### Dạng 16: Giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp sử dụng biểu thức liên hợp

**Phương pháp giải:**

Dấu hiệu:

+ Khi ta gặp các bài toán giải phương trình dạng:

Mà không thể đưa về một ẩn, hoặc khi đưa về một ẩn thì tạo ra những phương trình bậc cao dẫn đến việc phân tích hoặc giải trực tiếp khó khăn.

+ Nhẩm được nghiệm của phương trình đó: bằng thủ công (hoặc sử dụng máy tính cầm tay)

Phương pháp:

\*) Đặt điều kiện chặt của phương trình (nếu có)

Ví dụ: Đối phương trình: .

Nếu bình thường nhìn vào phương trình ta thấy:

Phương trình xác định với mọi . Nhưng đó chưa phải là điều kiện chặt. Để giải quyết triệt để phương trình này ta cần đến điều kiện chặt đó là:

Ta viết lại phương trình thành:

Để ý rằng: do đó phương trình có nghiệm khi

\*) Nếu phương trình chỉ có một nghiệm :

Ta sẽ phân tích phương trình như sau: Viết lại phương trình thành:

Sau đó nhân liên hợp cho từng cặp số hạng với chú ý:

+

+

+ Nếu có nghiệm thì ta luôn phân tích được

Như vậy sau bước phân tích và rút nhân tử chung thì phương trình ban đầu trở thành:

Việc còn lại là dùng hàm số, bất đẳng thức hoặc những đánh giá cơ bản để kết luận vô nghiệm.

\*) Nếu phương trình có 2 nghiệm theo định lý Vi-et đảo ta có nhân tử chung sẽ là:

Ta thường làm như sau:

+ Muốn làm xuất hiện nhân tử chung trong ta trừ đi một lượng . Khi đó nhân tử chung sẽ là kết quả sau khi nhân liên hợp của

+ Để tỉm ta xét phương trình: . Để phương trình có hai nghiệm ta cần tìm sao cho

+ Hoàn toàn tương tự cho các biểu thức còn lại:

Ta xét các ví dụ sau:

**Bài 1:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

c. .

**Lời giải:**

a. Nếu ta bình phương liên tục cho đến khi hết dấu thì sẽ tạo ra phương trình bậc 4.

Để ý rằng là một nghiệm của phương trình nên ta sẽ phân tích để tạo nhân tử chung là .

Điều kiện: .

Khi thì nên ta viết lại phương trình thành:

.

Để ý rằng với điều kiện thì nên phương trình (\*) có nghiệm duy nhất . Kết luận là nghiệm của phương trình.

b. Phân tích: Phương trình trong đề bài gồm nhiều biểu thức chứa căn nhưng không thể quy về một ẩn. Nếu ta lũy thừa để triệt tiêu thì sẽ tạo ta phương trình tối thiểu là bậc 6. Từ đó ta nghĩ đến hướng giải: Sử dụng biểu thức liên hợp để tách nhân tử chung.

Điều kiện: .

Ta nhẩm được nghiệm của phương trình là: . Khi đó

Ta viết lại phương trình thành:

Dễ thấy:

Với điều kiện: thì

Nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất .

c. Điều kiện: .

Ta nhẩm được nghiệm của phương trình là: . Khi đó

Từ đó ta có lời giải như sau:

Phương trình đã cho tương đương với:

Để ý rằng với điều kiện thì nên

.

Từ đó suy ra: là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Nhận xét:** Để đánh giá phương trình cuối cùng vô nghiệm ta thường dùng các ước lượng cơ bản: với từ đó suy ra với mọi số thỏa mãn

**Bài 2:**

Giải các phương trình:

a. . b.

**Lời giải:**

a. Điều kiện: .

Ta nhẩm được nghiệm nên phương trình được viết lại như sau:

Ta dự đoán: (Bằng cách thay một giá trị ta sẽ thấy )

Ta sẽ chứng minh: và

Thật vậy:

+Ta xét .

Đặt . Bất phương trình tương đương với

. Điều này hiển nhiên đúng.

+ Ta xét: , .

Điều này luôn luôn đúng. Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất .

b. Điều kiện: .

