này thuộc $D_r(a, b)$. Điều này chứng tỏ rằng G(f) trù mật trong R^2.

Định lý.

Cho f, g, h là các đa thức thuộc R[x] thoả mãn các điều kiện

i) deg(f) = deg(g) + deg(h)

ii) *deg(g) > deg(h) hoặc deg(g) = deg(h) và $g^* + h^* \neq 0$, trong đó g^*, h^* tương ứng là các hệ số cao nhất của g và h.*

Khi đó với mọi n nguyên dương, tồn tại không quá 1 đa thức P(x) có bậc n thoả mãn điều kiện

$P(f) = P(g)P(h)$.

Chứng minh:

Giả sử P là đa thức bậc n thoả mãn phương trình (1), deg(f) = f, deg(g) = g, deg(h) = h, các hệ số cao nhất của P, f, g, h tương ứng là P^*, f^*, g^*, h^*. So sánh hệ số cao nhất hai vế của các đa thức trong phương trình

$$P(f(x))P(g(x)) = P(h(x))$$

ta có $P^*(f^*)^n.P^*(g^*)^n = P^*(h^*)^n$ từ đó suy ra $P^* = (h^*/f^*g^*)^n$.

Như vậy, nếu giả sử ngược lại, tồn tại một đa thức Q bậc n (khác P) cũng thoả mãn phương trình (1) thì $Q^* = P^*$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x) \text{ với } 0 \leq r = \deg(R) < n$$

(ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất 0 bằng $-\infty$, do đó $\deg(R) \geq 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất 0)

Thay vào phương trình (1), ta được

$$(P(f) + R(f))(P(g) + R(g)) = P(h) + R(h)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(f)P(g) + P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = P(h) + R(h)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = R(h) \qquad (2)$$

Bây giờ ta xét các trường hợp

i) $\deg(f) \neq \deg(g)$. Giả sử f > g. Khi đó bậc của các đa thức ở vế trái (2) lần lượt là nf + rg, rf + ng, rf + rg, và do nf + rg > rf + ng > rf + rg nên vế trái có bậc là nf + rg. Trong khi đó vế phải có bậc là rh = r(f+g) < nf + rg. Mâu thuẫn.

ii) deg(f) = deg(g). Khi đó, hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) cùng có bậc là nf + rg = ng + rf và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của $x^{nf + rg}$ trong đa thức thứ nhất và thứ hai lần lượt bằng $P^*(f^*)^nR^*(g^*)^r$, $R^*(f^*)^rP^*(g^*)^n$. Như thế, bậc của x^{nf+rg} trong tổng hai đa thức bằng $P^*R^*f^{*r}g^{*r}(f^{*(n-r)}+g^{*(n-r)}) \neq 0$ do $f^* + g^* \neq 0$. Như vậy, bậc của vế trái của (2) vẫn là nf + rg, trong khi đó bậc của vế phải là rh = rf + rg < nf + rg. Mâu thuẫn.

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Bài tập

18. Chứng minh rằng các phương trình sau đây không có nghiệm nguyên dương

a) $4xy - x - y = z^2$;

b) $x^2 - y^3 = 7$.

19. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số f: N* → N* thoả mãn các điều kiện:

a) f(2) = 3;

b) f(mn) = f(m)f(n) với mọi m, n thuộc N*;
c) f(m) < f(n) với mọi m < n.

20. Hỏi có tồn tại hay không các số nguyên x, y, u, v, t thỏa mãn điều kiện sau
$x^2 + y^2 = (x+1)^2 + u^2 = (x+2)^2 + v^2 = (x+3)^2 + t^2$.

21. Chứng minh định lý sau**:** Cho f, g, h là các đa thức không hằng thỏa mãn điều kiện deg(f) + deg(g) = deg(h), Q là một đa thức cho trước. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a, tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: i) deg(P) = n, ii) P* = a iii) P(f)P(g) = P(h) + Q.

2. Quy nạp toán học

Quy nạp toán học là một trong những nét đặc trưng của suy luận trong toán học. Tư duy quy nạp rất cần thiết trong số học, đại số, tổ hợp, hình học và giải tích, nói chung là trong tất cả các lĩnh vực của toán học.

Quy nạp toán học và bất đẳng thức

Gặp các bất đẳng thức có nhiều biến số, ta có thể nghĩ ngay đến phép quy nạp toán học. Dĩ nhiên, việc áp dụng quy nạp thế nào luôn là cả một nghệ thuật.

Ví dụ 1. (Chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng quy nạp tiến).
Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Trong các tài liệu, bất đẳng thức này thường được chứng minh bằng *phép quy nạp lùi*, hay *quy nạp kiểu Cauchy*. Ở đây chúng ta trình bày một phép chứng minh khác.

Cơ sở quy nạp với n = 1, 2 được kiểm tra dễ dàng. Giả sử bất đẳng thức đã được chứng minh cho n số. Xét n+1 số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Đặt $a_1a_2\ldots a_{n+1} = A^{n+1}$. Nếu tất cả các số bằng nhau thì bất đẳng thức đúng. Trong trường hợp ngược lại, phải tồn tại hai số a_i, a_j sao cho $a_i < A < a_j$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_n < A < a_{n+1}$. Khi đó ta có $(a_n – A)(a_{n+1} – A) < 0$, suy ra $a_n + a_{n+1} > a_na_{n+1}/A + A$. Từ đó ta có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} > a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_na_{n+1}/A + A \quad (1)$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho *n* số $a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_na_{n+1}/A$ ta được

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}\frac{a_n a_{n+1}}{A}} = nA$$

Kết hợp với (1) ta được đpcm.

Ví dụ 2. *Cho $n \ge 2$* và c*ho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực thuộc [0, 1]. Chứng minh rằng*

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_3) + \ldots + x_n(1-x_1) \le [n/2]$$

Vấn đề ở bài toán này là bước chứng minh từ n → n+1 trong trường hợp n chẵn là không thể (do lúc đó vế phải không thay đổi và ta cần chứng minh phần *thay đổi* ở vế trái nhỏ hơn hay bằng 0:

$$x_n(1-x_{n+1}) + x_{n+1}(1-x_1) - x_n(1-x_1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_n(x_1-x_{n+1}) + x_{n+1}(1-x_1) \le 0$$

Rõ ràng biểu thức vế trái có thể nhận cả những giá trị dương và bước quy nạp của chúng ta không thực hiện được.

Ta có thể vượt qua được khó khăn này nếu thực hiện bước quy nạp *nhảy cách*, tức là từ n → n+2. Khi đó, do $[(n+2)/2] - [n/2] = 1$ nên ta cần chứng minh:

$$x_n(1-x_{n+1}) + x_{n+1}(1-x_{n+2}) + x_{n+2}(1-x_1) - x_n(1-x_1) \le 1.$$

Điều này tương đương với

$$A = x_n(x_1-x_{n+1}) + x_{n+1}(1-x_{n+2}) + x_{n+2}(1-x_1) \le 1.$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh được khá dễ dàng (chúng tôi dành cho bạn đọc).

Cuối cùng, ta cần chứng minh *cơ sở quy nạp*, trong trường hợp này là trường hợp n = 2 và n = 3.

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1) \le 1$$

và

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_3) + x_3(1-x_1) \le 1$$

Bất đẳng thức thứ nhất đúng do

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1) = 1 - (1-x_1)(1-x_2) - x_1x_2 \le 1$$

Bất đẳng thức thứ hai đúng do

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_3) + x_3(1-x_1) = 1 - (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) - x_1x_2x_3.$$

Chú ý rằng, trong phép chứng minh bất đẳng thức $A \le 1$ (phép chứng minh quy nạp) có thể sử dụng đến bất đẳng thức $x_1(1-x_2) + x_2(1-x_3) + x_3(1-x_1) \le 1$.

<u>Ví dụ 3.</u> *Cho $n \ge 2$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng*

$$(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \ldots + (x_n - x_1)^2 \ge 4n - 6$$

Ta thử xét bước quy nạp từ n → n+1. Khi đó vế phải thay đổi 4 đơn vị, trong khi thay đổi ở vế trái là

$$A = (x_n-x_{n+1})^2 + (x_{n+1}-x_1)^2 - (x_n - x_1)^2$$

Ta cần chứng minh $A \ge 4$.

Nếu nhìn kỹ lại bất đẳng thức cần chứng minh và các điều kiện ràng buộc thì ta thấy rằng bất đẳng thức $A \ge 4$ nói chung không đúng ! Vậy phải làm thế nào?

Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$A = x_{n+1}(2x_{n+1}-x_n-x_1) + 2x_1x_n$$

Bây giờ, ta mới chú ý đến hai tính chất quan trọng của bất đẳng thức ban đầu

1) Vế trái không thay đổi nếu ta cộng thêm vào mỗi số hạng x_i một đại lượng a cố định. Do đó ta có thể giả sử $x_{n+1} = 0$
2) Đây là bất đẳng thức hoán vị, do đó ta có thể giả sử $x_{n+1} = \min\{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$

Từ đây suy ra $A = 2x_1x_n \geq 2.2 = 4$ (vì x_1, $x_2 > 0$ là các số nguyên phân biệt nên x1x2 ≥ 1.2 = 2).

Bài toán được giải quyết.

<u>Ví dụ 4.</u> Cho các số dương a_1, a_2, …, a_n thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}-n \geq \frac{8(n-1)}{n^2}(1-a_1a_2\ldots a_n).$$

<u>Giải.</u>

Ta chứng minh kết quả tổng quát hơn

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}-n \geq m_n(1-a_1a_2\ldots a_n)$$

với mọi $m_n \leq \dfrac{8(n-1)}{n^2}$.

Với n = 1, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử bất đẳng thức đã đúng đến n = k, ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với n = k+1. Thật vậy, giả sử $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, suy ra $b = \dfrac{a_1+\ldots+a_k}{k} \leq 1$. Đặt $b_i = a_i/b$ suy ra $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = k$. Chú ý là

$$m_{k+1}b^{k+1}a_{k+1} \leq m_{k+1}b^k a_{k+1} \leq m_{k+1}\left(\frac{kb+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = m_{k+1} = \frac{8k}{(k+1)^2} \leq \frac{8(k-1}{k^2}$$

Do đó, sử dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\frac{1}{b_1}+\ldots+\frac{1}{b_k}-k \geq m_{k+1}b^{k+1}a_{k+1}(1-b_1\ldots b_k)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}-\frac{k}{b} \geq m_{k+1}b^k a_{k+1}(1-\frac{a_1\ldots a_k}{b^k})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}+m_{k+1}a_1\ldots a_k a_{k+1} \geq \frac{k}{b}+m_{k+1}b^k a_{k+1}$$

Cuối cùng, ta phải chứng minh

$$\frac{k}{b} + m_{k+1}b^k a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} - k - 1 - m_{k+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{b} + \frac{1}{a_{k+1}} - (k+1) \geq m_{k+1}(1 - b^k a_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{b} + \frac{1}{k+1-kb} - (k+1) \geq m_{k+1}(1 - b^k(k+1-kb))$$

$$\Leftrightarrow m_{k+1} \leq \frac{k(k+1)}{b(k+1-kb)(1+2b+\ldots+kb^{k-1})}$$

Bất đẳng thức này đúng vì $m_{k+1} \leq \frac{8k}{(k+1)^2}, b \leq 1, b(k+1-kb) \leq \frac{(k+1)^2}{4k}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập

1. Chứng minh rằng với $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}$$

2. Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên dương phân biệt thì ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^7 + a_i^5) \geq 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)^2$$

3. (Bất đẳng thức Mc-Lauflin) Với mọi số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ và $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ ta có bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k^2 \sum_{k=1}^{2n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{2k}b_{2k-1} - a_{2k-1}b_{2k})\right)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{2n} a_k b_k\right)^2$$

4. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

trong đó $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$.

5. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Chứng minh rằng
$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + na_1a_2\ldots a_n \geq n^2$.

6. Cho $n \geq 3$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ nguyên với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ (Ở đây $a_{n+1} = a_1$, $a_0 = a_n$). Chứng minh rằng khi đó ta có bất đẳng thức

$$2n \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \leq 3n - 2$$

Quy nạp trong số học

Quy nạp được sử dụng rộng rãi trong số học, đặc biệt là trong các bài toán về đồng dư, về bậc theo modulo m. Dưới đây ta xem xét một số ví dụ kinh điển.

Định lý nhỏ Fermat: Nếu *p* là số nguyên tố thì $a^p - a$ chia hết cho *p* với mọi *a* nguyên.

Định lý này có thể chứng minh bằng phép quy nạp toán học, sử dụng tính chất C_p^k chia hết cho p với mọi k = 1, 2, …, p-1.

Ví dụ 4. (VMO 1997) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n đều chọn được số nguyên dương k để $19^k - 97$ chia hết cho 2^n.

Với n = 1, n = 2 ta chọn k = 2 nên chỉ còn xét với n ≥ 3. Ta có nhận xét sau

$19^{2^{n-2}} - 1 = 2^n.t_n$ với t_n lẻ. (1)

Thật vậy, với n = 3, khẳng định 1 đúng. Giả sử khẳng định đúng với n. Khi đó

$19^{2^{n-1}} - 1 = (19^{2^{n-2}} - 1)(19^{2^{n-2}} + 1) = 2s_n 2^n t_n = 2^{n+1}(s_n t_n)$ với $(s_n t_n)$ lẻ.

Nhận xét được chứng minh.

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp. Với n = 3 đúng. Giả sử tồn tại k_n thuộc N* sao cho

$19^{k_n} - 97 = 2^n.a$

Nếu a chẵn thì $19^{k_n} - 97$ chia hết cho 2_{n+1}. Nếu a lẻ, đặt $k_{n+1} = k_n + 2^{n-2}$. Khi đó theo nhận xét ta có

$19^{k_{n+1}} - 97 = 19^{2^{n-2}}(19^{k_n} - 97) + 97(19^{2^{n-2}} - 1) = 2^n(19^{2^{n-2}}a + 97t_n)$

chia hết cho 2^{n+1} (đpcm).

Bài tập

4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n số n! thoả mãn điều kiện sau: với mọi ước số của nó, khác với n! có thể tìm được một ước số khác của n! sao cho tổng hai ước số đó lại là ước số của n!.

5. Chứng minh rằng nếu số nguyên dương N có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của ba số nguyên chia hết cho 3 thì nó cũng có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của ba số không chia hết cho 3.

6. Chứng minh rằng tồn tại vô số hợp số n sao cho $3^{n-1} - 2^{n-1}$ chia hết cho n.

Quy nạp trong các bài toán trò chơi

Các bài toán trò chơi chính là dạng toán sử dụng đến quy nạp toán học nhiều nhất. Chú ý là quy nạp toán học đầy đủ bao gồm hai phần: dự đoán công thức và chứng minh công thức và trong rất nhiều trường hợp, việc dự đoán công thức đóng vai trò then chốt.

<u>Ví dụ 5.</u> *Hai người A và B cùng chơi một trò chơi. Ban đầu trên bàn có 100 viên kẹo. Hai người thay phiên nhau bốc kẹo, mỗi lần được bốc k viên với k ∈ {1, 2, 6} . Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, người đi trước hay người đi sau?*

Ta sẽ không bắt đầu từ 100 viên kẹo mà bắt đầu từ những số kẹo nhỏ hơn. Giả sử ban đầu trên bàn có n viên kẹo. Nếu n = 1, 2, 6 thì rõ ràng người thứ nhất có chiến thuật thắng (ta gọi đơn giản là người thứ nhất thắng). Với n = 3 thì người thứ hai thắng, bởi người thứ nhất chỉ có thể bốc 1 hoặc 2 viên và tương ứng người thứ hai bốc 2 hay 1 viên để thắng. Với n = 4 người thứ nhất thắng bằng cách bốc 1 viên kẹo và đẩy người thứ hai vào thế thua. Tương tự, với n = 5 người thứ nhất thắng. Với n = 7, người thứ hai thắng vì cả ba cách đi có thể của người thứ nhất (bốc 1, 2, 6 viên) đều dẫn đến thế thắng cho người thứ hai (tương ứng còn 6, 5, 1 viên kẹo trên bàn), n = 8 người thứ nhất thắng …
Bằng cách lý luận tương tự như vậy, ta lập được bảng sau

n	1	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	**10**	11	12	13	**14**	15	16	**17**
KQ	1	1	**2**	1	1	1	**2**	1	1	**2**	1	1	1	**2**	1	1	**2**

Từ bảng kết quả, có thể dự đoán được là *người thứ nhất sẽ thắng nếu n có số dư là 1, 2, 4, 5, 6 trong phép chia cho 7, và người thứ hai sẽ thắng nếu n có số dư là 0, 3 trong phép chia cho 7.*

Sau khi có dự đoán ta tìm cách chứng minh chặt chẽ dự đoán của mình bằng phép quy nạp toán học. Đặt n = 7k+r với r = 1, 2, …, 6, 7 ta chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp theo k. Với k = 0 mệnh đề đã được kiểm chứng qua bảng trên.

Xét n = 7(k+1) + r với r = 1, 2, …, 6, 7
Nếu r = 1, 2, 6, người thứ nhất bốc tương ứng 1, 2, 6 viên để đưa về trường hợp trên bàn còn 7k+7 viên kẹo là thế thua cho người thứ hai (theo giả thiết quy nạp), vì thế người thứ nhất thắng.
Nếu r = 3, người thứ nhất có 3 cách bốc

+ Bốc 1 viên, còn 7(k+1) + 2 là thế thắng cho người thứ hai (ta vừa chứng minh ở trên)

+ Bốc 2 viên, còn 7(k+1) + 1, tương tự cũng là thế thắng cho người thứ hai

+ Bốc 6 viên, còn 7k + 4 viên là thế thắng của người thứ hai (theo giả thiết quy nạp).

Như vậy trường hợp này người thứ nhất thua.
Nếu r = 4, 5, người thứ nhất bốc tương ứng 1, 2 viên để đưa về trường hợp 7(k+1) + 3 là thế thua cho người thứ hai, và vì vậy người thứ nhất thắng.
Cuối cùng, trường hợp r = 7, người thứ nhất có 3 cách bốc

+ Bốc 1 viên, còn 7(k+1) + 6 là thế thắng cho người thứ hai (chứng minh ở trên)

+ Bốc 2 viên, còn 7(k+1) + 5 là thế thắng cho người thứ hai (chứng minh ở trên)

+ Bốc 6 viên, còn 7(k+1) + 1 là thế thắng cho người thứ hai (chứng minh ở trên)
Vậy người thứ nhất thua.

Như thế dự đoán của chúng ta đã được chứng minh hoàn toàn.

Vì 100 chia 7 dư 2 nên theo lý luận ở trên thì người thứ nhất có chiến thuật thắng.

Ví dụ 6. *Cậu bé và Freken Bock cùng chơi một trò chơi. Trên bàn có một số kẹo. Bước đi đầu tiên, cậu bé chia số kẹo thành 3 đống khác rỗng, sau đó Freken chọn ra 2 đống đưa cho Carlson, đống còn lại Freken lại chia ra thành 3 đống khác rỗng và cậu bé lại chọn ra hai đống đưa cho Carlson, đống còn lại chia thành 3 đống khác rỗng … Ai đến lượt mình không đi được nữa thì thua. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng nếu trên bàn có:*

a) *7 viên kẹo ;*
b) *9 viên kẹo ;*
c) *12 viên kẹo ;*
d) *14 viên kẹo ;*
e) *Một số kẹo bất kỳ.*

Bài tập

7. a) Trên bảng có số 2010. Hai người A và B cùng luân phiên thực hiện trò chơi sau: Mỗi lần thực hiện, cho phép xoá đi số N đang có trên bảng và thay bằng N-1 hoặc [N/2]. Ai thu được số 0 trước là thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, người đi trước hay người đi sau.
b) Cùng câu hỏi với luật chơi thay đổi như sau: Mỗi lần thực hiện, cho phép xoá đi số N đang có trên bảng và thay bằng N-1 hoặc [(N+1)/2].

8. Có bảng chữ nhật gồm m x n ô. Hai người A và B cùng luân phiên nhau tô màu các ô của bảng, mỗi lần tô các ô tạo thành một hình chữ nhật. Không được phép tô những ô đã tô. Ai phải tô ô cuối cùng là thua. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, người đi trước hay người đi sau?

9. An và Bình chơi trò đoán số. An nghĩ ra một số nào đó nằm trong tập hợp X = {1, 2, …, 144}. Bình có thể chọn ra một tập con bất kỳ A của X và hỏi « Số của bạn nghĩ có nằm trong A hay không ? ». An sẽ trả lời Có hoặc Không theo đúng sự thật. Nếu An trả lời có thì Bình phải trả cho An 2.000 đồng, nếu An trả lời Không thì Bình phải trả cho An 1.000 đồng. Hỏi Bình phải tốt ít nhất bao nhiêu tiền để chắc chắn tìm ra được số mà An đã nghĩ ?

Quy nạp trong bài toán đếm

Xây dựng công thức truy hồi là một trong những phương pháp quan trọng để giải bài toán đếm. Tư tưởng quy nạp ở đây rất rõ ràng: Để tìm công thức cho bài toán đếm với kích thước n, ta sử dụng kết quả của bài toán đếm tương tự với kích thước nhỏ hơn.

Ví dụ 7. (Bài toán chia kẹo của Euler)
Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \qquad (*)$$

Giải. Gọi số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên là $S(n, k)$. Dễ dàng thấy rằng $S(1, k) = 1$. Để tính $S(n, k)$, ta chú ý rằng (*) tương đương với

$$x_1 + ...+ x_{n-1} = k - x_n \quad (**)$$

Suy ra với x_n cố định thì số nghiệm của (**) là $S(n-1, k-x_n)$. Từ đó ta được công thức

$$S(n, k) = S(n-1, k) + S(n-1, k-1) + ...+ S(n-1, 0)$$

Đây có thể coi là công thức truy hồi tính $S(n, k)$. Tuy nhiên, công thức này chưa thật tiện lợi. Viết công thức trên cho $(n, k-1)$ ta được

$$S(n, k-1) = S(n-1, k-1) + S(n-1, k-2) + ...+ S(n-1, 0)$$

Từ đây, trừ các đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$S(n, k) - S(n, k-1) = S(n-1, k)$$

Hay $\quad S(n, k) = S(n, k-1) + S(n-1, k)$

Từ công thức này, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng $S(n, k) = C^k_{n+k-1}$.

Trong nhiều trường hợp, việc xét thêm các bài toán phụ sẽ giúp chúng ta thiết lập nên các hệ phương trình truy hồi, từ đó suy ra công thức truy hồi cho các bài toán chính.

Ví dụ 8. *Xét tập hợp $E = \{1, 2, \ldots, 2010\}$. Với tập con A khác rỗng của E, ta đặt*

$$r(A) = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{k-1}a_k$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là tất cả các phần tử của A xếp theo thứ tự giảm dần. Hãy tính tổng $S = \sum_{A\subset E} r(A)$.

Đặt $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $S_n = \sum_{A\subset E_n} r(A)$. Xét S_{n+1}, bằng cách chia các tập con của E_{n+1} thành 2 loại, loại không chứa n+1 và chứa n+1, *ta có*

$$S_{n+1} = \sum_{A\subset E_{n+1}} r(A) = \sum_{A\subset E_n} r(A) + \sum_{A\subset E_n} r(A\cup\{n+1\}) = \sum_{A\subset E_n} r(A) + \sum_{A\subset E_n} (n+1-r(A)) = (n+1)2^n.$$

Ghi chú. Đây là tình huống may mắn đặc biệt khi chúng ta truy hồi mà không truy hồi, nghĩa là ra được công thức tường minh luôn.

Ví dụ 9. *Có 2n người xếp thành 2 hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một số người (ít nhất 1) từ 2n người này, sao cho không có hai người nào đứng kề nhau được chọn. Hai người đứng kề nhau là hai người có số thứ tự liên tiếp trong một hàng dọc hoặc có cùng số thứ tự ở hai hàng.*

Gọi S_n là số cách chọn ra một số người từ 2n người xếp thành 2 hàng dọc và T_n là số cách chọn ra một số người từ 2n-1 người xếp thành 2 hàng dọc, trong đó khuyết một chỗ ở đầu của một hàng. Ta có $S_1 = 2$, $T_1 = 1$.

