ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

==============================

Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng
Đinh Công Hướng, Nguyễn Đăng Phất
Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thủy Thanh

BIẾN PHỨC
ĐỊNH LÝ VÀ ÁP DỤNG

HÀ NỘI 2009

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

==============================

Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng
Đinh Công Hướng, Nguyễn Đăng Phất
Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thủy Thanh

BIẾN PHỨC
ĐỊNH LÝ VÀ ÁP DỤNG

HÀ NỘI 2009

Mục lục

Lời nói đầu

Chuyên đề "Biến phức, định lý và áp dụng" đóng vai trò như là một công cụ đắc lực nhằm giải quyết hiệu quả nhiều bài toán của hình học, giải tích, đại số, số học và toán tổ hợp. Ngoài ra, các tính chất cơ bản của số phức và hàm biến phức còn được sử dụng nhiều trong toán hiện đại, các mô hình toán ứng dụng, ...

Trong các kỳ thi Olympic toán sinh viên quốc tế và quốc gia, thì các bài toán liên quan đến *biến phức* thường được đề cập dưới nhiều dạng phong phú thông qua các đặc trưng và các biến đổi khác nhau của phương pháp giải, vừa mang tính tổng hợp cao vừa mang tính đặc thù sâu sắc.

Chương trình toán học ở bậc Trung học phổ thông của hầu hết các nước đều có phần kiến thức số phức. Ở nước ta, sau nhiều lần cải cách, nội dung số phức cuối cùng cũng đã được đưa vào chương trình Giải tích 12, tuy nhiên còn rất đơn giản. Vì nhiều lý do khác nhau, rất nhiều học sinh, thậm chí là học sinh khá, giỏi sau khi học xong phần số phức cũng chỉ hiểu một cách rất đơn sơ: sử dụng số phức, có thể giải được mọi phương trình bậc hai, tính một vài tổng đặc biệt, ...

Việc sử dụng số phức và biến phức trong nghiên cứu, khảo sát hình học (phẳng và không gian) tỏ ra có nhiều ưu việt, nhất là trong việc xem xét các vấn đề liên quan đến các phép biến hình, quỹ tích và các dạng miền bảo giác.

Nhìn chung, hiện nay, chuyên đề *số phức và biến phức* (cho bậc trung học phổ thông và đại học) đã được trình bày ở dạng giáo trình, trình bày lý thuyết cơ bản và có đề cập đến các áp dụng trực tiếp theo cách phân loại phương pháp và theo đặc thù cụ thể của các dạng ví dụ minh họa.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng nghiệp vụ sau đại học cho đội ngũ giáo viên, các học viên cao học, nghiên cứu sinh chuyên ngành Giải tích, Phương trình vi phân và tích phân, Phương pháp toán sơ cấp và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề số phức, biến phức và áp dụng, chúng tôi viết cuốn chuyên đề nhỏ này nhằm trình bày đầy đủ các kiến thức tổng quan, các kỹ thuật cơ bản về phương pháp sử dụng số phức và biến phức để tiếp cận các dạng toán khác nhau của hình học, số học, toán rời rạc và các lĩnh vực liên quan.

Đây là chuyên đề bồi dưỡng nghiệp vụ sau đại học mà các tác giả đã giảng dạy cho các lớp cao học, cho đội tuyển thi olympíc toán sinh viên quốc gia và quốc tế và là nội dung bồi dưỡng giáo viên các trường đại học, cao đẳng và trường chuyên trong cả nước từ nhiều năm nay.

Trong tài liệu này, chúng tôi đã sử dụng một số nội dung về lý thuyết cũng như bài tập mang tính hệ thống đã được các Thạc sĩ và học viên cao học thực hiện theo một hệ thống lôgíc nhất định dưới dạng các chuyên đề nghiệp vụ bậc sau đại học. Những dạng bài tập khác là một số đề thi của các kì thi học sinh giỏi và các bài toán trong các tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Kvant, Mathematica, các sách giáo khoa, chuyên đề và chuyên khảo, ... hiện hành ở trong nước.

Cuốn sách được chia thành 5 chương.

Chương 1. Số phức và biến phức, lịch sử và các dạng biểu diễn

Chương 2. Tính toán trên số phức và biến phức

Chương 3. Một số ứng dụng của số phức trong đại số

Chương 4. Số phức trong các bài toán số học và tổ hợp

Chương 5. Số phức và ứng dụng trong hình học

Chương 6. Số phức và lời giải của phương trình sai phân

Các tác giả xin chân thành cảm ơn lãnh đạo Bộ Giáo Dục và Đào tạo, trường ĐHKHTN, ĐHQGHN đã ủng hộ và động viên để các trường hè bồi dưỡng nâng cao kiến thức chuyên môn nghiệp vụ sau đại học các năm từ 2002 đến 2009 đã thành công tốt đẹp.