Để đơn giản ta đặt

Phương trình đã cho trở thành:

Nhẩm được . Nên ta phân tích phương trình thành:

Để ý rằng và nên ta có . Vì vậy phương trình có nghiệm duy nhất .

**Nhận xét:** Việc đặt trong bài toán để giảm số lượng dấu căn đã giúp đơn giản hình thức bài toán. Ngoài ra khi tạo liên hợp do nên ta tách nó ra khỏi biểu thức để các thao tác tính toán được đơn giản hơn.

**Bài 3:**

Giải các phương trình sau

a. . b. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện:

Ta nhẩm được 2 nghiệm là nên ta phân tích để tạo ra nhân tử chung là: . Để làm được điều này, ta thực hiện thêm bớt nhân tử như sau:

+ Ta tạo ra sao cho phương trình này nhận là nghiệm.

Để có điều này, ta cần:

+ Tương tự nhận là nghiệm.

Tức là . Từ đó ta phân tích phương trình thành:

Dễ thấy với thì

Nên

Phương trình đã cho tương đương với

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: .

b. Điều kiện: .

Phương trình được viết lại như sau:

Ta nhẩm được 2 nghiệm nên suy ra nhân tử chung là:

Ta phân tích với nhân tử như sau:

+ Tạo ra sao cho phương trình này nhận là nghiệm. Tức là cần thỏa mãn hệ:

+ Tương tự với ta thu được:

Phương trình đã cho trở thành:

Ta xét

Ta chứng minh: tức là:

.

Điều này hiển nhiên đúng.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: .

**Chú ý:**

Những đánh giá để kết luận thường là những bất đẳng thức không chặt nên ta luôn đưa về được tổng các biểu thức bình phương.

Ngoài ra, nếu tinh ý ta có thể thấy:

. Nhưng điều này là hiển nhiên đúng do:

 với mọi .

**Bài 4:**

Giải các phương trình sau

a.  b. 

**Lời giải:**

a) Điều kiện: .

Ta nhẩm được nên biến đổi phương trình như sau:

Ta có: khi , khi nên ta trừ 2 vào 2 vế thì thu được:

Giải (1) suy ra

Giải (2) ta có: .

**Kết luận:** Phương trình có nghiệm là

Nhận xét: Ta cũng có thể phân tích phương trình như câu a, b.

d) Ta có: nên phương trình tương đương với

Giải (1):

Đặt . Phương trình trở thành:

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm: .

**Bài 5:**

Giải các phương trình

a. . b.

**Lời giải:**

a. Phương trình được viết lại như sau:

. Để phương trình có nghiệm ta cần:

. Nhẩm được nên ta viết lại phương trình thành:

Để ý rằng: nên phương trình có nghiệm duy nhất .

b. Điều kiện

Ta viết lại phương trình như sau:

Xét phương trình: . Bình phương 2 vế ta thu được:

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là:

Nhận xét:

+ Ta thấy phương trình có nghiệm . Nên ta phân tích phương trình thành

 thì sau khi liên hợp phương trình mới thu được sẽ là:

. Rõ ràng phương trình hệ quả

 phức tạp hơn phương trình ban đầu rất nhiều.

+ Để ý rằng khi thì nên ta sẽ liên hợp trực tiếp biểu thức .


### Dạng 17: Đặt ẩn phụ dựa vào tính đẳng cấp của phương trình

**Phương pháp giải:**

Ta thường gặp phương trình dạng này ở các dạng biến thể như:

+

+

+

Thực chất phương trình (\*) khi bình phương 2 vế thì xuất hiện theo dạng (1) hoặc (2).

Để giải các phương trình (1), (2).

Phương pháp chung là:

+ Phân tích biểu thức trong thành tích của 2 đa thức

+ Ta biến đổi bằng cách đồng nhất hai vế.

Khi đó phương trình trở thành:

Chia hai vế cho biểu thức ta thu được phương trình:

. Đặt thì thu được phương trình:

.

Một cách tổng quát: Với mọi phương trình có dạng:

 thì ta luôn giải được theo cách trên.

**Bài 1:**

Giải các phương trình

a. . b. .

c. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện: .

Ta viết lại phương trình thành:

Giả sử . Suy ra phải thỏa mãn

Phương trình đã cho có dạng:

Chia phương trình cho ta thu được: .