1	3			
2	4			

Hình 1. S_n với n = 5

1	2			

Hình 2. T_n với n = 5

Xét 2n người xếp thành 2 hàng dọc (như hình 1). Ta xét các cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau :

1) Người ở vị trí số 1 được chọn : Khi đó người ở vị trí số 2 và số 3 không được chọn → Có $T_{n-1} + 1$ cách chọn (+1 là do bổ sung cách chọn « không chọn gì cả »)
2) Người ở vị trí số 2 được chọn : Tương tự, có $T_{n-1} + 1$ cách chọn.
3) Cả hai người ở vị trí số 1 và số 2 đều không được chọn: Có S_{n-1} cách chọn.

Vậy ta có $S_n = S_{n-1} + 2T_{n-1} + 2$ (1).

Xét 2n-1 người xếp thành 2 hàng dọc (như hình 2). Ta xét các cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau :

1) Người ở vị trí số 1 được chọn : Khi đó người ở vị trí số 2 không được chọn → có $T_{n-1} + 1$ cách chọn
2) Người ở vị trí số 1 không được chọn : có S_{n-1} cách chọn.

Vậy ta có $T_n = S_{n-1} + T_{n-1} + 1$ (2)

Từ (1) ta suy ra $2T_{n-1} = S_n - S_{n-1} - 2$, $2T_n = S_{n+1} - S_n - 2$. Thay vào (2), ta được

$$S_{n+1} - S_n - 2 = 2S_{n-1} + S_n - S_{n-1} - 2 + 2$$

$$S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1} + 2$$

Từ đây dễ dàng tìm được

$$S_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} - 2}{2}$$

Bài tập

10. Tìm số cách lát đường đi kích thước 3 x 2n bằng các viên gạch kích thước 1 x 2.

11. Tìm số tất cả các bộ n số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sao cho

    (i) $x_i = \pm 1$ với i = 1, 2, …, n.

    (ii) $0 \le x_1 + x_2 + \ldots + x_r < 4$ với r = 1, 2, …, n-1 ;

    (iii) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 4$.

12. Trên bàn có 365 tấm bìa mà trên mặt úp xuống của nó có ghi các số khác nhau. Với 1.000 đồng An có thể chọn ba tấm bìa và yêu cầu Bình sắp xếp chúng từ trái sang phải sao cho các số viết trên chúng được xếp theo thứ tự tăng dần. Hỏi An, bỏ ra 2.000.000 có thể chắc chắn sắp xếp 365 tấm bìa sao cho các số được viết trên chúng được xếp theo thứ tự tăng dần hay không ?

13. (Bài toán con ếch, IMO 1979) Gọi A và E là hai đỉnh đối diện của một bát giác. Từ một đỉnh bất kỳ ngoại trừ E, con ếch nhảy đến hai đỉnh kề. Khi nó nhảy đến đỉnh E thì nó ngừng lại. Gọi a_n là số các đường đi khác nhau với đúng n bước nhảy và kết thúc tại E. Chứng minh rằng $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \dfrac{(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$.

Quy nạp và một số định lý trong tối ưu tổ hợp

Định lý 1. (Hall, 1935) Cho đồ thị hai phe X, Y. Với mỗi tập con A thuộc X, gọi G(A) là tập các đỉnh thuộc Y kề với một đỉnh nào đó thuộc A. Khi đó điều kiện cần và đủ để tồn tại một đơn ánh f: X → Y sao cho x kề f(x) là $|G(A)| \geq |A|$ với mọi A khác rỗng thuộc X.

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên: Nếu tồn tại đơn ánh f thì với mỗi A = $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ thuộc X, ta có G(A) chứa các phần tử phân biệt $f(x_1), \ldots, f(x_r)$, do đó $|G(A)| \geq r = |A|$.
Ta chứng minh điều kiện đủ bằng quy nạp theo |X|. Khi |X| = 1, khẳng định là hiển nhiên. Giả sử định lý đã đúng với các tập X với |X| < n. Giả sử bây giờ |X| = n. Ta xét hai trường hợp:
1) Giả sử với mọi $A \subset X$ ($A \neq X$), ta có $|G(A)| > |A|$. Chọn một phần tử x_0 bất kỳ thuộc X, theo điều kiện $|G(\{x_0\})| \geq 1$, do đó tồn tại y_0 thuộc Y kề với X. Ta đặt $f(x_0) = y_0$. Bây giờ xét X' = X \{x} và Y' = Y \ {y}, $A \subset X'$ và G'(A) là tập các đỉnh thuộc Y' kề với A. Khi đó $|G'(A)| \geq |G(A)| - 1 \geq |A|$. Vì |X'| < |X| nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh f: X' → Y' sao cho f(x) kề x với mọi x thuộc x'. Bổ sung thêm $f(x_0) = y_0$ ta được đơn ánh f: X → Y thỏa mãn yêu cầu định lý.
2) Trong trường hợp ngược lại, tồn tại $A \subset X$ ($A \neq X$) sao cho |G(A)| = |A|. Khi đó, do |A| < |X| nên tồn tại đơn ánh f: A → G(A). Xét X' = X \ A, Y' = Y \ G(A). Xét B thuộc X' và G(B) là tập các đỉnh thuộc Y' kề với B. Nếu |G(B)| < |B| thì ta có

$$|G(A \cup B)| = |G(A)| + |G(B)| < |A| + |B| = |A \cup B|$$

mâu thuẫn với điều kiện định lý. Như vậy ta có $|G(B)| \geq |B|$ với mọi B thuộc X'. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh g: X' → Y' sao cho g(x) kề với x. Như vậy, ta có thể xây dựng được đơn ánh h: X → Y sao cho h(x) kề với x: cụ thể h(x) = f(x) nếu x thuộc A và h(x) = g(x) nếu x thuộc X \ A.

Quan hệ $\leq$ trên tập hợp X được gọi là một *quan hệ thứ tự* nếu thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $x \leq x$ với mọi x thuộc X (tính phản xạ)
ii) Nếu $x \leq y$, $y \leq x$ thì x = y (tính phản xứng)
iii) Nếu $x \leq y$, $y \leq z$ thì $x \leq z$ (tính bắc cầu)

Một tập hợp mà trên đó xác định một quan hệ thứ tự được gọi là một *tập sắp thứ tự*.

Cho X là một tập sắp thứ tự, hai phần tử x và y thuộc X được gọi là *so sánh được* nếu $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Trong trường hợp ngược lại, ta nói x và y *không so sánh* được.

Một tập con C của X được gọi là một *xích* nếu hai phần tử bất kỳ thuộc C đều so sánh được. Một tập con A của X được gọi là một đối xích nếu hai phần tử bất kỳ thuộc A đều không so sánh được.

Phần tử x thuộc X được gọi là phần tử *cực đại* nếu từ $x \le y$ suy ra $y = x$. Phần tử x được gọi là *cực tiểu* nếu từ $y \le x$ suy ra $y = x$. Phần tử x thuộc X được gọi là *lớn nhất* nếu $x \ge y$ với mọi y thuộc X và được gọi là *nhỏ nhất* nếu $x \le y$ với mọi y thuộc X. Xích C được gọi là cực đại nếu như không tồn tại một xích C' chứa C với $|C'| > |C|$. Tương tự ta định nghĩa đối xích cực đại.

Định lý 2. (Dilworth 1950) Cho một tập sắp thứ tự X. Số phần tử lớn nhất của một đối xích của X bằng số nhỏ nhất các xích rời nhau hợp thành X.

Chứng minh 1. Gọi $M = \max\{|A| \mid A$ là đối xích$\}$ và m là số nhỏ nhất các xích rời nhau hợp thành X. Như vậy tồn tại đối xích A của X chứa M phần tử. Vì một xích chỉ chứa được nhiều nhất 1 phần tử của 1 đối xích nên rõ ràng ta có $m \ge M$.

Ta chứng minh $m \le M$ bằng quy nạp theo $|X|$. Gọi a là một phần tử cực đại của X và M là kích thước của đối xích lớn nhất trong $X' = X \setminus \{a\}$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp X' là hợp của M xích rời nhau $C_1, C_2, \ldots, C_M$. Ta cần chứng minh rằng hoặc X chứa đối xích với M+1 phần tử, hoặc X là hợp của M xích. Bây giờ, mọi đối xích kích thước M (M-đối xích) trong X' chứa một phần tử từ mỗi C_i. Gọi a_i là phần tử lớn nhất trong C_i thuộc vào một M-đối xích nào đó trong X'. Dễ dàng thấy rằng $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$ là một đối xích (nếu chẳng hạn $a_i < a_j$ thì vì a_j thuộc vào một M-đối xích nào đó và đối xích này lại chứa một phần tử b_i của C_i nên theo tính lớn nhất của a_i, ta có $b_i \le a_i < a_j$ điều này mâu thuẫn vì b_i và a_j cùng thuộc một đối xích). Nếu $A \cup \{a\}$ là một đối xích trong X thì ta có đpcm. Trong trường hợp ngược lại, ta có $a > a_i$ với i nào đó. Khi đó $K = \{a\} \cup \{x \in C_i : x \le a_i\}$ là một xích trong X và không có M-đối xích trong $X \setminus K$ (vì ai là phần tử lớn nhất của C_i tham gia trong các đối xích như vậy), vì thế $X \setminus K$ là hợp của M-1 xích.

Chứng minh 2. (Theo H. Tverberg 1967)

- Hiển nhiên ta có $m \ge M$.
- Ta chứng minh $M \ge m$ bằng quy nạp theo $|X|$.
- Điều này là hiển nhiên nếu $|X|=0$.
- Giả sử C là xích cực đại trong X.
- Nếu mọi đối xích trong X\C có nhiều nhất M-1 phần tử thì xong.
- Giả sử $\{a_1,\ldots, a_M\}$ là một đối xích trong P\C.
- Định nghĩa $S^- = \{x \in X: \exists i\, [\, x \le a_i]\}$, $S^+ \{x \in X: \exists i\, [\, a_i \le x]\}$
- Vì C là cực đại, phần tử lớn nhất của C không nằm trong S^-.
- Theo giả thiết quy nạp, định lý đúng với S^-.
- Vì thế, S^- là hợp của M xích rời nhau $S^-_1, \ldots, S^-_M$, trong đó $a_i \in S^-_i$.
- Giả sử rằng $x \in S^-_i$ và $x > a_i$. Nếu như tồn tại a_j với $x \le a_j$, ta sẽ có $a_i < x \le a_j$. Mâu thuẫn. Vì vậy a_i là phần tử lớn nhất trong S^-_i , i=1,…,M.
- Làm tương tự đối với S^+_i, ta có ai là phần tử nhỏ nhất trong S^+_i.
- Kết hợp các xích lại ta có điều phải chứng minh.

3. Nguyên lý Dirichlet

Nguyên lý Dirichlet ở dạng cổ điển thường được dùng để chứng minh tồn tại theo kiểu không xây dựng (non-constructive), tức là biết đối tượng tồn tại nhưng không chỉ ra cụ thể.

Nguyên lý Dirichlet trong số học

Trong số học, nguyên lý Dirichlet thường liên quan đến các bài toán chia hết, nguyên tố cùng nhau. Ví dụ các bài toán kinh điển sau.

Ví dụ 1. *Chọn ra n+1 số từ 2n số nguyên dương đầu tiên.*

a) *Chứng minh rằng trong các số được chọn, có hai số phân biệt x, y nguyên tố cùng nhau.*
b) *Chứng minh rằng trong các số được chọn, có hai số x > y mà x chia hết cho y.*

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng từ n số nguyên bất kỳ luôn có thể chọn ra một số hoặc một số số có tổng chia hết cho n.*

Ví dụ 3. (Định lý Fermat-Euler về tổng hai bình phương)
Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố dạng 4k+1 thì tồn tại các số nguyên a, b sao cho $p = a^2 + b^2$.

Chứng minh. Vì p có dạng 4k+1 nên theo kết quả của định lý ở phần đầu, tồn tại số nguyên N sao cho $N^2 + 1$ chia hết cho p, hay nói cách khác, $N^2 \equiv -1 \pmod p$. Xét các số dạng x + Ny với x, y là các số nguyên thuộc $[0,[\sqrt{p}]]$. Có tất cả $([\sqrt{p}]+1)^2$ số như vậy. Vì $([\sqrt{p}]+1)^2 > p$ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai cặp số $(x, y) \neq (x', y')$ sao cho $x + Ny \equiv x' + Ny' \pmod p$. Từ đây suy ra

$$x - x' \equiv N(y' - y) \pmod p$$

$$\Rightarrow \quad (x - x')^2 \equiv N^2(y' - y)^2 \pmod p$$

Bây giờ, nhớ lại rằng $N^2 \equiv -1 \pmod p$, ta suy ra

$$(x - x')^2 \equiv -(y' - y)^2 \pmod p$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x')^2 + (y' - y)^2 \equiv \pmod p$$

Cuối cùng, chú ý rằng $0 < (x - x')^2 + (y' - y)^2 < 2p$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Ngoài kỹ thuật kinh điển với chuồng và thỏ, ta có thể sử dụng một biến thể của nguyên lý Dirichlet như sau:

Tính chất. Nếu A, B là các tập hợp thoả mãn điều kiện $|A| + |B| > |A \cup B|$ thì $A \cap B \neq 0$.

Sau đây là một áp dụng của tính chất này.

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố dạng 4k+3 thì tồn tại các số nguyên x, y sao cho $x^2 + y^2 + 1$ chia hết cho p.*

Chứng minh. Đặt $r_i = i^2 \bmod p$ với i = 1, 2, …, (p-1)/2 và $s_i = -1 - i^2 \bmod p$, i = 1, 2, …, (p-1)/2 thì dễ dàng chứng minh được rằng r_i đôi một phân biệt và s_i đôi một phân biệt. Hơn nữa, r_i và s_i đều thuộc {1, 2, …, p-1}.
Đặt $A = \{r_1, \dots, r_{(p-1)/2}\}$, $B = \{s_1, \dots, s_{(p-1)/2}\}$ thì $|A| = |B| = (p-1)/2$ và $|A \cup B| \le p-1$. Xảy ra hai trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $| A \cup B | < p-1$ thì theo tính chất nên trên, ta có $A \cap B \neq \emptyset$, tức là tồn tại i, j sao cho $r_i = s_j$, tương đương với $i^2 \equiv -1- j^2 \pmod p$ $\Leftrightarrow$ $i^2 + j^2 + 1$ chia hết cho p (đpcm).
Trường hợp 2. Nếu $| A \cup B | = p-1$ thì $A \cap B = \emptyset$ và như vậy, các số $r_1, r_2, \dots, r_{(p-1)/2}, s_1, s_2, \dots, s_{(p-1)/2}$ đôi một phân biệt và ta có

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{(p-1)/2} + s_1 + s_2 + \dots + s_{(p-1)/2} = 1 + 2 + \dots + p-1 \equiv 0 \pmod p$$

Điều này mâu thuẫn vì theo định nghĩa của r_i và s_i, ta có

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{(p-1)/2} + s_1 + s_2 + \dots + s_{(p-1)/2} \equiv 1^2 + 2^2 + \dots + [(p-1)/2]^2 + (-1-1^2) + \dots + (-1 - [(p-1)/2]^2) \equiv -(p-1)/2 \pmod p.$$

Vậy trường hợp 2 không xảy ra, và như thế ta rơi vào trường hợp 1. Ta có điều phải chứng minh.

Ghi chú. Lý luận A v B và không B suy ra A được gọi là *Tam đoạn luận rời*.

Bài tập

1. Xét dãy số Fibonacci xác định bởi $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n \ge 2$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m > 1. Tồn tại vô số số hạng của dãy số chia hết cho m.

2. Từ khoảng $(2^{2n}, 2^{3n})$ chọn ra $2^{2n-1}+1$ số lẻ. Chứng minh rằng trong các số được chọn, tồn tại hai số mà bình phương mỗi số không chia hết cho số còn lại.

3. a) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương n sao cho $10^n + 1$ chia hết cho 2003.
b) Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho $10^m + 10^n + 1$ chia hết cho 2003.

4. (Vietnam TST 2001) Dãy số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ thoả mãn điều kiện $1 \le a_{n+1} - a_n \le 2001$ với mọi n = 1, 2, 3, … Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số p, q sao cho q > p và a_q chia hết cho a_p.

Nguyên lý Dirichlet trong đại số

Trong đại số nguyên lý Dirichlet được thể hiện qua tính chất cơ bản sau: *Nếu trên đoạn [a, b] có n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 2$) thì tồn tại các chỉ số $i \neq j$ sao cho $|x_i - x_j| \leq (b-a)/(n-1)$.*

Ví dụ 5. *Giữa 7 số thực bất kỳ luôn tìm được 2 số x và y sao cho* $0 < \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. ". Gọi các số đã cho là $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Với mỗi số thực a, tồn tại số α thuộc khoảng $(-\pi/2, \pi/2)$ sao cho $a = tg(\alpha)$. Giả sử $a_1 = tg(\alpha_1)$, $a_2 = tg(\alpha_2)$, …, $a_7 = tg(\alpha_7)$. Theo tính chất nêu trên, trong 7 số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ tồn tại hai số có hiệu không vượt quá $\pi/6$. Giả sử hai số này là α và β, trong đó $\alpha > \beta$. Khi đó

$$0 < \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)tg(\beta)} = tg(\alpha - \beta) \leq tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Như vậy các số $x = tg(\alpha)$ và $y = tg(\beta)$ là các số cần tìm.
Định lý Kronecker về sự trù mật là một định lý có nhiều ứng dụng trong giải tích, đại số, giải tích phức. Dưới đây ta xét chứng minh rất sơ cấp của định lý này (ở dạng tương đương)

Định lý Kronecker. *Nếu α là số vô tỷ thì tập hợp $S = \{ \{n\alpha\} \mid n \in N^* \}$ trù mật trong [0, 1].*
Chứng minh. Ta cần chứng minh rằng với mọi khoảng $(a, b) \subset [0, 1]$, tồn tại số nguyên dương n sao cho $\{n\alpha\} \in (a, b)$.

Trước hết, ta tìm số nguyên dương N sao cho $N > 1/(b-a)$. Bây giờ xét N+1 số $\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, …, $\{(N+1)\alpha\}$ thuộc đoạn [0, 1]. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số $\{p\alpha\}$, $\{q\alpha\}$ với $1 \leq p < q \leq N+1$ sao cho $|\{p\alpha\} - \{q\alpha\}| \leq 1/N$.

Để ý rằng $\{q\alpha\} - \{p\alpha\} = q\alpha - [q\alpha] - p\alpha + [p\alpha] = (q-p)\alpha - [q\alpha] + [p\alpha]$. Do đó nếu $\{q\alpha\} - \{p\alpha\} > 0$ thì $\{(q-p)\alpha\} = \{q\alpha\} - \{p\alpha\}$, còn nếu $\{q\alpha\} - \{p\alpha\} < 0$ thì $\{(q-p)\alpha\} = 1 - (\{q\alpha\} - \{p\alpha\})$

Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1. $1/N > \{q\alpha\} - \{p\alpha\} > 0$. Khi đó đặt $k = q - p$, ta tìm được số nguyên dương k sao cho $0 < \{k\alpha\} < 1/N$.

Bây giờ ta gọn m là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $m\{k\alpha\} > a$ thì ta có $(m-1)\{k\alpha\} \leq a$. Do đó $m\{k\alpha\} \leq a + \{k\alpha\} < a + 1/N < b$. Suy ra $m\{k\alpha\} \in (a, b) \subset [0, 1]$.

Nhưng $mk\alpha = m[k\alpha] + m\{k\alpha\}$. Do $0 < m\{k\alpha\} < 1$ nên từ đây ta có $\{mk\alpha\} = m\{k\alpha\}$. Đặt n = mk, ta có $\{n\alpha\} \in (a, b)$ (đpcm).

Trường hợp 2. $0 > \{q\alpha\} - \{p\alpha\} > -1/N$. Khi đó đặt $k = q - p$, ta tìm được số nguyên dương k sao cho $1 - 1/N < \{k\alpha\} < 1$. Đặt $\beta = 1 - \{k\alpha\}$ thì $0 < \beta < 1/N$. Chứng minh tương tự như trên, ta tìm được số nguyên dương m sao cho $m\beta$ thuộc (1-b, 1-b), tức là

$$1 - b < m(1 - \{k\alpha\}) < 1 - a$$

$$\Leftrightarrow \quad a < m\{k\alpha\} - m + 1 < b$$

$$\Leftrightarrow \quad a < \{m\{k\alpha\}\} < b$$

Cuối cùng, ta có $mk\alpha = m[k\alpha] + m\{k\alpha\}$ nên $\{mk\alpha\} = \{m\{k\alpha\}\}$ nên đặt n = mk ta có điều phải chứng minh.

Một tình huống rất đơn giản khác của nguyên lý Diriclet lại có những ứng dụng rất hiệu quả trong nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức có điều kiện. Đó là chú ý sau: *Với m là một số thực cho trước và $n \geq 3$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bất kỳ thì luôn tìm được hai số trong các số này nằm cùng một phía đối với m.*

Gọi hai số đó là x và y thì ta có bất đẳng thức hiển nhiên sau: $(x-m)(y-m) \geq 0$, từ đó $xy + m^2 \geq m(x+y)$. Như vậy, ta đã so sánh được hai đại lượng không cùng bậc với nhau. Sau đây chúng ta sẽ xem xét một số ví dụ áp dụng.

Ví dụ 6. *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x + y + z + 1 = 4xyz$. Chứng minh rằng*

$$xy + yz + zx \geq x + y + z.$$

Ý tưởng đầu tiên ta nghĩ đến là xử lý điều kiện bằng phép thế $z = \frac{x+y+1}{4yz-1}$ vào bất đẳng thức cần chứng minh, viết lại thành

$$\frac{x+y+1}{4xy-1}(x+y-1) \geq x+y-xy$$

Đến đây, đường lối chứng minh đã hình thành. Vế trái rõ ràng ≥ 1 với mọi x, y còn vế phải sẽ ≤ 1 nếu x, y nằm cùng phía nhau đối với 1. Nhưng điều này, theo nhận xét đơn giản ở trên ta luôn có thể chọn được.

Ví dụ 7. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có

$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + 1 + 1)(1 + b^2 + c^2) = (a^2 + 2)(b^2 + c^2 + 1)$. Như vậy ta chỉ còn cần chứng minh

$$(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(b^2 + c^2 + 1)$$

$\Leftrightarrow \qquad (b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$

Điều này luôn có được nếu ta chọn b^2, c^2 cùng phía nhau đối với 1.

Bài tập

5. Cho a, b, c > 0, x = a + 1/b, y = b + 1/c, z = c + 1/a. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq 2(x+y+z)$$

6. (USA MO 2001) Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

7. Với i = 1, 2, …, 7 các số a_i, b_i là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a_i + b_i \leq 2$. Chứng minh rằng tồn tại các chỉ số $i \neq j$ sao cho $|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \leq 1$.

8. (VMO 1996) Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx + xyz = 4. Chứng minh rằng

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

9. Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho $xyz + 2 + k[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \geq x + y + z$ với mọi x, y, z > 0.

Nguyên lý Dirichlet trong tổ hợp

Tổ hợp là mảnh đất màu mỡ nhất cho các phương pháp và kỹ thuật chứng minh. Và nguyên lý Dirichlet không phải là một ngoại lệ. Trong tổ hợp, một đặc điểm đặc trưng là sự bùng nổ tổ hợp của các trường hợp, vì vậy, nguyên lý Dirichlet cùng với các nguyên lý khác như nguyên lý cực hạn, nguyên lý bất biến chính là những công cụ quan trọng để chúng ta định hướng trong "biển" các trường hợp.

Nguyên lý Dirichlet thường được sử dụng trong các bài toán đồ thị, tô màu, các bài toán về thi đấu thể thao (đồ thị có hướng), quen nhau (đồ thị vô hướng).

<u>Ví dụ 8.</u> *Trong một giải bóng chuyền có 8 đội tham gia, thi đấu vòng tròn 1 lượt. Chứng minh rằng tìm được 4 đội A, B, C, D sao cho A thắng B, C, D, B thắng C, D và C thắng D.*

Trong bóng chuyền không có hoà, do đó 8 đội thi đấu vòng tròn 1 lượt thì sẽ có tất cả 28 trận thắng. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại đội bóng A có ít nhất 4 trận thắng. Xét 4 đội thua A. 4 đội này đấu với nhau 6 trận, do đó tồn tại một đội thắng ít nhất 2 trận (trong số các trận đấu giữa 4 đội này với nhau). Giả sử đó là B và C, D là 2 đội thua B. Cuối cùng, nếu C thắng D thì A, B, C, D là 4 đội cần tìm, còn nếu D thắng C thì 4 đội cần tìm là A, B, D, C.