Cảm ơn các giáo viên từ 64 tỉnh thành trong cả nước đã nghe giảng, trao đổi semina và đọc bản thảo, đã gửi nhiều ý kiến đóng góp quan trọng cho nội dung cũng như cách trình bày thứ tự các chuyên đề.

Cuốn sách được hoàn thành với sự giúp đỡ nhiệt tình về mặt nội dung của các thành viên trong semina liên trường-viện Giải tích - Đại số của Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN.

Các tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới đồng nghiệp và độc giả có ý kiến đóng góp để cuốn sách chuyên đề này được hoàn thiện.

Hà Nội ngày 02 tháng 06 năm 2009

Các tác giả

Chương 1

Số phức, biến phức lịch sử và các dạng biểu diễn

1.1 Lịch sử hình thành khái niệm số phức

Lịch sử số phức bắt đầu từ thế kỷ XVI. Đó là thời kỳ Phục hưng của toán học châu Âu sau đêm dài trung cổ. Các đại lượng ảo[1]

$$\sqrt{-1},\ \ b\sqrt{-1},\ \ a+b\sqrt{-1}$$

xuất hiện đầu tiên từ thế kỷ XVI trong các công trình của các nhà toán học Italy "Nghệ thuật vĩ đại hay là về các quy tắc của đại số" (1545) của G.Cardano (1501 - 1576) và "Đại số" (1572) của R.Bombelli (1530 - 1572). Nhà toán học Đức Felix Klein (1849 - 1925) đã đánh giá công trình của G.Cardano như sau: *"tác phẩm quý giá đến tột đỉnh này đã chứa đựng những mầm mống của đại số hiện đại và nó vượt xa tầm của toán học thời cổ đại".*

Khi giải phương trình bậc hai Cardano và Bombelli đã đưa vào xét kí hiệu $\sqrt{-1}$ là lời giải hình thức của phương trình $x^2+1=0$, xét biểu thức $b\sqrt{-1}$ là nghiệm hình thức của phương trình $x^2+b^2=0$. Khi đó biểu thức tổng quát hơn dạng

$$(x-a)^2+b^2 \neq 0$$

[1]Tên gọi "ảo" là dịch từ tiếng Pháp "imaginaire" do R.Descates đề xuất năm 1637.

có thể xem là nghiệm hình thức của phương trình $(x-a)^2+b^2=0$. Về sau biểu thức dạng

$$a+b\sqrt{-1},\;\; b\neq 0$$

xuất hiện trong quá trình giải phương trình bậc hai và bậc ba (công thức Cardano) được gọi là đại lượng "ảo" và sau đó được Gauss gọi là số phức[2] và thường được kí hiệu là $a+bi$, trong đó kí hiệu

$$i:=\sqrt{-1}$$

được L.Euler[3] đưa vào 1777 gọi là đơn vị "ảo".

Quá trình thừa nhận số phức như một công cụ quý giá của toán học đã diễn ra rất chậm chạp. Ngay tên gọi và kí hiệu $i:=\sqrt{-1}$ là đơn vị "ảo" cũng đã gây nên nhiều nỗi băn khoăn, thắc mắc từ đó dẫn đến khủng hoảng niềm tin vì nó không có gì chung với số - một công cụ của phép đếm, mặc dù người ta vẫn xem đó là một kí hiệu trừu tượng thoả mãn định nghĩa

$$i^2=-1.$$

Sự khủng hoảng niềm tin càng trở nên sâu sắc hơn bởi việc chuyển một cách thiếu cân nhắc và thiếu thận trọng một số quy tắc của đại số thông thường cho các số phức đã sản sinh ra những nghịch lí khó chịu. Chẳng hạn như nghịch lí sau đây: vì $i=\sqrt{-1}$ nên $i^2=-1$, nhưng đồng thời bằng cách sử dụng các quy tắc thông thường của phép toán khai căn bậc hai lại thu được

$$i^2=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1.$$

Hóa ra $-1=1$!

Ta nhấn mạnh lại rằng hệ thức

$$i^2=-1$$

[2]Thuật ngữ "số phức" là do nhà toán học Pháp N.Carnot (1753-1823) đưa vào đầu tiên (1803)

[3]L. Euler (1707-1783) là nhà toán học Thụy sĩ

là định nghĩa số mới i cho phép ta đưa vào xét số phức. Điều đó có nghĩa rằng hệ thức đó không thể chứng minh, nó chỉ là quy ước.