Đặt , ta thu được phương trình:

.

.

b. Điều kiện:

Bình phương 2 vế của phương trình ta thu được:

Giả sử

Phương trình trở thành:

Chia phương trình cho ta thu được:

. Đặt ta có:

Phương trình

.

**Kết luận:** Phương trình có 2 nghiệm .

**Nhận xét:** Trong lời giải ta đã biến đổi:

 là vì .

c. Điều kiện:

Ta viết lại phương trình thành:

Xét phương trình: .

Dễ thấy không phải là nghiệm.

Xét ta chia cho thì thu được phương trình:

Giải (1):

Giải (2):

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là:

**Bài 2:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

c. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện:

Phương trình đã cho được viết lại như sau:

Xét phương trình:

Ta giả sử:

Phương trình trở thành: . Chia cho

Ta có: . Đặt , phương trình mới là:

.

Với ta có: .

***Nhận xét:***

+ Đối với phương trình ta có thể không cần đưa *x* vào trong dấu khi đó ta phân tích: và chia như trên thì bài toán vẫn được giải quyết. Việc đưa vào là giúp các em học sinh nhìn rõ hơn bản chất bài toán.

+ Ngoài ra cần lưu ý rằng: Khi đưa một biểu thức vào trong dấu thì điều kiện là . Đây là một sai lầm học sinh thường mắc phải khi giải toán.

b. Điều kiện: .

Phương trình đã cho được viết lại thành:

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được:

Nếu ta giả sử thì phải thỏa mãn

 điều này hoàn toàn vô lý.

Để khắc phục vấn đề này ta có chú ý sau: khi đó

Bây giờ ta viết lại phương trình thành:

Giả sử:

Như vậy, phương trình trở thành:

Chia cho ta thu được: .

Đặt

Trường hợp 1:

Suy ra thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2:

Tóm lại: Phương trình có 2 nghiệm là: và

c. Điều kiện: .

Chuyển vế bình phương ta được:

Giả sử:

Khi đó ta có: không tồn tại thỏa mãn hệ.

Nhưng ta có:

Giả sử: . Suy ra

Ta viết lại phương trình: .

Chia hai vế cho ta thu được:

Đặt ta thu được phương trình:

Trường hợp 1:

Trường hợp 2:

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là: .

**Bài 3:**

Giải các phương trình

a. . b.

**Lời giải:**

a. Điều kiện: .

Bình phương 2 vế phương trình ta thu được:

.

Ta giả sử:

Phương trình trở thành:

Đặt

Về cơ bản đến đây ta hoàn toàn tìm được *x*. Nhưng với giá trị như vậy việc tính toán sẽ gặp khó khăn.

Để khắc phục ta có thể xử lý theo hướng khác như sau:

Ta viết lại: lúc này bằng cách phân tích như trên ta thu được phương trình:

Đặt

. Kiểm tra điều kiện ta thấy chỉ có giá trị là thỏa mãn điều kiện.

b. Điều kiện: .

Ta viết lại phương trình thành:

Để ý rằng:

Nếu ta đặt thì phương trình trở thành: . Đây là một phương trình đẳng cấp bậc 3. Từ định hướng trên ta có lời giải cho bài toán như sau:

+ Xét trường hợp: không thỏa mãn phương trình;

+ Xét . Ta chia phương trình cho thì thu được:

.

Đặt ta có phương trình:

Trường hợp 1:

Trường hợp 2:

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm: .

**Bài 4:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

**Lời giải:**

a. Hình thức bài toán dễ làm cho người giải bối rối nhưng để ý thật kỹ ta thấy:

Chìa khóa bài toán nằm ở vấn đề phân tích biểu thức:

Ta thấy do vế trái là biểu thức bậc 3 nên ta nghĩ đến hướng phân tích:

. Đồng nhất hai vế ta thu được:

. Nên ta viết lại phương trình đã cho thành:

Chia cho ta thu được:

Đặt ta có phương trình:

Giải .

Kết luận: Thử lại ta thấy 3 nghiệm: đều thỏa mãn.

b. Điều kiện:

Ta thấy chìa khóa bài toán nằm ở việc phân tích biểu thức:

Giả sử

Phương trình trở thành:

. Chia hai vế cho ta thu được:

. Đặt ta có phương trình:

Trường hợp 1: vô nghiệm.

