

ĐỀ 33

Câu 1 (4.0 điểm): Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} & (1) \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} & (2) \end{cases}$$

Câu 2 (2.0 điểm): Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^n$ ($x \neq 0$) biết $720(C_7^7 + C_8^7 + \dots C_n^7) = \frac{1}{4032} A_{n+1}^{10}$

Câu 3 (5.0 điểm):

a. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x - 5 & \text{khi } x < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

Tìm m để hàm số $y = f(|x|) - m + 2$ có đúng ba điểm cực trị.

b. Cho hàm số $f(x) = 2x^5 + 5x^3 - 2m$. Tìm giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[5]{f(x) + m}) = x^5 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$.

Câu 4 (5.0 điểm): Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = b$, $SA = SB = SC = SD = c$. K là hình chiếu vuông góc của B xuống AC .

a. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SA và BK .

b. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AK và CD . Chứng minh: Các đường thẳng BM và MN vuông góc nhau.

Câu 5 (4 điểm) :

a. Cho hình thoi $ABCD$ có $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2a$. Gọi H là trung điểm AB . Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S thay đổi khác H . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{4}BC$. Tính theo a độ dài của SH để góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất.

b. Cho $x, y, z > 0$, thỏa mãn điều kiện $x \geq y \geq z$ và $32 - 3x^2 = z^2 = 16 - 4y^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx$.

-----/Hết/-----

ĐÁP ÁN

Câu 1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} & (1) \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} & (2) \end{cases}$$

• **Hướng dẫn giải:**

Điều kiện :
$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 \geq 0 \\ y^2 + 8y \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3(x-1) = (\sqrt{y+3})^3 - 3(\sqrt{y+3}) \quad (1')$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên tập $[1; +\infty)$

$$f'(t) = 3t^2 - 3 \geq 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên khoảng } (1; +\infty)$$

Khi đó : $(1') \Leftrightarrow f(x-1) = f(\sqrt{y+3}) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = y+3$ kết hợp với phương trình

(2), ta được :

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = y + 3 \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2 + 8y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = y & (1'') \\ 9(x-2) = y^2 + 8y & (2'') \end{cases}$$

Thế (1'') vào (2''), ta được :

$$\begin{aligned} 9x - 18 &= (x^2 - 2x - 2)^2 + 8(x^2 - 2x - 2) \\ \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 17x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x^3 - x^2 + 5x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x^3 - x^2 + 5x - 2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2(x-1) + 4x + (x-2) = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=1(Tm) \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất :
$$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Câu 2. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^n$ ($x \neq 0$) biết

$$720(C_7^7 + C_8^7 + \dots + C_n^7) = \frac{1}{4032} A_{n+1}^{10}.$$

Lời giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 9$.

$$\text{Ta có: } 720(C_7^7 + C_8^7 + \dots + C_n^7) = \frac{1}{4032} A_{n+1}^{10} \Leftrightarrow 720(C_8^8 + C_8^7 + C_9^7 + C_{10}^7 + \dots + C_n^7) = \frac{1}{4032} A_{n+1}^{10}$$

$$\Leftrightarrow 720(C_9^8 + C_9^7 + C_{10}^7 + \dots + C_n^7) = \frac{1}{4032} A_{n+1}^{10} \Leftrightarrow 720(C_{10}^8 + C_{10}^7 + \dots + C_n^7) = \frac{1}{4032} A_{n+1}^{10}$$

$$\Leftrightarrow 720C_{n+1}^8 = \frac{1}{4032} A_{n+1}^{10} \Leftrightarrow 720 \cdot \frac{(n+1)!}{8!(n-7)!} = \frac{1}{4032} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-9)!} \Leftrightarrow (n-7)(n-8) = 72 \Leftrightarrow n = 16.$$

Khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{16}$ có số hạng tổng quát là $C_{16}^k x^{16-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = (-1)^k C_{16}^k x^{16-3k} \quad (k \in \mathbb{N}, k \leq 16)$

Hệ số của x^4 ứng với k thỏa $16-3k=4 \Leftrightarrow k=4$.

Vậy hệ số cần tìm là $(-1)^4 C_{16}^4 = 1820$.

Câu 3.

a. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x - 5 & \text{khi } x < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

Tìm m để hàm số $y = f |x| - m + 2$ có đúng ba điểm cực trị.