Tuy vậy, cũng có người muốn chứng minh hệ thức đó. Trong cuốn sách "Phương pháp toạ độ " của mình, Viện sỹ L.S. Pointriagin đã mô tả lại chứng minh đó như sau:

Đầu tiên người ta lấy nửa đường tròn với đường kính AB. Từ điểm R tuỳ ý của nửa đường tròn hạ đường vuông góc RS. Theo một định lí của hình học sơ cấp, độ dài đường vuông góc RS là trung bình nhân giữa các độ dài của các đoạn thẳng AS và SB. Vì nói đến độ dài nên sẽ không sai sót lớn khi nói rằng bình phương đoạn thẳng RS bằng tích các đoạn thẳng AS và BS. Bây giờ, trở về với mặt phẳng phức. kí hiệu điểm -1 là A ; điểm $+1$ là B và điểm i là R. Khi đó S sẽ là điểm 0. Tác giả của phép chứng minh đã lập luận như sau:

Đoạn thẳng RS là i, đoạn thẳng AS là -1 và SB là $+1$. Như vậy, theo định lí vừa nhắc lại ở trên ta có

$$i^2 = (-1)(+1) = -1.$$

Thật đáng tiếc là phép chứng minh kỳ lạ này vẫn được viết trong sách và giảng dạy ở một số trường phổ thông trước thế chiến thứ II.

Lịch sử toán học cũng ghi lại rằng Cardano cũng đã nhắc đến các nghiệm phức nhưng lại gọi chúng là các nghiệm "nguỵ biện". Chẳng hạn, khi giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$

Cardano đã tìm được nghiệm $5 + \sqrt{-5}$ và $5 + \sqrt{-5}$ và ông đã gọi nghiệm này là "âm thuần tuý" và thậm chí còn gọi là "nghiệm âm nguỵ biện".

Có lẽ tên gọi "ảo" là di sản vĩnh cửu của "một thời ngây thơ đáng trân trọng của số học".

Thậm chí đối với nhiều nhà bác học lớn thế kỷ XVIII bản chất đại số và bản chất hình học của các đại lượng ảo không được hình dung một cách rõ ràng mà còn đầy bí ẩn. Chẳng hạn, lịch sử cũng ghi lại rằng I.Newton đã không thừa nhận các đại lượng ảo và không xem các đại lượng ảo thuộc vào các khái niệm số, còn G.Leibniz thì thốt lên rằng: "Các đại lượng ảo - đó là nơi ẩn náu đẹp đẽ huyền diệu đối với tinh thần của đấng tối cao, đó dường như một giống lưỡng cư sống ở một chốn nào đấy giữa cái có thật và không có thật".

Người đầu tiên nhìn thấy lợi ích do đưa số phức vào toán học mang lại chính là nhà toán học Italy R. Bombelli. Trong cuốn "Đại số" (1572) ông đã định nghĩa các phép tính số học trên các đại lượng ảo và do đó ông đã sáng tạo nên lí thuyết các số "ảo".

Thuật ngữ số phức được dùng đầu tiên bởi K.Gauss[4] (năm 1831). Vào thế kỷ XVII - XVIII nhiều nhà toán học khác cũng đã nghiên cứu các tính chất của đại lượng ảo (số phức!) và khảo sát các ứng dụng của chúng. Chẳng hạn L.Euler mở rộng khái niệm logarit cho số phức bất kì (1738), còn A.Moivre[5] nghiên cứu và giải bài toán căn bậc tự nhiên đối với số phức (1736).

Sự nghi ngờ đối với số ảo (số phức!) chỉ tiêu tan khi nhà toán học người Nauy là C.Wessel đưa ra sự minh hoạ hình học về số phức và các phép toán trên chúng trong công trình công bố năm 1799. Đôi khi phép biểu diễn minh hoạ số phức cũng được gọi là "sơ đồ Argand" để ghi nhận công lao của nhà toán học Thuỵ Sỹ R.Argand - người thu được kết quả như của Wessel một cách độc lập.

Lí thuyết thuần tuý số học đối với các số phức với tư cách là các cặp số thực có thứ tự $(a; b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ được xây dựng bởi nhà toán học Ailen là W.Hamilton (1837). Ở đây đơn vị "ảo" i chỉ đơn giản là một cặp số thực có thứ tự - cặp $(0; 1)$, tức là đơn vị "ảo" được lí giải một cách hiện thực.

[4]C.Gauss (1777-1855) là nhà toán học Đức

[5]A.Moivre (1667-1754) là nhà toán học Anh

Cho đến thế kỷ XIX, Gauss mới thành công trong việc luận chứng một cách vững chắc khái niệm số phức. Tên tuổi của Gauss cũng gắn liền với phép chứng minh chính xác đầu tiên đối với Định lí cơ bản của Đại số khẳng định rằng trong trường số phức $\mathbb{C}$ mọi phương trình đa thức đều có nghiệm.

