**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HCM**

**KHOA GIÁO DỤC TIỂU HỌC**

****

**Bài tập giữa kỳ**



****

**ĐỀ TÀI:** **PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**

**NGHIỆM NGUYÊN**

Môn: Cơ sở Toán ở Tiểu học 3

Giảng viên:

Lớp:

Các thành viên cùng thực hiện:

Mục lục

[LỜI MỞ ĐẦU 2](#_Toc468819670)

[PHƯƠNG PHÁP 1: XÉT SỐ DƯ CỦA TỪNG VẾ 3](#_Toc468819671)

[PHƯƠNG PHÁP 2: ĐƯA VỀ DẠNG TỔNG 3](#_Toc468819672)

[PHƯƠNG PHÁP 3: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC 3](#_Toc468819673)

[PHƯƠNG PHÁP 4: DÙNG TÍNH CHIA HẾT, TÍNH ĐỒNG DƯ 6](#_Toc468819674)

[PHƯƠNG PHÁP 5: DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG 8](#_Toc468819675)

[PHƯƠNG PHÁP 6: LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN 10](#_Toc468819676)

[PHƯƠNG PHÁP 7: XÉT CHỮ SỐ TẬN CÙNG 11](#_Toc468819677)

[PHƯƠNG PHÁP 8: TÌM NGHIỆM RIÊNG 11](#_Toc468819678)

[PHƯƠNG PHÁP 9: PHƯƠNG PHÁP HẠ BẬC 12](#_Toc468819679)

[PHƯƠNG PHÁP 10: PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH 13](#_Toc468819680)

[PHƯƠNG PHÁP 11: PHƯƠNG PHÁP LOẠI TRỪ 13](#_Toc468819681)

[PHƯƠNG PHÁP 12: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN TỐ 13](#_Toc468819682)

[BÀI TẬP ÁP DỤNG 15](#_Toc468819683)

#

# LỜI MỞ ĐẦU



Không giống như các phương trình nghiệm thực hay nghiệm phức, phương trình nghiệm nguyên khó giải quyết hơn vì điều kiện ràng buộc nguyên của nhiệm. Vì vậy với phương trình nghiệm nguyên, ta thường không có một phương pháp hoặc định hướng giải cụ thể nào như với phương trình nghiệm thực và nghiệm phức. Tuy nhiên, ta có thể áp dụng một số phương pháp hiệu quả để giải quyết lớp phương trình này. Trong chuyên đề này ta sẽ nêu ra một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên. Tùy vào từng bài toán mà ta có những dấu hiệu nhận biết để chọn phương pháp thích hợp.



# PHƯƠNG PHÁP 1: XÉT SỐ DƯ CỦA TỪNG VẾ

**Ví dụ 1:** Chứng minh các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^{2}- y^{2}=1998$$

$$x^{2}+ y^{2}=1999$$

**Giải**

Dễ chứng minh $x^{2}, y^{2}$ chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1 nên

$x^{2}- y^{2}$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 3. Còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

$x^{2}, y^{2}$ chia cho 4 có số dư là 0, 1 nên $x^{2}+ y^{2}$ chia cho 4 có các số dư 0, 1, 2. Còn vế phải 1999 chia cho 4 dư 3.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

**Ví dụ 2:** Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

 $9x+2= y^{2}+y$

**Giải**

Biến đổi phương trình: $9x+2= y(y+1)$

Ta thấy vế trái của phương trình là số chia hết cho 3 dư 2 nên $y(y+1)$ chia hết cho 3 dư 2.

Chỉ có thể: $y=3k+1, y+1=3k+2 với k nguyên$

Khi đó: $9x+2=\left(3k+1\right)\left(3k+2\right)$

 $⟺9x=9k\left(k+1\right)$

 $ ⟺x=k\left(k+1\right)$

Thử lại: $x=k\left(k+1\right)$, $y=3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Đáp số: $\left\{\begin{array}{c}x=k\left(k+1\right)\\y=3k+1\end{array}\right.$ với $k$ là số nguyên tùy ý.

# PHƯƠNG PHÁP 2: ĐƯA VỀ DẠNG TỔNG

Biến đổi phương trình về dạng: vế trái là tổng của các phương trình, vế phải là tổng của các số chính phương.

**Ví dụ:** Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^{2}+y^{2}-x-y=8 (1)$$

**Giải**

$$(1)⟺4x^{2}+4y^{2}-4x-4y=32$$

$$ ⟺\left(4x^{2}+4x+1\right)+\left(4y^{2}-4y+1\right)=34$$

$$ ⟺\left|2x-1\right|^{2}+\left|2y-1\right|^{2}=3^{2}+5^{2}$$

Bằng phương pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có một dạng phân tích thành tổng của hai số chính phương $3^{2}, 5^{2}$. Do đó phương trình thỏa mãn chỉ trong hai khả năng:

 $\left\{\begin{array}{c}\left|2x-1\right|=3\\\left|2y-1\right|=5\end{array}\right.$ hoặc $ \left\{\begin{array}{c}\left|2x-1\right|=5\\\left|2y-1\right|=3\end{array}\right.$

Giải các hệ trên suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm nguyên là: $\left(2;3\right), \left(3;2\right), \left(-1;-2\right), (-2;-1)$.

# ****PHƯƠNG PHÁP 3: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC****

Trong khi giải các phương trình nghiệm nguyên rất cần đánh giá các miền giá trị của các biến, nếu số giá trị mà biến số có thể nhận không nhiều có thể dùng phương pháp thử trực tiếp để kiểm tra. Để đánh giá được miền giá trị của biến số cần vận dụng linh hoạt các tính chất chia hết, đồng dư, bất đẳng thức …

**1. Phương pháp sắp xếp thứ tự các ẩn:**

**Ví dụ 1:** Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

**Giải**

Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z. Ta có:
                       x + y + z = xyz     (1)

**Cách 1:** Chú ý rằng các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong phương trình nên có thể sắp xếp thứ tự giá trị của các ẩn, chẳng hạn: 1$ \leq $x $\leq $y$ \leq $z

Do đó: xyz = x + y + z$ \leq $3z

Chia hai vế của bất đẳng thức xyz$ \leq $3z cho số dương z ta được: xy$ \leq $3

Do đó xy$ \in ${1; 2; 3}

Với xy = 1, ta có x = 1, y = 1. Thay vào (1) được 2 + z = z (loại)

Với xy = 2, ta có x = 1, y = 2.  Thay vào (1) được z = 3

Với xy = 3, ta có x = 1, y = 3.  Thay vào (1) được z = 2 (loại vì y$ \leq $z)

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3.

**Cách 2:** Chia hai vế của (1) cho xyz $\ne $ 0 được:
                     $\frac{1}{yz}$ +$ \frac{1}{xz}$ +$ \frac{1}{ xy}$ = 1

Giả sử x $\geq $ y $\geq $ z $\geq $ 1 ta có:

1 =$ \frac{1}{yz}$ +$ \frac{ 1}{xz}$ +$ \frac{1}{xy}$ $\leq \frac{1}{z^{2}}$ +$ \frac{1}{ z^{2}}$ +$ \frac{1}{z^{2}}$ =$ \frac{3}{z^{2}}$

Suy ra 1 $\leq \frac{3}{z2}$ do đó z2$ \leq $3 nên z = 1. Thay z = 1 vào (1):

         x + y + 1 = xy
      ⇔ xy – x – y = 1 ⇔ x(y − 1) − (y − 1) = 2 ⇔ (x − 1)(y − 1) = 2

Ta có: x − 1$ \geq $y − 1$ \geq $0 nên (x − 1, y − 1) = (2, 1)

Suy ra (x, y) = (3, 2)

Ba số phải tìm là 1; 2; 3

**Ví dụ 2:** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:
                5(x + y + z + t) + 10 = 2xyzt

**Giải**

Vì vai trò của x, y, z, t như nhau nên có thể giả thiết:            x ≥ y ≥ z ≥ t

Khi đó : 2xyzt = 5(x + y + z + t) +10 ≤ 20x + 10

     ⇒ yzt ≤ 15 ⇒ t3 ≤ 15 ⇒ t ≤ 2

Với t = 1 ta có : 2xyz = 5(x + y + z) +15 ≤ 15x + 15

     ⇒ 2yz ≤ 30 ⇒ 2z2 ≤ 30 ⇒ z ≤ 3

Nếu z = 1 thì 2xy = 5(x + y) + 20 hay 4xy = 10(x + y) + 40 hay (2x – 5)(2y – 5) = 65

Dễ thấy rằng phương trình này có nghiệm là:

      (x = 35; y = 3) và (x = 9; y = 5).