Lời giải

Ta có bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-5	4	$-\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 3$

Suy ra hàm số $y = f(x - m + 2) = f(x - (m - 2))$ có hai điểm cực trị là $x = m - 2$ và $x = m + 1$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x - (m - 2))$

x	$-\infty$	$m-2$	$m+1$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	$ $	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-5		4		$-\infty$

Từ bảng biến thiên để hàm số $y = f|x| - m + 2$ có đúng 3 điểm cực trị thì

$$m-2 \leq 0 < m+1 \Leftrightarrow -1 < m \leq 2.$$

b. Cho hàm số $f(x) = 2x^5 + 5x^3 - 2m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[5]{f(x)+m}\right) = x^5 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[5]{f(x)+m} \Leftrightarrow t^5 = f(x)+m \Leftrightarrow f(x) = t^5 - m \quad (1).$

Ta có $f(\sqrt[5]{f(x)+m}) = x^5 - m$, suy ra $f(t) = x^5 - m \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có $f(x) - f(t) = t^5 - x^5 \Leftrightarrow f(x) + x^5 = f(t) + t^5 \Leftrightarrow 3x^5 + 5x^3 = 3t^5 + 5t^3 \quad (3).$

Xét hàm số $g(u) = 3u^5 + 5u^3 \Rightarrow g'(u) = 15u^4 + 15u^2 \geq 0 \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t$. Thay vào (1) ta được $f(x) = x^5 - m \Rightarrow x^5 + 5x^3 = m \quad (4).$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 5x^3$ trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có $h'(x) = 5x^4 + 15x^2 \geq 0 \forall x \in [1; 2] \Rightarrow h(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Vậy ta có $\min_{[1;2]} h(x) = h(1) = 6$ và $\max_{[1;2]} h(x) = h(2) = 72$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[1; 2] \Leftrightarrow$ Phương trình (4) có nghiệm trên $[1; 2]$.

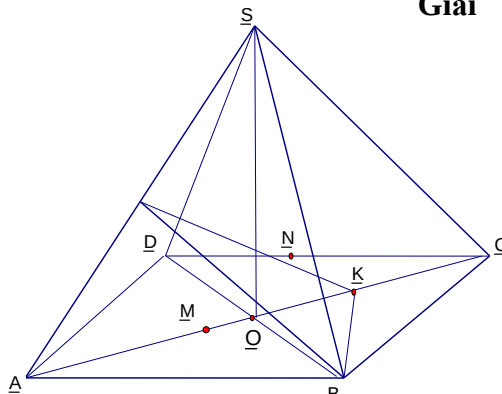
$\Leftrightarrow \min_{[1;2]} h(x) \leq m \leq \max_{[1;2]} h(x) \Leftrightarrow 6 \leq m \leq 72$. Vậy có 67 giá trị nguyên của m .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = b$, $SA = SB = SC = SD = c$. K là hình chiếu vuông góc của B xuống AC .

a/ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SA và BK .

b/ Gọi M , N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AK và CD . Chứng minh: Các đường thẳng BM và MN vuông góc nhau.

Giải



a) + Theo giả thiết ta được: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

Mà $BK \subset (SAC)$ và $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp SA$.

+ Gọi H là hình chiếu của K xuống SA

$\Rightarrow HK \perp SA$ và $HK \perp BK$ (vì $HK \subset (SAC)$)

$\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của SA và BK .

Suy ra được: $BH \perp SA$ và $\triangle HBK$ vuông tại K .

+ Do $\triangle ABC$ vuông đỉnh A nên: $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BK^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

+ ΔSAB cân đỉnh S , BH là đường cao nên $HB = \frac{SI \cdot AB}{SA} = \frac{\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}} \cdot a}{c}$

+ Do ΔHBK vuông tại K nên:

$$HK^2 = HB^2 - BK^2 = \frac{(4c^2 - a^2)a^2}{4c^2} - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{HK}^2 = \frac{(4c^2 - a^2 - b^2)a^4}{4c^2(a^2 + b^2)} \Rightarrow \text{HK} = \frac{a^2}{2c} \sqrt{\frac{(4c^2 - a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)}}$$

b) $+ 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}$ (vì M là trung điểm của AK)

$$+ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KB}) + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$+ \overrightarrow{\text{MN}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{KB}} + \overrightarrow{\text{BC}}.$$

+ Do đó:

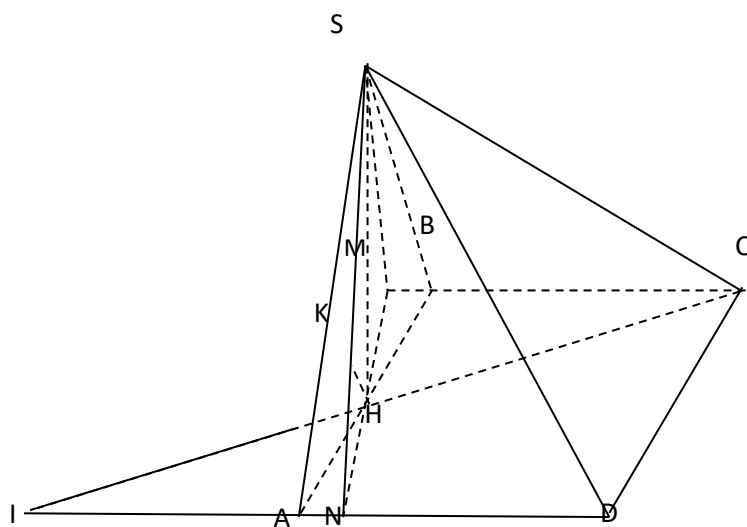
$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}).(\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK} - 2.\overrightarrow{BC})} \\ &= \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BC})} = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CK})} = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{CK} = 0 \end{aligned}$$

Vậy: $BK \perp MN$.

Câu 5.

a. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AB = 2a$. Gọi H là trung điểm AB . Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S thay đổi khác H . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{4}BC$. Tính theo a độ dài của SH để góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất.

Giải



Gọi φ là góc giữa SC và (SAD) ; K là hình chiếu vuông góc của H lên SN ; I là giao của HC với AD .
Lấy E đối xứng với I qua K .

Vì $AD \perp (SMN) \Rightarrow AD \perp HK$. Kết hợp với $HK \perp SN \Rightarrow KH \perp (SAD)$.

Mà HK là đường trung bình của tam giác ICE nên $HK \parallel CE$.

Suy ra $CE \perp (SAD)$ tại E . Suy ra $\triangle SEC$ vuông tại E và SE là hình chiếu của SC trên (SAD) . Ta có $\varphi = CSE$.

Đặt $x = SH (x > 0)$. Tam giác SHN vuông tại H và HK là đường cao nên

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{SN} = \frac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}} \Rightarrow CE = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}.$$

$$CH^2 = CM^2 + MC^2 = \frac{25a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = 7a^2$$

Tam giác SHC vuông tại H nên $SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = \sqrt{x^2 + 7a^2}$.

$$\sin \varphi = \frac{EC}{SC} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2 + 3a^2)(x^2 + 7a^2)}} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^4 + 21a^4) + 31a^2x^2}}.$$

$$\Rightarrow \sin \varphi \leq \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4\sqrt{21}a^2x^2 + 31a^2x^2}} \Rightarrow \sin \varphi \leq \sqrt{\frac{12}{4\sqrt{21} + 31}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \sqrt[4]{\frac{21}{4}} \cdot a$.

b. Cho $x, y, z > 0$, thỏa mãn điều kiện $x \geq y \geq z$ và $32 - 3x^2 = z^2 = 16 - 4y^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $y^2 = \frac{16 - z^2}{4}; x^2 = \frac{32 - z^2}{3}$.

Do $y \geq z > 0 \Rightarrow y^2 \geq z^2 \Rightarrow \frac{16 - z^2}{4} \geq z^2 \Rightarrow 5z^2 \leq 16 \Rightarrow 0 < z \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$ (1).

Ta có: $x^2 - 3y^2 = \frac{32 - z^2}{3} - \frac{48 - 3z^2}{4} = \frac{5z^2 - 16}{12}$. (2).

Do $5z^2 \leq 16$, nên từ (2) suy ra: $x^2 - 3y^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3y^2 \Rightarrow x \leq y\sqrt{3}$ (do $x > 0, y > 0$) $\Rightarrow xy \leq y^2\sqrt{3}$, (3)

Ta có: $xz = \sqrt{3} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} z \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x^2}{3} + z^2 \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (y^2 + z^2)$, (4) $yz \leq \frac{1}{2} (y^2 + z^2)$, (5).

Từ (3), (4), (5) ta có: $P \leq \sqrt{3}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \Rightarrow P \leq \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) y^2 + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} z^2$. (6).

Do $y^2 = \frac{16 - z^2}{4}$, nên từ (6) ta có: $P \leq \frac{3\sqrt{3} + 1}{2} \left(\frac{16 - z^2}{4} \right) + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} z^2 \Rightarrow P \leq 2(3\sqrt{3} + 1) + \frac{3 + \sqrt{3}}{8} z^2$, (7).

Do (1), nên từ (7) ta có: $P \leq 2(3\sqrt{3} + 1) + \frac{3 + \sqrt{3}}{8} \cdot \frac{16}{5} \Rightarrow P \leq \frac{32\sqrt{3} + 16}{5}$. (8)

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = z \\ \frac{x}{\sqrt{3}} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = z = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}. \text{ Suy ra } a + b = 37.$$