Trường hợp 2:

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm là:

***Nhận xét:*** Ta có thể phân tích:

.

***Chú ý:*** Trong một số phương trình: Ta cần dựa vào tính đẳng cấp của từng nhóm số hạng để từ đó phân tích tạo thành nhân tử chung.

**Bài 5:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

**Lời giải:**

a) Ta thấy rằng nếu bình phương trực tiếp sẽ dẫn đến phương trình bậc 5

Để khắc phục ta sẽ tìm cách tách ra khỏi

Từ đó ta viết lại phương trình như sau:

Do . Phương trình đã cho tương đương với

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất .

b) Điều kiện:

Giả sử:

Phương trình đã cho trở thành:

Chia phương trình cho ta thu được:

.

Đặt

Ta thu được phương trình:

+ Nếu

+ Nếu

Kết luận: .

**Dạng 18: Sử dụng hằng đẳng thức để giải phương trình**

**Phương pháp giải:**

Các bài toán giải được bằng hằng đẳng thức thường có dạng:

 hoặc

Phương pháp chung để giải các bài toán này là: Đặt với hoặc .

Đưa phương trình ban đầu về dạng

**Bài 1:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

**Lời giải:**

Những phương trình có dạng:

Hoặc:

Ta thường giải theo cách:

Đối với (1): Đặt khi đó thay vào phương trình ta đưa về dạng: . Sau đó biến đổi phương trình thành: .

Đối với (2): Đặt , sau đó tạo ra hệ tạm:

, cộng hai phương trình ta thu được:

, sau đó đưa phương trình về dạng:

.

Ta xét các ví dụ sau:

a. Đặt ta có hệ sau:

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta thu được:

. Ta nghĩ đến việc biến đổi vế trái thành: để phương trình có dạng: .

Giả sử: .

Đồng nhất hệ số của .

Như vậy phương trình (\*) có dạng:

Đặt . Từ phương trình ta suy ra:

Do

Qua ví dụ trên ta thấy việc chuyển qua hệ tạm giúp ta hình dung bài toán được dễ dàng hơn.

b. Đặt ta thu được hệ phương trình sau:

. Cộng hai phương trình của hệ ta thu được:

Đặt ta thu được phương trình:

.

**Bài 2:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện: . Ta đặt thì phương trình đã cho trở thành:

Đặt ta thu được hệ sau: . Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta thu được:

Đặt ta có: .

Tương tự như các bài toán trên ta suy ra .

Theo (\*) ta có .

Kết luận: là nghiệm duy nhất của phương trình.

b. Đặt ta có hệ sau:

Thay vào phương trình ta có: .

**Bài 3:**

Giải các phương trình:

a. . b. 

**Lời giải:**

a. Đặt ta có hệ:

Suy ra:

b.

Đặt thay vào ta có:

.

Thử lại ta thấy chỉ có thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Bài 4:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

c. .

**Lời giải:**

a. Nhận thấy không phải là nghiệm của phương trình:

Chia hai vế phương trình cho ta thu được: .

Đặt ta thu được hệ sau: .

Cộng hai phương trình của hệ ta có:

Đặt ta thu được:

.

Suy ra .

b. . Nhận thấy không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế phương trình cho thì thu được phương trình tương đương là: .

Đặt ta có hệ sau: . Cộng hai phương trình của hệ ta có:

.

Từ phương trình ta suy ra

.

c. Ta viết lại phương trình thành:

Đặt ta có hệ tạm sau:

Cộng hai vế hệ phương trình ta thu được: . Đặt ta có:

.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: .

**Dạng 18: Phương pháp đánh giá giải phương trình vô tỉ**

**Phương pháp giải:**

Những kỹ thuật quan trọng để giải phương trình giải bằng phương pháp đánh giá ta thường sử dụng là:

+ Dùng hằng đẳng thức:

+ Dùng các bất đẳng thức cổ điển Cô si, Bunhiacopxki, Bất đẳng thức hình học;

+ Dùng phương pháp khảo sát hàm số để tìm.