Bài toán Ramsey là một trong những bài toán kinh điển mà những trường hợp cơ sở của nó rất thú vị và phù hợp với mức độ toán sơ cấp.

Ví dụ 9. *Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ có 3 người đôi một quen nhau hoặc 3 người đôi một không quen nhau.*

Hai người bất kỳ có thể quen nhau hoặc không quan nhau. Xét một người A bất kỳ thì có 5 người khác hoặc quen A hoặc không quen A. Do đó, theo nguyên lý Dirichlet, phải xảy ra một trong hai trường hợp:

1) A quen ít nhất 3 người
2) A không quen ít nhất 3 người

Ta xét trường hợp thứ nhất: A quen với ít nhất 3 người, chẳng hạn B, C, D. Nếu trong 3 người B, C, D có ít nhất một cặp quen nhau, chẳng hạn B quen C thì ta có A, B, C đôi một quen nhau. Trong trường hợp ngược lại, ta có B, C, D đôi một không quen nhau.

Trường hợp thứ hai được xét hoàn toàn tương tự. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 10. *Trong một nhóm gồm 2n+1 người với mỗi n người tồn tại một người khác n người này quen với tất cả họ. Chứng minh rằng trong nhóm người này có 1 người quen với tất cả mọi người.*

Ta chứng minh rằng trong nhóm người này có n+1 người đôi một quen nhau. Rõ ràng có 2 người quan nhau và nếu như có k người đôi một quen nhau (trong đó $k \le n$) thì tồn tại một người khác trong số họ quen với k người này. Từ đó suy ra tồn tại n+1 người đôi một quen nhau $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$.

Xét n người còn lại. Theo điều kiện,tồn tại một người A_i quen với tất cả n người này. Nhưng khi đó A_i quen với tất cả mọi người.

Bí quyết thành công của nguyên lý Dirichlet chính là kỹ thuật "xây chuồng" và "tạo thỏ". Trong nhiều bài toán, chuồng là gì, thỏ là gì khá rõ ràng, nhưng trong nhiều bài toán, xây chuồng và tạo thỏ là cả một sự tinh tế. Ta phải biết "chọn các thành phần chính" và "hướng đến mục tiêu".

Ví dụ 11. *Các số từ 1 đến 200 được chia thành 50 tập hợp. Chứng minh rằng trong một các tập hợp đó có ba số là độ dài 3 cạnh của một tam giác.*

Thoạt nhìn bài toán có vẻ khá rối. Nhưng nếu để ý rằng với $0 < a < b < c$ thì điều kiện cần và đủ để a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác là $a + b > c$ thì bài toán trở nên đơn giản hơn. Rõ ràng nếu chỉ xét các số từ 100 đến 200 thì ba số bất kỳ đều là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác ($a + b \ge 100 + 101 = 201 > c$). Từ đó chỉ cần xét 101 con thỏ là các số từ 100 đến 200 rồi áp dụng nguyên lý Dirichlet cho 50 cái chuồng tập hợp là xong. Ở đây, rõ ràng các số từ 1 đến 99 chỉ có tác dụng gây nhiễu.

Ví dụ 12. *Trên bàn cờ quốc tế có 8 quân xe, đôi một không ăn nhau. Chứng minh rằng trong các khoảng cách đôi một giữa các quân xe, có hai khoảng cách bằng nhau. Khoảng* *cách giữa hai quân xe bằng khoảng cách giữa tâm các ô vuông mà quân các quân xe đứng.*

Trước hết ta mô hình hoá bài toán. Để ý rằng khoảng cách giữa ô (p, q) và ô (m, n) bằng $(p-m)^2 + (q-n)^2$. Ta cần chứng minh rằng nếu $p_1, p_2, \ldots, p_8$ là một hoán vị của (1, 2, 3, …, 8) thì tồn tại các tập chỉ số $\{m, n\} \neq \{p, q\}$ sao cho $(m-n)^2 + (p_m-p_n)^2 = (p-q)^2 + (p_p - p_q)^2$.

8 quân xe tạo ra 28 khoảng cách. Nhưng nếu ta tìm 2 khoảng cách bằng nhau giữa cả 28 quân xe này thì ta sẽ gặp khó khăn. Ta giới hạn trong việc tìm các cặp chỉ số dạng {n, n+1}. Có 7 cặp như vậy. Khi đó, ta chỉ cần tìm $n \neq m$ sao cho $(p_{n+1}-p_n)^2 = (p_{m+1}-p_m)^2$. Vì $1 \le p_i \le 8$ nêu $(p_{n+1}-p_n)^2$ chỉ có thể là 1 trong 7 giá trị $1^2, 2^2, \ldots, 7^2$. Vì thế chỉ có thể xảy ra hai trường hợp.

<u>Trường hợp 1.</u> Tồn tại $n \neq m$ sao cho $(p_{n+1}-p_n)^2 = (p_{m+1}-p_m)^2$. Khi đó các cặp quân xe tại ô (n, p_n), $(n+1, p_{n+1})$ và (m, p_m), $(m+1, p_{m+1})$ là các cặp xe cần tìm.

<u>Trường hợp 2</u>. Các số $(p_{n+1}-p_n)^2$ đôi một phân biệt. Khi đó tồn tại n sao cho $(p_{n+1}-p_n)^2 = 4$.

Lúc này, xoay hàng thành cột, ta lại đi đến việc hoặc tồn tại $n \neq m$ sao cho $(q_{n+1}-q_n)^2 = (q_{m+1}-q_m)^2$ hoặc tồn tại k sao cho $(q_{k+1}-q_k)^2 = 2^2$. Trong trường hợp thứ nhất, bài toán được giải quyết tương tự như trường hợp 1 ở trên. Trong trường hợp thứ hai, các quân xe tại ô (n, p_n), $(n+1, p_{n+1})$ và $(q_{k+1}, k+1)$, (q_k, k) là các cặp xe cần tìm.

Bài tập

10. Các số 1, 2, 3, …, 100 có thể là thành viên của 12 cấp số nhân nào đó được không?

11. Trong một đa giác lồi có chứa không ít hơn m^2+1 điểm nguyên. Chứng minh rằng trong đa giác lồi này tìm được m+1 điểm nguyên cùng nằm trên một đường thẳng.

12. Chứng minh rằng trong 9 người bất kỳ, hoặc có 3 người đôi một quen nhau, hoặc có 4 người đôi một không quen nhau.

13. Chọn ra 69 số nguyên dương từ tập hợp E = {1, 2, …, 100}. Chứng minh rằng tồn tại 4 số $a < b < c < d$ trong 4 số được chọn sao cho $a + b + c = d$. Kết luận bài toán còn đúng không nếu ta thay 69 bằng 68?

14. Các ô vuông của bảng 100 x 100 được tô bằng 4 màu sao cho trên mỗi hàng và trên mỗi cột có đúng 25 ô có cùng một màu. Chứng minh rằng tồn tại 2 dòng và 2 cột sao cho bốn ô nằm ở giao của chúng được tô khác màu.

15. (Bulgarian MO 2005) Trong 9 người không có 4 người nào đôi một quen nhau. Chứng minh rằng có thể chia 9 người này thành 4 nhóm sao cho trong mỗi nhóm không có người nào quen nhau.

Nguyên lý Dirichlet trong hình học

Trong hình học, nguyên lý Dirichlet thường được sử dụng trong các bài toán liên quan đến độ dài cạnh, diện tích, độ lớn của góc, các bài toán trên lưới nguyên. Ở đây chúng tôi chỉ giới hạn trong việc giới thiệu một ứng dụng đẹp của nguyên lý Dirichlet về "chồng hình" trong hình học và một số bài tập.

Định lý Minkowsky là một ví dụ rất thú vị về ứng dụng của hình học trong lý thuyết số. Chúng ta bắt đầu từ một kết quả rất đơn giản nhưng hữu ích

Bổ đề 1. *Trên mặt phẳng cho hình F có diện tích lớn hơn 1. Khi đó tồn tại hai điểm A, B thuộc F, sao cho véc tơ* $\overrightarrow{AB}$ *có tọa độ nguyên.*

Chứng minh: Lưới nguyên cắt hình G thành các mẩu nhỏ. Chồng các mẩu này lên nhau, do tổng diện tích của các mẩu lớn hơn 1, nên có ít nhất 2 mẩu có điểm chung (đây chính là một biến thể của nguyên lý Dirichlet). Gọi A, B là hai điểm nguyên thuỷ ứng với điểm chung này thì A, B là hai điểm cần tìm.

Bổ đề 2. *(Bổ đề Minkowsky) Trên mặt phẳng cho hình lồi F nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng và có diện tích lớn hơn 4. Khi đó nó chứa một điểm nguyên khác gốc tọa độ.*

Chứng minh: Xét phép vị tự tâm O, tỷ số 1/2 , biến F thành G. Do G có diện tích lớn hơn 1 nên theo bổ đề 1, tồn tại hai điểm A, B thuộc G sao cho véc-tơ AB có toạ độ nguyên. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Do hình G đối xứng qua gốc toạ độ nên A' thuộc G. Do G lồi nên trung điểm M của A'B thuộc G. Gọi N là điểm đối xứng của O qua M thì N thuộc F và ON = AB, suy ra N là điểm nguyên khác O (đpcm).

Định lý 3. *(Định lý Minkowsky) Cho a, b, c là các số nguyên, trong đó* $a > 0$ *và* $ac - b^2 = 1$. *Khi đó phương trình* $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ *có nghiệm nguyên.*

Bài tập

15. Với giá trị nào của n tồn tại n điểm $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sao cho tất cả các góc $M_iM_jM_k$ đều không tù?

16. Cho 9 điểm nằm trong hình vuông cạnh 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho có diện tích không vượt quá 1/8.

Đọc thêm bài *Nguyên lý chuồng và thỏ*

4. Đếm bằng hai cách

Đếm bằng hai cách là một kỹ thuật thông dụng để tạo ra các phương trình, đẳng thức, các mối liên hệ giúp chúng ta giải quyết các bài toán phương trình, tính toán hình học, phương trình hàm, bất đẳng thức và đặc biệt là các bài toán tổ hợp, trong đó có bài toán đếm.

Đếm bằng hai cách và phương trình hàm

(Xem bài *Giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình*)

Đếm bằng hai cách trong chứng minh bất đẳng thức

Trong chứng minh bất đẳng thức, đếm bằng hai cách thường được sử dụng để xử lý một số tổng. Dưới đây ta xem xét hai ví dụ.

Ví dụ 1. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất giữa n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$(n-1)d \leq \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j| \leq \frac{n^2 d}{4}$$

Giải.
Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ và đặt $d_i = x_{i+1} - x_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. thì $d_i \geq 0$ và $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1}$. Với $i < j$ ta có $|x_i - x_j| = d_i + \ldots + d_{j-1}$
Mỗi d_k sẽ có mặt trong tổng $d_i + \ldots + d_{j-1}$ nếu $i \leq k$ và $j-1 \geq k$, tức là trong $k(n-k)$ tổng. Từ đó suy ra

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j| = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k$$

Bây giờ chú ý $n-1 \leq k(n-k) \leq n^2/4$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n-1$, ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 2. Trong các ô của hình vuông 10 x 10 ta điền các số từ 1 đến 100 như sau: ở hàng thứ nhất điền các số từ 1 đến 10 từ trái sang phải, ở hàng thứ hai điền các số từ 11 đến 20 từ trái sang phải … An dự định cắt hình vuông thành các hình chữ nhật 1 x 2, lấy tích của hai số ở trên một hình chữ nhật và cộng tất cả các kết quả thu được với nhau. An muốn cho tổng thu được là nhỏ nhất có thể. Hỏi An phải cắt thế nào để đạt được điều đó.
Giải.
Gọi (a_i, b_i) $i = 1, 2, \ldots, 50$ là bộ số ở các ô mà An dự định cắt. Ta có

$$\sum_{i=1}^{50} a_i b_i = \sum_{i=1}^{50} \frac{a_i^2 + b_i^2 - (a_i - b_i)^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{50}(a_i^2 + b_i^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{50}(a_i - b_i)^2$$

Tổng $\sum_{i=1}^{50}(a_i^2 + b_i^2)$ bằng tổng bình phương các số từ 1 đến 100, do đó không đổi. Như vậy

$\sum_{i=1}^{50} a_i b_i$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sum_{i=1}^{50}(a_i - b_i)^2$ lớn nhất. Nhưng $a_i - b_i = 1$ nếu hai ô này nằm trên một hàng và $a_i - b_i = 10$ nếu hai ô này nằm trên một cột. Từ đó suy ra An phải cắt thành các ô dọc thì tổng thu được sẽ nhỏ nhất.

Bài tập

1. Các hàm số f(x) và g(x) xác định trên tập hợp các số nguyên, có trị tuyệt đối không vượt quá 1000. Gọi m là số các cặp (x, y) sao cho f(x) = g(y), n là số các cặp (x, y) sao cho f(x)=f(y), và k là số các cặp x, y sao cho g(x)=g(y). Chứng minh rằng $2m \le n + k$.

2. (IMO 2003) Cho n > 2 và các số thực $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2}{3}(n^2 - 1)\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 .$$

Chứng minh rằng dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi dãy số là cấp số cộng.

C_n^2 trong các bài toán tổ hợp

Trong tổ hợp C_n^2 là số các cặp tạo thành từ n phần tử, là số cạnh của đồ thị đầy đủ bậc n. Trong nhiều bài toán, sử dụng ý nghĩa tổ hợp này cùng với cách đếm bằng hai cách giúp chúng ta tìm ra chìa khoá cho lời giải.

Ví dụ 3. (Bulgarian MO 2006) Một quốc gia có 16 thành phố và có 36 tuyến bay nối giữa chúng. Chứng minh rằng ta có thể tổ chức một chuyến bay vòng quanh giữa 4 thành phố.

Giải. Bài toán có thể dịch sang ngôn ngữ đồ thị như sau: Một đồ thị G đơn có 16 đỉnh và 36 cạnh thì có một chu trình độ dài 4. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong đồ thị không có chu trình độ dài 4.

Với mỗi đỉnh x thuộc G, gọi d(x) là bậc của đỉnh x. Khi đó số cặp các đỉnh mà cả hai cùng kề với x bằng $C_{d(x)}^2$. Chú ý rằng mỗi một cặp được tính ở nhiều nhất ở một đỉnh x, vì nếu không ta sẽ có một chu trình độ dài 4.

Sử dụng đẳng thức $\sum_{x\in G} d(x) = 72$ và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$C_{16}^2 = 120 \ge \sum_{x\in G} C_{d(x)}^2 = \sum_{x\in G}\frac{d^2(x)}{2} - \sum_{x\in G}\frac{d(x)}{2} \ge \frac{1}{32}\left(\sum_{x\in G} d(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{x\in G} d(x) = \frac{72^2}{32} - 36 = 126,$$

mâu thuẫn.

Ví dụ 4. (IMO) Trong một kỳ thi có a thí sinh và b giám khảo, trong đó b ≥ 3 là một số nguyên lẻ. Mỗi một giám khảo sẽ đánh giá thí sinh là “đậu” hay “rớt”. Giả sử k là một số nguyên sao cho với hai giám khảo bất kỳ thì đánh giá của họ trùng ở nhiều nhất k thí sinh. Chứng minh rằng $k/a \ge (b-1)/2b$.

Giải.

Ta đếm số N các bộ ba (GK, GK, TS) trong đó hai giám khảo là khác nhau và đánh giá thí sinh giống nhau. Có $b(b-1)/2$ cặp giám khảo và mỗi một cặp giám khảo như vậy đánh giá trùng nhau tại không quá k thí sinh, do đó $N \le kb(b-1)/2$.

Bây giờ xét một thí sinh X và đếm các cặp giám khảo đánh giá X giống nhau. Giả sử có x giám khảo cho X đậu, thì sẽ có $x(x-1)/2$ cặp cùng cho X đậu và $(b-x)(b-x-1)/2$ cặp cùng cho X rớt, như vậy có $(x(x-1) + (b-x)(b-x-1))/2$ cặp đánh giá X giống nhau. Nhưng $(x(x-1) + (b-x)(b-x-1))/2 = (2x^2 - 2bx + b^2 - b)/2 = (x - b/2)^2 + b^2/4 - b/2 \ge b^2/4 - b/2 = (b-1)^2/4 - 1/4$. Vì $(b-1)^2/4$ là số nguyên (do b lẻ), nên số cặp đánh giá X giống nhau sẽ ít nhất là $(b-1)^2/4$. Từ đó suy ra $N \ge a(b-1)^2/4$. Kết hợp hai bất đẳng thức lại ta có $k/a \ge (b-1)/2b$.

Bài tập

3. Trong Duma quốc gia có 1600 đại biểu, lập thành 16000 ủy ban, mỗi ủy ban có 80 đại biểu. Chứng minh rằng có ít nhất hai ủy ban có không dưới 4 thành viên chung.

4. Sau khi khai trương được đúng 10 ngày, một nhân viên thư viện cho biết :

1) Mỗi ngày có đúng 8 người đến đọc sách ;
2) Không có người nào đến thư viện 1 ngày quá 1 lần ;
3) Trong hai ngày bất kỳ của 10 ngày đó thì có ít nhất là 15 người khác nhau cùng đến thư viện.

Căn cứ đồng thời cả 3 điều kiện mà nhân viên thư viện cung cấp hãy cho biết số người tối thiểu đã đến thư viện trong 10 ngày nói trên là bao nhiêu ?

5. 2n kỳ thủ thi đấu vòng tròn hai lượt, mỗi lượt hai kỳ thủ bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận (thắng được 1 điểm, thua 0 điểm và hòa 1/2 điểm). Người ta nhận thấy rằng ở lượt hai, tổng điểm của mỗi kỳ thủ thay đổi không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng các thay đổi này đúng bằng n.

6. (Bulgarian MO 2003) Trong một nhóm n người có 3 người đôi một quen nhau và mỗi một người này quen nhiều hơn 1 nửa số người trong nhóm. Tìm số ít nhất có thể số bộ ba người đôi một quen nhau.

Đếm bằng hai cách và một số định lý trong lý thuyết tối ưu tổ hợp

Cho F là họ các tập con của X. Với x thuộc x, ta gọi d(x) là số phần tử của F chứa x.

Định lý 1. Cho F là họ các tập con của tập hợp X. Khi đó

$$\sum_{x\in X} d(x) = \sum_{A\in F} |A|$$

Chứng minh. Xét *ma trận kề* $M = (m_{x,A})$ của F. Nghĩa là M là ma trận 0-1 với |X| dòng đánh số bởi các điểm $x \in X$ và |F| cột đánh số bởi tập $A \in F$ sao cho $m_{x,A} = 1$ khi và chỉ

khi $x \in A$. Để ý rằng d(x) bằng số số 1 trên dòng thứ x còn |A| là số số 1 trên cột thứ A. Như vậy cả vế trái và vế phải đều biểu diễn số số 1 của M.
Nếu ta xét đồ thị G = (V, E) trên tập đỉnh V như một họ các tập con 2 phần tử của V thì ta có định lý Euler.

Định lý 2. (Euler, 1736) Trong mọi đồ thị, tổng bậc các đỉnh của nó bằng hai lần số cạnh của nó và như thế, luôn là một số chẵn.
Định lý sau có thể được chứng minh bằng cách tương tự

Định lý 3. $\sum_{x\in Y} d(x) = \sum_{A\in F} |Y \cap A|$ với mọi $Y \subseteq X$.
$$\sum_{x\in X} d(x)^2 = \sum_{A\in F}\sum_{x\in A} d(x) = \sum_{A\in F}\sum_{B\in F} |A \cap B|.$$
(Hai tổng ở đẳng thức đầu ứng với số số 1 trên các hàng Y. Các tổng ở đẳng thức thứ hai đếm số lần xuất hiện của x trong các tập có dạng $A \cap B$).
Trường hợp đặc biệt khi F = E là tập con 2 phần tử, ta có

Định lý 4. Với đồ thị G = (V, E), ta có
$$\sum_{x\in V} d(x)^2 = \sum_{(x,y)\in E} (d(x) + d(y)).$$

(Xem thêm bài *Các bài toán tối ưu về hệ các tập hợp*)

5. Nguyên lý cực hạn

Một tập hợp hữu hạn các số thực luôn có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất. Một tập con bất kỳ của N (hoặc N^k) luôn có phần tử nhỏ nhất. Nguyên lý đơn giản này trong nhiều trường hợp rất có ích cho việc chứng minh. Hãy xét trường hợp biên! Đó là khẩu quyết của nguyên lý này.

Một số ví dụ mở đầu

Ta xem xét một số ví dụ sử dụng nguyên lý cực hạn

Ví dụ 1. Có 3 trường học, mỗi trường có n học sinh. Mỗi một học sinh quen với ít nhất n+1 học sinh từ hai trường khác. Chứng minh rằng người ta có thể chọn ra từ mỗi trường một bạn sao cho ba học sinh được chọn đôi một quen nhau.

Giải.
Gọi A là học sinh có nhiều bạn nhất ở một trường khác. Gọi số này là k. Giả sử A ở trường 1 và những bạn quen A là $B_1, B_2, ..., B_k$ ở trường 2. Ta có $k \geq \frac{n+1}{2}$. Cũng theo giả thiết, có ít nhất 1 học sinh C ở trường 3 quen với A. Giả sử C không quen với B_i với mọi i=1, 2, ..., k thì C quen với nhiều nhất n - k học sinh của trường 2. Suy ra C quen với ít nhất n+1 - (n-k) = k+1 học sinh ở trường 1, điều này mâu thuẫn với cách chọn A. Vậy C phải quen với một B_i nào đó. Khi đó A, B_i và C chính là 3 học sinh cần tìm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng không tồn tại số n lẻ, n > 1 sao cho $15^n + 1$ chia hết cho n

Giải. Giả sử tồn tại một số nguyên lẻ n > 1 sao cho $15^n + 1$ chia hết cho n. Gọi p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n, khi đó p lẻ. Giả sử k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $15^k - 1$ chia hết cho p.

Vì $15^{2n} - 1 = (15^n-1)(15^n+1)$ chia hết cho p. Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat thì $15^{p-1} - 1$ chia hết cho p. Theo định nghĩa của p, suy ra k là ước số của các số p-1 và 2n. Suy ra k | (p-1, 2n). Do p là ước **số nguyên tố nhỏ nhất** của n nên (n, p-1) = 1. Suy ra (p-1, 2n) = 2. Vậy k | 2. Từ đó k = 1 hoặc k = 2. Cả hai trường hợp này đều dẫn tới p = 7. Nhưng điều này mâu thuẫn vì $15^n + 1$ luôn đồng dư 2 mod 7

Bài tập

1. Cho n điểm xanh và n điểm đỏ trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể nối 2n điểm này bằng n đoạn thẳng có đầu mút khác màu sao cho chúng đôi một không giao nhau.

2. Trên đường thẳng có 2n+1 đoạn thẳng. Mỗi một đoạn thẳng giao với ít nhất n đoạn thẳng khác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng giao với tất cả các đoạn thẳng còn lại.

3. Trong mặt phẳng cho n > 1 điểm. Hai người chơi lần lượt nối một cặp điểm chưa được nối bằng một véc-tơ với một trong hai chiều. Nếu sau nước đi của người nào đó tổng các véc tơ đã vẽ bằng 0 thì người thứ hai thắng; nếu cho đến khi không còn vẽ được véc tơ nào nữa mà tổng vẫn chưa có lúc nào bằng 0 thì người thứ nhất thắng. Hỏi ai là người thắng cuộc nếu chơi đúng?

Nguyên lý cực hạn và bất đẳng thức

Nguyên lý cực hạn thường được áp dụng một cách hiệu quả trong các bất đẳng thức có tính tổ hợp, dạng chứng minh tồn tại k số từ n số thỏa mãn một điều kiện này đó.

Ví dụ 1. (Moscow MO 1984) Trên vòng tròn người ta xếp ít nhất 4 số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng tổng tất cả các tích các cặp số kề nhau không lớn hơn $\frac{1}{4}$.

Giải.