Bản chất đại số của số phức thể hiện ở chỗ số phức là phần tử của trường mở rộng (đại số) $\mathbb{C}$ của trường số thực $\mathbb{R}$ thu được bằng phép ghép đại số cho $\mathbb{R}$ nghiệm i của phương trình

$$x^2 + 1 = 0.$$

Với định lí cơ bản của đại số, Gauss đã chứng minh được trường $\mathbb{C}$ trở thành trường đóng đại số. Điều đó có nghĩa là khi xét các nghiệm của phương trình đại số trong trường này ta không thu được thêm số mới. Đương nhiên trường số thực $\mathbb{R}$ (và do đó cả trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$) không có tính chất đóng đại số. Chẳng hạn, phương trình với hệ số thực có thể không có nghiệm thực.

Nhìn lại hơn 2500 năm từ thời Pythagor đến giờ, con đường phát triển khái niệm về số có thể tóm tắt bởi $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ với các bao hàm thức:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Bằng các kết quả sâu sắc trong các công trình của các nhà toán học K.Weierstrass, G.Frobenius, B.Peirce người ta mới nhận ra rằng mọi cố gắng mở rộng tập số phức theo con đường trên đều không có kết quả khả quan. K.Weierstrass đã chứng minh tập hợp số phức $\mathbb{C}$ không thể mở rộng thành tập hợp rộng hơn bằng cách ghép thêm số mới để trong tập hợp số rộng hơn thu được vẫn bảo toàn mọi phép tính và mọi quy luật của các phép toán đã đúng trong tập hợp số phức. Như vậy, các tập hợp số mới chứa tập số phức chỉ có thể thu được bằng việc từ bỏ một số tính chất thông thường nào đó của các số phức. Chẳng hạn nhà toán học Ailen là W.Hamilton (1805 - 1865) đã bứt phá ra khỏi phạm vi số phức và thu được các quatenion là trường hợp đơn giản nhất của hệ siêu

phức nhưng đành phải từ bỏ tính chất giao hoán của phép nhân. Hệ thống các quatenion là hệ không giao hoán và các quatenion thể hiện được trong không gian bốn chiều $\mathbb{R}^4$.
Dạng tổng quát của quatenion là

$$a + bi + cj + dk;\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

trong đó 1; i; j; k được Hamilton chỉ ra là các đơn vị siêu phức và được Hamilton gọi là các quatenion. Ở đây

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

và chính Hamilton đã lập ra bảng nhân sau đây:

$$\begin{array}{cccc}
x & i & j & k \\
i & -1 & k & -j \\
j & -k & -1 & i \\
k & j & -i & -1
\end{array}$$

Để dễ nhớ bảng nhân này ta lưu ý hình vẽ bổ trợ sau. Ta biểu diễn các quatenion i, j, k bởi ba điểm trên đường tròn theo thứ tự cùng chiều kim đồng hồ.

Tích của hai số bất kì trong bộ ba i, j, k bằng số thứ ba nếu phép vòng quanh từ thừa số thứ nhất đến thừa số thứ hai là theo chiều kim đồng hồ và bằng số thứ ba và với dấu trừ nếu phép vòng quanh đó ngược chiều kim đồng hồ. Rõ ràng là phép nhân không có tính chất giao hoán.
Đối với toán học ngày nay các số phức và siêu phức là những chỉnh thể hoàn toàn tự nhiên, nó không "ảo" hơn chút nào so với chính các số thực.
Nhìn lại lịch sử lâu dài của sự phát triển khái niệm số ta thấy rằng cứ mỗi lần khi đưa vào những số mới các nhà toán học cũng đồng thời đưa vào các quy tắc thực hiện các phép toán trên chúng. Đồng thời với điều đó các nhà toán học luôn luôn cố gắng bảo toàn các quy luật số học cơ bản (luật giao hoán của

phép cộng và phép nhân, luật kết hợp và luật phân bố, luật sắp xếp tuyến tính của tập hợp số). Tuy nhiên sự bảo toàn đó không phải khi nào cũng thực hiện được. Ví như khi xây dựng trường số phức người ta đã không bảo toàn được luật sắp xếp tuyến tính vốn có trong trường số thực, hay khi xây dựng tập hợp các số quatenion ta cũng không bảo toàn được luật giao hoán của phép nhân. Tổng kết lịch sử toàn bộ quá trình phát triển khái niệm số, nhà toán học Đức L.Kronecker (1823 - 1891) đã viết:

"Thượng đế đã tạo ra số tự nhiên, còn tất cả các loại số còn lại đều là công trình sáng tạo của con người".

Có thể nói rằng với khẳng định bất hủ này L.Kronecker đã xác định nền móng vững chắc cho toà lâu đài toán học tráng lệ mà con người đang sở hữu.

1.2 Các dạng biểu diễn số phức

1.2.1 Biểu diễn số phức dưới dạng cặp

Mỗi số phức $a + bi$ hoàn toàn được xác định bởi việc cho hai số thực a và b thông thường $(a, b \in \mathbb{R})$ gọi là các thành phần của chúng.