Giải tương tự cho các trường còn lại và trường hợp t = 2.

Cuối cùng ta tìm được nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là (x; y; z; t) = (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị của các bộ số này.

**2. Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn:**

**Ví dụ:** Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:                 $\frac{1}{x}$ +$ \frac{1}{y}$ = $\frac{1}{3}$

**Giải**

Do vai trò bình đẳng của x và y, giả sử x ≥ y. Dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của số nhỏ hơn (là y).

Hiển nhiên ta có $\frac{1}{y}$ <$ \frac{1}{3}$ nên y > 3                (1)

Mặt khác do x ≥ y ≥ 1 nên $\frac{1}{x}\leq \frac{1}{y} $. Do đó:

$\frac{1}{3} $= $\frac{1}{x}$ +$ \frac{1}{y}$ $\leq \frac{1}{x}$ +$ \frac{1}{y} $=$ \frac{2}{y} $nên y$ \leq $6     (2)

Ta xác định được khoảng giá tri của y là 4$ \leq $y $\leq $6

Với y = 4 ta được: $\frac{1}{x}$ =$ \frac{1}{3} $−$ \frac{1}{4}$ =$ \frac{1}{12}$ nên x = 12

Với y = 5 ta được: $\frac{1}{x}$ =$ \frac{1}{3} $−$ \frac{1}{5}$ =$ \frac{2}{15}$ loại vì x không là số nguyên

Với y = 6 ta được: $\frac{1}{x}$ =$ \frac{1}{3} $−$ \frac{1}{6}$ =$ \frac{1}{6}$ nên x = 6

Các nghiệm của phương trình là: (4; 12), (12; 4), (6; 6).

**3. Phương pháp chỉ ra nghiệm nguyên:**

Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng: chỉ ra một hoặc một vài số là nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác.

**Ví dụ:** Tìm các số tự nhiên x sao cho:  2x+3x=5x

**Giải**

Viết phương trình dưới dạng: $(\frac{2}{5})^{x}$+ $(\frac{3}{5})^{x}$= 1          (1)

Với x = 0 thì vế trái của (1) bằng 2 ⇒ loại

Với x = 1 thì vế trái của (1) bằng 1 ⇒ đúng

Với x ≥ 2 thì $(\frac{2}{5})^{x} $<$ \frac{2}{5}; (\frac{3}{5})^{x} $< $\frac{3}{5}$ nên:
                    $(\frac{2}{5})^{x}$+ $(\frac{3}{5})^{x}$< $\frac{2}{5}+ \frac{3}{5} $= 1 loại

Nghiệm duy nhất của phương trình là x = 1.

**4. Sử dụng diều kiện Δ ≥ 0 để phương trình bậc hai có nghiệm:**

**Ví dụ:** Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:
             x + y + xy = x2 + y2          (1)

**Giải**

Viết (1) thành phương trình bậc hai đối với x:

 x2 − (y + 1)x + (y2 − y) = 0           (2)

Điều kiện cần để (2) có nghiệm là Δ ≥ 0

△= (y + 1)2 − 4(y2 − y) = −3y2 + 6y + 1 ≥ 0
                   ⇔ 3y2 − 6y – 1 ≤ 0
                   ⇔ 3(y − 1)2 ≤ 4

Do đó ⇔ (y − 1)2 ≤ 1 suy ra: y ∈ {0, 1, 2}

Với y = 0 thay vào (2) được x2 – x = 0 ⇔ x1 = 0; x2 = 1

Với y = 1 thay vào (2) được x2 − 2x = 0 ⇔ x3 = 0; x4 = 2

Với y = 2 thay vào (2) được x2 − 3x + 2 = 0 ⇔ x5 = 1; x6 = 2

Thử lại, các giá trị trên nghiệm đúng với phương trình (1)

Đáp số: (0 ; 0), (1 ; 0), (0 ; 1), (2 ; 1), (1 ; 2), (2 ; 2)

**5. Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc:**

- Bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (a,b $\geq $ 0, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b)

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki: (a2 + b2)(x2 + y2) $\geq $ (ax + by)2

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: ax = by.

- Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:

|x|  x, dấu bằng xảy ra khi: x  0; - |x| ≤ x, dấu bằng xảy ra khi: x ≤ 0.

- |x|  x  |x|

|x| + |y| ≥ |x + y|, dấu bằng xảy ra khi: xy  0.

**Ví dụ:** Tìm các số nguyên dương x, y thoả mãn phương trình:

(x2 + 1)(x2 + y2) = 4x2y (1)

**Giải**

***Cách 1:*** Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

x2 + 1 ≥ 2x. Dấu bằng xảy ra khi: x = 1

x2 + y2 ≥ 2xy. Dấu bằng xảy ra khi: x = y

Vì x, y nguyên dương nên nhân các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

(x2 + 1)(x2 + y2) ≥ 4x2y

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: x = y = 1.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất: x = y = 1.

***Cách 2:*** (1) ⇔ x4 + x2y2 + x2 + y2 – 4x2y = 0 ⇔ (x2 – y)2 + (xy – x)2 = 0.

Phương trình trên chỉ xảy ra khi và chỉ khi:

$\left\{\begin{array}{c}x^{2}-y=0\\xy-x=0\end{array}\right.$ ⇔ $\left\{\begin{array}{c}y= x^{2}\\x\left(y-1\right)=0\end{array}\right.$ ⇔ $\left\{\begin{array}{c}y= x^{2}\\y-1=0\end{array}\right.$ ⇔ x = y = 1 (vì x, y nguyên dương)

# PHƯƠNG PHÁP 4: DÙNG TÍNH CHIA HẾT, TÍNH ĐỒNG DƯ

Khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn lẻ,… để tìm ra điểm đặc biệt của các biến số cũng như các biểu thức chứa trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn.

**1. Sử dụng tính chia hết:**

Các tính chất thường dùng :

- Nếu a $\vdots $ m và a ± b $\vdots $ m thì b $\vdots $ m.

- Nếu a $\vdots $ b, b $\vdots $c thì a $\vdots $ c.

- Nếu ab $\vdots $ c mà ƯCLN (b , c) = 1 thì a $\vdots $ c.

- Nếu a$ \vdots $ m, b $\vdots $ n thì ab $\vdots $ mn.

- Nếu a $\vdots $ b, a $\vdots $ c với ƯCLN (b , c) = 1 thì a $\vdots $ bc.

- Trong m số nguyên liên tiểp, bao giờ cũng tồn tại một số là bội của m.

**Ví dụ 1:** Giải phương trình với nghiệm nguyên: 3x + 17y = 159 (1)

**Giải**

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình. Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên 17y $\vdots $ 3 nên y $\vdots $3 (vì 17 và 3 là nguyên tố cùng nhau).