**Bài 1:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện: . Ta viết lại phương trình thành:

b. Điều kiện: . Ta viết lại phương trình thành:

.

**Bài 2:**

Giải các phương trình:

a.  (Trích Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Trường chuyên Amsterdam, 2014).

b. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện . Ta viết lại phương trình thành:

.

Suy ra là nghiệm duy nhất của phương trình.

b. Điều kiện: . Ta viết lại phương trình thành:

.

**Bài 3:**

Giải các phương trình:

a. .

b. .

c. .

**Lời giải:**

a. Vì nên phương trình đã cho có nghiệm khi .

Để ý rằng khi thì nên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu bằng xảy ra khi . Mặt khác khi thì từ những cơ sở trên ta có lời giải như sau:

Theo bất đẳng thức Cô si dạng ta có:

Mặt khác ta có:

Suy ra . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Tóm lại: Phương trình có nghiệm duy nhất .

b. Vì nên phương trình đã cho có nghiệm khi

. Để ý rằng khi thì nên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu bằng xảy ra khi . Khi thì . Từ những cơ sở trên ta có lời giải như sau:

Theo bất đẳng thức Cô si dạng ta có:

Mặt khác ta có:

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

c. Điều kiện: . Để ý rằng là nghiệm của phương trình nên ta có lời giải như sau:

.

Mặt khác, ta có:

Suy ra .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

**Bài 4:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

c. . d. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện:

Phương trình đã cho có thể viết lại như sau: .

+ Ta chứng minh: . Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với . Điều này hiển nhiên đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

+ Ta chứng minh: . Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

.

Điều này hiển nhiên đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Từ đó suy ra . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

b.

Ta thấy rằng:

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

.

Mặt khác, ta có:

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 3 số)

Từ đó suy ra:

Tương tự ta cũng có:

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta có:

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

**Bài 5:**

Giải các phương trình:

a. . b. .

**Lời giải:**

a. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng: ta có:

. Lại có suy ra

Tương tự:

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều (1), (2) ta có:

.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

b. Ta có

Điều kiện xác định là

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

Và

Như vậy:

Từ đó suy ra: .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Vậy là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 6:**

Giải các phương trình sau:

a. .

b. .

c.

**Lời giải:**

a. Điều kiện:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho hai bộ số và ta có:

. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi . Do nên . Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

Dấu đẳng thức xảy ra khi và . Từ đó ta có nghiệm của PT (\*) là .

b. Ta có:

.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . Mặt khác ta cũng có:

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . Từ đó ta có nghiệm của phương trình là .

c. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . Từ đó suy ra .

Mặt khác ta có .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất .

**Bài 7:**

Giải các phương trình sau:

a. . b. .

**Lời giải:**

a. Điều kiện:

Phương trình đã cho tương đương với:

Do nên từ phương trình ta cũng suy ra:

Lập phương hai vế ta thu được:

Như vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi .

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là: và .

b. Điều kiện: .

Xét trên . Dễ thấy .

Xét trên ta có:

Dễ thấy . Suy ra

Từ (1), (2) suy ra phương trình có nghiệm khi .

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN CHUYÊN ĐỀ**

**Bài 1:** Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Quảng Trị năm học 2012 - 2013

Giải phương trình:

**Lời giải**

***Tìm cách giải***. Quan sát đề bài, chúng ta nhận thấy bài toán có dạng: . Do đó nên đặt: . Giải phương trình ẩn y.

***Trình bày lời giải***

Đặt , suy ra .

Phương trình có dạng: .

Giải ra ta được: .

* Với y = 1 thì

* Với thì

Vậy tập nghiệm của phương trình là :

**Bài 2:** HSG Thành Phố HCM, 2007-2008

Giải các phương trình sau:

a) b)

c)

**Lời giải**

a) Đặt , phương trình đã cho trở thành .

Giải ra ta được: .

- Với y = -1 ta có giải ra ta được

- Với y = 7 ta có giải ra ta được

Vậy tập nghiệm của phương trình là :

b) Điều kiện .

Đặt phương trình đã cho trở thành:

Giải ra ta được (thỏa mãn); (không thỏa mãn)

Với ta có:

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 4.