Người đầu tiên cố gắng nêu rõ đặc trưng quy luật của các phép tính bằng ngôn ngữ các thành phần không cần nhắc đến kí hiệu "nghi vấn" i là Hamilton. Cụ thể, ông đã diễn tả mỗi số phức bởi một cặp số thực (có thứ tự) thông thường. Vì tập hợp số thực là tập hợp con của tập hợp số phức $\mathbb{C}$ nên khi xác định các phép tính số học cơ bản trên các số phức ta cần đòi hỏi rằng khi áp dụng cho các số thực các phép toán đó đưa lại kết quả như kết quả thu được trong số học các số thực. Mặt khác, nếu ta mong muốn các số phức có những ứng dụng trong các vấn đề của giải tích thì ta cần đòi hỏi rằng các phép toán cơ bản được đưa vào đó phải thoả mãn các tiên đề thông thường của số học các số thực.

Định nghĩa 1.1. *Một cặp số thực có thứ tự* $(a; b)$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, *được gọi* *là một số phức nếu trên tập hợp các cặp đó quan hệ bằng nhau, phép cộng và phép nhân được đưa vào theo các định nghĩa (tiên đề) sau đây:*

i) Quan hệ đồng nhất trong tập số phức: $(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$
Chú ý rằng đối với hai số phức bằng nhau $(a;b)$ và $(c;d)$ ta có thể viết

$(a;b) \equiv (c;d)$ (nếu muốn nhấn mạnh đây là quan hệ đồng nhất giữa hai cặp số thực sắp thứ tự) hoặc $(a;b) = (c;d)$ (nếu muốn nói rằng đây là quan hệ bằng nhau giữa hai số phức).

ii) Phép cộng trong tập số phức: $(a;b) + (c;d) := (a+c; b+d)$ và cặp $(a+c;b+d)$ được gọi là tổng của các cặp $(a;b)$ và $(c;d)$.

iii) Phép nhân trong tập số phức: $(a;b)(c;d) := (ac-bd; ad+bc)$ và cặp $(ac-bd;ad+bc)$ được gọi là tích của các cặp $(a;b)$ và $(c;d)$.

iv) Số thực trong tập số phức: Cặp $(a;0)$ được đồng nhất với số thực a, nghĩa là

$$(a;0) := a \text{ hay là } (a;0) \equiv a.$$

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Như vậy, mọi phần của định nghĩa số phức đều được phát biểu bằng ngôn ngữ số thực và các phép toán trên chúng.

Trong định nghĩa này ba tiên đề đầu thực chất là định nghĩa khái niệm bằng nhau, khái niệm tổng và khái niệm tích của các số phức. Do đó việc đối chiếu các tiên đề đó với nhau sẽ không dẫn đến bất cứ mâu thuẫn nào. Điều duy nhất có thể gây ra đôi chút lo ngại là tiên đề iv). Vấn đề là ở chỗ vốn dĩ các khái niệm bằng nhau, tổng và tích các số thực có ý nghĩa hoàn toàn xác định và do đó nếu các khái niệm này không tương thích với những khái niệm được đề cập đến trong các tiên đề i) - iii) khi xét các số thực với tư cách là các cặp dạng đặc biệt thì buộc phải loại trừ tiên đề iv). Do đó ta cần đối chiếu tiên đề iv) với các tiên đề i), ii) và iii).

1) i) - iv). Giả sử hai số thực a và b bằng nhau như những cặp dạng đặc biệt đồng nhất với chúng: $(a;0) = (b;0)$. Khi đó theo tiên đề i), ta có

$$(a;0) = (b;0) \Leftrightarrow a = b,$$

tức là chúng bằng nhau theo nghĩa thông thường.

2) ii) - iv). Theo tiên đề ii), tổng hai số thực a và c được xét như những cặp $(a;0)$ và $(c;0)$ là bằng cặp $(a+c; 0+0) = (a+c;0)$. Nhưng theo tiên đề iv) thì $(a+c;0) \equiv a+c$. Như vậy

$$(a;0) + (c;0) = (a+c; 0+0) = (a+c;0) \equiv a+c,$$

tức là đồng nhất bằng tổng $a+c$ theo nghĩa thông thường.

3) iii) - iv). Theo tiên đề iii), tích các số thực a và b được xét như những cặp $(a;0)$ và $(c;0)$ là bằng cặp

$$(ac - 0\cdot 0; a\cdot 0 + 0\cdot c) = (ac;0)$$

và theo tiên đề iv) ta có $(ac;0) \equiv ac$. Như vậy

$$(a;0)(c;0) = (ac;0) \equiv ac,$$

tức là đồng nhất bằng tích a với c theo nghĩa thông thường.
Như vậy tiên đề iv) tương thích với các tiên đề i), ii) và iii).