Đặt y = 3t (t ∈ ℤ). Thay vào phương trình (1) ta được:

3x + 17.3t = 159 ⇔ x + 17t = 53

Do đó: $\left\{\begin{array}{c}x=53-17t\\y=3t\end{array}\right.$ (t $\in Z)$

Đảo lại, thay các biểu thức của x và y vào phương trình ta được nghiệm đúng.

Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên được xác định bằng công thức:

$\left\{\begin{array}{c}x=53-17t\\y=3t\end{array}\right.$ (t $là số nguyên tùy ý)$

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng phương trình: x2 – 5y2 = 27 (1) không có nghiệm là số nguyên.

**Giải**

Một số nguyên x bất kì chỉ có thể biểu diễn dưới dạng x = 5k hoặc x = 5k $\pm $ 1 hoặc x = 5k $\pm $ 2 trong đó k∈ ℤ

• Nếu x = 5k thì: ⇔ (5k)2 – 5y2 = 27 ⇔ 5(5k2 – y2 ) = 27

Điều này vô lí, vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

• Nếu x = 5k $\pm $1 thì: (1) ⇔ (5k$ \pm $1)2 – 5y2 = 27 ⇔ 25k2 $\pm $10k +1 – 5y2 = 27

⇔ 5(5k2$ \pm $4k – y2) = 23

Điều này cũng vô lí, vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

• Nếu x = 5k $\pm $2 thì: (1) ⇔ (5k $\pm $2)2 – 5y2 = 27 ⇔ 25k2 $\pm $20k +4 – 5y2 = 27

⇔ 5(5k2 $\pm $4k – y2) = 23

Lập luận tương tự như trên đều này cũng vô lí. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm là số nguyên.

**Ví dụ 3:** Tìm nguyện nguyên dương của phương trình sau:

19x2 + 28y2 = 729

**Giải**

***Cách 1***. Viết phương trình đã cho dưới dạng:

(18x2 + 27y2) + (x2 + y2) = 729 (1)

Từ (1) suy ra x2 + y2 chia hết cho 3, do đó x và y đều chia hết cho 3. Đặt x = 3u; y = 3v (u, v ∈ ℤ)

Thay vào phương trình đã cho ta được: 19u2 + 28v2 = 81 (2)

Từ (2) lập luận tương tự như trên ta suy ra u = 3s, v = 3t (s, t ∈ ℤ)

Thay vào (2) ta có 19s2 + 28t2 = 9 (3)

Từ (3) suy ra s, t không đồng thời bằng 0, do đó 19s2 + 28t2 ≥ 19 > 9

Vậy (3) vô nghiệm do đó phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

***Cách 2***. Giả sử phương trình có nghiệm

Từ phương trình đã cho ta suy ra x2 ≡ -1 (mod 4), điều này không xảy ra với mọi số nguyên x. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**2. Đưa về phương trình ước số:**

Ví dụ 1: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: xy – x – y = 2

Giải:

Biến đổi phương trình thành:

x(y - 1) – y = 2 ⇔ x(y – 1) – (y – 1) = 3 ⇔ (y – 1)(x – 1) = 3

Ta gọi phương trình trên là phương trình ước số: vế trái là 1 tích các thừa số nguyên, vế phải là 1 hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên x – 1 và y – 1 là các số nguyên và là ước của 23.

Ta có:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x – 1 | 3 | -1 |
| y – 1 | 1 | -3 |

Do đó:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 4 | 0 |
| y | 2 | -2 |

Nghiệm nguyên của phương trình: (4; 2), (2; 4), (0; -2), (-2; 0)

**Ví dụ 2:** Tìm nghiệm nguyên của phương trình: x + xy + y = 9

**Giải**

Phương trình đã cho có thể đưa về dạng:

(x + 1)(y + 1)= 10 (1)

Từ (1) ta suy ra (x + 1) là ước của 10 hay (x +1) ∈{$\pm $1; $\pm $2; $\pm $5; $\pm $10}

Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình là:

(1; 4), (4; 1),(-3; 6), (6; -3), (0; 9), (9; 0), (-2; 11), (-11; -2)

**Ví dụ 3:** Xác định tất cả các cặp nguyên dương (x; n) thỏa mãn phương trình sau:

 x2 + 3367 = 2n

**Giải**

Để sử dụng được hằng đẳng thức a3 – b3 = (a - b)(a2 + ab + b2) ta chứng minh n $\vdots $ 3.

Từ phương trình đã cho suy ra x3 ≡ 2n (mod 7)

Nếu n không chia hết cho 3 thì 2n khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 2, 4 hoặc 7, trong khi đó x3 khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0,1 hoặc 6 nên không thể có đồng dư thức x3 ≡ 2n (mod 7).

Vậy n = 3m với m là một số nguyên dương nào đó. Thay vào phương trình đã cho ta được: x3 + 3367 = 23m

(2m – x)[(2m – x)2 + 3x.2m] = 3367 (1)

Từ (1), ta suy ra 2m – x là ước của 3367

Hơn nữa, (2m – x)3 < 23m – x3 = 3367 nên (2m – x) ∈ {1; 7; 13}

• Xét 2m – x = 1, thay vào (1) ta được: 2m(2m – 1) = 2 x 561 ⇒ vô nghiệm.

• Xét 2m – x = 3, thay vào (1) ta được: 2m(2m – 13) = 2 x 15 ⇒ vô nghiệm.

• Xét 2m – x = 7, thay vào (1) ta được: 2m(2m – 7) = 24 x 32

Từ đó ta có: m = 4, n = 3m = 12 và x = 9

Vậy (x, n) = (9, 12)

**3. Tách ra các giá trị nguyên:**

**Ví dụ:** Giải phương trình ở ví dụ 1 bằng cách khác:

**Giải**

Biểu thị x theo y: x(y – 1) = y + 2

Ta thấy y ≠ 1 (vì nếu y = 1 thì ta có 0x= 3 vô nghiệm)

Do đó: x = $\frac{y + 2}{y - 1}$ = $\frac{y - 1 + 3}{y - 1}$ = 1 + $\frac{3}{y - 1}$

Do x là số nguyên nên $\frac{3}{y - 1 }$ là số nguyên, do đó y – 1 là ước của 3, lần lượt cho y – 1 = -1; 1; -3; 3 ta được cáp đáp số như ở ví dụ trên.

# PHƯƠNG PHÁP 5: DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

**1. Sử dụng tính chất chia hết của số chính phương:**

Các tính chất thường dùng:

- Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

- Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p là chia hết cho p2.

- Số chính phương khi chia cho 3, cho 4 chỉ có thể dư là 0 hoặc 1.

- Số chính phương khi chia ho 5, cho 8 chỉ có thể dư là 0, 1 hoặc 4.

- Số chính phương lẻ chia cho 4, 8 thì số dư đều là 1.

- Lập phương của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1 hoặc 8.

**Ví dụ:** Tìm các số nguyên x để 9x + 5 là tích của hai số nguyên liên tiếp.

**Giải**

Giả sử 9x + 5 = n(n+1) với n nguyên thì:

36x + 20 = 4n2 + 4n ⇔ 36x + 21 = 4n2 + 4n + 1 ⇔ 3(12x + 7) = (2n + 1)2

Số chính phương (2n + 1)2 chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho 9 (Vì 3 là số nguyên tố).

Ta lại có 12x + 7 không chia hết cho 3 nên 3(12x + 1) không chia hết cho 9.

⇒ Mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số nguyên x nào thỏa 9x + 5 = n(n + 1).

