

Người làm: Kiều Phương Thủy
 Zalo: Kiều Phương Thủy Số dt: 0976506085
 Email: kieuthiphuongthuy@gmail.com

CD5: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ
<ĐỀ 121-150>

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy năm 2021 - 2022)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^2 + 2039q^2$ chia hết cho 24.

Lời giải

Ta có: $p^2 + 2039q^2 = p^2 - q^2 + 2040q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) + 2040q^2$.

Ta thấy:

$+ p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ và p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p lẻ suy ra $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp, suy ra $(p-1)(p+1) : 8$.

$+ (p-1) \cdot p \cdot (p+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1) \cdot p \cdot (p+1) : 3$.

Mà $p \not: 3 \Rightarrow (p-1)(p+1) : 3$.

Vì $(3; 8) = 1$ nên $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) : 24$.

Tương tự ta có $q^2 - 1 : 24$.

Mà $2040q^2 : 24$ nên $(p^2 - 1) - (q^2 - 1) + 2040q^2 : 24$. Hay $p^2 + 2039q^2 : 24$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Ba năm 2021 - 2022)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$

$= a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)$ chia hết cho 2.

Mà $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ nên $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 2(b^2 + d^2)$ chia hết cho 2

$\Rightarrow a + b + c + d$ chia hết cho 2.

Mặt khác, a, b, c, d là các số nguyên dương $\Rightarrow a + b + c + d \geq 4$.

Vậy $(a + b + c + d)$ là hợp số.

Câu 3. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$.

Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 2022$

$$\Rightarrow 61a + 9b + c = 2022$$

$$f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c$$

$$= 305a + 45b + 5c + 30a = 5(61a + 9b + c) + 30a = 5 \cdot 2022 + 30a = 10(1011 + 3a)$$

Vì a nguyên dương nên $10(1011 + 3a) \geq 10$ và $10(1011 + 3a) > 10$ nên $10(1011 + 3a)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Dạng 2. Áp dụng định lý Fermat

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường năm 2021 - 2022)

Lời giải

Dạng 3. Phương pháp phân tích

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2$ và $p + 4$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2$ thì $p + 2 = 4$ là hợp số (loại).

Nếu $p = 3$ thì $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$ đều là số nguyên tố. Thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $p > 3$ thì $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ chia hết cho 3.

Mà $p > 3$ nên $p + 2$ là hợp số (loại).

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ chia hết cho 3.

Mà $p > 3$ nên $p + 4$ là hợp số (loại).

Vậy $p = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố p sao cho $2p + 1$ và $4p + 1$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2 \Rightarrow 4p + 1 = 9 \Rightarrow p = 2$ không là số nguyên tố không thỏa mãn.

Với $p = 3$ thì $2p + 1 = 7$ và $4p + 1 = 13$ là số nguyên tố và là số nguyên tố. Thỏa mãn.

Với $p > 3$ thì vì p là số nguyên tố nên $p \not\equiv 3$. Ta có 2 trường hợp:

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow 2p + 1 = 6k + 3 \geq 3$. Mà $6k + 3 > 3 \Rightarrow 2p + 1$ không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow 4p + 1 = 12k + 9 \geq 3$. Mà $12k + 9 > 3 \Rightarrow 4p + 1$ không là số nguyên tố.

Vậy $p=3$ là giá trị cần tìm.

Dạng 4. Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường năm 2021 - 2022)

Lời giải

Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện Quảng Trạch năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n+1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Gọi d là ước chung lớn nhất của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n+1$. Khi đó $\frac{n(n+1)}{2} : d$ và $2n+1 : d$.

Vì $\frac{n(n+1)}{2} : d \Rightarrow n(n+1) : d \Rightarrow n : d$ hoặc $(n+1) : d$.

+ Nếu $n : d \Rightarrow 2n : d$, kết hợp với $2n+1 : d$ ta có $1 : d \Rightarrow d=1$.

+ Nếu $(n+1) : d \Rightarrow 2(n+1) : d \Rightarrow 2n+2 : d$, kết hợp với $2n+1 : d$ ta có $1 : d \Rightarrow d=1$.

Trong mọi trường hợp ta đều có $d=1$. Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n+1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>