Ta cũng lưu ý các công thức sau đây được suy trực tiếp từ iii) và iv):

$$\lambda(a;b) = (\lambda a; \lambda b), \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, từ iv) và iii) ta có:

$$\lambda(a;b) = (\lambda;0)(a;b) = (\lambda a - 0\cdot b; \lambda b + 0\cdot a) = (\lambda a; \lambda b).$$

Nếu $\lambda = m \in \mathbb{N}$ thì theo ii) ta có

$$(a;b) + (a;b) = (2a;2b);$$

$$(2a; 2b) + (a; b) = (3a; 3b), \ldots$$

tức là $(ma; mb)$ là kết quả phép cộng liên tiếp m số hạng bằng $(a; b)$.
Điều đó phù hợp với biểu tượng thông thường là phép nhân với số tự nhiên tương ứng với phép cộng m số hạng bằng nhau. Dễ dàng thấy rằng các tiên đề ii) và iii) là tương thích với nhau và các quy luật thông thường của các phép tính thực hiện trên các số vẫn được bảo toàn khi chuyển sang số phức (đương nhiên phải cắt bỏ các quy luật có quan hệ tới tính chất sắp được tuyến tính).
Từ định nghĩa suy ra trong tập hợp $\mathbb{C}$ phép cộng và phép nhân có tính chất kết hợp và giao hoán ; phép nhân liên hệ với phép cộng theo luật phân bố ; phép cộng có phép tính ngược là phép trừ và do đó tồn tại phần tử 0 là cặp (0 ; 0) vì $(a; b) + (0; 0) = (a; b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.
Vai trò đơn vị trong tập hợp số phức $\mathbb{C}$ là cặp $(1; 0)$ vì theo tiên đề iii)

$$(a; b)(1; 0) = (a; b).$$

Hai số phức $z = (a; b)$ và $\bar{z} = (a; -b)$ được gọi là liên hợp với nhau. Ta có

$$z\bar{z} = (a; b)(a; -b) = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Từ tính chất này suy ra rằng với mọi $(a; b) \neq (0; 0)$ tồn tại cặp nghịch đảo $(a; b)^{-1}$, cụ thể là cặp

$$\frac{1}{a^2 + b^2}(a; -b) = \Big(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\Big).$$

Như vậy ta đã chứng minh rằng tập hợp các số phức $\mathbb{C}$ lập thành một trường. Trường đó có tính chất :

(a) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

(b) Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó là cặp (0 ; 1) và (0 ; -1).

Dưới dạng cặp các phép toán trên $\mathbb{C}$ được thực hiện theo các quy tắc

(i). $(a_1;b_1)+(a_2;b_2)=(a_1+a_2;b_1+b_2)$; $(a_1;b_1)-(a_2;b_2)=(a_1-a_2;b_1-b_2)$
;

(ii). $(a_1;b_1)(a_2;b_2)=(a_1a_2-b_1b_2;a_1b_2+a_2b_1)$;

(iii). $\dfrac{(a_1;b_1)}{(a_2;b_2)}=\left(\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2};\dfrac{a_1b_2-aq_2b_1}{a_2^2+b_2^2}\right)$, trong đó $(a_2;b_2)\neq(0;0)$.

1.2.2 Biểu diễn số phức dưới dạng đại số

Như vậy, ta đã định nghĩa và diễn đạt mọi quy tắc tính thực hiện trên các số phức bằng ngôn ngữ các thành phần tức là bằng ngôn ngữ các số thực. Điều này rất quan trọng vì với cách đó người ta không bị ám ảnh bởi "cái ảo"của kí hiệu i mang lại (mặc dù nó rất thực vì i là cặp (0 ; 1).)

Bây giờ ta trở về với cách viết thông thường (hay dưới dạng Descartes) đối với số phức. Rõ ràng là mọi số phức $(a;b)\in\mathbb{C}$ đều biểu diễn được dưới dạng

$$(a;b)=(a;0)+(0;b)=(a;0)+(b;0)(0;1)=a+bi,$$

trong đó cặp $(0;1)$ được kí hiệu bởi chữ i.

Từ tiên đề iii), suy rằng

$$i^2=(0;1)(0;1)=(0\cdot 0-1\cdot 1;\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1;0)=-1.$$

Như vậy ta đã trở về với cách viết thông thường đối với số phức $(a;b)$ dưới dạng $a+bi$ nhưng giờ đây đơn vị ảo i có ý nghĩa hoàn toàn hiện thực vì nó là một trong các cặp số thực mà các phép tính trên chúng được định nghĩa bởi các tiên đề i), ii), iii) và iv), đó chính là cặp $(0;1)$. Thậm chí, có thể xem nhân tử i bên cạnh số thực b như một dấu hiệu chỉ rõ số thực b là thành phần thứ hai của số phức $(a;b)$.