**Nhận xét:** Ngoài cách giải trên, ta có thể chuyển một dấu căn sang vế kia (cô lập căn thức). Sau đó bình phương hai vế.

c) Điều kiện

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có:

Dấu bằng xảy ra khi

Hệ trên vô nghiệm nên dấu bằng không xảy ra. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Bài 3:** HSG Tỉnh Bình Định

Giải phương trình:

**Lời giải**

***Tìm cách giải.*** Quan sát phương trình ta có thể tiếp cận cách giải theo các hướng sau:

- *Hướng 1*. Quan sát nếu nâng lên lũy thừa để khử căn thì được phương trình bậc bốn, nên nếu có nghiệm thì hoàn toàn giải được bằng cách phân tích đa thức thành nhân tử.

- *Hướng 2.* Bài toán có dạng nên có thể đưa về . Từ đó giải tiếp được phương trình đơn giản.

- *Hướng 3.* Bài toán có dạng nên có thể chuyển về giải hệ phương trình đối xứng, bằng cách đặt ta được hệ phương trình:

***Trình bày lời giải***

**Cách 1.** Ta có: có điều kiện

Bình phương hai vế ta được:

.

Giải phương trình: ta được

Giải phương trình: ta được

Kết hợp với tập xác định ta được, nghiệm của phương trình là:

**Cách 2.** Xét

- Giải phương trình (1): đk

Suy ra ta được

- Giải phương trình (2): với điều kiện

Giải ra ta được: (thỏa mãn), (loại).

Kết hợp với tập xác định ta được, nghiệm của phương trình là:

**Cách 3.** Đặt

Kết hợp với phương trình đề bài ta có hệ phương trình

Từ phương trình (3) và (4) vế trừ vế ta được:

**• Trường hợp 1.** Xét x = y, thay vào phương trình (3) ta được:

.

Giải ra ta được

**• Trường hợp 2.** Xét thay vào phương trình (3) ta được:

.

Giải ra ta được: (thỏa mãn), (loại).

Kết hợp với điều kiện ta được, nghiệm của phương trình là:

**Bài 4:** HSG Tỉnh Hải Dương, năm học 2009 - 2010

Giải phương trình

**Lời giải**

***Tìm cách giải.*** Quan sát đặc điểm của phương trình, ta thấy có hai hướng suy nghĩ:

• **Cách 1.** Vì vế phải xuất hiện dạng: còn vế trái xuất hiện , nên tìm cách đưa về hằng đẳng thức: . Sau đó giải tiếp.

• **Cách 2.** Đưa về hệ phương trình đối xứng loại hai.

***Trình bày lời giải***

**Cách 1.** . Điều kiện .

• Giải phương trình (1):

 Điều kiện

.

Giải ra ta được: (thỏa mãn) (loại).

• Giải phương trình (2): vì và nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

**Cách 2.** Điều kiện

Đặt điều kiện . kết hợp với phương trình ban đầu ta có hệ phương trình

Vế trừ vế ta được

**• Trường hợp 1.** Xét x = y suy ra: .

Giải ra ta được: (thỏa mãn), (loại).

**• Trường hợp 2.** Xét x = - y suy ra . Với thì vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: .

**Nhận xét**. Kĩ thuật của bài là việc chọn ẩn phụ từ việc làm ngược.

Đặt và .

Để được hệ đối xứng thì ta chọn . Từ đó ta có cách giải trên. Ngoài ra ta có thể bình phương hai vế rồi giải phương trình bậc 4. Thật vậy

 từ đó ta cũng giải được.

**Bài 5:** HSG Tỉnh TPHCM, năm học 2008 - 2009

Giải phương trình.

**Lời giải**

***Tìm cách giải***. Để giải dạng toán này, ta thường có hai cách:

**• Cách 1.** Chuyển thành hệ phương trình đối xứng loại 1, bằng cách đặt phần chứa căn bằng y.

**• Cách 2.** Nhận thấy: x2 và có tổng là hằng số, đồng thời trong phương trình xuất hiện , nên chúng ta có thể đặt: . Sau đó biểu diễn phần còn lại theo y.

***Trình bày lời giải***

**Cách 1.** Đặt .

Từ đó, ta có hệ phương trình

Đặt . Hệ phương trình có dạng

Từ phương trình (2) ta có thay vào phương trình (1) ta được:

Giải ra ta được: .