**2. Tạo ra bình phương đúng:**

**Ví dụ:** Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: 2x2 + 4x = 19 – 3y2

**Giải**

2x2 + 4x = 19 – 3y2 ⇔ 2x2 + 4x + 2 = 21 – 3y2 ⇔ 2(x + 1)2 = 3(7 – y2) (2)

Ta thấy: 3(7 – y2) $\vdots $ 2 ⇒ 7 – y2 $\vdots $ 2 ⇒ y lẻ

Ta lại có: 7 – y2 $\geq $ 0 nên chỉ có thể y2 = 1

Khi đó (2) có dạng: 2(x + 1)2 = 18

Ta được: x + 1 = $\pm $ 3, do đó: x1 = 2, x2 = -4

Các cặp số (2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1) thỏa mãn (2) nên là nghiệm của phương trình đã cho.

**3. Sử dụng các tính chất liên quan đến số chính phương:**

**a. Tính chất: Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào (tính chất kẹp)**

Từ đó suy ra với mọi số nguyên a, x ta có:

– Không tồn tại x để a2 < x2 < (a + 1)2.

– Nếu a2 < x2 < (a + 2)2 thì x2 = (a + 1)2.

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho:

 x(x + 1) = k(k + 2) (1)

**Giải**

Giả sử: x(x + 1) = k(k + 2) với k nguyên, x nguyên dương.

Ta viết phương trình trên thành: (1) ⇔ x2 + x + 1 = k2 + 2k + 1 = (k + 1)2

Do x > 0 nên x2 < x2 + x + 1 = (k +1)2 (2)

Cũng do x > 0 nên (k + 1)2 = x2 + x + 1 < x2 + 2x + 1 = (x + 1)2 (3)

Từ (2) và (3), suy ra: x2 < (k + 1)2 < (x + 1)2 (4)

Ta thấy x2 và (x + 1)2 là hai số chính phương liên tiếp nên (4) không thể xảy ra.

Vậy không tồn tại số nguyên dương x thoả mãn điều kiện đề bài.

**Ví dụ 2:** Tìm các số nguyên của x để biểu thức sau là một số chính phương: x4 + 2x3 +2x2 + x + 3

**Giải**

Đặt x4 + 2x3 +2x2 + x + 3 = y2 với y $\in $ ℕ

Ta thấy: y2 = (x4 + 2x3 + x2) + (x2 + x + 3) = (x2 + x)2 + (x2 + x + 3)

Ta sẽ chứng minh: a2 < y2 < (a + 2)2 với a = x2 + x

Thật vậy: y2 – a2 = x2 + x + 3 = (x + $\frac{1}{2}$)2 + $\frac{11}{4}$ > 0

(a + 2)2 – y2 = (x2 + x + 2)2 – (x4 + 2x3 + 2x2 + x + 3) = 3x2 + 3x + 1

 = 3(x + $\frac{1}{2}$)2 + $\frac{1}{4}$ > 0

Do a2 < y2 < (a + 2)2 nên y2 = (a + 1)2 ⇔ x4 + 2x3 + 2x2 + x + 3 = (x2 + x +1)2

⇔ x2 + x – 2 = 0 ⇔ [$\genfrac{}{}{0pt}{}{x = 1 }{x = -2}$

Với x = 1 hoặc x = -2 biểu thức đã cho bằng 9 = 32.

**b. Tính chất: Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương.**

**Ví dụ:** Giải phương trình với nghiệm nguyên dương: xy = z2 (1)

**Giải**

Trước hết ta có thể giả sử (x, y, z) = 1. Thật vậy, nếu bộ ba số xo, yo, zo thỏa mãn (1) và có ƯCLN bằng d, giả sử xo = dx1, yo = dy1, zo = dz1 thì x1, y1, z1 cũng là nghiệm của (1).

Với (x, y, z) = 1 thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x. y, z có ước chung là d, thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có z2 = xy mà (x, y) = 1 nên x = a2, y = b2 với a, b $\in $ℕ\*

Suy ra z2 = xy = (ab)2. Do đó: z = ab

Như vậy: $\left\{\begin{array}{c}x=ta^{2}\\y=tb^{2}\\z=tab\end{array}\right.$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Đảo lại, hiển nhiên các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1).

Công thức trên cho ta các nghiệm nguyên dương của (1).

**c. Tính chất: Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0.**

**Ví dụ:** Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: x2 + xy + y2 = x2y2 (1)

**Giải**

Thêm xy vào hai vế, ta được:

(1) ⇔ x2 + 2xy + y2 = x2y2 + xy ⇔ (x + y)2 = xy(xy + 1) (2)

Ta thấy xy và xy + 1 là hai số nguyên liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Xét xy = 0: (1) ⇔ x2 + y2 = 0 nêu x = y = 0

Xét xy + 1 = 0 ⇔ xy = -1 nên (x, y) = (1; -1) hoặc (-1; 1)

Vậy ba cặp số (0; 0), (1; -1), (-1; 1) đều là nghiệm của phương trình đã cho.

# PHƯƠNG PHÁP 6: LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

**1. Phương pháp lùi vô hạn:**

**Ví dụ:** Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn đẳng thức: x3 + 2y3 = 4z3  (1)

**Giải**

Từ (1) suy ra x $\vdots $ 2. Đặt x = 2x1 với x1 nguyên. Thay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

4x13 + y3 = 2z3 (2)

Từ (1) suy ra y $\vdots $ 2. Đặt y = 2y1 với y1 nguyên. Thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

2x13 + 4y13 = z3 (3)

Từ (1) suy ra z $\vdots $ 2. Đặt z = 2z1 với z1 nguyên. Thay vào (3) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

x13 + 2y13 = 4z13 (4)

Như vậy, nếu(x, y, z) là nghiệm của (1) thì (x1, y1, z1) cũng là nghiệm của (1). Trong đó: x = 2x1, y = 2y1, z = 2z1

Lập luận tương tự như trên (x2, y2, z2) cũng là nghiệm của (1). Trong đó: x1 = 2x2, y1 = 2y2, z1 = 2z2

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z chia hết cho 2k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi x = y = z = 0

Đó là nghiệm nguyên duy nhất của (1).

**2. Nguyên tắc cực hạn:**

Sử dụng đối với 1 số bài toán vai trò của các ẩn bình đẳng như nhau

**Ví dụ:** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

 5(x + y + z + t) + 10 = 2 xyzt

**Giải**

Giả sử x ≥ y ≥ z ≥ t ≥ 1

Ta có: 5(x + y + z + t) + 10 = 2xyzt

⇔ 2 =  +  +  + + ≤ ⇒ t 3 ≤ 15 ⇒ t = 1 hoặc t = 2

\* Với t = 1 ta có: 5(x+ y + z + 1) + 10 = 2xyz

⇔ 2 = + + + ≤⇒  ≤ 15 ⇒ z = 

Nếu z = 1 có 5(x+ y) + 20 = 2xy ⇔ (2x – 5)(2y - 5) = 65

 ⇒ x = hoặc

Ta được nghiệm (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị của chúng

Với z = 2; z = 3 phương trình không có nghiệm nguyên

\* Với t = 2 thì 5(x+ y + z) + 20 = 4xyz ⇔ 4 =+++≤ 

⇒ ≤ ≤ 9 ⇒ z = 2 (vì z ≥ t ≥ 2)⇒ (8x – 5)(8y – 5) = 265

Do x ≥ y ≥ z ≥ 2 nên 8x – 5 ≥ 8y – 5 ≥ 11

⇒ (8x – 5)(8y – 5) = 265 vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là bộ (x, y, z) = (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị.

# PHƯƠNG PHÁP 7: XÉT CHỮ SỐ TẬN CÙNG

**Ví dụ 1:** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

1$!$ + 2$!$ +...+ x$!$ = $y^{2}$ (1)

**Giải**

Cho x lần lượt là 1; 2; 3; 4, ta có ngay hai nghiệm nguyên dương (x; y) của phương trình là (1; 1) và (3; 3).