Thành phần thứ nhất của số phức $z=a+bi$ được gọi là phần thực của số đó và được kí hiệu Re z, thành phần thứ hai được gọi là phần ảo và được kí hiệu là Im z. Cần nhấn mạnh rằng phần ảo cũng như phần thực của số phức là những số thực.

Biểu thức $(a;b) = a + bi$ được gọi là dạng đại số hay dạng Descartes của số phức.

Hệ thức $(a;b) = a + bi$ chứng tỏ rằng giữa các cặp số thực có thứ tự $(a;b)$ và các biểu thức dạng $a + bi$ tồn tại phép tương ứng đơn trị một - một và phép tương ứng đó được mô tả bởi hệ thức vừa nêu. Nhờ phép tương ứng đó, thay vì xét các cặp ta có thể xét các biểu thức $a + bi$ biểu diễn chúng.

Các phép toán (i)-(iii) đối với các số phức viết dưới dạng đại số $z_1 := a_1 + b_1 i$; $z_2 := a_2 + b_2 i$ được định nghĩa như sau

(i*) $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$

$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$

(ii*) $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$

(iii*) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_2^2} + \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_2^2} i$, trong đó $a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$

Nếu $z = a + bi$ thì số phức liên hợp $\bar{z} = a - bi$. Do đó

$$
\begin{aligned}
z + \bar{z} &= 2 \text{ Re } z,\\
z - \bar{z} &= 2 \text{ Im } z,\\
z \cdot \bar{z} &= |z|^2, \text{ trong đó } |z| = r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.
\end{aligned}
$$

Số $|z| = r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là môđun của số phức z. Đối với số phức $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ta luôn có

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.2.3 Biểu diễn hình học của số phức

Ta biết rằng giữa tập hợp mọi cặp số thực có thứ tự và tập hợp mọi điểm của mặt phẳng Euclide với các tọa độ Descartes vuông góc $\mathbb{R}^2$ có thể xác lập phép tương ứng đơn trị một-một. Để có điều đó mỗi cặp số thực có thứ tự $(a;b)$ cần được đặt tương ứng với điểm $M(a;b)$ có hoành độ $x = a$ và tung độ $y = b$.

Vì mỗi số phức được định nghĩa như là một cặp số thực có thứ tự nên mỗi số phức $(a; b) = a + bi$ có thể đặt tương ứng với điểm $M(a; b)$ và ngược lại, mỗi điểm $M(a; b)$ của mặt phẳng sẽ tương ứng với số phức $(a; b) = a + bi$. Đó là phép tương ứng đơn trị một-một.

Nhờ phép tương ứng

$$(a; b) \mapsto a + bi$$

ta xem các số phức như là một điểm của mặt phẳng tọa độ hay vectơ với điểm đầu tại gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm mút tại $M(a; b)$.

Định nghĩa 1.2. *Mặt phẳng tọa độ với phép tương ứng đơn trị một-một*

$$(a; b) \mapsto a + bi$$

được gọi là mặt phẳng phức hay mặt phẳng Gauss và cũng được kí hiệu là $\mathbb{C}$ *và* $z = a + bi$ *là một điểm của mặt phẳng đó.*

Một cách ngắn gọn, mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ mà các điểm của nó được đồng nhất với các phần tử của trường $\mathbb{C}$ được gọi là mặt phẳng phức.

Trục hoành của mặt phẳng tọa độ được gọi là trục thực (do các điểm của nó tương ứng với các số $(a; 0) \equiv a \in \mathbb{R}$) còn trục tung được gọi là trục ảo (do các điểm của nó tương ứng với các số thuần ảo $(0; b) = bi$).

Số phức $z = a + bi$ cũng có thể biểu diễn được bởi một vectơ đi từ gốc tọa độ với các hình chiếu a và b trên các trục tọa độ. Như vậy, vectơ $z = a + bi$ bằng bán kính vectơ của điểm z.

Với cách biểu diễn số phức dưới dạng vectơ đi từ gốc tọa độ, các phép cộng và trừ các số phức được thực hiện theo các quy tắc cộng và trừ các vectơ. Tuy nhiên phép nhân và phép chia cần thực hiện theo quy tắc (ii*) và (iii*) do trong đại số vectơ không có các quy tắc tương tự trực tiếp như vậy.

Thông thường, các thuật ngữ *"số phức"* ; *"vectơ "* ; *"điểm"* được xem là đồng nghĩa.

1.2.4 Biểu diễn số phức nhờ ma trận

Trong mục 1.1 và mục 1.2 , ta đã xây dựng trường số phức nhờ các cặp số thực có thứ tự $z = (a; b),\ \ a, b \in \mathbb{R}$. Ưu điểm lớn nhất của phương pháp này là nó "hóa giải" được cái phần thần bí do kí hiệu "nghi vấn" i mang lại.

Bên cạnh cách xây dựng đó, còn tồn tại nhiều cách xây dựng khác nữa. Sau đây ta sẽ trình bày cách xây dựng dựa trên phép cộng và nhân ma trận trên trường số thực.