**• Trường hợp 1.** Xét u = 5; v = 4 ta có

 x, y là nghiệm của phương trình (3). Giải hệ phương trình (3) ta được

Suy ra

**• Trường hợp 2.** Xét u = -7; v = 16 ta có

 x, y là nghiệm của phương trình (4).

Phương trình này vô nghiệm.

Suy ra hệ phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là .

**Cách 2.**

Đặt:

Phương trình đã cho có dạng: .

Giải ra ta được .

**• Trường hợp 1.** Với y = 5 ta có .

 điều kiện

Giải ra ta được x = 1; x = 4 (thỏa mãn).

**• Trường hợp 2.** Với y = -7 ta có

điều kiện . Suy ra vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là .

**Bài 6:** HSG Tỉnh Phú Thọ, năm học 2009 - 2010

Giải phương trình:

**Lời giải**

Đặt với

Phương trình có dạng

Giải ra ta được y1 = 1; y2 = 3

- Với y = 1 thì

- Với y = 3 thì

Giải ra ta được x = -1, x = 3.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

**Bài 7:** HSG Tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2008 - 2009

Giải phương trình:

**Lời giải**

Đặt , phương trình có dạng

Giải ra ta được y = 3 (thỏa mãn); y = - 4 (không thỏa mãn)

Với

Giải ra ta được

**Bài 8:** HSG Tỉnh Quảng Bình, năm học 2009 - 2010

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Đặt

 hay

Từ đó, ta có hệ phương trình

Trừ từng vế các phương trình ta được

**- Trường hợp 1.** Xét t = x ta có

Giải ra ta được (loại)

**- Trường hợp 2.** Xét t + x + 4 = 0 ta có

Giải ra ta được x = 0 (loại), x = -4.

Vậy nghiệm của phương trình là

**Bài 9:** HSG Tỉnh Nghệ An, năm học 2011 - 2012

Giải phương trình:

**Lời giải**

Đặt

Điều kiện

Ta có hệ phương trình

Suy ra

Do nên

Suy ra

Thử lại thỏa mãn.

 (không thỏa mãn).

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 2.

**Bài 10:** HSG Toán 9 Thành phố Hà Nội, năm học 2010 - 2011

Giải các phương trình:

a) ;

b) ;

c) .

**Lời giải**

a/ điều kiện

Đặt

Phương trình có dạng:

**- Trường hợp 1**. Xét

Suy ra vô nghiệm.

**- Trường hợp 2**. Xét

Suy ra .

Giải ra ta được

Vậy phương trình có tập nghiệm là :

b/ điều kiện

Đặt

Phương trình có dạng :

**- Trường hợp 1.** Xét . Suy ra:

Giải ra ta được:

**- Trường hợp 2.** Xét

Suy ra vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm là:

c/ điều kiện

Đặt . Phương trình có dạng:

**- Trường hợp 1.** Xét .

Suy ra vô nghiệm.

**- Trường hợp 2.** Xét

Giải ra ta được: (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình:

**Bài 11:** HSG Toán 9 Tỉnh Phú Thọ, năm học 2013 - 2014

Giải phương trình:

**Lời giải**

Điều kiện xác định:

Phương trình tương đương với

Đặt

Ta có phương trình hoặc b = -3a

Khi đó hoặc

- Với , điều kiện x > 0, ta có:

hoặc (loại)

- Với , điều kiện , ta có:

hoặc (loại)

Vậy phương trình có hai nghiệm

**Bài 12:** HSG Toán 9 TPHCM, năm học 2014 - 2015

Giải phương trình:

**Lời giải**

ĐKXĐ:

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

**Bài 13:** HSG Toán 9 Hà Nam, năm học 2016 - 2017

Giải phương trình .

**Lời giải**

Điều kiện xác định của phương trình đã cho là hoặc . Phương trình đã cho tương đương với

Dễ thấy nên từ phương trình trên ta được

Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm là .