Nếu x > 4 thì dễ thấy k$!$ với k > 4 đều có chữ số tận cùng bằng 0

1$!+2!+3!+4!+…+x! =33+5!+…+ x!$ có chữ số tận cùng là 3

Mặt khác vế phải là số chính phương nên không thể tận cùng là 3.

Vậy phương trình (1) chỉ có hai nghiệm nguyên dương (x; y) là (1; 1) và (3; 3).

**Ví dụ 2:** Tìm x; y nguyên dương thỏa mãn phương trình:

 $x^{2}+x-1= 3^{2y+1}$ (1)

**Giải**

Cho x các giá trị từ 1 đến 9, dễ dàng xác định được chữ số tận cùng của $x^{2}+x-1$ chỉ nhận các giá trị 1; 5; 9. Mặt khác ta thấy $3^{2y+1}$ là lũy thừa bậc lẻ của 3 nên chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 3 hoặc 7, khác với 1; 5; 9.

Vậy (1) không thể xảy ra. Nói cách khác phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương.

# PHƯƠNG PHÁP 8: TÌM NGHIỆM RIÊNG

Cách giải:

Xét phương trình ax + by + c = 0 (1)

Trong đó a, b, c $\in Z$, $a\ne 0, b\ne 0$

Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng (a, b, c) = 1. Thật vậy, nếu (a, b, c) = d $\ne 1$ thì ta chia 2 vế phương trình cho d.

Ta có hai định lý:

Định lý 1: Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì (a, b) = 1 (\*)

Chứng minh: Giả sử ($x\_{0}$;$y\_{0}$) là nghiệm nguyên của (1) thì ax + by = c

Nếu a và b có ước chung là d $\ne 1$ thì c $\vdots $ d, trái với giả thiết (a, b, c) = 1.

Vậy (a, b) = 1.

Định lý 2: Nếu ($x\_{0}, y\_{0})$ là một nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên và mọi nghiệm nguyên của nó có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\left\{\begin{array}{c}x=x\_{0}+bt\\y=y\_{0}-at\end{array}\right.$$

Trong đó t là một số nguyên tùy ý (t = 0; $\pm 1; \pm 2;…)$

Chứng minh:

- Bước 1: Mọi cặp số ($x\_{0}+bt; y\_{0}-at)$ đều là nghiệm nguyên của (1). Thật vậy, ($x\_{0};y\_{0})$ là nghiệm của (1) nên a$x\_{0}+by\_{0}=c$

Ta có: ax + by = $a(x\_{0}+bt)+b\left(y\_{0}-at\right)= ax\_{0}+ by\_{0}=c$

Do đó ($x\_{0}+bt, y\_{0}-at) $là nghiệm của (1).

- Bước 2: Mọi nghiệm (x; y) của (1) đều có dạng ($x\_{0}+bt, y\_{0}-at)$ với t $\in Z$

Thật vậy, do ($x\_{0};y\_{0})$ và (x; y) là nghiệm của (1) nên

ax + by = c

$$ax\_{0}+by\_{0}=c$$

Trừ từng vế:

$$a\left(x-x\_{0}\right)+b\left(y-y\_{0}\right)=0$$

$a\left(x-x\_{0}\right)=b\left(y\_{0}-y\right)$ (2)

Ta có $a\left(x-x\_{0}\right)\vdots b$ mà (a, b) = 1 (theo định lý 1) nên $x-x\_{0}\vdots b$

Vậy tồn tại số nguyên t sao cho:

$$\left\{\begin{array}{c}x=x\_{0}+bt\\y=y\_{0}-at\end{array}\right.$$

**Ví dụ:** Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình: 3x $–$ 2y = 5

**Giải**

***Cách 1:*** Ta thấy $x\_{0}=3; y\_{0}=2$ là một nghiệm riêng

Theo định lý 2, mọi nghiệm nguyên của phương trình là:

$$\left\{\begin{array}{c}x=3-2t\\y=2-3t\end{array} \left(t là số nguyên tùy ý\right)\right.$$

***Cách 2:*** Ta thấy $x\_{0}=1; y\_{0}=-1$ là một nghiệm riêng

Theo định lý 2, mọi nghiệm nguyên của phương trình là:

$$\left\{\begin{array}{c}x=1-2t\\y=-1-3t\end{array} (t là số nguyên tùy ý)\right.$$

Chú ý: Qua 2 cách giải trên, ta thấy có nhiều công thức biểu thị tập hợp các nghiệm nguyên của cùng 1 phương trình.

**\* Cách tìm một nghiệm riêng của phương trình bậc nhất hai ẩn:**

Để tìm một nghiệm nguyên riêng của phương trình ax + by = c, ta có thể dùng phương pháp thử chọn: lần lượt cho x bằng số có giá trị tuyệt đối nhỏ (0;$\pm 1;\pm 2;…)$ rồi tìm giá trị tương ứng của y.

PHƯƠNG PHÁP 9: PHƯƠNG PHÁP HẠ BẬC

**Ví dụ:** Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^{3}+2y^{3}-4z^{3}=0 \left(1\right)$$

**Giải**

(1) $⇔ x^{3}=4z^{3}-2y^{3} \left(2\right)$

Rõ ràng vế phải của (2) chia hết cho 2 nên $x^{3}\vdots 2$ do đó x $\vdots 2$. Đặt x = 2$x\_{1}$ ($x\_{1}\in Z)$

Thay vào (2) ta có:

$⇔ 8x\_{1}^{3}=4x^{3}-2y^{3}⇔ y^{3}=2z^{3}-4x\_{1}^{3}$ (3)

Lập luận tương tự ta có y $\vdots 2$, z $\vdots 2$. Đặt y = $2y\_{1};z=2z\_{1}\left(y\_{1}\in Z,z\_{1}\in Z\right)$

Biến đổi tương tự ta có: $z^{3}=4y\_{1}^{3}+2x\_{1}^{3}$ (4)

(4)$ ⇔ 8z\_{1}^{3}=4y\_{1}^{3}+2x\_{1}^{3}⇔x\_{1}^{3}+2y\_{1}^{3}-4z\_{1}^{3}=0$ (5)

Rõ ràng nếu bộ số $(x\_{0};y\_{0};z\_{0})$ là nghiệm của (1) thì bộ số $(\frac{x\_{0}}{2};\frac{y\_{0}}{2};\frac{z\_{0}}{2})$ cũng là nghiệm của (1), hơn nữa $x\_{0};y\_{o};z\_{0} $là số chẵn và $\frac{x\_{0}}{2};\frac{y\_{0}}{2};\frac{z\_{0}}{2}$ cũng là số chẵn. Quá trình này có thể tiếp tục mãi và các số $\frac{x\_{0}}{2^{n}};\frac{y\_{0}}{2^{n}};\frac{z\_{0}}{2^{n}}$ cũng là số chẵn với mọi n là số nguyên dương.

Vậy x = y = z = 0.