Ta cần chứng minh rằng với mọi $n \ge 4$ số thực không âm $a_1, ..., a_n$, có tổng bằng 1, ta có bất đẳng thức

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \le 1/4.$$

Với n chẵn n ($n = 2m$) điều này có thể chứng minh dễ dàng: đặt $a_1 + a_3 + ... + a_{2m-1} = a$; khi đó, rõ ràng,

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \le (a_1 + a_3 + ... + a_{2m-1}) \times (a_2 + a_4 + ... + a_{2m}) = a(1 - a) \le 1/4.$$

Giả sử n lẻ và a_k – là số **nhỏ nhất** trong các số đã cho. (Để thuận tiện, ta giả sử $1 < k < n - 1$ – điều này không làm mất tính tổng quát khi $n \ge 4$.) Đặt $b_i = a_i$, với $i = 1,..., k - 1$, $b_k = a_k + a_{k+1}$ và $b_i = a_{i+1}$ với $i = k + 1,..., n - 1$. Áp dụng bất đẳng thức của chúng ta cho các số $b_1,..., b_{n-1}$, ta được:

$$a_1a_2 + ... + a_{k-2}a_{k-1} + (a_{k-1} + a_{k+2})\, b_k + a_{k+2}a_{k+3} + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \le 1/4.$$

Cuối cùng, ta sử dụng bất đẳng thức

$$a_{k-1}a_k + a_ka_{k+1} + a_{k+1}a_{k+2} \le a_{k-1}a_k + a_{k-1}a_{k+1} + a_{k+1}a_{k+2} \le (a_{k-1} + a_{k+2})\, b_k.$$

để suy ra điều phải chứng minh.

Đánh giá trên đây là tốt nhất; dấu bằng xảy ra khi 2 trong n số bằng 1/2, còn các số còn lại bằng 0.

Ví dụ 2. Cho $n \ge 4$ và các số thực phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại 4 số a, b, c, d thuộc $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sao cho

$$a + b + c + nabc \le \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \le a + b + d + nabd.$$

Ví dụ 3. Tổng bình phương của một 100 số thực dương lớn hơn 10000. Tổng của chúng nhỏ hơn 300. Chứng minh rằng tồn tại 3 số trong chúng có tổng lớn hơn 100.

Giải. Giả sử 100 số đó là $C_1 \ge C_2 \ge ... \ge C_{100} > 0$. Nếu như $C_1 \ge 100$, thì $C_1 + C_2 + C_3 > 100$. Do đó ta có thể giả sử rằng $C_1 < 100$. Khi đó $100 - C_1 > 0$, $100 - C_2 > 0$, $C_1 - C_2 \ge 0$ и $C_1 - C_3 \ge 0$, vì vậy

$$\begin{aligned} 100(C_1 + C_2 + C_3) &\ge 100(C_1 + C_2 + C_3) - (100 - C_1)(C_1 - C_3) - (100 - C_2)(C_2 - C_3) = \\ &= C_1^2 + C_2^2 + C_3(300 - C_1 - C_2) > \\ &> C_1^2 + C_2^2 + C_3(C_3 + C_4 + ... + C_{100}) \ge \\ &\ge C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + ... + C_{100}^2 > 10000. \end{aligned}$$

Suy ra, $C_1 + C_2 + C_3 > 100$.

Bài tập

1. Trong mỗi ô của bảng 2 x n ta viết các số thực dương sao cho tổng các số của mỗi cột bằng 1. Chứng minh rằng ta có thể xoá đi ở mỗi cột một số sao cho ở mỗi hàng, tổng của các số còn lại không vượt quá $\frac{n+1}{4}$.

2. 40 tên trộm chia 4000 euro. Một nhóm gồm 5 tên trộm được gọi là nghèo nếu tổng số tiền mà chúng được chia không quá 500 euro. Hỏi số nhỏ nhất các nhóm trộm nghèo trên tổng số tất cả các nhóm 5 tên trộm bằng bao nhiêu?

Nguyên lý cực hạn và phương trình Diophant

Nguyên lý cực hạn ứng dụng trong phương trình Diophant đã được nhắc tới trong bài phương pháp chứng minh phản chứng. Trong phần này, ta trình bày chi tiết ba ví dụ áp dụng nguyên lý cực hạn trong phương trình Fermat, phương trình Pell và phương trình dạng Markov.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ (1) không có nghiệm nguyên dương.

Giả sử ngược lại, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương, và (x, y, z) là nghiệm của (1) với z nhỏ nhất.

(1) Dễ thấy $\mathbf{x^2, y^2, z}$ đôi một nguyên tố cùng nhau

(2) Từ nghiệm của phương trình Pythagore, ta có tồn tại p, q sao cho
$\mathbf{x^2 = 2pq}$
$\mathbf{y^2 = p^2 - q^2}$
$\mathbf{z = p^2 + q^2}$

(3) Từ đây, ta lại có một bộ ba Pythagore khác, vì $\mathbf{y^2 + q^2 = p^2}$.

(4) Như vậy, tồn tại **a,b** sao cho
$\mathbf{q = 2ab}$
$\mathbf{y = a^2 - b^2}$
$\mathbf{p = a^2 + b^2}$
a,b nguyên tố cùng nhau

(5) Kết hợp các phương trình này, ta được:
$\mathbf{x^2 = 2pq = 2(a^2 + b^2)(2ab) = 4(ab)(a^2 + b^2)}$

(6) Vì **ab** và $\mathbf{a^2 + b^2}$ nguyên tố cùng nhau, ta suy ra chúng là các số chính phương.

(7) Như vậy $\mathbf{a^2 + b^2 = P^2}$ và $\mathbf{a = u^2, b = v^2}$. Suy ra $P^2 = u^4 + v^4$.

(8) Nhưng bây giờ ta thu được điều mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của z vì:
$\mathbf{P^2 = a^2 + b^2 = p < p^2 + q^2 = z < z^2}$.

(9) Như vậy điều giả sử ban đầu là sai, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các cặp đa thức P(x), Q(x) thỏa mãn phương trình

$$P^2(x) = (x^2-1)Q^2(x) + 1 \quad (1)$$

Giải. Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần tìm nghiệm trong tập các đa thức có hệ số khởi đầu dương.

Nếu $(x+\sqrt{x^2-1})^n = P_n(x) + \sqrt{x^2-1}Q_n(x)$ (2) thì $(x-\sqrt{x^2-1})^n = P_n(x) - \sqrt{x^2-1}Q_n(x)$ (3)

Nhân (2) và (3) vế theo vế, ta được

$$1 = (x+\sqrt{x^2-1})^n(x-\sqrt{x^2-1})^n = (P_n(x)+\sqrt{x^2-1}Q_n(x))(P_n(x)-\sqrt{x^2-1}Q_n(x))$$
$$= P_n^2(x)-(x^2-1)Q_n^2(x)$$

Suy ra cặp đa thức $P_n(x)$, $Q_n(x)$ xác định bởi (2) (và (3)!) là nghiệm của (1). Ta chứng minh đây là tất cả các nghiệm của (1). Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại cặp đa thức P(x), Q(x) không có dạng $P_n(x)$, $Q_n(x)$ thỏa mãn (1). Ta xét cặp đa thức (P, Q) như vậy với degQ nhỏ nhất.

Đặt $(P(x)+\sqrt{x^2-1}Q(x))(x-\sqrt{x^2-1}) = P^*(x)+\sqrt{x^2-1}Q^*(x)$ (4)

Thì rõ ràng

$$(P(x)-\sqrt{x^2-1}Q(x))(x+\sqrt{x^2-1}) = P^*(x)-\sqrt{x^2-1}Q^*(x)$$

Suy ra (P*, Q*) cũng là nghiệm của (1).

Khai triển (4), ta thu được $P^*(x) = xP(x) - (x^2-1)Q(x)$, $Q^*(x) = xQ(x) - P(x)$. Chú ý là từ (1) ta suy ra $(P(x) - xQ(x))(P(x)+xQ(x)) = - Q^2(x) + 1$. Vì P(x) và Q(x) đều có hệ số khởi đầu > 0 và degP = degQ + 1 nên ta có deg(P(x)+xQ(x)) = degQ + 1. Từ đây, do $\deg(-Q^2(x) + 1) \le 2\deg(Q)$ nên ta suy ra $\deg(Q^*(x)) \le \deg(Q) - 1 < \deg Q$.

Như vậy, theo cách chọn cặp (P, Q) thì tồn tại n sao cho $(P^*, Q^*) = (P_n, Q_n)$.

Nhưng khi đó từ (4) suy ra

$$P(x)+\sqrt{x^2-1}Q(x) = (P^*(x)+\sqrt{x^2-1}Q^*(x))(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$= (x+\sqrt{x^2-1})^n(x+\sqrt{x^2-1}) = (x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}$$

Suy ra $(P, Q) = (P_{n+1}, Q_{n+1})$, mâu thuẫn.

Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 3</u>. Tìm tất cả các giá trị k sao cho phương trình $(x+y+z)^2 = kxyz$ có nghiệm nguyên dương.

<u>Ví dụ 4</u>. (CRUX, Problem 1420) Nếu a, b, c là các số nguyên dương sao cho

$$0 < a^2 + b^2 - abc \le c$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 - abc$ là số chính phương.

<u>Giải.</u> Giả sử ngược lại rằng tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $0 < a^2 + b^2 - abc \le c$ và $k = a^2 + b^2 - abc$ (1) không phải là số chính phương.

Bây giờ ta cố định k và c và xét tập hợp tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình (1), tức là ta xét

$$S(c, k) = \{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 : a^2 + b^2 - abc = k\}$$

Giả sử (a, b) là cặp số thuộc S(c, k) có a + b nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \ge b$. Ta xét phương trình

$$x^2 - bcx + b^2 - k = 0$$

Ta biết rằng x = a là một nghiệm của phương trình. Gọi a_1 là nghiệm còn lại của phương trình này thì $a_1 = bc - a = (b^2 - k)/a$.

Ta có thể chứng minh được rằng (bạn đọc tự chứng minh!) a_1 nguyên dương. Suy ra (a_1, b) cũng thuộc S(c, k).
Tiếp theo ta có $a_1 = (b^2-k)/a < a^2/a = a$, suy ra $a_1 + b < a + b$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn (a, b).

Bài tập

1. (IMO 88) Nếu a, b, $q = (a^2+b^2)/(ab+1)$ là các số nguyên dương thì q là số chính phương.

2. (PTNK 03). Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 - (k^2-4)y^2 = -24$ có nghiệm nguyên dương.

3. (Mathlinks) Cho A là tập hợp hữu hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp hữu hạn các số nguyên dương B sao cho $A \subset B$ và $\prod_{x\in B} x = \Sigma_{x\in B} x^2$.

4. (AMM 1995) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho xy + x và xy + y là các số chính phương. Chứng minh rằng có đúng một trong hai số x, y là số chính phương.

5. (IMO 2007) Cho a, b là các số nguyên dương sao cho 4ab – 1 chia hết $(4a^2-1)^2$. Chứng minh rằng a = b.

6. Sắp thứ tự

Sắp thứ tự là một cách để giảm số trường hợp cần xét và tạo ra các điều kiện bổ sung giúp chúng ta có thể làm việc dễ dàng hơn.

<u>Ví dụ 1.</u> Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n số thuộc đoạn [0, 2]. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| \le n^2.$$

<u>Ví dụ 2.</u> (Bất đẳng thức Schur mở rộng) Cho x, y, z là các số thực không âm, r là một số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \ge 0$$

<u>Ví dụ 3.</u> Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right) \ge \frac{9}{2}$$

Bài tập

1. Cho x, y, z thuộc [0, 1]. Chứng minh rằng $(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2) \le 4$.

2. (IMO 2006) Tìm số thực M nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \le M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

đúng với mọi số thực *a*, *b*, *c*.

3. (Vietnam MO 2008) Cho x, y, z là các số thực không âm khác nhau. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx)\left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right] \ge 4.$$

Tài liệu tham khảo

1. Đoàn Quỳnh, Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán, Đại số 10*, Nhà xuất bản Giáo dục 2009.

2. Đoàn Quỳnh, Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán, Bài tập Đại số 10*, Nhà xuất bản Giáo dục 2009.

3. Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo dục 2008.

4. Arthur Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer 1998.

5. N.Agakhanov, *Các bài thi Olimpic Toán toàn Nga 1996-2006*, Nhà xuất bản MCCME 2007.

6. A. Kovaldzi và A. Kanel-Belov, *Giải bài toán không mẫu mực như thế nào*, Nhà xuất bản MCCME 2006.

7. Stasys Jukna, *Extremal Combinatorics*, Springer 2001.

Nguyên lý chuồng và thỏ

Nguyên lý *chuồng và thỏ* (hay còn được gọi là *nguyên lý Dirichlet*) khẳng định một sự kiện "hiển nhiên" rằng n+1 con thỏ không thể được xếp vào n chuồng sao cho mỗi con thỏ đều ở riêng một chuồng. Một cách tổng quát hơn, nguyên lý chuồng và thỏ khẳng định rằng:

Nếu một tập hợp gồm nhiều hơn kn đối tượng được chia thành n nhóm, thì có một nhóm nào đó có nhiều hơn k đối tượng.

Chân lý này rất dễ kiểm tra: nếu nhóm nào cũng có nhiều nhất *k* đối tượng thì tổng cộng chỉ có nhiều nhất *kn* đối tượng được chia ra.

Đây là một trong những nguyên lý không xây dựng (non-constructive) lâu đời nhất: nó chỉ nói đến *sự tồn tại* của một chuồng trong đó có nhiều hơn k vật mà không nói gì đến cách *tìm* ra chuồng này. Ngày nay chúng ta đã có những tổng quát hóa rất mạnh của nguyên lý này (các định lý kiểu Ramsey, phương pháp xác suất…).

Mặc dù nguyên lý chuồng và thỏ được phát biểu rất đơn giản, nó có hàng loạt các ứng dụng không tầm thường. Cái khó của việc ứng dụng nguyên lý này là xác định được xem thỏ là gì và chuồng là gì. Chúng ta sẽ minh họa điều này bằng một số ví dụ.

1. Một số ví dụ mở đầu

Để khởi động, chúng ta sẽ bắt đầu bằng những ứng dụng đơn giản nhất. *Bậc* của một đỉnh trong đồ thị G là số d(x) các cạnh của G kề với x.

Mệnh đề 1. *Trong mọi đồ thị tồn tại hai đỉnh có cùng bậc.*

Chứng minh. Giả sử ta có đồ thị G có n đỉnh. Ta tạo ra n cái chuồng được đánh số từ 0 đến n-1 và xếp đỉnh x vào chuồng thứ k khi và chỉ khi d(x) = k. Nếu như trong một chuồng nào đó có nhiều hơn 1 đỉnh thì ta có đpcm. Vì thế ta có thể giả sử rằng không có chuồng nào chứa hơn 1 đỉnh. Có tất cả n đỉnh được chia vào n cái chuồng, nhưng vậy mỗi một chuồng có *đúng 1* đỉnh. Gọi x và y là các đỉnh nằm trong các chuồng đánh số 0 và n-1 tương ứng. Đỉnh x có bậc 0 vì vậy nó không được nối với các đỉnh khác, trong đó có y. Nhưng y có bậc n-1 nên nó lại được nối với tất cả các đỉnh, trong đó có x, mâu thuẫn.

Nếu G là một đồ thị hữu hạn, *chỉ số độc lập (independent number)* $\alpha(G)$ là số lớn nhất các đỉnh đôi một không kề nhau của G. *Sắc số (chromatic number)* $\chi(G)$ của G là số nhỏ nhất các màu cần dùng để tô các màu của G sao cho không có hai đỉnh kề nhau được tô cùng màu.

Mệnh đề 2. *Trong mọi đồ thị G với n đỉnh ta có* $n \le \alpha(G).\chi(G)$.

Chứng minh. Ta chia các đỉnh của G thành $\chi(G)$ nhóm (các tập hợp các đỉnh có cùng màu). Theo nguyên lý chuồng và thỏ, một trong các nhóm đó có chứa ít nhất $n/\chi(G)$ đỉnh, và các đỉnh này đôi một không kề nhau. Như vậy $\alpha(G) \ge n/\chi(G)$ và đó chính là điều cần chứng minh.

Một đồ thị là *liên thông* nếu giữa hai đỉnh bất kỳ của nó có một đường đi.

Mệnh đề 3. *Cho G là một đồ thị n đỉnh. Nếu mọi đỉnh của G có bậc ít nhất là (n-1)/2 thì G liên thông.*

Chứng minh. Ta xét hai đỉnh x, y bất kỳ. Nếu hai đỉnh này không kề nhau thì có ít nhất n-1 đỉnh nối chúng với các đỉnh còn lại, vì cả x và y đều có bậc ít nhất là (n-1)/2. Vì chỉ còn n-2 đỉnh khác, nguyên lý chuồng và thỏ suy ra rằng phải có một trong các đỉnh đó nối với cả x và y. Ta đã chứng minh được rằng mọi cặp đỉnh thì hoặc kề nhau, hoặc có đỉnh kề chung, và như vậy G liên thông.

Ghi chú. Một kết quả là *tốt nhất* nếu như kết luận không còn đúng khi ta làm yếu đi một điều kiện. Ví dụ, trong kết quả trên: giả sử n là chẵn và G là hợp của hai đồ thị đầy đủ với n/2 đỉnh thì bậc của mỗi đỉnh bằng (n-2)/2 nhưng đồ thị không liên thông.

Bài tập 1. Giả sử 5 điểm được chọn trong hình vuông cạnh 1. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 cặp điểm cách nhau không quá 1/2.

Bài tập 2. Các viên đá của 8 màu khác nhau được xếp vào 6 cái hộp. Có 20 viên đá cho mỗi màu. Chứng minh rằng tìm được một hộp chứa hai cặp có cùng màu khác nhau.

Bài tập 3. Chứng minh rằng một tập hợp bất kỳ gồm n+1 phần tử được chọn từ {1, 2,…,2n} đều chứa một cặp phần tử có tổng bằng 2n+1. Hãy chứng minh kết quả này là tốt nhất.

Bài tập 4. Chứng minh rằng một tập hợp bất kỳ gồm n+1 số nguyên được chọn từ {1, 2,…, 2n} chứa hai số mà số này chia hết cho số kia.

2. Định lý Erdos-Szekeres

Cho $A = (a_1, a_2,\dots, a_n)$ là dãy gồm n số phân biệt. Một *dãy con k phần tử* của A là dãy B gồm k số hạng phần tử của A xuất hiện theo đúng thứ tự mà chúng xuất hiện trong A. Có nghĩa là $B = (a_{i1}, a_{i2},\dots, a_{ik})$ với $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Dãy con B được gọi là tăng nếu $a_{i1} < a_{i2} < \dots < a_{ik}$, và giảm nếu $a_{i1} > a_{i2} > \dots > a_{ik}$.
Ta quan tâm đến độ dài *lớn nhất* của dãy con tăng và giảm của A. Suy luận trực quan cho thấy phải có một sự cân đối nhất định giữa hai độ dài này. Nếu như dãy con tăng dài nhất là ngắn, chẳng hạn có chiều dài là s, thì mọi dãy con của A có độ dài s+1 phải chứa cặp

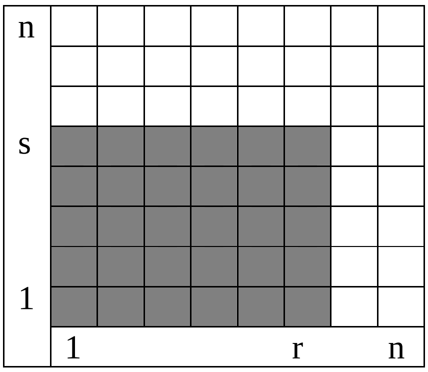
phần tử giảm, như vậy có rất nhiều cặp phần tử giảm. Vì thế ta trông đợi rằng dãy con giảm dài nhất sẽ lớn. Một trường hợp cực biên xảy ra khi s = 1. Khi đó cả dãy số A là giảm.

Làm sao ta có thể số hóa điều dự cảm rằng độ dài của dãy con tăng dài nhất và dãy con giảm dài nhất không thể *cùng* nhỏ ? Kết quả nổi tiếng của Erdos và Szekeres (1935) cho chúng ta câu trả lời cho câu hỏi này và đây là một trong những kết quả đầu tiên của tối ưu tổ hợp.

Định lý 4 (Erdos-Szekeres 1935). *Cho A = ($a_1, a_2,\ldots, a_n$) là dãy gồm n số thực phân biệt. Nếu $n \geq rs + 1$ thì hoặc A có dãy con tăng độ dài s+1 hoặc A có dãy con giảm độ dài r+1 (hay cả hai).*

Chứng minh. (của Seidenberg 1959). Ta cho tương ứng mỗi phần tử a_i của A với cặp "điểm số" (x_i, y_i) trong đó x_i là số phần tử của dãy con *tăng* dài nhất *kết thúc* tại a_i và y_i là số phần tử của dãy con *giảm* dài nhất *bắt đầu* từ a_i. Chú ý rằng không có hai phần tử nào có cùng điểm số, tức là $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ với mọi $i \neq j$. Thật vậy, nếu ta có ... a_i ... a_j ..., thì hoặc $a_i < a_j$ và dãy con tăng dài nhất kết thúc tại a_i có thể kéo dài đến a_j (và do đó $x_i < x_j$), hoặc $a_i > a_j$ và dãy con giảm dài nhất bắt đầu từ a_j có thể được bắt đầu từ a_i (và như thế $y_i > y_j$).

Bây giờ ta tạo ra một lưới gồm n chuồng thỏ.



Ta đặt mỗi phần tử a_i vào chuồng với tọa độ (x_i, y_i). Mỗi một phần tử của A có thể được đặt vào một chuồng vì $1 \leq x_i, y_i \leq n$ với mọi i = 1, 2, ..., n. Hơn nữa, không có chuồng nào được chứa nhiều hơn một phần tử, vì $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ với mọi $i \neq j$. Vì $|A| = n \geq rs + 1$, ta có nhiều vật hơn là số chuồng thỏ được tô đậm trong hình vẽ trên. Như vậy phải có một phần tử a_i nằm ngoài miền tô đậm. Nhưng điều này có nghĩa là $x_i \geq s+1$ hoặc $y_i \geq r + 1$ (hoặc cả hai), đúng điều chúng ta cần.
Tập hợp các số thực *được sắp toàn phần*. Điều này có nghĩa là với hai số phân biệt x, y thì hoặc x < y hoặc y < x. Bổ đề dưới đây, thuộc về Dilworth, sẽ tổng quát hóa định lý Erdos-Szekeres cho các tập hợp mà trong đó hai phần tử có thể không so sánh được.

Một *thứ tự bộ phận* (yếu) trên tập hợp P là quan hệ hai ngôi < giữa các phần tử của P. Ta nói hai phần tử x và y là *so sánh được* nếu $x < y$ hoặc $y < x$ (hoặc cả hai). Một *xích* là một tập hợp $Y \subseteq P$ sao cho hai phần tử bất kỳ của Y là so sánh được. Nếu không có hai phần tử khác nhau nào của Y là so sánh được, thì Y được gọi là *đối xích*.

Bổ đề 5 (Dilworth 1950). Trong mọi thứ tự bộ phận trên tập hợp P gồm $n \geq sr + 1$ phần tử, tồn tại xích có kích thước s+1 hoặc đối xích có kích thước r+1.

Chứng minh. Giả sử rằng không có xíc độ dài s+1. Khi đó ta có thể định nghĩa hàm số f: $P \rightarrow \{1,..., s\}$ trong đó f(x) là số phần tử lớn nhất của một xích có phần tử lớn nhất x. Theo nguyên lý chuồng và thỏ, sẽ có r+1 phần tử của P có cùng ảnh qua ánh xạ f. Theo định nghĩa của f, các phần tử này không so sánh được; và như vậy chúng tạo thành một đối xích có kích thước r+1.

Bài tập 5. Từ bổ đề Dilworh hãy suy ra định lý Erdos-Szekeres.

Bài tập 6. Cho n^2+1 điểm trong mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại dãy gồm n+1 điểm $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_{n+1},y_{n+1})$ sao cho $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+1}$ và $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_{n+1}$, hoặc dãy gồm n+1 điểm sao cho $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+1}$ và $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n+1}$

3. Định lý Mantel

Dưới đây chúng ta sẽ thảo luận về một tính chất *tối ưu* đặc trưng của đồ thị. Một đồ thị G gồm 2n đỉnh không chứa tam giác có thể có bao nhiêu cạnh? Tam giác là tập hợp {x, y, z} gồm ba đỉnh mà hai đỉnh bất kỳ đều được nối với nhau bởi một cạnh. Dĩ nhiên là G có thể chứa n^2 cạnh mà không chứa tam giác: chỉ cần lấy đồ thị hai phe đầy đủ gồm hai tập hợp mỗi tập hợp có n đỉnh và tất cả các cạnh nối giữa hai tập hợp. Thực tế là n^2 chính là số cạnh lớn nhất có thể: nếu ta thêm một cạnh và đồ thị thì sẽ xuất hiện tam giác.