**Bài 14:** HSG Toán 9 Vinh, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình .

**Lời giải**

 **Phân tích.** Điều kiện xác địnhcủa phương trình là . Nhận thấy phương tình có chứa hai căn thức nên ta đặt và với . Nhận thấy ta có các biến đổi sau. Phương trình đã cho tương đương với

Từ đó ta có phương trình . Đến đây chỉ cần giải phương trình tích là xong.

 **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là . Phương trình đã cho tương đương với

Đặt và với . Khi đó phương trình trên trở thành

+ Với .

+ Với , khi đó ta có phương trình

Kết hợp với điều kiện xác định ta được là nghiệm duy nhất của phương trình.

 ***Nhận xét.*** *Nhận thấy là nghiệm duy nhất của phương trình nên ta nghĩ đến phương pháp nhận lượng liên hợp để làm xuất hiện đại lương . Ta có các biến đổi sau*

*+ Với , thỏa mãn điều kiện xác định.*

*+ Với .*

*Từ đó ta được . Với thì (Mâu thuẫn)*

*Vậy là nghiệm duy nhất của phương trình.*

**Bài 15:** Đề thi vào 10 chuyên KHTN, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Đặt và thì ta có và .

Ngoài ra, từ giả thiết ta cũng có hay .

Suy ra hoặc .

+) Với , thay vào (1), ta được .

Giải phương trình này, ta được (tương ứng và ) hoặc (tương ứng và ).

+) Với , thay vào (1), ta được .

Giải phương trình này, ta được (tương ứng và ).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm và .

**Bài 16:** Chuyên Bắc Giang, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với:

.

Do nên , suy ra với mọi *x*.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất (thỏa mãn điều kiện).

**Bài 17:** Đề thi vào 10 chuyên Lê Hồng Phong, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Ta có:

 (vô nghiệm) (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm .

**Bài 18:** Đề thi vào 10 Chuyên Phan Bội Châu, năm học 2016 - 2017

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đưog với

.

Mà nên .

Từ đó suy ra .

Do vậy (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy tập nghiệm của phương trình là .

**Bài 19:** Đề thi vào 10 Chuyên Khoa Học Tự Nhiên vòng 1, năm học 2017 - 2018

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Phương trình tương đương với

 (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là .

**Bài 20:** Đề thi vào 10 Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa, năm học 2017 - 2018

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Đặt .

Ta có: . Từ cách đặt ta có:

.

Từ đó *x* là nghiệm của phương trình: .

Thử lại ta được thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là .

**Bài 21:** Đề thi vào 10 Chuyên Hùng Vương, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Phương trình đã cho tương đương với

Từ đây, suy ra (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất .

**Bài 22:** Đề thi vào 10 Chuyên Bắc Ninh, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện: .

Đặt .

Ta có hệ:

.

Từ đó ta có: (thỏa mãn điều kiện) là nghiệm của phương trình đã cho.

**Bài 23:** Đề thi vào 10 Chuyên Hùng Vương, năm học 2017 - 2018

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện: .

Phương trình đã cho tương đương với: .

Đặt (\*) ta được hệ: .

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta được:

.

+) Nếu , thay vào (\*) ta được: .

+) Nếu , thay vào (\*) ta được: .

Thử lại thấy hai nghiệm đều thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm và .

**Bài 24:** Đề thi vào 10 Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương, năm học 2017 - 2018

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện: .

Phương trình đã cho tương đương với:

.

Giải phương trình trên ta tìm được 2 nghiệm là .

**Bài 25:** Đề thi vào 10 Chuyên Đại Học Vinh, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm và .

**Bài 26:** Đề thi vào 10 Chuyên Thai Bình, năm học 2017 - 2018

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện: .

Đặt .

Từ đó, ta có phương trình:

.

 hay (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm .

**Bài 27:** Đề thi vào 10 Chuyên Ninh Bình, năm học 2017 - 2018

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Điều kiện: .

Đặt

+) Nếu vô nghiệm.

+) Nếu , thay vào ta được không thỏa mãn điều kiện xác định.

+) Nếu , thay vào ta tìm được . Thử lại thấy nghiệm đúng.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất .

**Bài 28:** Đề thi vào 10 Chuyên Toán TP Hà Nội, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình: .

**Lời giải**

Do nên phương trình đã cho xác định với mọi .

Từ phương trình ban đầu ta có

 (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm và .