# PHƯƠNG PHÁP 10: PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

Thực chất là biến đổi phương trình về dạng:

g1 (x1, x2,…., xn­) h(x1, x2,…., xn­) = a

**Ví dụ:** Tìm nghiệm nguyên của phương trình: x4 + 4x3+ 6x2+ 4x = y2

**Giải**

Ta có: x4 + 4x3+ 6x2+ 4x = y2⇔ x4 +4x3+6x2+4x +1- y2=1

 ⇔ (x+1)4 – y2 = 1 ⇔ [(x+1)2 –y] [(x+1)2+y]= 1

⇔ [$\genfrac{}{}{0pt}{}{\left\{\begin{array}{c}(x+1)2 – y = 1\\(x+1)2 + y = 1\end{array}\right.}{\left\{\begin{array}{c}(x+1)2 – y = -1\\(x+1)2 + y = -1\end{array}\right.}$ ⇔ [$\genfrac{}{}{0pt}{}{1 + y =1 - y}{-1 + y = -1 - y}$

 ⇒ y = 0 ⇒ (x+1)2 = 1 ⇔ x+1 = ±1 ⇒ x = 0 hoặc x = -2

 Vậy (x, y) = (0, 0); (- 2, 0)

# PHƯƠNG PHÁP 11: PHƯƠNG PHÁP LOẠI TRỪ

 Khẳng định nghiệm rồi loại trừ các giá trị còn lại của ẩn

**Ví dụ 1:** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: 1! + 2! + … + x! = 

**Giải**

Với x≥ 5 thì x! có tận cùng là 0 và 1! + 2! + 3! + 4! Có tận cùng là 3

⇒ 1! + 2! + … + x! có tận cùng là 3, không là số chính phương (loại)

Vậy x < 5 mà x nguyên dương nên:

 x = 

Thử vào phương trình ta được (x = 1, y= 2); (x = 3, y= 3) là thoả mãn.

**Ví dụ 2:** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: y2 + y = x4 + x3 + x2 + x

**Giải**

Ta có: y2 + y = x4 + x3 + x2 + x⇔ 4y2 + 4y + 1 = 4x4 + 4x3 + 4x2 + 4x + 1

⇒ (2x2 + x)2 - (2y + 1)2 = (3x + 1)(x +1) hay (2x2 + x + 1)2 - (2y + 1)2 = x(x - 2)

Ta thấy:

❖ Nếu x > 0 hoặc x < -1 thì (3x + 1)(x +1) > 0

❖ Nếu x > 2 hoặc x < -1 thì x(x - 2) > 0

⇒ Nếu x > 2 hoặc x < 1 thì (2x2 + x) < (2y+1)2 < (2x2 + x + 1)2 (loại)

⇒ -1 ≤ x ≤ 2 ⇒ x = 0, 1, -1, 2

• Xét x = 2 ⇒ y2 + y =30 ⇒ y = 5 hoặc y= -6

• Xét x = 1 ⇒ y2 + y = 4 (loại)

• Xét x = 0 ⇒ y2 + y = 0 ⇒ y (y + 1) = 0 ⇒ y = 0 hoặc y = -1

• Xét x = -1 ⇒ y2 + y = 0 ⇒ y = 0 hoặc y= -1

Vậy nghệm nguyên của phương trình là:

(x, y) = (2, 5); (2, -6); (0, 0); (0, -1); (-1, 0); (-1, -1)

# PHƯƠNG PHÁP 12: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN TỐ

**Ví dụ:** Tìm x, y, z nguyên tố thoả mãn: x + 1 = z

**Giải**

Ta có x, y nguyên tố và xy + 1 = z ⇒ z > 3

Mà z nguyên tố ⇒ z lẻ ⇒ xy chẵn ⇒ x chẵn ⇒ x = 2

Xét y = 2 ⇒ 22 + 1 = 5 là nguyên tố ⇒ z = 5 (thoả mãn)

Xét y > 2 ⇒ y = 2k + 1 (k ∈ N) ⇒ 22k+1 + 1 = z ⇒ 2. 4k + 1 = z

Có 4 chia cho 3 dư 1 ⇒ (2.4k+1)  3 ⇒ z 3 không thỏa mãn (loại)

Vậy x = 2, y = 2, z = 5 thoả mãn

# BÀI TẬP ÁP DỤNG

**Bài 1:** **Tìm x, y nguyên tố thoả mãn: y2 – 2x2 = 1**

**Hướng dẫn:**

Ta có y2 – 2x2 = 1 ⇒ y2 = 2x2 +1 ⇒ y là số lẻ

Đặt y = 2k + 1 (với k nguyên).Ta có (2k + 1)2 = 2x2 + 1

⇔ x2 = 2 k2 + 2k ⇒ x chẵn, mà x nguyên tố ⇒ x = 2, y = 3

**Bài 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :**  (**2x + 5y + 1)( + y + x2  + x) = 105**

**Hướng dẫn:**

Ta có: (2x + 5y + 1)( + y + x2  + x) = 105

Ta thấy 105 lẻ ⇒ 2x + 5y + 1 lẻ ⇒ 5y chẵn ⇒ y chẵn

+ y + x2  + x =  + y + x(x+ 1) lẻ

có x(x + 1) chẵn, y chẵn ⇒  lẻ ⇒ = 1 ⇒ x = 0

Thay x = 0 vào phương trình ta được

(5y + 1)(y + 1) = 105 ⇔ 5y2 + 6y – 104 = 0

⇒ y = 4 hoặc y =  (loại)

 Thử lại ta có x = 0; y = 4 là nghiệm của phương trình

**Bài 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:** **x2 – 2y2 = 5**

**Hướng dẫn:**

 Xét x  5 mà x2 – 2y2 = 5 ⇒ 2y2  5 ⇒ y2 5

 (2,5) = 1 5 là số nguyên tố

 ⇒ y2  25 ⇒ x2 – 2y2  25

 lại có x 5 ⇒ x2  25 5 25 loại

 Xét x  5 ⇒ y  5

 và x2 chia cho 5 có các số dư 1 hoặc 4

 y2 chia cho 5 có các số dư 1 hoặc 4 ⇒ 2y2 chia cho 5 dư 2 hoặc 3

 ⇒ x2 – 2y2 chia cho 5 dư 1 hoặc  2 (loại)

 Vậy phương trình x2 – 2y2 = 5 vô nghiệm

**Bài 4: Tìm x, y là số tự nhiên thoả mãn: x2 + = 3026**

 **Hướng dẫn:**

 Xét y = 0 ⇒ x2 + 30 = 3026 ⇒ x2 = 3025

 mà x º N ⇒ x = 55

Xét y > 0 ⇒  3, x2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1

⇒ x2 + chia cho 3 dư 0 hoặc 1

mà 3026 chia cho 3 dư 2 (loại)

 Vậy nghiệm (x,y) = (55,0)

**Bài 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: x2 + y2 – x – y = 8**

 **Hướng dẫn:**

 Ta có x2 + y2 –x – y = 8 ⇔ 4 x2 + 4 y2 – 4 x –4y = 32

⇔ (4x2 – 4x +1) + (4y2 – 4y + 1) = 34 ⇔ (2x – 1)2 + (2y – 1)2 = 34

Bằng phương pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có duy nhất 1 dạng phân tích thành tổng của 2 số chính phương 32 và 52

 Do đó ta có  hoặc 

Giải ra ta được (x,y) = (2,3); (2,-2); (-1, -2); (-1, 3) và các hoán vị của nó.