Ta sẽ đưa ra 4 chứng minh cho kết quả đẹp đẽ này: chứng minh thứ nhất dùng nguyên lý chuồng và thỏ, chứng minh thứ hai dựa trên phương pháp đếm bằng hai cách, chứng minh thứ ba sử dụng bất đẳng thức AM-GM và chứng minh thứ tư sử dụng "lý luận dịch chuyển" (ta sẽ đề cập tới chứng minh này trong phần sau).

Định lý 6 (Mantel 1907). *Nếu đồ thị G với 2n đỉnh có n^2+1 cạnh thì G chứa tam giác.*

Chứng minh thứ nhất. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với n = 1, thì G không thể có n^2+1 cạnh và vì vậy mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đã đúng đến n, ta xét đồ thị G với 2(n+1) đỉnh và $(n+1)^2 + 1$ cạnh. Gọi x và y là hai đỉnh kề nhau trong G, và H là đồ thị con cảm sinh trên 2n đỉnh còn lại. Nếu H chứa ít nhất n^2+1 cạnh thì theo giả thiết quy nạp, ta có ngay đpcm. Giả sử rằng H có nhiều nhất n^2 cạnh, khi đó có ít nhất 2n+1 cạnh của G sẽ nối từ x và y đến các đỉnh của H.

Theo nguyên lý chuồng và thỏ, giữa 2n+1 cạnh này có ít nhất 1 cạnh nối từ x và một cạnh nối từ y đến cùng một đỉnh z thuộc H. Như vậy G chứa tam giác {x, y, z}.

Chứng minh thứ hai. Cho G là đồ thị trên tập hợp V gồm 2n đỉnh và có $m \geq n^2+1$ cạnh. Giả sử rằng G không chứa tam giác. Khi đó các cạnh kề nhau không có đỉnh kề chung, do đó $d(x) + d(y) \leq 2n$ với mọi cạnh $\{x, y\} \in E$. Cộng theo tất cả các cạnh của G, ta có

$$\sum_{x\in V} d(x)^2 = \sum_{\{x,y\}\in E}(d(x)+d(y)) \leq 2mn.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và đẳng thức Euler $\sum_{x\in V} d(x) = 2m$, ta được

$$\sum_{x\in V} d(x)^2 \geq = \frac{\left(\sum_{x\in V} d(x)\right)^2}{|V|} = \frac{2m^2}{n}.$$

Từ hai bất đẳng thức này suy ra $m \leq n^2$, mâu thuẫn với giả thiết.

Chứng minh thứ ba. Giả sử G = (V, E) là đồ thị trên tập V gồm 2n đỉnh và giả sử G không chứa tam giác. Giả sử $A \subseteq V$ là tập hợp độc lập lớn nhất, tức là tập hợp lớn nhất các đỉnh sao cho không có đỉnh nào kề nhau trong G. Vì G không chứa tam giác tất cả các đỉnh kề với đỉnh $x \in V$ tạo thành một tập độc lập và ta suy ra $d(x) \leq |A|$ với mọi x.

Tập hợp B = V – A giao với mỗi cạnh của G. Tính các cạnh của G tương ứng với đỉnh cuối của chúng trong B, ta có $|E| \leq \sum_{x\in B} d(x)$. Bây giờ bất đẳng thức AM-GM cho ta

$$|E| \leq \sum_{x\in B} d(x) \leq |A|.|B| \leq \left(\frac{|A|+|B|}{2}\right)^2 = n^2.$$

4. Định lý Turan

Một *k-clique* là một đồ thị với k đỉnh mà hai đỉnh bất kỳ đều được nối với nhau bởi một cạnh. Ví dụ tam giác là 3-clique. Định lý Mantel khẳng định rằng nếu đồ thị với n đỉnh không chứa 3-clique thì nó có nhiều nhất $n^2/4$ cạnh. Còn nếu k > 3 thì sao?

Câu trả lời được cho bởi kết quả cơ bản của Paul Turan, kết quả đã mở đầu cho lý thuyết đồ thị tối ưu.

Định lý 7 (Turan 1941). *Nếu đồ thị G = (V, E) trên n đỉnh không chứa (k+1)-clique, k ≥ 2, thì*

$$|E| \leq \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}. \qquad (1)$$

Cũng giống như định lý Mantel, định lý này được nghiên cứu nhiều lần với nhiều các chứng minh khác nhau. Ở đây chúng ta đưa ra chứng minh nguyên thủy của Turan. Phép chứng minh dựa trên lý luận "dịch chuyển trọng lượng" sẽ được đề cập trong phần bài tập. Ngoài ra sẽ còn một cách chứng minh sử dụng một ý tưởng hoàn toàn khác – lý luận xác suất.

Chứng minh. Ta sử dụng phép quy nạp theo n. Khi n = 2, bất đẳng thức (1) là hiển nhiên đúng. Trường hợp k=2 chính là định lý Mantel. Bây giờ giả sử bất đẳng thức đúng cho mọi đồ thị trên nhiều nhất n-1 đỉnh, và G = (V, E) là đồ thị trên n đỉnh không có (k+1)-clique và có số cạnh lớn nhất. Đồ thị này dĩ nhiên là phải chứa k-clique, bởi nếu không ta có thể thêm cạnh. Giả sử A là k-clique và B = V – A.

Vì mỗi cặp đỉnh của A được nối bởi một cạnh, A chứa $e_A = \binom{k}{2}$ cạnh. Gọi e_B là số cạnh nối các đỉnh của B và $e_{A,B}$ là số cạnh nối giữa các cạnh của A và B. Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$e_B \le \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{(n-k)^2}{2}.$$

Vì G không có k+1 clique nên mỗi $x \in B$ kề với nhiều nhất k-1 đỉnh thuộc A, và ta thu được

$$e_{A,B} \le (k-1)(n-k).$$

Cộng các bất đẳng thức này lại và sử dụng đẳng thức

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2} = \binom{k}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

ta suy ra rằng

$$|E| \le e_A + e_B + e_{A,B} \le \binom{k}{2} + \binom{k}{2}\left(\frac{n-k}{2}\right)^2 + (k-1)(n-k)$$

$$= \binom{k}{2}\left(1 - \frac{n-k}{k}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Bài tập 7. Giả sử rằng n là bội số của k. Hãy xây dựng một đồ thị không chứa (k+1)-clique, trong đó số các cạnh đạt được cận trên (1) trong định lý 7.

Bài tập 8. Nhắc lại *chỉ số độc lập* α(G) của đồ thị G là số lớn nhất các đỉnh đôi một không kề nhau của G. Hãy chứng minh đối ngẫu của định lý Turan: Nếu G là đồ thị với n đỉnh và nk/2 cạnh, $k \ge 1$, thì $\alpha(G) \ge n/(k+1)$.

5. Định lý Dirichlet

Ở đây ta trình bày một ứng dụng của nguyên lý chuồng và thỏ mà Dirichlet đã sử dụng, và chính vì ứng dụng này mà nguyên lý này được gắn với tên ông. Nó liên quan đến vấn đề tồn tại xấp xỉ hữu tỷ tốt cho các số vô tỷ. Kết quả này thuộc về lý thuyết số nhưng lý luận là tổ hợp.

Định lý 8 (Dirichlet 1879). *Nếu x là một số thực. Với mỗi số nguyên dương n,tồn tại số hữu tỷ p/q sao cho* $1 \le q \le n$ *và*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \le \frac{1}{q^2}.$$

Chứng minh. Cho chứng minh này, ta gọi {x} là *phần lẻ* của số thực x, tức là {x} = x – [x].

Nếu x là số hữu tỷ thì không có gì để chứng minh. Vì thế, ta giả sử rằng x là vô tỷ và xét n+1 số {ax}, a = 1, 2, …, n+1. Ta đặt n+1 số này vào n chuồng

$$\left(0, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

(Không có số nào trong các số nói trên trùng với đầu mút các đoạn, vì x là vô tỷ). Theo nguyên lý chuồng và thỏ, có một đoạn nào đó chứa nhiều hơn một số, vì dụ là {ax} và {bx}với a > b, và do đó cách nhau không quá 1/n. Đặt q = a – b, ta thấy rằng tồn tại số nguyên p sao cho |qx – p| < 1/n, từ đó suy ra kết quả cần chứng minh bằng cách chia cho q. Hơn nữa, q là hiệu của hai số nguyên thuộc 1, 2, …, n+1, do đó q ≤ n.

6. Đồ thị được tô đặc sắc

Ta tô màu các cạnh của đồ thị đầy đủ K_n trên n đỉnh. Ta nói rằng đồ thị được tô đặc sắc (swell-colored) nếu mọi tam giác chứa 1 hoặc 3 màu, nhưng không chứa 2 màu và đồ thị có nhiều hơn một màu. Có nghĩa là, ta cần sử dụng ít nhất 2 màu và với mọi tam giác, hoặc là tất cả các cạnh của nó có cùng màu hoặc có màu khác nhau.

Ta có thể chứng minh được rằng (hãy chứng minh!) K_n không thể được tô đặc sắc với đúng hai màu. Cũng có thể thấy rằng K_3 và K_4 là những đồ thị K_n duy nhất có thể tô đặc sắc với 3 màu; các đồ thị K_n khác cần nhiều màu hơn vì chúng có bậc liên thông cao hơn.

Sử dụng nguyên lý chuồng và thỏ, ta có thể chứng minh được chặn dưới sau.

Định lý 9 (Ward-Szabo 1994). *Đồ thị đầy đủ trên n đỉnh không thể được tô đặc sắc với ít hơn* $\sqrt{n} + 1$ *màu.*

Chứng minh. Giả sử K_n được tô đặc sắc với r màu khác nhau. Gọi N(x, c) là số cạnh kề với đỉnh x được tô màu c. Cố định x_0 và c_0 sao cho $N(x_0, c_0)$ lớn nhất, và ký hiệu giá trị lớn nhất này là N.

n-1 cạnh kề với x_0 có thể được chia thành ≤ r nhóm màu, mỗi nhóm có N hoặc ít hơn phần tử. Theo nguyên lý chuồng và thỏ

$$N.r \ge n - 1.$$

Gọi x_1, x_2, …, x_N là các đỉnh kề với x_0 bởi N cạnh có màu c_0. Gọi G là đồ thị con (đầy đủ) của K_n cảm sinh từ tập hợp các đỉnh $\{x_0, x_1,..., x_N\}$. Tính đặc sắc của K_n được cảm sinh cho G và như vậy mọi cạnh của G có cùng màu c_0. Vì K_n có ít nhất hai màu nên tồn tại đỉnh y thuộc K_n không nằm trong G và sao cho ít nhất một cạnh nối y với G có màu khác c_0.

Khẳng định 10. *N+1 cạnh nối y tới G được tô màu khác nhau và khác với* c_0.

Từ khẳng định này ta suy ra $r \geq N + 2$, từ đó, cùng với bất đẳng thức $N.r \geq n - 1$ suy ra $r(r-2) \geq n - 1$, và từ đó $r \geq \sqrt{n} + 1$ là điều cần chứng minh. Như vậy ta chỉ còn cần chứng minh khẳng định trên.

Nếu một cạnh nối y tới G, ví dụ $\{y, x_1\}$, có màu c_0 thì theo tính đặc sắc, cạnh $\{y,x_0\}$ phải được tô màu c_0, mâu thuẫn với cách chọn y (nhắc lại là x_1, x_2,…,x_N là *tất cả* các đỉnh kề với x_0 được nối bằng cạnh màu c_0). Tiếp theo, nếu hai cạnh nào đó nối y với G, chẳng hạn $\{y, x_1\}$ và $\{y, x_2\}$ có cùng màu thì theo tính đặc sắc của K_n ta có cạnh $\{x_1, x_2\}$ cũng được tô bằng màu đó. Nhưng $\{x_1, x_2\}$ thuộc G và có màu c_0 và như vậy $\{y, x_1\}$ phải có màu c_0 là điều mà ta đã chứng minh ở trên là không thể. Điều này kết thúc phép chứng minh khẳng định và cũng là kết thúc chứng minh định lý.

Tính tối ưu của cận dưới cho bởi định lý 9 có thể được chứng tỏ sử dụng một cấu hình gọi là "mặt phẳng afine". Ta hiểu rằng *mặt phẳng afine* AG(2,q) bậc q chứa đúng q^2 điểm và đúng q+1 lớp (được gọi là "bút chì") các đường thẳng song song, mỗi lớp chứa q đường thẳng (hai đường thẳng là song song nếu chúng không có điểm chung). Hơn nữa, hai điểm bất kỳ nằm trên đúng một đường thẳng.

Khi có 1 mặt phẳng như vậy, ta có thể xây dựng một phép tô đặc sắc cho K_{q^2} với q+1 màu như sau. Ta đồng nhất các đỉnh của K_{q^2} với các điểm của AG(2,q) và cho tương ứng một màu duy nhất cho mỗi một trong số q+1 bút chì các đường thẳng song song. Để xác định cách tô đặc sắc, ta xét hai điểm khác nhau x và y của K_{q^2}. Hai điểm này thuộc duy nhất một đường thẳng và đường thẳng này, đến lượt mình thuộc duy nhất một bút chì. Ta tô màu cạnh $\{x,y\}$ bằng màu của bút chì này. Vì hai điểm bất kỳ nằm trên một đường thẳng duy nhất và hai đường thẳng song song không có điểm chung, mọi cạnh của một tam giác sẽ được tô bằng các màu khác và như vậy, phép tô là đặc sắc như mong muốn.

Thực tế, Ward và Szabo (1994) đã chứng minh rằng điều ngược lại cũng đúng: nếu đồ thị K_{q^2} ($q \geq 2$) có thể tô đặc sắc bằng q+1 màu thì phép tô này có thể được dùng để xây dựng mặt phẳng afine bậc q.

[*Trích từ cuốn Extremal Combinatorics của Stasys Jukna*]

Giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình

Trần Nam Dũng
Trường ĐH KHTN Tp.HCM

Cuộc sống là chuỗi những phương trình
mà ta kiếm tìm lời giải

Giải bài toán bằng cách lập phương trình và hệ phương trình là một phương pháp thông dụng trong các bài toán đại số. Ý tưởng là để tìm một ẩn số nào đó, ta đưa vào các ẩn số phụ, sử dụng các dữ kiện đã cho tạo ra mối liên hệ giữa các ẩn số đó (các phương trình), giải hệ phương trình, tìm ra giá trị của ẩn số cần tìm. Phương pháp tương tự cũng có thể áp dụng cho các bài toán hình học tính toán (chẳng hạn bài toán giải tam giác, tứ giác), các bài toán đếm (phương pháp dãy số phụ).

Trong bài này, chúng ta đề cập tới phương pháp lập phương trình, hệ phương trình để giải các bài toán phương trình hàm. Ý tưởng chung cũng là để tìm một giá trị f(x) hoặc f(a) nào đó, ta sử dụng phương trình hàm để tìm ra mối liên kết giữa các đại lượng, nói cách khác, tạo ra các *phương trình số*. Giải các phương trình số này, ta có thể tìm ra f(x) hoặc f(a) với a là một giá trị nào đó.

1. Giải phương trình hàm dựa vào tính xoắn của hàm số

Hàm số ω(x) được gọi là *xoắn* đối với phép hợp nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $\omega^k(x) = x$ với mọi x. Ở đây $\omega^1(x)=\omega(x)$, $\omega^2(x)=\omega(\omega(x))$, …, $\omega^k(x) = \omega(\omega^{k-1}(x))$. Ta có thể sử dụng tính xoắn của một số hàm số để giải một số dạng phương trình hàm với một biến tự do. Chúng ta bắt đầu từ những ví dụ đơn giản:

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm số f: R \ {0} → R thoả mãn điều kiện

$$(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2 \qquad (1) \text{ với mọi } x \neq 0$$

<u>Gi</u>
<u>ải.</u> Trong (1), thay x bằng 1/x, ta được

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

Giải hệ (1), (2), coi f(x) và f(1/x) là các ẩn số, ta được

$$f(x)=\frac{x^4-x^3+1}{x^3-x^2+x}.$$

Trong ví dụ trên, ta cần tìm f(x). Ta coi f(x) là ẩn số chính, còn f(1/x) là một ẩn phụ. Phương trình (1) cho chúng ta một sự liên kết giữa ẩn số chính và ẩn phụ. Thay x bằng 1/x, ta hy vọng sẽ tìm ra được mối liên kết mới. Trong trường hợp này, đó chính là phương trình (2). Vì phương trình (2) không tạo ra ẩn số mới, tức là số phương trình đã bằng số ẩn số, đủ cho giải tìm được f(x) nên ta dừng lại. Trong ví dụ tiếp theo, chúng ta sẽ thấy quá trình tạo các mối liên kết có thể tạo ra các ẩn số mới.

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm số f: R \ {0, 1} → R thoả mãn điều kiện

$$f(x)+(x+1)f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{x^2+1}{x-1} \qquad (1)$$

Giải. Ẩn số ở đây đang là f(x) và ẩn số phụ là $f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. (1) cho ta một phương trình kết nối 2 ẩn số này. Ta tìm các mối liên kết khác. Trong (1) ta thay x bằng $\frac{1+x}{1-x}$ thì được

$$f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(\frac{1+x}{1-x}+1\right)f\left(\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}\right)=\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}{\frac{1+x}{1-x}-1}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{2}{1-x}f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{x^2+1}{x(x-1)} \qquad (2)$$

Như vậy, trong (2) lại xuất hiện một ẩn số phụ mới, đó là $f\left(-\frac{1}{x}\right)$. Nếu dừng lại ở đây thì số ẩn số nhiều hơn số phương trình và ta sẽ không tìm được f(x). Trong (1), tiếp tục thay x bằng -1/x thì ta được

$$f\left(-\frac{1}{x}\right)+\left(-\frac{1}{x}+1\right)f\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{\frac{1}{x^2}+1}{-\frac{1}{x}-1}\Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right)+\left(-\frac{1}{x}+1\right)f\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)=-\frac{x^2+1}{x(x+1)} \qquad (3)$$

Ta tiếp tục nhận được một ẩn số phụ mới, đó là $f\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)$.. Trong (1), ta lại thay x bằng $-\frac{1-x}{1+x}$ thì được

$$f\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)+\left(-\frac{1-x}{1+x}+1\right)f\left(\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right)=\frac{\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)^2+1}{-\frac{1-x}{1+x}-1}$$

$$\Leftrightarrow f\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)-\frac{2x}{1+x}f(x)=-\frac{x^2+1}{x+1} \qquad (4)$$

Đến đây thì ẩn số mới đã không xuất hiện, như vậy ta đã có 4 phương trình (1), (2), (3), (4) với 4 ẩn số là $f(x),\ f\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ f\left(-\frac{1}{x}\right),\ f\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)$. Giải hệ này như một hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn, ta tìm được

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x(x-1)}.$$

Quan sát lời giải của hai bài toán trên, ta thấy rằng phương pháp tương tự có thể áp dụng cho bài toán tìm tất cả các hàm f(x) thoả mãn phương trình

$$f(x) + a(x)f(\omega(x)) = b(x) \quad (1)$$

Trong đó a(x), b(x) là các hàm số đã cho, còn $\omega(x)$ là một hàm đã cho thoả mãn tính chất $\omega^k(x) = x$ với mọi x. Số k nhỏ nhất thoả mãn điều kiện $\omega^k(x) = x$ được gọi là *bậc* của hàm số $\omega(x)$.

Các ví dụ thường gặp về hàm $\omega(x)$ chính là $\omega(x) = -x$, $\omega(x) = 1/x$. Hàm $\omega(x) = \frac{1+x}{1-x}$ trong ví dụ 2 là một hàm bậc 4. Có thể rằng kiểm tra hàm số $\omega(x) = \frac{\sqrt{3}+x}{1-\sqrt{3}x}$ có bậc là 3.

Chú ý rằng đa số các hàm số là không xoắn. Chẳng hạn trong các hàm đa thức, chỉ có hàm số f(x) = x và f(x) = a – x là xoắn. Một lớp hàm phân thức xoắn được mô tả ở phần bài tập.

Ngay cả với phương trình hàm chứa các hàm xoắn, ta cũng có thể gặp khó khăn khi do tính đối xứng, ta không tạo ra đủ số phương trình để giải (có thể xảy ra trường hợp có một phương trình nào đó là hệ quả của các phương trình khác). Ví dụ:

Bài toán 3. Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$f(x) + f(-x) = x^2 \quad \text{với mọi } x \text{ thuộc } R.$$

<u>Giải.</u> Trong đẳng thức $f(x) + f(-x) = x^2$ (1) thay *x* bằng *–x* thì ta được

$$f(-x) + f(x) = (-x)^2 \quad (2)$$

Như vậy không xuất hiện ẩn số mới nhưng cùng lúc đó, (2) cũng không phải là phương trình mới, mà hoàn toàn giống như (1). Như vậy, ta không thể giải được hệ (1), (2) để ra giá trị duy nhất của *f(x)*.

Cũng tương tự như trong trường hợp hệ phương trình tuyến tính với số ẩn số nhiều hơn số phương trình trường hợp này hệ của chúng ta, hay nói cách khác, phương trình (1) sẽ có vô số nghiệm. Cụ thể trong bài toán này, đặt $g(x) = f(x) - x^2/2$ thì ta được g(x) + g(-x) = 0, suy ra g(x) là một hàm số lẻ. Ngược lại, nếu $f(x) = x^2/2 + g(x)$ với g(x) là một hàm số lẻ bất kỳ thì rõ ràng ta có

$$f(x) + f(-x) = x^2/2 + g(x) + x^2/2 + g(-x) = x^2.$$

Vậy tất cả các hàm số *f(x)* thoả mãn điều kiện đề bài là $f(x) = x^2/2 + g(x)$, trong đó *g(x)* là một hàm số lẻ bất kỳ xác định trên *R*.

Bài tập

1. Tìm tất cả các hàm số f: R → R sao cho với mọi x ∉ {-1, 1} ta có

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x$$

2. Giả sử a ≠ 0. Tìm hàm số f(x) biết rằng

$$f(x)+f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)=x$$

3. Tìm hàm số f(x) biết rằng

$$2f\left(\frac{x}{x-1}\right)-3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)=\frac{13x-4}{2x-3x^2}$$

4. a) Chứng minh rằng hàm số $\omega(x)=\dfrac{1+\sqrt{3}x}{\sqrt{3}-x}$ là xoắn

b) Tìm tất cả các giá trị a sao cho hàm số $\omega(x)=\dfrac{a+x}{1-ax}$ là xoắn.

5. Tìm tất cả các hàm số f(x): R → R sao cho với mọi x khác 0 ta có

f(x) + f(1/x) = 2

6. Tìm tất cả các hàm số f: R \ {0, 1} → R thoả mãn phương trình

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$$

với mọi x thuộc miền xác định của f.

2. Giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình

Với những phương trình hàm có 2 (hoặc nhiều hơn) phương trình điều kiện, ta có thể tìm cách kết hợp các phương trình đó để tìm ra f(x). Phương pháp cơ bản vẫn là tạo ra các mối liên kết, hay các phương trình bằng cách tính một giá trị bằng hai cách khác nhau.

Bài toán 4. Tìm tất cả các hàm số f: R → R thoả mãn điều kiện

i) f(-x) = -f(x) với mọi x thuộc R;

ii) f(x+1) = f(x) + 1 với mọi x thuộc R;

iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ với mọi x khác 0.

Giải. Tất cả các điều kiện đều trên một biến x. Trong trường hợp này, ta có thể dùng một chút khái niệm về đồ thị để hiểu con đường đi đến lời giải. Ta xem các số thực như các đỉnh của một đồ thị. Đỉnh x sẽ được nối với các đỉnh x+1, -x, 1/x. Các điều kiện đề bài sẽ cho chúng ta các mối liên hệ giữa giá trị của hàm số tại các đỉnh được nối bởi một cạnh. Nếu chúng ta tìm được một chu trình thì một cách tự nhiên, chúng ta sẽ có 1 phương trình (để tránh hàm số có hai giá trị khác nhau).

Ta thử tìm một chu trình như vậy

$$x \to x+1 \to \frac{1}{x+1} \to -\frac{1}{x+1} \to 1-\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \to \frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x} \to \frac{1}{x} \to x$$

Đặt *y = f(x)* thì từ chu trình ở trên, ta lần lượt có

$$f(x+1) = y+1,\ f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{y+1}{(x+1)^2},\ f\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{y+1}{(x+1)^2},\ f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1-\frac{y+1}{(x+1)^2}$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1-\frac{y+1}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{x^2+2x-y}{x^2},\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-y}{x^2},\ f(x) = 2x-y$$

Từ đó suy ra 2x – y = y, tức là y = x. Vậy f(x) = x.

Trong lý luận trên, ta cần đến điều kiện x khác 0 và -1. Tuy nhiên từ điều kiện f(x+1) = f(x) + 1 ta dễ dàng suy ra f(0) = 0 và f(-1) = 1. Vậy f(x) = x là tất các nghiệm của bài toán.

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm số f: R → R thoả mãn điều kiện

$f(x^2-y) = xf(x) – f(y)$ với mọi x, y thuộc R

Giải. Thay x = y = 0 vào phương trình hàm, ta được f(0) = - f(0), suy ra f(0) = 0. Thay y = 0 và phương trình hàm, ta được

$f(x^2) = xf(x)$ (1)

Từ đó suy ra

$f(x^2–y) = f(x^2) – f(y)$

Thay x = 0, ta được f(–y) = – f(y). Thay y bằng – y, ta được

$f(x^2+y) = f(x^2) – f(–y) = f(x^2) + f(y)$ với mọi x, y.

Từ đó, kết hợp với tính chất hàm lẻ, ta suy ra f(x+y) = f(x) + f(y) với mọi x, y.

Bây giờ ta có $f((x+1)^2)$ một mặt có thể tính theo công thức (1), tức là bằng (x+

1)f(x+1) = (x+1)(f(x)+f(1)). Mặt khác, ta có thể khai triển

$f((x+1)^2) = f(x^2+2x+1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1)$.

Từ đó ta được phương trình (x+1)(f(x)+f(1)) = xf(x) + 2f(x) + f(1), suy ra f(x) = f(1)x.

Đặt f(1) = a, ta được f(x) = ax. Thử lại vào phương trình ta thấy nghiệm đúng.

Vậy $f(x) = ax$ với $a \in R$ là tất cả các nghiệm của bài toán.

Phương pháp tạo ra các mối liên kết cũng có thể áp dụng hiệu quả trong các bài toán phương trình hàm trên Q, N, Z. Ta xem xét một số ví dụ

Bài toán 6. Tìm tất cả các hàm số $f : Q+ \to Q+$ thoả mãn các điều kiện

i) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi x thuộc Q+;

ii) $f(x^2) = f^2(x)$ với mọi x thuộc Q+.

Giải. Từ điều kiện i) ta dễ dàng suy ra $f(n) = n$ với mọi n thuộc Z và $f(r+n) = f(r) + n$ với mọi r thuộc Q và n thuộc Z. Bây giờ ta tính f(r) với $r = \frac{p}{q}$. Ý tưởng ta sẽ tính $f((r+q)^2)$ theo f(r) bằng hai cách.

Trước hết $f((r+q)^2) = f^2(r+q) = (f(r) + q)^2$ (1)

Mặt khác $f((r+q)^2) = f(r^2+2p+q^2) = f(r^2) + 2p + q^2 = f^2(r) + 2p + q^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $f^2(r) + 2qf(r) + q^2 = f^2(r) + 2p + q^2 \Rightarrow f(r) = p/q = r$.

Vậy $f(r) = r$ với mọi r thuộc Q.

Bài toán 7. Tìm tất cả các hàm số $f: N \to N$ sao cho

$f(m^2+n^2) = f^2(m) + f^2(n)$ với mọi m, n thuộc N

Giải. Cho m = n = 0, ta được $f(0) = 2f^2(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Cho m = 1, n = 0, ta được $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$. Ta xét trường hợp $f(1) = 1$, trường hợp $f(1) = 0$ xét tương tự. Với $f(1) = 1$, ta lần lượt tính được

$f(2) = f(1^2+1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2$

$f(4) = f(2^2+0^2) = f^2(2) + f^2(0) = 4$

$f(5) = f(2^2+1^2) = f^2(2) + f^2(1) = 5$

Nhưng làm sao để tính, chẳng hạn f(3)? Rõ ràng f(3) không thể tính được theo sơ đồ trên được, vì 3 không biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương.

Ta nhớ lại một bài toán lớp 3. Có 1 cái cân đĩa với 2 quả cân 1kg, 5kg và 1 bao đường nặng 10kg. Hãy cân ra 7kg đường bằng 1 lần cân. Rõ ràng, với cách cân thông thường thì ta chỉ cân được 1kg đường, 4kg đường (5-1), 5 kg đường và 6kg đường. Tuy nhiên, nếu tinh ý 1 chút, ta có thể có phương án cân được 7kg đường như sau: Đặt vào đĩa bên trái quả cân 1kg và 10kg đường, đĩa bên phải là quả cân 5kg, sau đó chuyển dần đường từ bên trái sang bên phải sao cho cân cân bằng, khi đó số đường còn lại ở đĩa bên phải là 7kg !

Bây giờ ta cũng thủ thuật tương với bài toán này. Ta không tính được trực tiếp f(3) nhưng ta lại có $f^2(5) = f(25) = f(3^2+4^2) = f^2(3) + f^2(4)$. Từ đó ta được $f(3) = 3$.

Tương tự như vậy ta có thể tính được f(6) nhờ vào đẳng thức $6^2 + 8^2 = 10^2$, trong đó $f(8) = f(2^2+2^2) = 2f^2(2) = 8$, $f(10) = f(3^2+1^2) = f^2(3) + f^2(1) = 10$.

Tiếp tục, để tính f(7), ta để ý $7^2 + 1 = 50 = 5^2 + 5^2$, từ đó f(7) = 7. Cũng như thế, do $11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2$ nên ta suy ra f(11) = 11.

Cách làm này có thể tổng quát hoá như thế nào? Ý tưởng là nếu $m^2 + n^2 = p^2 + q^2$ (1) thì $f^2(m) + f^2(n) = f^2(p) + f^2(q)$. Do đó nếu ta đã tính được f(n), f(p), f(q) thì f(m) cũng sẽ tính được.

Làm thế nào để có được những đẳng thức dạng (1) ở dạng tổng quát, cho phép ta chứng minh f(n) = n với mọi n bằng quy nạp? Chú ý rằng (1) có thể viết lại thành (m-p)(m+p) = (q-n)(q+n) = N. Do đó nếu chọn những số N có 2 cách phân tích thành tích của những số có cùng tính chẵn lẻ, ta sẽ tìm được nghiệm cho (1). Chọn N = 8k = 2.4k = 4.2k và N = 16k = 4.4k = 8.2k, ta được hệ

$$m - p = 2,\ m+p = 4k,\ q - n = 4,\ q + n = 2k$$

và

$$m - p = 4,\ m+p = 4k,\ q - n = 8,\ q + n = 2k$$

Từ đó được các hằng đẳng thức tương ứng

$$(2k+1)^2 + (k-2)^2 = (2k-1)^2 + (k+2)^2$$

và

$$(2k+2)^2 + (k-4)^2 = (2k-2)^2 + (k+4)^2$$

Từ hai đẳng thức này, với chú ý là ta đã chứng minh được f(n) = n với n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được rằng f(n) = n với mọi $n \in N$.

Trường hợp f(1) = 0, cũng bằng cách lý luận nêu trên ta suy ra f(n) = 0 với mọi n thuộc N.

Bài tập.

1. Tìm tất cả các hàm số f: Q → Q thoả mãn các điều kiện
   i) f(x+1) = f(x) + 1 với mọi x thuộc Q;
   ii) $f(x^3) = f^3(x)$ với mọi x thuộc Q;

2. Tìm tất cả các hàm f: R \ {0} → R thoả mãn đồng thời các điều kiện
   i) f(1) = 1;
   ii) $f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$
   iii) (x+y)f(x+y) = xyf(x)f(y)

   với mọi x, y mà $xy(x+y) \neq 0$.

3. Tìm tất cả các hàm số f: R → R thoả mãn
   $f(x^5 - y^5) = x^2f(x^3) - y^2f(y^3)$ với mọi x, y thuộc R.

4. Tìm tất cả các hàm số f: Z → Z thoả mãn điều kiện

$f(a^3+b^3+c^3) = f^3(a) + f^3(b) + f^3(c)$
với mọi a, b, c thuộc Z.

5. Cho hàm số f: R → R thoả mãn điều kiện
i) $f(x^2) = f^2(x)$ với mọi x thuộc R;
ii) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi x thuộc R.
Chứng minh rằng $f(x) = x$.

3. Tính giá trị của hàm số tại một điểm đặc biệt bằng cách lập phương trình

Trong phần trên, chúng ta có thể thấy rằng phương pháp lập phương trình có thể giúp chúng ta tìm được f(x) với mọi x, nói cách khác là giải được phương trình hàm. Trong tình huống tổng quát, không phải lúc nào ta cũng thực hiện được điều đó. Mối liên kết có thể chỉ tồn tại đối với một số các giá trị đặc thù. Ta xét một ví dụ:

Bài toán 8. Cho f là hàm số không giảm xác định trên đoạn [0, 1], thoả mãn đồng thời các điều kiện
1) $f(0) = 0$
2) $f(1-x) = 1 - f(x)\ \forall x \in [0, 1]$;
3) $f(x/3) = f(x)/2\ \forall x \in [0, 1]$.
Hãy tính f(1/13), f(1/7).

Giải. Tương tự như ở bài toán 4, ta thiết lập đồ thị có đỉnh là các số thực thuộc [0, 1] và x được nối với 1 – x và x/3 (là các đại lượng có thể tính được nếu biết f(x)). Ta thiết lập chuỗi

$$\frac{1}{13} \to 1-\frac{1}{13} = \frac{12}{13} \to \frac{4}{13} \to 1-\frac{4}{13} \to \frac{9}{13} \to \frac{3}{13} \to \frac{1}{13}$$

Như vậy, nếu đặt $f\left(\frac{1}{13}\right) = y$ thì ta lần lượt có

$$f\left(\frac{12}{13}\right) = 1-y,\ f\left(\frac{4}{13}\right) = \frac{1-y}{2},\ f\left(\frac{9}{13}\right) = 1-\frac{1-y}{2} = \frac{1+y}{2},\ f\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{1+y}{4},\ f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1+y}{8}$$

Như vậy ta phải có $y = \frac{1+y}{8}$, từ đó $y = \frac{1}{7}$. Vậy $f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{7}$.

Lưu ý rằng lời giải nói trên là rất đặc thù cho số 1/13. Ví dụ với 1/7 thì chuỗi như ở trên sẽ không đóng được

$$\frac{1}{7} \to \frac{6}{7} \to \frac{2}{7} \to \frac{5}{7}$$

Như vậy, cách giải trên đây không áp dụng cho 1/7. Để tìm giá trị f(1/7), ta cần đến các điều kiện f không giảm và f(0) = 0 (các điều kiện này không cần đến khi tính f(1/13)!). Cụ thể, từ các điều kiện đề bài, ta suy ra

$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(1/3) = f(1)/2 = 1/2,\ f(2/3) = 1 - f(1/3) = 1/2$

Từ đó, do hàm f không giảm nên ta suy ra f(x) = 1/2 với mọi x ∈ [1/3, 2/3]. Áp dụng tính chất 3, ta suy ra f(x) = 1/4 với mọi x x ∈ [1/9, 2/9]. Mà 1/9 < 1/7 < 2/9 nên từ đây ta suy ra f(1/7) = 1/4.

Trong các bài toán phương trình hàm trên tập số nguyên, các mối liên hệ dạng bất đẳng thức giữa các số cũng có thể là chìa khoá để tìm được giá trị của hàm số tại một điểm.

Bài toán 9. Cho hàm số f: N* → N* thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

i) f(2) = 4 ;

ii) f(mn) = f(m).f(n) với mọi m, n thuộc N* ;

iii) f(m) > f(n) với mọi m > n.

Hãy tìm f(3).

Giải. Dễ thấy hàm số $f(n) = n^2$ thoả mãn cả ba điều kiện. Một cách tự nhiên, ta nghĩ đến việc chứng minh f(3) = 9.

Thông tin duy nhất mà ta có thể có được từ hai điều kiện đầu là $f(2^k) = 4^k$. Rõ ràng, nếu không có điều kiện iii) thì f(3) có thể nhận giá trị tuỳ ý, do đó f(3) không tính được.

Với điều kiện iii), ta có 4 = f(2) < f(3) < f(4) = 16, suy ra f(3) chỉ có thể nhận giá trị trong {5, 6, …, 15}.

Tuy nhiên, chỉ cần xét thêm bất đẳng thức 8 < 9 là ta đã có thể suy ra $64 = f(8) < f(9) = f^2(3)$, suy ra f(3) > 8. Và bất đẳng thức 27 < 32 cho ta $f^3(3) = f(27) < f(32) = f^5(2) = 1024$, suy ra f(3) ≤ 10.

Như vậy, f(3) chỉ còn có thể nhận 1 trong 2 giá trị 9 hoặc 10.

Ta tìm cách loại giá trị 10 bằng 1 bất đẳng thức sát hơn. Tìm kiếm trong các luỹ thừa của 2 và 3, ta tìm được cặp bất đẳng thức $3^5 = 243 < 256 = 2^8$. Nếu f(3) = 10 thì từ bất đẳng thức trên ta sẽ suy ra $10^5 < 4^8 \Leftrightarrow 100000 < 65536$, mâu thuẫn.

Vậy chỉ còn trường hợp f(3) = 9. Kết hợp với nhận xét ban đầu là hàm số $f(n) = n^2$ thoả mãn tất cả các điều kiện của đề bài, ta kết luận f(3) = 9.

Ta có thể sử dụng ý tưởng ở trên để tính f(n) với n bất kỳ, cụ thể là chứng minh $f(n) = n^2$ với mọi n. Nói chung, trong một phương trình hàm tổng quát thì việc tìm giá trị hàm số tại từng điểm như vậy có thể sẽ gặp khó khăn. Tuy nhiên, có thể thấ
y rằng, trong một số phương trình hàm thì việc tìm các giá trị đặc biệt như f(0), f(1), f(-1) đóng vai trò then chốt trong lời giải của bài toán. Dưới đây ta xem xét một số ví dụ.

Bài toán 10. Tìm tất cả các hàm số f: R → R thoả mãn điều kiện

$f(xy) + f(x+y) = f(x)f(y) + f(x) + f(y)$ (1)

Giải. Phương trình trên là « tổng » của hai phương trình

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(3) $f(xy) = f(x)f(y)$

Chú ý là theo lý thuyết về phương trình hàm Cauchy thì nếu hàm số f: R → R thoả mãn đồng thời hai phương trình (2) và (3) thì $f(x) = x$ hoặc $f(x) \equiv 0$. Do vậy, ta chỉ cần chứng minh là từ (1) suy ra (2) và (3) là xong.

Để tách được các phương trình trong (1), ta quan tâm đến tính chẵn, lẻ của f. Chẳng hạn nếu f là hàm số lẻ thì thay y bằng –y, ta sẽ thu được

$f(-xy) + f(x-y) = f(x)f(-y) + f(x) + f(-y)$ (4)

Cộng (1) và (4), chú ý f là hàm lẻ, ta sẽ thu được

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$

Từ phương trình này và $f(0) = 0$ (suy ra từ (1) bằng cách cho $x = y = 0$), ta dễ dàng suy ra $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y, tức là (1) đã tách được.

Quay trở lại với bài toán. Như vậy, ta quan tâm đến tính chẵn lẻ của hàm số f.

Một cách tự nhiên, ta thay $y = -1$ trong (1) thì được

$f(-x) + f(x-1) = f(x)f(-1) + f(x) + f(-1)$ (5)

Nếu tìm được f(-1) thì có thể khảo sát được tính chẵn lẻ của f. Ta tìm cách tính f(-1).

Chú ý rằng trong phương trình (5) có đến 3 ẩn số là f(-x), f(x-1), f(x). Điều này không cho phép chúng ta thiết lập dãy truy hồi để tính các giá trị f. Một lựa chọn khác là thay y = 1 vào (1) để được

$f(x) + f(x+1) = f(x)f(1) + f(x) + f(1)$

Suy ra

$f(x+1) = f(1)f(x) + f(1)$ (6)

Như vậy, theo ngôn ngữ đồ thị đã dùng trong các bài toán 4, 8, ta đã tìm được mối liên kết x → x+1.

Từ đây, nếu đặt $f(1) = a$ thì ta lần lượt tính được $f(2) = a^2 + a$, $f(3) = a^3 + a^2 + a$, $f(4) = a^4 + a^3 + a^2 + a$.

Nếu tiếp tục dãy này thì sẽ tính được f(n) theo f(1). Tuy nhiên, điều ta cần tìm là f(1). Vì thế, ta cần tìm một phương trình khác với công thức truy hồi nói trên. Điều này có thể có được ngay nếu ta thay $x = y = 2$ vào (1). Khi đó

$f(4) + f(4) = f^2(2) + 2f(2)$

Thay các giá trị của f(4) và f(2) tính theo a ở trên vào, ta được phương trình

$2(a^4+a^3+a^2+a) = (a^2+a)^2 + 2(a^2+a)$

$\Leftrightarrow \quad a^4 = a^2$

Từ đó suy ra a chỉ có thể nhận các giá trị $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$.

+ Nếu $a = 0$ thì từ (6) ta suy ra $f(x) = 0$ với mọi x. Đây là một nghiệm của phương trình hàm.
+ Nếu $a = -1$ thì từ (6) ta suy ra $f(x+1) = -f(x) - 1$, tức là $f(x) + f(x+1) = -1$ với mọi x. Từ đây, thay $x = -1$, chú ý là $f(0) = 0$, ta được $f(-1) = -1$. Thay vào (5), ta được $f(-x) + f(x-1) = -1$. Mà $f(x-1) + f(x) = -1$ nên từ đây suy ra $f(-x) = f(x)$, tức là f là hàm chẵn. Bây giờ trong (1), ta thay y bằng –y thì được

$$f(-xy) + f(x-y) = f(x)f(-y) + f(x) + f(-y) \quad (4)$$

Trừ (1) cho (4), chú ý là f là hàm chẵn, ta suy ra $f(x+y) - f(x-y) = 0$ với mọi x, y. Từ đây suy ra f là hàm hằng. Điều này mâu thuẫn vì $f(0) = 0$, $f(1) = -1$. Vậy trường hợp này không xảy ra.

+ Nếu $a = 1$ thì từ (6) ta suy ra $f(x+1) = f(x) + 1$ (7). Thay $x = -1$, ta được $f(-1) = -1$. Thay vào (5), ta được $f(-x) + f(x-1) = -1$. Lại có từ (7) $f(x-1) = f(x) - 1$ nên từ đây ta suy ra $f(-x) = -f(x)$. Như vậy f là hàm lẻ. Lý luận như phân tích ban đầu, ta được f(x) thoả mãn hệ phương trình (2), (3). Áp dụng lý thuyết phương trình hàm Cauchy, ta tìm được $f(x) = x$.

Bài toán 11. Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$f(x^2 + f(y)) = f^2(x) + y \quad (1)$$

Giải. Vấn đề mấu chốt trong bài toán này là chứng minh được $f(0) = 0$. Thật vậy, nếu ta chứng minh được $f(0) = 0$ thì thay $y = 0$ vào phương trình hàm, ta được

$$f(x^2) = f^2(x) \quad (2)$$

Thay $x = 0$ vào (1), ta được

$$f(f(y)) = y \quad (3)$$

Thay y bằng f(y) trong (1), chú ý rằng $f(f(y)) = y$ và $f^2(x) = f(x^2)$, ta được $f(x^2+y) = f(x^2) + f(y)$ với mọi x, y thuộc R

Từ đây dễ dàng chứng minh được rằng

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (4)$$

với mọi x, y thuộc R.

Như vậy f thoả mãn phương trình hàm Cauchy. Ngoài ra, do (2) nên ta có $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Kết hợp với (4), ta suy ra f là hàm số tăng. Như vậy, theo lý thuyết cơ bản về phương trình hàm Cauchy, $f(x) = ax$ với mọi x, trong đó $a \geq 0$. Thay vào phương trình hàm, ta được $a(x^2+ay) = a^2x + y$ với mọi x, y, suy ra $a = 1$. Vậy $f(x) = x$ là nghiệm duy nhất của phương trình hàm.

Tất các lý luận trên đây đều dựa trên giả thiết là ta đã chứng minh được $f(0) = 0$. Bây giờ ta sẽ chứng minh điều này.

Đặt $f(0) = a$. Thay $y = 0$ vào (1), ta được

$$f(x^2+a) = f^2(x) \quad (5)$$

Thay $x = 0$ vào (5), ta được $f(a) = a^2$

Thay $x = 0$ vào (1), ta được

$f(f(y)) = a^2 + y$ (6)

Bây giờ ta sẽ tính $f(a^2+f^2(1))$ bằng hai cách. Một mặt

$$f(a^2+f^2(1)) = f(f^2(1) + f(a)) = (f(f(1)))^2 + a = (a^2+1)^2 + a$$

Mặt khác

$$f(a^2+f^2(1)) = f(a^2+f(1+a)) = (f(a))^2 + 1 + a = a^4 + a + 1$$

Từ đây ta suy ra $a^4 + 2a^2 + 1 + a = a^4 + a + 1$ suy ra $a = 0$. Tức là $f(0) = 0$. Lời giải hoàn tất.

Bài tập

1. Cho f là hàm số không giảm xác định trên đoạn [0, 1], thoả mãn đồng thời các điều kiện

   i) $f(0) = 0$

   ii) $f(1-x) = 1 - f(x)\ \forall x \in [0, 1]$;

   iii) $f(x/3) = f(x)/2\ \forall x \in [0, 1]$.

   a) Hãy tính $f(18/1991)$;

   b) Hãy tính $f(1/n)$ với $n \in \{1, 2, \ldots, 20\}$

   c)* Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một hàm số f thoả mãn đồng thời các điều kiện nêu trên.

2. Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* thoả mãn các điều kiện

   i) $f(2) = 2$;

   ii) $f(mn) = f(m).f(n)$ với mọi $(m, n) = 1$;

   iii) $f(m) > f(n)$ với mọi $m > n$.

3. Tìm tất cả các giá trị k thuộc N* sao cho tồn tại hàm số f: N* → N* thoả mãn các điều kiện

   i) $f(2) = k$;

   ii) $f(mn) = f(m).f(n)$ với mọi m, n;

   iii) $f(m) > f(n)$ với mọi $m > n$.

4. Tìm tất cả các hàm số f: R → R thoả mãn điều kiện

   $f(xy) + f(x) + f(y) = f(x+y) + f(x)f(y)$ với mọi x, y thuộc R.

5. Tìm tất cả các hàm số f : R → R thoả mãn điều kiện

   $(f(x+y))^2 = f(x)f(x+2y) + yf(y)$ với mọi x, y thuộc R.

6. Tìm tất cả các hàm số f: R → R thoả mãn điều kiện

   $f(x^2 + y + f(y)) = f^2(x) + 2y$

với mọi x, y thuộc R.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục 2001

[2] Nguyễn Trọng Tuấn, *Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic*, Nhà xuất bản Giáo dục 2005.

[3] Phan Đức Chính, Lê Đình Thịnh, Phạm Tấn Dương, *Tuyển tập các bài toán sơ cấp*, Tập 1, Đại số, NXB Đại học và THCN 1977

[4] Phan Huy Khải, *Các bài toán về hàm số*, Nhà xuất bản Giáo dục 2007

[5] B.J.Venkatachala, *Functional Equations – A Problem Solving Approach*, PRISM 2002.

[6] Pierre Bornsztein, Mobinool Omarjee, *Cours – Equations fonctionelles,* Electronic Edition 2003

[7] Titu Andreescu, Iurie Boreico, *Functional Equations*, Electronic Edition 2007

Tối ưu tổ hợp I: Các bài toán tối ưu về hệ các tập hợp

Gil Kalai

Bài viết này giới thiệu về các bài toán tối ưu liên quan đến hệ các tập hợp. Đây là một trong những bài giảng của Gil Kalai tại seminar "Các khái niệm cơ bản" tại ĐH TH Hungari do David Kazhdan khởi xướng.

Paul Erdös

1. Ba bài toán mở đầu

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng ba bài toán khá giống nhau, từ rất dễ đến rất khó.