**Bài 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: x2 – 4xy + 5y2  = 169**

 **Hướng dẫn:**

Ta có x2 – 4xy + 5y2  = 169⇔ (x – 2y)2 + y2 = 169

Ta thấy 169 = 02 + 132 = 52 + 122

 ⇒  hoặc  hoặc  hoặc 

Giải ra ta được (x, y) = (29, 12);(19, 12); (-19, -12); (22, 5); (-2, 5) ;(2, -5); (-22, -5); (26, 13); (-26, -13); (-13. 0); (13, 0)

**Bài 7: Tìm nghiệm nguyêm của phương trình : x2 – 5y2 = 0**

 **Hướng dẫn:**

Giả sử x0, y0 là nghiệm của phương trình x2 – 5y2 = 0

Ta có x - 5y = 0 ⇒ x0  5 đặt x0 = 5 x1

Ta có (5x1) 2 – 5y = 0 ⇔ 5x- y = 0

 ⇒ y0  5 đặt y0 = 5y1 ⇒ x- 5y = 0

Vây nếu (x0,, y0) là nghiệm của phương trình đã cho thì

(,) cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Cứ tiếp tục lập luận như vậy (,) với k nguyên dương bất kỳ cũng là nghiệm của phương trình. Điều này xảy ra khi x0 = y0 = 0

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x = y = 0

**Bài 8: Tìm nghiệm nguyên của phương trình : x2 + y2 + z2 = x2 y2**

**Hướng dẫn:**

 Nếu x, y đều là số lẻ ⇒ x2 , y2 chia cho 4 đều dư 1

 x2y2 chia cho 4 dư 1  z2  chia cho 4 dư 3 (loại)

 x2 + y2 chia cho 4 dư 2

 mà x2 + y2 + z2 = x2 y2

 ⇒ x chẵn hoặc y chẵn

 \* Giả sử x chẵn ⇒ hoặc y chẵn

 \* Giả sử x chẵn ⇒ x2, x2y2 chẵn

⇒ x2  4 ⇒ x2 y2  4 ⇒ (y2 + z2)  4 ⇒ y và z phải đồng thời chẵn

Đặt x = 2x1, y = 2y1, z = 2z1

Ta cóx+ y+z = xy

 Lập luận tương tự ta có x + y + z = 16 xy

 Quá trình này cứ tiếp tục ta thấy (x1, y1, z1) là nghiệm của phương trình thì (,,) là nghiệm của phương trình với k nguyên dương

 ⇒ x1 = y1 = z1 = 0

 Vậy pt có nghiệm là (0, 0, 0)

**Bài 9: Giải phương trình nghiệm nguyên: 3x2 + y2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0**

 **Hướng dẫn:**

Ta có pt : 3x2 + y2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0

⇔ y2 + (4x + 2)y + 3 x2 + 4x + 5 = 0 (\*) coi x là tham số giải phương trình bậc 2 pt (\*) ẩn y ta có y = -(2x + 1) ± 

Do y nguyên, x nguyên ⇒  nguyên

Mà  = (2x + 1)2 – (3x2 + 4x + 5) = x2 – 4⇒ x2 – 4 = n2 (n º Z)

⇒ (x - n)(x + n) = 4⇒ x – n = x + n = ± 2 ⇒ x = ± 2

Vậy phương trình có nghiệm nguyên

(x, y) = (2; -5); (-2, 3)

**Bài 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: x2 – (y+5)x + 5y + 2 = 0**

**Hướng dẫn:**

Ta có x2 – (y+5)x + 5y + 2 = 0 coi y là tham số ta có phương trình bậc 2 ẩn x. Giả sử phương trình bậc 2 có 2 nghiệm x1, x2

Ta có ⇒ ⇒ 5 x1 + 5x2 – x1x2 = 23

⇔ (x1 -5) (x2 -5) = 2 Mà 2 = 1.2 = (-1)(-2)

⇒ x1 + x2 = 13 hoặc x1 + x2 = 7 ⇒ y = 8 hoặc y = 2

thay vào phương trình ta tìm được các cặp số

(x, y) = (7, 8); (6, 8); (4, 2); (3, 2); là nghiệm của phương trình

**Bài 11: Tìm nghiệm nguyên của phương trình : x2 – xy + y2 = 3**

**Hướng dẫn:**

Ta có x2 – xy + y2 = 3 ⇔ (x - )2 = 3 - 

Ta thấy (x - )2 ≥ 0 ⇒ 3 - ≥ 0 ⇒ -2 ≤ y ≤ 2

⇒ y = ±2; ±1; 0 thay vào phương trình tìm x

Ta được các nghiệm nguyên của phương trình là :

(x, y) = (-1, -2), (1, 2); (-2, -1); (2, 1) ;(-1, 1) ;(1, -1)

**Bài 12: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 2x + 3y = 11**

**Hướng dẫn**

Cách 1: Ta thấy phương trình có cặp nghiệm đặc biệt là x0 = 4, y0 = 1

Vì 2.4 + 3.1 = 11

⇒ (2x + 3y) – (2.4 + 3.1) = 0⇔ 2(x - 4) + 3(y - 1) = 0⇒ 2(x - 4) = -3(y - 1) mà (2,3) = 1

Đặt x – 4 = 3k và y – 1 = 2k với (k ∈ Z)

Vậy nghiệm tổng quát của pt là : x = 4 – 3k

 y = 1+ 2k ( k ∈ Z)

 *\*Nhận xét:* Theo cách giải này phải tìm ra 1 cặp nghiệm nguyên đặc biệt (x0, y0) của phương trình vô định ax + by = c

 Nếu phương trình có hệ số a, b, c lớn thì cách giải khó khăn.

Cách 2: Dùng tính chất chia hết.

Ta có 2x + 3y = 11⇒ x= = 5- y-

Do x, y nguyên ⇒  nguyên

đặt  = k ⇒ y = 2k +1 ⇒ x = 4- 3k (k ∈ Z

 Vậy nghiệm tổng quát

**Bài 13: Tìm cặp số nguyên dương (x, y) thoả mãn phương trình : 6x2 + 5y2  = 74**

**Hướng dẫn:**

Cách 1: Ta có 6x2 + 5y2  = 74 ⇔ 6x2 –24 = 50 – 5y2

⇔ 6(x2 – 4) = 5(10 – y2)⇒ 6(x2 – 4)  5 ⇒ x2 – 4 5

 (6, 5) = 1⇒ x2 = 5t + 4 (t ∈N)

Thay x2 – 4 = 5t vào phương trình ⇒ y2 = 10 – 6t

 lại có ⇔  ⇒ t = 0 hoặc t = 1

với t = 0 ta có x2 = 4, y2 = 10 (loại)

Với t = 1 ta có x2 = 9 ⇔ x = ± 3

 y2 = 4 y = ± 2

mà x, y ∈ Z ⇒ x = 3, y = 2 thoả mãn

Cách 2: Sử dụng tính chẵn lẻ và phương pháp chặn

Ta có 6x2 + 5y2 = 74 là số chẵn ⇒ y chẵn

lại có 0< 6x2 ⇒ 0< 5y2 < 74⇔ 0 < y2 < 14 ⇒ y2 = 4 ⇒ x2  = 9

Cặp số (x, y) cần tìm là (3, 2)

Cách 3: Ta có 6x2 + 5y2 = 74

⇔ 5x2  + 5y2 + x2 + 1 = 75⇒ x2 + 1  5

mà 0 < x2 ≤ 12 ⇒ x2 = 4 hoặc x2 = 9

Với x2 = 4 ⇒ y2 = 10 loại

Với x2 = 9 ⇒ y2 = 4 thoả mãn

cặp số (x, y) cần tìm là (3, 2)

**Bài 14: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: x2 + y2 = 2x2y2**

**Hướng dẫn:**

Cách 1: Đặt x2 = a, y2  = b

 Ta có a + b = 2 ab ⇒  ⇒ =  ⇒ a = ± b

Nếu a = b ⇒ 2a = 2a2 ⇒ a= a2 ⇒ a= 0, a= 1⇒ (a, b) = (0, 0); (1, 1)

Nếu a = - b ⇒ 2b2 = 0 ⇒ a = b = 0 ⇒ (x2, y2) = (0, 0); (1, 1)

⇒ (x, y) = (0, 0); (-1, -1); (-1, 1); (1, -1) ; (1, 1)

Cách 2:

Ta có x2 + y2 = 2x2y2

Do x2, y2 ≥ 0

Ta giả sử x2 ≤ y2 ⇒ x2 + y2 ≤ 2 y2 ⇒ 2x2 y2 ≤ 2y2

Nếu y = 0 phương trình có nghiệm (0;0)

Nếu y  0⇒ x2 ≤ 1 ⇒ x2= 0 hoặc x2 = 1

⇒ y2 = 0 (loại) hoặc y2 = 1 ⇒ (x, y) = (1, 1); (1, -1) ; (-1, 1)

Vậy phương trình có nghiệm (x; y) = (0, 0); (-1, -1); (-1, 1); (1, -1); (1, 1)

Cách 3:

 Có x2 + y2 = 2x2y2 ⇔ 2x2 + 2y2 = 4 x2y2 ⇔ 4 x2y2 –2x2 – 2y2 + 1 = 1

2x2(2y2  - 1) – (2y2 - 1) = 1⇔ (2x2 – 1)(2y2 - 1) = 1

Mà 1 = 1.1 = (-1)(-1) ⇒ (x2, y2) = (1, 1); (0, 0)

⇒ (x, y) = (1, 1); (0, 0) ; (1, -1); (-1; -1); (-1, 1)

**Bài 15: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình : x2 –3xy + 2y2+ 6 = 0**

**Hướng dẫn:**

Ta thấy(x, y) = (0, 0) không phải là nghiệm của phương trình

Ta coi phương trình x2 – 3xy + 2y2 + 6 = 0 ẩn x ta tính = y2 – 24

Phương trình có nghiệm tự nhiên thì  là số chính phương

 ⇒ y2 – 24 = k2 ⇒ (y – k)(y + k) = 24 (k ∈ N)

 mà 24 = 24.1 = 12.2 = 6.4 = 3.8 ; y + k và y – k cùng chẵn

 ⇒ ⇒ y = 5 hoặc y+ ⇒ y = 7

Thay vào ta tìm được (x, y) = (8, 7); (13, 7); (7, 5); (8, 5)

**Bài 16: Tìm nghiệm nguyên của phương trình : 2x2 + 2y2 – 2xy + y + x – 10 = 0**

**Hướng dẫn:**

Cách 1:

Ta có phương trình đã cho ⇔ 2x2 – (2y-1) x + 2y2 + y – 10 = 0

Coi x là ẩn y là tham số ta có phương trình bậc 2 ẩn x

Xét  = (2y – 1)2 – 4.2 (2y2 + y -10) = -12y2 – 12y+ 81

Để nghiệm x nguyên thì  là số chính phương

Đặt k2= -12y2 – 12 y + 81 ⇒ k2 + 3(2y + 1) = 84

⇒ (2y + 1)2 = 28 - ≤ 28; (2y + 1)2 lẻ ⇒ (2y + 1)2 = 1, 9, 25

⇒ y = 0, 1, -2, 2, -3

Thử trực tiếp vào phương trình ta tìm được các cặp số (x, y) = (2, 0); (0, 2) thoả mãn

Cách 2:

Đặt x + y = a, xy = b ta có x, y ∈ Z ⇒ a, b ∈ Z

Pt 2x2 – (2y-1) x + 2y2 + y – 10 = 0

 ⇔ 2a2 – 4b + a – 10 = 0 ⇔ 4a2 – 8b + 2a – 20 = 0

⇔ (a+ 1)2 + 3a2 – 8b – 21 = 0 ⇔ (a+ 1)2 + 3a2 = 8b + 21

lại có (x+ y)2 ≥ 4 xy ⇒ a2 ≥ 4b

⇒ 8b + 21 ≤ 2a2 + 21 ⇒ (a + 1)2 + 3a2 ≤ 2a2 + 21 ⇒ (a + 1)2 ≤ 21

mà (a+ 1)2 là số chính phương ⇒ (a+ 1)2 ∈ {1, 4, 9, 16}

⇒ a ∈ {0, 1, 2, 3}

Với a = 0 ⇒ 12 + 3. 0 = 8b + 21 ⇒ 8b = 20 loại

Với a = 1 ⇒ (1+1)2 + 3.12 = 8b + 21 ⇒ 8b = -14 loại

Với a = 2 ⇒ (1+ 2)2 + 3.22 = 8b + 21 ⇒ 8b = 0 ⇒ b = 0

Với a = 3 ⇒ (1+ 3)2 + 3.32 = 8b + 21 ⇒ 8b = 22 loại

 Vậy được a = 2, b = 0 ⇒ ⇒ (x, y)= (0, 2); (2, 0) thoả mãn

**Bài 17: Hai đội cờ thi đấu với nhau mỗi đấu thủ của đội này phải đấu 1 ván với mỗi đấu thủ của đội kia. Biết rằng tổng số ván cờ đã đấu bằng 4 lần tổng số đấu thủ của hai đội và biết rằng số đấu thủ của ít nhất trong 2 đội là số lẻ hỏi mỗi đội có bao nhiêu đấu thủ.**

**Hướng dẫn:**

Gọi x, y lần lượt là số đấu thủ của đội 1 và đội 2 (x, y nguyên dương)

Theo bài ra ta có xy = 4 (x + y)

Đây là phương trình nghiệm nguyên ta có thể giải bằng các cách sau

Cách 1: Có xy = 4(x + y)⇔ xy – 4x – 4y + 16 = 16⇔ (x-4) (y - 4) = 16

mà 16 = 1.16 = 2.8 = 4.4

lại có ít nhất 1 đội có số đấu thủ lẻ

⇒ ⇔ hoặc

Cách 2: Ta thấy x, y bình đẳng.Không mất tính tổng quát ta giả sử x≤ y

 Ta có x, y nguyên dương xy = 4 (x + y)⇔ + = 1

 lại có  ≥  ⇔ +  ≤  ⇔  ≤ 1⇒ x ≤ 8 ⇒ x= {5, 6, 7, 8}

 Mà ≤ 1 ⇒ x > 4

 Thử trực tiếp ta được x = 5, y = 20 (thoả mãn)

 Vậy 1 đội có 5 đấu thủ còn đội kia có 20 đấu thủ

**Bài 18: Tìm năm sinh của Bác Hồ biết rằng năm 1911 khi Bác ra đi tìm đường cứu nước thì tuổi Bác bằng tổng các chữ số của năm Bác sinh cộng thêm 3.**

**Hướng dẫn:**

Ta thấy nếu Bác Hồ sinh vào thể kỷ 20 thì năm 1911 Bác nhiều nhất là 11 tuổi (1+ 9 + 0 + 0 + 3) loại

Suy ra Bác sinh ra ở thế kỷ 19

Gọi năm sinh của Bác là 18xy (x, y nguyên dương, x, y ≤ 9)

Theo bài ra ta có:

1911 - 18xy = 1 + 8 + x + y = 3 ⇔ 11x + 2y = 99

⇒ 2y  11 mà (2, 11) = 1 ⇒ y  11 mà 0 ≤ y ≤ 9

Nên y = 0 ⇒ x = 9

 Vậy năm sinh của Bác Hồ là 1890.

**Bài 19: Hãy dựng một tam giác vuông có số đo 3 cạnh là a, b, c là những số nguyên và có cạnh đo được 7 đơn vị**

 **Hướng dẫn:**

 Giả sử cạnh đo được 7 đơn vị là cạnh huyền (a = 7)

 ⇒ b2 + c2 = 72 ⇒ b2 + c2  7 ⇒ b  7; c  7 (vì số chính phương chia hết cho 7 dư 0, 1, 4, 2)

 lại có 0 < b, c < 7 loại ⇒ Cạnh đo được là cạnh góc vuông giả sử b = 7

 Ta có a2 – c2 = 49 ⇔ (a + c)(a - c) = 49 ⇒ ⇒

 Vậy tam giác cần dựng có số đo 3 cạnh là 7, 25, 24