Bài toán I: Cho N = {1,2, … , n }. Hỏi kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N thoả mãn điều kiện hai tập hợp bất kỳ thuộc $\mathcal{F}$ có phần giao khác rỗng? (Một họ như vậy được gọi là họ *giao nhau*)

Trả lời I: Kích thước lớn nhất là 2^{n-1}. Chúng ta có thể đạt được điều này bằng các chọn tất cả các tập con chứa phần tử '1'. Chúng ta không thể đạt được con số lớn hơn, bởi từ mỗi cặp gồm một tập hợp và phần bù của nó, ta chỉ có thể chọn một tập hợp vào họ các tập hợp của chúng ta.

Bài toán II: Tìm kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N sao cho hai tập hợp bất kỳ thuộc $\mathcal{F}$ có hợp khác N?.

Câu trả lời là hiển nhiên vì bài toán II chẳng qua là bài toán I. Chỉ cần chuyển qua phần bù. Và ta sẽ có đáp số y như bài toán I. Ta phát biểu bài toán II khác.

Bài toán II mới: Tìm kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N sao cho với hai tập hợp bất kỳ S, R thuộc $\mathcal{F}$ ta có giao của chúng khác rỗng và hợp của chúng khác N.

Một ví dụ của một họ như vậy là tập hợp tất cả các tập hợp chứa phần tử '1' nhưng không chứa phần tử '2'. Họ này có 2^{n-2} tập hợp. Phải mất vài năm sau khi Erdös đề xuất bài toán này, Kleitman mới chứng minh được là không có họ nào lớn hơn với tính chất này.

Bài toán III (Giả thuyết Erdös-Sos) Cho $\mathcal{F}$ là họ các đồ thị với N là tập các đỉnh. Giả sửa rằng hai đồ thị bất kỳ của họ có chung một **tam giác**. Hỏi $\mathcal{F}$ có kích thước lớn nhất bằng bao nhiêu?

Tổng số các đồ thị với n đỉnh là $2^{\binom{n}{2}}$. (Chú ý: ta đếm các đồ thị mà không tính đến sự đẳng cấu của chúng.) Một ví dụ đơn giản của họ tập hợp với tính chất đã cho là tất cả các tập hợp chứa một tam giác cố định nào đó. Ví dụ tất cả các đồ thị chứa các cạnh {1,2},{1,3},{2,3}. Họ này chứa 1/8 của tất cả các đồ thị. Tồn tại hay không một họ lớn hơn các đồ thị với tính chất đã cho? Erdös và Sos đưa ra giả thuyết là câu trả lời là không – chúng ta không thể tìm được họ lớn hơn. Giả thuyết này hiện nay vẫn là một vấn đề mở.

Vera Sos

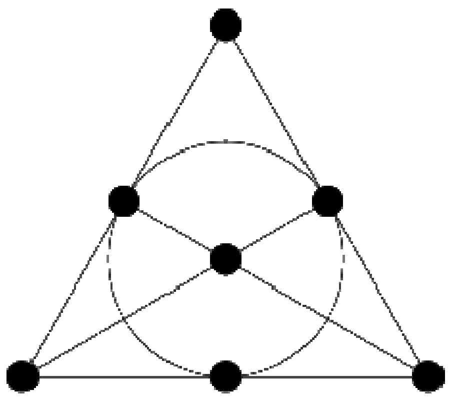
2. Hai định lý cơ bản về họ các tập con với các điều kiện giao cho trước.

Định lý Erdös-Ko-Rado: Một họ giao nhau các k-tập con của N, trong đó $2k \le n$ chứa tối đa $\binom{n-1}{k-1}$ tập hợp.

Định lý Fisher; deBruijn-Erdös: Họ các tập con của N sao cho hai tập hợp khác nhau bất kỳ của họ có đúng một phần tử chung có nhiều nhất n phần tử.

(Erdös và deBruijn kết luận rằng n điểm không thẳng hàng trên mặt phẳng xác định ít nhất n đường thẳng. Hãy thử suy ra điều này từ định lý trên!)

Tất cả các k-tập con của N chứa phần tử ‘1′ cho ví dụ về dấu bằng cho định lý Erdos-Ko-Rado. Với định lý Erdös deBruijn ta lấy họ {{1} , {1,2} {1,3} … {1,n}} hoặc thay tập hợp đầu tiên bởi {2,3,…,n}, hoặc lấy một mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn.



Mặt phẳng Fano các điểm xạ ảnh hữu hạn bậc 2.

3. Phép chứng minh định lý deBruijn Erdös bằng đại số tuyến tính.

Phép chứng minh định lý Fisher; de Bruijn-Erdös có thể trình bày như sau: Giả sử rằng có m tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_m$ trong họ. Xét **ma trận liên kết** của họ: Phần tử (i,j) của ma trận này bằng ‘1′ nếu i thuộc A_j.

Sự kiện cốt yếu ở đây là các cột $c_1, c_2, \dots, c_m$ của ma trận liên kết là độc lập tuyến tính, từ đây suy ra $m \le n$.

Làm thế nào để có thể chứng minh rằng các cột là độc lập tuyến tính? Trước hết, chúng ta giả sử rằng có ít nhất 2 tập hợp. Khi đó ta viết $s = \sum \alpha_i c_i$, và tính tích trong

$< s, s >= \sum \sum \alpha_i \alpha_j < c_i, c_j >$.

Ta lưu ý rằng nếu i và j khác nhau thì $< c_i, c_j >= 1$ và $< c_i, c_i >= |A_i|$.

Như vậy $< s, s >= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2(|A_i| - 1) + (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i)^2$.

Như vậy tích này chỉ có thể bằng 0 khi tất cả các hệ số α_i đều bằng 0.

Chứng minh này là một ví dụ của "các lý luận về chiều trong tổ hợp".

4. Định lý Sperner

Định lý Sperner (1927) khẳng định rằng kích thước lớn nhất của họ $\mathcal{F}$ các tập con của N là một đối xích đối với quan hệ bao hàm là hệ số nhị thức $\binom{n}{n/2}$. Lubell tìm được một phép chứng minh đơn giản và đẹp cho định lý Sperner:

Gọi $\mathcal{F}$ là một đối xích như vậy và giả sử rằng nó có s_k tập hợp k phần tử. Ta tính các cặp (π, S) trong đó π= $((\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ là một hoán vị của {1,2, … ,n} và S là tập hợp thuộc họ có khởi đầu là π, cụ thể là S={$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(k)$ } với k nào đó. Với mỗi hoán vị π ta tìm được **nhiều nhất** một khởi đầu S trong họ $\mathcal{F}$(do điều kiện đối xích). Nếu S là một tập hợp k phần tử, ta có thể tìm được **đúng** k! (n-k)! hoán vị π với S là khởi đầu. Kết hợp hai sự kiện này, ta có $\sum_{k=0}^{n} s_k k!(n-k)! \le n!$ hay nói cách khác $\sum_{k=0}^{n} s_k/\binom{n}{k} \le 1$. Bất đẳng thức này (được gọi là bất đẳng thức LYM) suy ra kết quả cần chứng minh.

Bella Bollobas, một trong những người đã phát hiện ra bất đẳng thức LYM.

Định lý Erdös-Ko-Rado có một phép chứng minh tương tự với chứng minh trên.

Ý tưởng là tính cách cặp (π, S) trong đó S là một tập hợp trong họ, π là hoán vị vòng quanh $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ và S là một "khoảng" liên tục đối với π.

Một mặt ta có (n-1)! hoán vị vòng quanh và dễ dàng thấy rằng với mỗi một hoán vị như vậy, ta có thể chọn được nhiều nhất k "khoảng" đôi một giao nhau. Mặt khác, với mỗi tập hợp S có k!(n-k)! hoán vị vòng quanh mà trong đó S là một khoảng liên tục.

Như vậy $|\mathcal{F}|$k! (n-k)! $\le (n-1)!k$ và điều này cho chúng ta định lý Erdös Ko Rado.

Quay trở lại một chút về câu "dễ dàng nhận thấy". Phần này sử dụng điều kiện $2k \le n$. Một cách lý luận cho phần này như sau: xét khoảng J mà phần tử tận cùng bên trái là nằm ở bên trái nhất và chú ý rằng có k khoảng giao với J mà phần tử tận cùng bên trái nằm bên phải z. Một cách khác là xét một khoảng J bào đó có độ dài k và chú ý rằng 2k-2 khoảng có giao với khoảng này được chia thành k-1 cặp mà mỗi cặp chứa hai khoảng không giao nhau.

5. Định lý Turan và bài toán Turan

Trường hợp đặc biệt của định lý Turan cho đồ thị không chứa tam giác được chứng minh bởi Mantel vào năm 1907.

Số lớn nhất các cạnh (ký hiệu là $t_2(n)$) của một đồ thị n đỉnh và không chứ tam giác đạt được ở đồ thị hai phe đầy đủ n đỉnh với kích thước hai phe càng gần nhau càng tốt (cụ thể là [n/2] và [(n+1)/2].

Định lý Turan ở dạng tổng quát được chứng minh vào những năm 40 của thế kỷ trước.

Số lớn nhất các cạnh (ký hiệu là $t_r(n)$) của đồ thị n đỉnh không chứa đồ thị con đầy đủ (r+1) đỉnh đạt được tại đồ thị r phe đầy đủ với n đỉnh, trong đó kích thước của các phần càng gần nhau càng tốt.

Paul Turan

Chứng minh định lý Turan: Thực sự định lý Turan không khó; gần như cách tiếp cận nào cũng có thể thành công. Sau đây là một cách tiếp cận như vậy: để đơn giản, ta xét trường hợp tam giác. Xét đỉnh v với bậc lớn nhất và chia các đỉnh còn lại của đồ thị thành hai phần: A – các đỉnh kề với v, B – là các đỉnh còn lại. Bây giờ chú ý là các đỉnh thuộc A lập thành một tập hợp độc lập (tức là không có cạnh nối giữa các đỉnh của A). Với mỗi đỉnh thuộc B ta xoá đi tất cả các cạnh chứa đỉnh này và thay vào đó, nối đỉnh này với tất cả các đỉnh thuộc A. Để ý rằng trong đồ thị mới, bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hơn bậc ở đồ thị ban đầu. Và, hơn nữa, đồ thị mới là đồ thị hai phe (trong đó A là một phe). Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh là với đồ thị hai phe thì số cạnh là lớn nhất khi hai phần có số đỉnh càng gần nhau càng tốt.

Sau đây là một chứng minh khác. Xoá đi một đỉnh của đồ thị G với n+1 đỉnh không chưá K_r. Số cạnh của đồ thị còn lại không vượt quá $t_r(n)$. Thực hiện điều này đối với tất cả các đỉnh và chú ý rằng một một cạnh được tính n-1 lần. Ta thu được rằng số cạnh trong G (và nghĩa là $t_r(n+1)$) không vượt quá phần nguyên trên của $t_r(n) \cdot (n+1)/(n-1)$. Đánh giá này cho chúng ta kết quả chính xác của bài toán.

Chúng ta kết thúc chuyến tham quan thú vị này bằng bài toán mà Turan đưa ra vào năm 1940. Chúng ta muốn tìm số phần tử lớn nhất của tập hợp các bộ ba lập từ {1,2,…,n} không chứa một "tứ diện", tức là không chứa bốn bộ ban có dạng {a,b,c},{a,b,d),{a,c,d},{b,c,d}.

Nếu độc giả chưa biết đáp số, hãy thử đưa ra dự đoán của mình. Turan đã đưa ra một giả thuyết của mình và giả thuyết này hiện nay vẫn còn là một vấn đề mở.

Trần Nam Dũng *dịch và giới thiệu (từ web site của Seminar: Tối ưu tổ hợp I)*

Một số ghi chú thêm của dịch giả:

Đối xích: Trong một tập sắp thứ tự (partial order set), một đối xích là một họ các phần tử đôi một không so sánh được với nhau.

LYM: Lubell, Yamamoto, Meshalkin là những người đã chứng minh định lý này một cách độc lập. Bollobas là người thứ tư cũng tìm ra kết quả này một cách độc lập.

Về kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2010

Trần Nam Dũng

Kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2010 (VTST 2010) được tổ chức trong hai ngày 17, 18/4 với sự tham gia của 42 thí sinh đến từ các tỉnh thành và các trường ĐH. Thành phần tham dự TST năm nay có khá nhiều điểm đặc biệt. Hai đội có lực lượng hùng hậu nhất tham dự TST là Nghệ An (6 em) và Đà Nẵng (5 em). Các đơn vị lần đầu tiên có thí sinh dự TST là Bà Rịa Vũng Tàu (2 em), ĐHSP Tp HCM (1 em). Một điểm nổi bật nữa là Phú Yên với 3 học sinh tham dự TST. Bên cạnh đó, có thể nhấn mạnh sự vắng mặt của một số đơn vị có truyền thống như Hải Phòng, Thanh Hóa, ĐH Vinh hay sự xuống sức của các đơn vị có số má khác như Vĩnh Phúc, PTNK.

Như thường lệ, đề thi chọn đội tuyển năm nay có 6 bài. Điểm đặc biệt là năm nay chỉ có 1 bài hình, 1 bài đại số. Các phân môn Số học và Tổ hợp được "ưu ái" hơn với 2 bài.
Bài 1 và 4 được coi là các bài dễ của kỳ thi. Bài 2 thuộc loại trung bình. Các bài 5, 6 được đánh giá là khó và bài 3 là rất khó. Đánh giá chung là đề năm nay không khó bằng đề năm ngoái.

Công tác chấm thi đã được tiến hành ngay sau kỳ thi và kết quả đã chọn được 6 thành viên tham dự IMO 2010.

Trái với dự đoán lạc quan của nhiều người, điểm thi năm nay không cao hơn nhiều so với năm ngoái, điểm cao nhất đội tuyển là 24 và điểm thấp nhất là 18. Như vậy, kỳ thi năm nay một lần nữa lại khẳng định chân lý: Nếu làm 3 bài chắc ăn thì sẽ lọt vào đội tuyển. Kết quả này tiếp tục cho thấy điểm yếu chung của thí sinh vẫn là hai mảng Số học và Tổ hợp, cũng như khâu trình bày của thí sinh rất có vấn đề. Sau kỳ thi, khá nhiều thí sinh tuyên bố mình làm được 4 bài nhưng kết quả thực tế cho thấy không phải như vậy.

Có một số ý kiến cho rằng các bài toán 5, 6 không phù hợp với đề thi chọn đội tuyển và đem lại lợi thế cho những ai đã biết định lý Hall và định lý Lucas. Tuy nhiên, theo ý kiến của chúng tôi, ở mức độ kỳ thi chọn đội tuyển, nếu chúng ta muốn có một đội tuyển mạnh, đủ sức tấn công các bài toán 3, 6 của IMO thì cần phải nâng tầm kiến thức cũng như suy luận của học sinh đến mức độ các định lý này. Chú ý là các định lý này rất sơ cấp và chứa đựng nhiều phương pháp tư duy và lý luận đẹp và hay.

Cuối cùng, xinh chúc mừng các thí sinh đã vượt qua kỳ thi Vietnam TST vừa qua, chúc đội tuyển Việt Nam có thành tích xuất sắc tại IMO 2010!

Vietnamese IMO Team Training Camp 2010

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN VN DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ

Ngày 1, 17/4/2010
Thời gian làm bài: 240 phút.

BÀI 1. (6 điểm) Cho tam giác ABC không vuông tại A có trung tuyến AM. D là một điểm chạy trên AM. Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là các đường tròn đi qua D và tiếp xúc với BC tại B và C. CA cắt (O_2) tại Q. BA cắt (O_1) tại P.
a) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của (O_1) và tiếp tuyến tại Q của (O_2) phải cắt nhau. Gọi giao điểm này là S.
b) Chứng minh rằng S luôn chạy trên một đường cố định khi D chạy trên AM.

BÀI 2. (6 điểm) Với mỗi số n nguyên dương, xét tập sau

$$T_n = [11(k+h) + 10(n^k + n^h) \mid 1 \le k, h \le 10]$$

Tìm tất cả n sao cho không tồn tại a khác b thuộc T_n sao cho a-b chia hết cho 110.

BÀI 3. (8 điểm) Hình chữ nhật kích thước 1*2 được gọi là hình chữ nhật đơn. Hình chữ nhật 2*3 bỏ di 2 ô ở góc chéo nhau (tức còn có 4 ô) gọi là hình chữ nhật kép. Người ta ghép khít các hình chữ nhật đơn và hình chữ nhật kép được bảng 2008*2010. Tìm số bé nhất các hình chữ nhật đơn có thể dùng để lát được như trên.

Ngày 2, 18/4/2010
Thời gian làm bài: 240 phút.

BÀI 4. (6 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$16(a+b+c) \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{cyclic} \frac{1}{(a+b+\sqrt{2(a+c)})^3} \le \frac{8}{9}.$$

BÀI 5. (7 điểm) Có n mỗi nước có k đại diện (n > k > 1). Người ta chia n.k người này thành n nhóm mỗi nhóm có k người sao cho không có 2 người cùng nhóm đến từ 1 nước. Chứng minh rằng có thể chọn ra n người đến từ các nhóm khác nhau và đến từ các nước khác nhau.

BÀI 6. (7 điểm) Gọi S_n là tổng bình phương các hệ số trong khai triển của $(1+x)^n$. Chứng minh rằng $S_{2n} + 1$ không chia hết cho 3.

Lời giải và Nhận xét

Bài 1.

Ta có $MB^2 = MC^2$ nên M thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Suy ra DM là trục đẳng phương của 2 đường tròn. Do đó A thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn.
Suy ra AP.AB = AQ.AC => tứ giác BCPQ nội tiếp.
Gọi tiếp tuyến của (O_1) là Px thì $\angle xPB = \angle PBC = \angle PQA$, suy ra Px tiếp xúc với (APQ) hay (APQ) tiếp xúc với (O_1). Tương tự suy ra (APQ) tiếp xúc với cả (O_1) và (O_2).
Tam giác APQ đồng dạng với ACB nên APQ không vuông. Suy ra tiếp tuyến tại P và Q phải cắt nhau tại S.
Vì $SP^2 = SQ^2$ nên S thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2), chính là đường thẳng AM, hay S thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 2.

Đặt $s(k,h, n) = 11(k + h) + 10(n^k + n^h)$. Do $s(h,k) = s(k, h)$ nên ta luôn giả sử $k \geq h$.
Ta thấy nếu $n \equiv m$ thì $s(k,h, n) \equiv s(k,h,m) \mod 110$, do đó ta chỉ cần tìm các $n \leq 11$.
Xét $s(6,6,n) – s(1,1,n) = 110 + 20n(n^5-1)$. Do đó nếu $n(n^5-1)$ chia hết cho 11 thì n không thỏa mãn điều kiện.
Từ đây ta loại các giá trị n = 1, 3, 4, 5, 9, 11.
Xét $s(8,2,n) – s(6,4,n) = 10(n^8-n^6+n^2-n^4) = 10(n^6-n^2)(n^2-1)$. Do đó nếu $n^2 – 1$ chia hết cho 11 thì n không thỏa mãn điều kiện. Vậy ta loại giá trị n = 10.
Ta chứng minh với n = 2, 6, 7, 8 thì $s(k,h,n) – s(k',h',n)$ không chia hết cho 110 với mọi bộ $\{k, h\} \neq \{k',h'\}$.
Trước hết bằng cách thử trực tiếp, ta thấy rằng với n = 2, 6, 7, 8 thì $n^k \neq n^h \mod 11$ với mọi $k \neq h$. (*)
Thật vậy, nếu $s(k,h,n) – s(k',h',n)$ chia hết cho 110 thì $11(k+h-k'-h') + 10(n^k+n^h-n^{k'}-n^{h'})$ chia hết cho 110, suy ra

$$k+h – k' – h' \equiv 0 \mod 10 \quad (1)$$

và

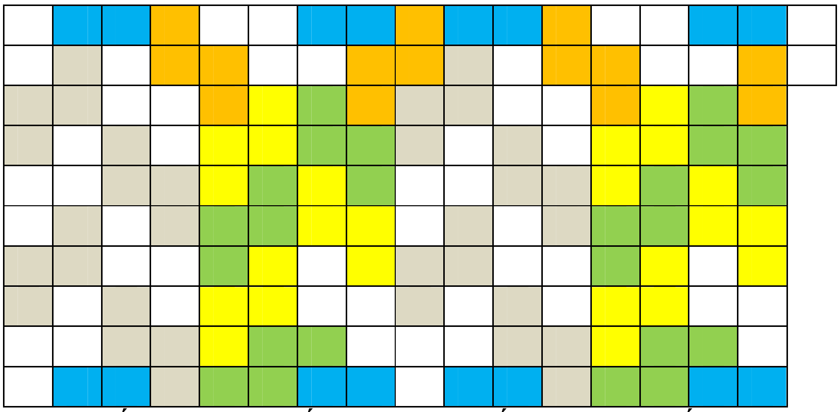
$$n^k + n^h – n^{k'} – n^{h'} \equiv 0 \mod 11 \ (2)$$

Từ (1) suy ra $k – k' \equiv h' – h \pmod{10}$. Từ đây, theo định lý nhỏ Fermat, ta có $n^{k-k'} \equiv n^{h'-h} \pmod{11}$
Viết (2) lại thành $n^{k'}(n^{k-k'}-1) \equiv n^h(n^{h'-h}-1) \pmod{11}$.
Theo lý luận ở trên thì $n^{k-k'}-1 \equiv n^{h'-h}-1 \mod 11$. Theo (*) thì $n^{k-k'}-1 \equiv n^{h'-h}-1 \neq 0$. Như vậy ta có thể chia hai vế cho $n^{k-k'}-1$ để được $n^{k'} \equiv n^h \pmod{11}$. Từ (*) suy ra k' = h. Từ (1) suy ra k = h'. Như thế $\{k,h\} = \{k', h'\}$. Ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Có thể đưa ra đặc trưng ngắn gọn cho các số n thỏa mãn điều kiện là: n phải là căn nguyên thủy modulo 11. Bài toán có thể tổng quát hóa bằng cách thay 11 bằng 1 số nguyên tố bất kỳ (và dĩ nhiên 10 được thay bằng p-1 và 110 được thay bằng p(p-1).

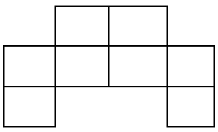
Đây là một bài toán khá đẹp. Ý tưởng đơn giản nhưng không tầm thường.

Bài 3. Ta chứng minh số hình chữ nhật đơn nhỏ nhất cần sử dụng là 1006.
Trước hết ta chỉ ra cách ghép khít tạo thành hình chữ nhật 2008 x 2010 với 1006 hình chữ nhật đơn (và các hình chữ nhật kép).



Khối 1 Khối 2 Khối 3 Khối 4

Trên hình vẽ mô tả cách ghép hình chữ nhật 10 x 16. Hình chữ nhật 2010x2008 có thể được tạo thành từ cấu hình trên như sau:
+ Thêm dòng bằng cách chèn thêm các khối có dạng



vào giữa các khối hợp thành từ 4 cột liên tiếp. Mỗi lần thêm được 2 dòng.
+ Thêm cột bằng cách lặp lại các khối 4 cột liên tiếp (chú ý tính tuần hoàn của các khối này: Khối 1 ~ Khối 3, Khối 2 ~ Khối 4 …).
+ Theo như cách ghép trên thì ta chia hình chữ nhật 2010x2008 thành 502 khối, mỗi khối gồm 4 cột. Ở khối 1 và khối 502 ta cần dùng 3 hình chữ nhật đơn (tương ứng với các khối 1 và 4 như trong ví dụ trên). Các khối còn lại ta dùng 2 hình chữ nhật đơn.

Như vậy tổng cộng trong cách ghép trên ta dùng 500 x 2 + 2 x 3 = 1006 hình chữ nhật đơn.

Xoay hình chữ nhật 2010x2008 lại, ta được hình chữ nhật 2008 x 2010.

Bây giờ ta chứng minh phải cần ít nhất 1006 hình chữ nhật đơn để phủ hình chữ nhật 2008 x 2010. Xét một phép phủ hợp lệ, gọi x, y, z, t lần lượt là số hình chữ nhật 1 x 2, 2 x 1, 2 x 3, 3 x 2 sử dụng trong phép phủ này. Tô trắng các hàng lẻ, tô đen càng hàng chẵn. Điền số i vào hàng thứ i. Ta có

<u>Nhận xét 1.</u> $2(x+y) + 4(z+t) = 2008 \times 2010$. (*)

Nhận xét 2. Xét trên toàn bảng, hình chữ nhật khuyết và hình chữ nhật 2 x 1 có số ô trắng bằng số ô đen. Suy ra số hình chữ nhật 1 x 2 ở các hàng trắng = số hình chữ nhật 1 x 2 ở các hàng đen = x/2. Như vậy x chẵn.

Nhận xét 3. Với mỗi hình chữ nhật của phép phủ, ta xét tổng các số trong ô đen – tổng các số trong ô trắng. Khi đó đối với hình chữ nhật 3 x 2 đại lượng này = 0, với hình chữ nhật 2 x 3 đại lượng này bằng ± 2, với hình chữ nhật 2 x 1 đại lượng này bằng ± 1. Cuối cùng, tổng các số trong hình chữ nhật 1 x 2 là một số chẵn thuộc [2, 2.2008]. Do đó ta có bất đẳng thức

Tổng các số ở ô đen – Tổng các số ở ô trắng = $1004.2010 \le (x/2)(2.2008-2) + y + 2z$.

$\Leftrightarrow \quad 1004.2010 \le 2007x + y + 2z$. (**)

Đổi chỗ hàng và cột, ta được

$1005.2008 \le 2009y + x + 2t$ (***)

Cộng (**) với (***) rồi để ý (*), ta được

$1005.2008 \le 2007x+2009y \le 2009(x+y)$

Suy ra $x + y \ge 1005.2008/2009 > 1004$. Vì x, y chẵn nên $x + y \ge 1006$.

Nhận xét.

1. Đây là bài toán khó nhất của ngày thứ nhất và cũng là bài toán khó nhất của cả kỳ thi. Điểm mấu chốt của lời giải là tìm ra cách phủ tối ưu và chứng minh tính tối ưu của nó. Việc tìm ra cách phủ cho hình chữ nhật 4 x 2n với 4 hình chữ nhật đơn là không khó nhưng rất dễ dẫn đến ngộ nhận là với hình chữ nhật 4m x 2n (2m < n) ta có thể nhân cách phủ trên để thành cách phủ tối ưu sử dụng 4m hình chữ nhật đơn. Trong thực tế, cách phủ tối ưu sử dụng 1 hình chữ nhật kép để thay hai hình chữ nhật đơn cho các khối kề nhau.

2. Sau khi đã tìm đúng cách phủ "tối ưu", ta cần chứng minh tính tối ưu của nó. Một cách tiếp cận truyền thống là tô màu. Tuy nhiên, một vài phép thử và sai cho thấy cách tô màu đen trắng hoặc A, B, C, D đơn giản không giải quyết được vấn đề và ta phải sử dụng đến những mối liên hệ sâu sắc hơn giữa các ô và số hóa các mối liên hệ này bằng cách đưa trọng số vào.

3. Có ý kiến cho rằng bài số 3 giống với một bài toán thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 1993. Tuy nhiên, nếu xem xét kỹ lời giải thì sự giống nhau chỉ là hình thức. Bài 3 năm nay khó hơn rất nhiều so với bài 1 năm 1993.

(VTST 1993, Bài 1) Gọi hình chữ nhật kích thước 2 x 3 (hoặc 3 x 2) bị cắt bỏ một hình vuông 1 x 1 ở một góc là hình chữ nhật khuyết đơn. Gọi hình chữ nhật kích thước 2 x 3 (hoặc 3 x 2) bị cắt bỏ hình vuông 1 x 1 ở hai góc đối diện là hình chữ nhật khuyết kép. Người ta ghép một số hình vuông 2 x 2, một số hình chữ nhật khuyết đơn và một số hình chữ nhật khuyết kép với nhau, sao cho không có hai hình nào chờm lên nhau, để tạo thành một hình chữ nhật kích thước 1993 x 2000. Gọi s là tổng số các hình vuông 2 x 2

và hình chữ nhật khuyết kép cần dùng trong mỗi cách ghép hình nói trên. Tìm giá trị lớn nhất của s.

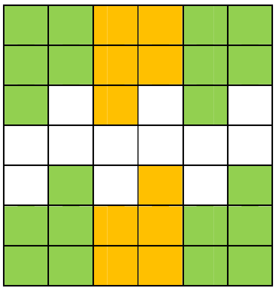
Lời giải bài toán trên khá đơn giản (không phải ngẫu nhiên bài này được đặt ở vị trí bài số 1 của kỳ thi): Tô màu các hàng xen kẽ đen trắng thì sẽ có 997 hàng đen và 996 hàng trắng, suy ra số ô đen nhiều hơn số ô trắng là 2000. Mỗi một hình vuông 2 x 2 và mỗi một hình chữ nhật khuyết kép luôn có đúng 2 ô trắng, 2 ô đen, còn mỗi một hình chữ nhật khuyến đơn có số ô đen – trừ số ô trắng = 1 hoặc -1. Vì vậy nếu gọi x, y, z lần lượt là số hình vuông 2 x 2, số hình chữ nhật khuyết kép, số hình chữ nhật khuyết đơn thì ta lần lượt có:

1) $4x + 4y + 5z = 1993 \times 2000$ (số ô)
2) $2000 \leq z$ (số ô đen – số ô trắng)

Từ đây suy ra

$$4x + 4y \leq 1988 \times 2000$$

Suy ra $s = x + y \leq 994000$. Phép phủ tối ưu có thể xây dựng dễ dàng nhờ cấu hình cơ bản sau:



Bài 4.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a+b+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}},$$

suy ra

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} \leq \frac{2}{27(a+b)(a+c)}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta suy ra

$$\sum \frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} \leq \frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Hơn nữa, ta lại có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Vì vậy,

$$\sum \frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} \le \frac{1}{6(ab+bc+ca)}. \qquad (1)$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức cơ bản $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$, ta suy ra $16(a+b+c) \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$,

tức

$$ab+bc+ca \ge \frac{3}{16}. \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Nhận xét.

- Đánh giá $a+b+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$ là khá cơ bản và tự nhiên, đồng thời cũng là bước mấu chốt để đơn giản hóa bất đẳng thức.
- Sau khi tìm được đánh giá $V.P \le \frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}$, ta sử dụng điều kiện $16(a+b+c) \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ một cách trực tiếp để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng thuần nhất
$$\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{3(ab+bc+ca)}{8abc(a+b+c)}$$

Đến đây, ta có nhiều phương hướng chứng minh khác nhau, trong đó có cách đã trình bày trong lời giải.

Bài 5.

Cách 1. Ta nhận xét rằng với điều kiện của đề bài thì với mọi h thuộc {1, 2, …, n} thì tập hợp các đại biểu ở h nhóm bất kỳ sẽ đến từ ít nhất h nước. Thật vậy, h nhóm gồm hk đại diện, mà mỗi nước chỉ có k đại biểu suy ra số nước có đại diện trong h nhóm nói trên không thể dưới h nước.

Ta gọi tính chất h nhóm bất kỳ có đại biểu của ít nhất h nước là tính chất (*). Để chứng minh bài toán, ta chứng minh rằng ta có thể chuyển bớt các đại diện ra khỏi các nhóm sao cho

1) Mỗi nhóm chỉ còn lại một đại diện
2) Điều kiện (*) vẫn được thỏa mãn

Rõ ràng nếu khi đó ta chọn các đại diện còn lại trong phòng thì đó chính là n người thỏa mãn yêu cầu bài toán, vì theo điều kiện (*) với h = n thì các đại diện này sẽ là đại biểu đến từ n nước.

Ta chứng minh khẳng định nói trên bằng cách sử dụng nguyên lý cực hạn. Trong các cách chuyển bớt các đại diện ra khỏi các nhóm sao cho điều kiện (*) vẫn được thỏa mãn, chọn cách chuyển có số đại diện được chuyển lớn nhất. Ta chứng minh rằng với cách chuyển này, mỗi nhóm chỉ còn lại 1 đại diện.

Thật vậy, giả sử có 1 nhóm nào đó nào đó, chẳng hạn nhóm 1 chứa ít nhất 2 người x, y. Nếu ta bỏ đi người x khỏi phòng này thì theo các chọn cách chuyển ở trên, điều kiện (*) sẽ không còn được thỏa mãn. Tức là tồn tại q nhóm $i_1, i_2, \ldots, i_q$ sao cho trong các nhóm

1 (đã bỏ người x), $i_1, i_2, \ldots, i_q$ (1)

chỉ chứa nhiều nhất đại diện của q nước.

Tương tự, tồn tại p nhóm $j_1, j_2, \ldots, j_p$ sao cho trong các nhóm

1 (đã bỏ người y), $j_1, j_2, \ldots, j_p$ (2)

chỉ chứa nhiều nhất đại diện của p nước.

Trong các chỉ số i và j, giả sử có r chỉ số trùng nhau: $i_1 = j_1, \ldots, i_r = j_r$ còn các chỉ số kia khác nhau. Khi đó do các nhóm $i_1, i_2, \ldots, i_r$ chứa đại diện của ít nhất r nước nên có ít nhất r nước trùng nhau ở hai danh sách (1) và (2). Do đó, hai danh sách (1) và (2) gộp lại chứa nhiều nhất đại diện của q + p – r nước (3).

Mặt khác, hợp hai danh sách các phòng nói trên lại, ta được danh sách các phòng phân biệt

1, $i_1, i_2, \ldots, i_r, i_{r+1}, \ldots, i_k, j_{r+1}, \ldots, j_p$

(nhóm 1 thiếu x và nhóm 1 thiếu y hợp lại thành nhóm 1).

Áp dụng điều kiện (*) ta thấy hợp của hai danh sách này chứa đại diện của ít nhất 1 + q + p – r nước, mâu thuẫn với (3).

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Cách 2. Để lời giải tự nhiên, chúng tôi trình bày thêm phần dẫn dắt. Trong lời giải có thể bỏ đi phần in nghiêng.

Để thuận tiện trình bày, ta phát biểu bài toán dưới dạng tập hợp: Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập con k phần tử của X = {1, 2, …,n}, trong đó mỗi phần tử xuất hiện đúng k lần. Khi đó tìm được $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đôi một khác nhau sao cho a_i thuộc A_i.

Dễ thấy hợp của p tập hợp bất kỳ chứa ít nhất p phần tử.

Ý tưởng là ta sẽ chọn a_1 một cách bất kỳ từ tập A_1, a_2 là một phần tử khác a_1 chọn từ A_2. Ta cứ chọn ngẫu nhiên theo nguyên tắc như thế cho đến khi không chọn được nữa. Tức là ta gặp trường hợp gặp tập hợp A_{p+1} trong đó tất cả các phần tử của nó đã được chọn trước đó. Giả sử a_i thuộc A_i, i = 1, 2, …, p là các phần tử đã được chọn.

Ta đặt $J_1 = \{ i \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid a_i \in A_{k+1}\}$. Nếu $B_1 = \bigcup_{i\in J_1} A_i \setminus \{a_1, \ldots, a_p\} \neq \emptyset$ thì ta chọn a thuộc B. Giả sử a thuộc A_{i1} thì theo định nghĩa, a_{i1} thuộc A_{k+1}, khi đó ta đổi lại, chọn a từ A_{i1} còn a_{i1} từ A_{k+1}. Như vậy ta đã mở rộng cách chọn các phần tử phân biệt đến A_{k+1}.

Trong trường hợp $B_1 = \emptyset$, ta lại đặt $J_2 = \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid a_i \in \bigcup_{i\in J_1} A_i\}$. Nếu $B_2 = \bigcup_{i\in J_2} A_i \setminus \{a_1, \ldots, a_p\} \neq \emptyset$ thì ta chọn a thuộc B_2. Giả sử a thuộc A_{i1} thì a_{i1} sẽ thuộc A_{i2} với i_2 nào đó thuộc J_1, suy ra do đó a_{i2} thuộc A_{k+1}. Bây giờ ta chọn a từ A_{i1}, a_{i1} từ A_{i2} và a_{i2} từ A_{k+1}. Như vậy ta đã mở rộng cách chọn các phần tử phân biệt đến A_{k+1}.

Nếu $B_2 = \varnothing$ thì ta lại tiếp tục thực hiện quá trình trên ….

Bây giờ vào lời giải chính.
Ta xét đồ thị có hướng G gồm p+1 đỉnh: 1, 2, …, p, p+1. Đỉnh i được nối đến đỉnh j nếu a_i thuộc A_j. Ta đặt

$$J = \{ i \in \{1, 2,\dots, p+1\} \mid \text{có đường đi từ } i \text{ đến } p+1\}$$
$$A = \bigcup_{i\in J} A_i$$

Với mọi $i \in \{1, 2,\dots, p\}$, ta có $a_i \in A \Leftrightarrow a_i$ thuộc A_j với j nào đó thuộc J $\Leftrightarrow$ có cạnh nối từ i đến $j \in J \Leftrightarrow$ G chứa đường đi từ i đến p+1 $\Leftrightarrow i \in J$.

Từ đó $\{i \mid i \in \{1, 2,\dots, p\}, a_i \in A\} = J \setminus \{p+1\} = J^*$.
Đặt $B = A \setminus \{a_i \mid i \in J^*\}$. Khi đó $B \cap \{a_1, a_2,\dots, a_p\} = \varnothing$ và $|B| = |A| - |J^*| = |A| - |J| + 1 \geq 1$.

Xét $a \in B$. Khi đó $a \in A_j$ với $j \in J$ nào đó. Rõ ràng $j \neq p+1$. Như vậy có 1 đường đi từ j đến p+1. Giả sử đó là $j_0=j, j_1,\dots, j_l = p+1$. Chú ý rằng $I = \{j_0, j_1,\dots, j_l\} \subseteq J$. Bây giờ nếu đặt $b_{j0}, b_{j1}, \dots, b_{jl}$ tương ứng là $a, a_{j0}, \dots, a_{j(l-1)}$ thì rõ ràng $b_i \in A_i$ với mọi i thuộc I. Đặt $b_{p+1} = a_{jl}$, $b_i = a_i$ với mọi $i \notin I$. Khi đó $b_1, b_2, \dots, b_{k+1}$ là các phần tử phân biệt lấy từ $A_1, A_2, \dots, A_{p+1}$ tương ứng.

Như vậy ta đã mở rộng được cho p+1 tập hợp. Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

<u>Cách 3.</u> Lời giải này sử dụng định lý Hall sau đây:
<u>Bổ đề:</u> Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là một họ các tập con của một tập hợp X thỏa mãn điều kiện

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |I| \text{ với mọi } I \subseteq X. \qquad (*)$$

Khi đó tồn tại $a_1, a_2, \dots, a_n$ phân biệt sao của X sao cho $a_i \in A_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.
<u>Chứng minh.</u>
Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với n = 1, kết luật của bổ đề là hiển nhiên.

Giả sử bổ đề đúng với mọi họ tập con F có |F| < n. Xét họ $F = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. Ta xét hai trường hợp.
<u>Trường hợp 1:</u> Tồn tại một tập chỉ số $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $|I| < n$ sao cho $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = |I|$. Đặt $J = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$, $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, $A_j^* = A_j \setminus A$ với mọi $j \in J$. Ta chứng minh họ các A_j^* thỏa mãn điều kiện (*). Từ đó áp dụng giả thiết quy nạp cho các họ A_i, $i \in I$, A_j^*, $j \in J$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Giả sử ngược lại, tồn tại $K \subset J$ sao cho $\left|\bigcup_{i\in K} A_i^*\right| < K$.
Khi đó, do $\bigcup_{i\in K} A_i^* \cup A = \bigcup_{i\in K} A_i \cup A$ nên ta có

$$\left|\bigcup_{i\in K} A_i^* \cup A\right| = \left|\bigcup_{i\in K} A_i \cup A\right| = \left|\bigcup_{i\in K\cup I} A_i\right| \geq |K \cup I| = |K| + |I|$$

Mặt khác, do $\bigcup_{i\in K} A_i^* \cap A = \emptyset$ nên vế trái của đẳng thức trên bằng $\left|\bigcup_{i\in K} A_i^*\right| + |I| < |K| + |I|$. Mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Với mọi $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|I| < n$, ta có $|\bigcup_{i\in I} A_i| > |I|$. Khi đó chọn một phần tử bất kỳ a_1 từ A_1. Đặt $A_i^* = A_i \setminus \{a_1\}$ với mọi i = 2, 3, …, n. Khi đó với mọi $I \subset \{2, \ldots, n\}$, ta có

$$|\bigcup_{i\in I} A_i^*| = |\bigcup_{i\in I} A_i \setminus\{a_1\}| \geq |\bigcup_{i\in I} A_i| - 1 \geq |I|.$$

Như vậy họ (A_2^*, …, A_n^*) thỏa mãn điều kiện (*) và theo giả thiết quy nạp, ta có thể chọn được các phần tử phân biệt $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sao cho $a_i \in A_i^*$ với mọi i = 2, …, n. Kết hợp với a_1 ta được các phần tử phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ trong đó $a_i \in A_i$.

Quay trở lại bài toán, bằng cách mô hình hóa các đại diện của các nước như các phần tử, các nhóm như các tập con, bằng cách lý luận tương tự như ở lời giải 1, ta thấy các tập con này thỏa mãn điều kiện (*) và do đó tìm được cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Với k=1 và k = n, kết luận của bài toán là hiển nhiên. Với k = 2, ta có một cách giải khá đơn giản như sau: Ở nhóm 1, ta lấy ra 1 đại diện bất kỳ thuộc nước i_1, tiếp theo, ta đến nhóm có người còn lại của nước i_1, lấy người còn lại trong nhóm đó (thuộc nước i_2) làm đại diện cho nhóm này, lại chuyển sang nhóm có người còn lại của nước i_2 … Nếu quá trình này có thể kéo dài mãi đến hết n nhóm thì xong. Nếu không sẽ xảy ra trường hợp sau khi chọn đại diện cho nhóm k thuộc nước i_k thì người cùng nước với còn lại trong nhóm này lại thuộc nhóm 1. Như thế các nhóm 1, 2, …, k tạo thành một xích, ta loại xíc này đi và làm việc với những nhóm còn lại bằng cách tương tự.

Bài 6.

Ta có . $(1+x)^{4n} = (1+x)^{2n}.(1+x)^{2n} = \left(\sum_{i=1}^{2n}\binom{2n}{i}x^i\right).\left(\sum_{i=1}^{2n}\binom{2n}{i}x^{2n-i}\right)$

So sánh hệ số của x^{2n} ở 2 bên ta có

$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}^2 = \binom{4n}{2n}.$$

Tiếp theo ta chứng minh $\binom{4n}{2n} + 1$ không chia hết cho 3.

Giả sử 2n có biểu diễn tam phân là

$$2n = \sum_{i=0}^{k} a_i.3^i$$

với $a_i \in \{0, 1, 2\}$.

Trường hợp 1: các a_i thuộc tập {0, 1}, Khi đó $a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 2p$.

4n có biểu diễn tam phân là $4n = \sum_{i=0}^{k} 2a_i.3^i$ (do a_i = 0 hoặc 1) và theo định lý Lucas, ta có

$$\binom{4n}{2n} + 1 \equiv \prod_{i=1}^{k}\binom{2a_i}{a_i} + 1 = \prod_{i=1}^{k} 2^{a_i} + 1 = 2^{2p} + 1 \equiv 2 \pmod 3$$

Trường hợp 2: tồn tại i nhỏ nhất mà $a_i = 2$, khi đó hệ số tương ứng của 4n là 1. Do

$$\binom{1}{2} = 0 \equiv 0 \pmod 3$$

nên

$$\binom{4n}{2n} + 1 \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod 3$$

Nhận xét.

- Vì định lý Lucas không được sử dụng nên thí sinh khi sử dụng phải chứng minh lại định lý này.
- Cũng có thể trình bày lời giải trực tiếp không thông qua định lý Lucas, tuy nhiên có lẽ không thể tránh khỏi việc sử dụng hệ tam phân và lý luận tổ hợp dưới đây.
- Cách tiếp cận của đề bài, yêu cầu chứng minh $S_{2n} + 1$ không chia hết cho 3 có hai mục đích: 1) Kiểm tra xem thí sinh có tính được S_{2n} không? Và đây cũng là chỗ để cho điểm.

  2) Đưa ra bản chất tổ hợp của $\binom{2n}{n}$ từ đó gợi ý đến cách khai triển đa thức theo mô-đun.

* Để hoàn chỉnh lời giải, chúng tôi trình bày cách chứng minh định lý Lucas.

<u>Định lý Lucas.</u> Cho m và n là các số nguyên không âm, p là số nguyên tố và

$m = m_kp^k + m_{k-1}p^{k-1} + \dots + m_1p + m_0$
$n = n_kp^k + n_{k-1}p^{k-1} + \dots + n_1p + n_0$

là các biểu diễn p phân của m và n tương ứng. Khi đó

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod p.$$

<u>Chứng minh.</u> Ta làm việc trên các đa thức với hệ số được xét theo modulo p. Do $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod p$ với mọi k = 1, 2, …, p-1 nên ta có

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p$$

Từ đó bằng quy nạp ta suy ra

$$(1+x)^{p^i} \equiv 1 + x^{p^i} \pmod p$$

Như vậy ta có

$$(1+x)^m = (1+x)^{\sum_{i=0}^{k} m_i p^i} \equiv \prod_{i=0}^{k} (1 + x^{p^i})^{m_i} \equiv \prod_{i=0}^{k} \sum_{j}^{m_i} \binom{m_i}{j} x^{j p^i} \pmod p$$

Hệ số của x_n ở vế trái là $\binom{m}{n}$. Do biểu diễn p phân của n là duy nhất nên hệ số của x^n ở vế phải là $\prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i}$. Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Lời giải trên đây có sử dụng đáp án chính thức, lời giải và ý tưởng của các bạn LTL, Phạm Minh Khoa, Võ Quốc Bá Cẩn, Traum và một số thảo luận khác trên diễn đàn www.mathscope.org.

Bất đẳng thức: Một số ví dụ và bài tập chọn lọc

1. (USA MO 2004) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \ge (a+b+c)^3$$

2. (IMO 2005) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương có tích lớn hơn hay bằng 1 thì

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \ge 0$$

3. (Kvant) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng ta luôn có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 48(ab + bc + ca) \ge 25$$

4. (Mathlinks) Cho a, b, c, x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$(a+b+c)(x+y+z) = 3,\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$$

Chứng minh rằng $ax + by + cz \ge 0$.

5. (Việt Nam 2002) Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Chứng minh rằng $2(x+y+z) - xyz \le 10$.

6. Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x^2y + y^2z + z^2x$.

7. (Vasile Cirtoaje) Cho các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 4$. Chứng minh rằng

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \le 4.$$

8. (IMO 1999) Cho $n \ge 2$ là một số nguyên dương cố định, tìm hằng số C nhỏ nhất sao cho với mọi số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

9. Cho a, b, c là các số thực dương cho trước và x, y, z là các số thực dương thay đổi thoả mãn điều kiện $xyz = ax + by + cz$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của $x + y + z$ bằng $\sqrt{b + c + 2bc/d} + \sqrt{c + a + 2ca/d} + \sqrt{a + b + 2ab/d}$, trong đó d là số thực dương xác định bởi phương trình

$$\frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} = 1.$$

10. (Romanian TST 2007) Cho $n \ge 2$ và $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$ là 2n số thực thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0,$$

Chứng minh rằng $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \le n.$

11. (IMO Shortlist 2007) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \ldots + a_{100}^2 a_1 < 12/25.$$

12. IMO Short List 2003) Cho $n \ge 2$ là số nguyên dương và $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ là 2n số thực dương. Giả sử $z_2, z_3, \ldots, z_{2n}$ là các số thực dương sao cho $z^2_{i+j} \ge x_i y_j$ với mọi i, j thuộc $\{1, 2, \ldots, n\}$. Đặt $M = \max\{z_2, z_3, \ldots, z_{2n}\}$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{M + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2n}}{2n}\right) \ge \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)$$

13. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực sao cho $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n$.

14. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương. Gọi A là số nhỏ nhất trong các số $x_1, x_2 + \frac{1}{x_1}, x_3 + \frac{1}{x_2}, \ldots, x_n + \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{1}{x_n}$, còn B là số lớn nhất trong các số này. Chứng minh rằng giá trị lớn nhất của A bằng giá trị nhỏ nhất của B và hãy tìm giá trị này.

15. Tổng *n* số thực dương $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ bằng 1. Gọi *S* — là số lớn nhất trong các số $x_1/(1 + x_1), x_2/(1 + x_1 + x_2), \ldots, x_n/(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của *S*. Với những giá trị nào của $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ thì giá trị này đạt được?