Ta xét tập hợp các ma trận cấp hai dạng đặc biệt trên trường số thực

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

mà trên đó các phép toán cộng và nhân được thực hiện theo các quy tắc thông thường của đại số ma trận. Có thể chứng minh rằng tập hợp $\mathcal{M}$ lập thành một trường.

Tiếp đó, mỗi số phức $z = a + bi$ ta đặt tương ứng với ma trận

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Đó là ánh xạ tương ứng đơn trị một-một. Qua ánh xạ này toàn bộ trường số phức được ánh xạ lên tập hợp $\mathcal{M}$ các ma trận dạng (1.1). Ta có

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Từ (1.2) và (1.3) suy ra rằng ánh xạ đã xây dựng là đẳng cấu giữa $\mathbb{C}$ và $\mathcal{M}$ vì ma trận ở vế phải của (1.2) là tương ứng với các số phức

$$(a + c) + (b + d)i = (a + bi) + (c + di)$$

và ma trận ở vế phải của (1.3) là tương ứng với các số phức

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = (a + bi)(c + di).$$

Từ đó suy rằng tổng và tích hai số phức trong $\mathbb{C}$ tương ứng với tổng và tích các ảnh của chúng trong $\mathcal{M}$.

Đồng thời ta cũng thu được tập hợp $\mathcal{M}^0$ các ma trận cấp 2 dạng

$$\mathcal{M}^0 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$$

là đẳng cấu với tập hợp các số thực trong $\mathbb{R}$. Trong phép đẳng cấu này mỗi số thực a tương ứng với ma trận

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Từ đó có thể đồng nhất ma trận ; $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ với số thực a.

Nếu ta xét một ma trận tùy ý của $\mathcal{M}$ thì

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a + bj,$$

trong đó

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy rằng $j^2 = -1$. Thật vậy, ta có

$$j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Từ đó, ma trận j có vai trò như đơn vị ảo.

1.2.5 Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức

Bằng cách sử dụng tọa độ cực trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$:

(a) độ dài bán kính vectơ $r := |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(b) góc cực $\varphi = \text{ Arg }$ được gọi là acgumen của z,

ta thu được hệ thức

$$z = a + bi = r(cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Re} z = a = r\cos\varphi, \;\; \operatorname{Im} z = b = r\sin\varphi.$$

Biểu thức (1.4) được gọi là dạng lượng giác hay dạng cực của số phức $z = a+bi$. Argumen $\varphi = \operatorname{Arg} z$ là hàm thực đa trị của biến phức $z \neq 0$ và đối với z đã cho, các giá trị của hàm sai khác nhau một bội nguyên của 2π. Hàm acgumen không xác định tại $z = 0$. Thông thường người ta sử dụng giá trị chính của acgumen

$$\varphi = \arg z$$

xác định với điều kiện bổ sung

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

hoặc

$$0 \leq \arg z < 2\pi.$$

Để đơn giản cách viết các số phức ta đặt

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}.$$

dạng lượng giác (1.4) được biến đổi thành dạng mũ

$$z = re^{i\varphi}. \tag{1.5}$$

đó là *dạng số mũ* của số phức $z \neq 0$.

Các công thức (1.4) và (1.5) đặc biệt tiện lợi khi thực hiện phép nhân và chia các số phức.

Dễ dàng chứng minh rằng nếu $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ và $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ thì

1. $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$; ;
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i\varphi_1-\varphi_2)}, \;\; r_2 \neq 0.$

Phép nâng số phức $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ lên lũy thừa bậc n đối với số phức được thực hiện theo công thức Moivre.

$$z^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{1.6}$$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0; 1; \ldots ; n-1. \tag{1.7}$$

Công thức

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.8}$$

được gọi là công thức Moivre. Nếu $r = 1$ thì công thức Moivre có dạng đặc biệt

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{1.9}$$

Từ công thức (1.6) suy rằng căn bậc n của số phức có đúng n giá trị. Ta cũng cần lưu ý rằng khái niệm "giá trị số học" trong phép khai căn số phức không được đưa vào và không thể đưa khái niệm đó vào theo cách tự nhiên nào đó. Đến đây, quay lại tìm hiểu "trò chơi ngụy biện" trong nghịch lí đã nêu ở trên, ta thấy sai lầm chủ yếu đã phạm phải ở đó là việc chọn các giá trị của căn bậc hai của số phức.

Từ (1.6) và (1.8) và bằng cách thay φ bởi $-\varphi$ ta có

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}), \\ \sin\varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Các công thức (1.10) được gọi là *công thức Euler*.

1.2.6 Biểu diễn các số phức trên mặt cầu Riemann

Cùng với cách biểu diễn số phức như là vectơ hay điểm trên mặt phẳng còn có cách biểu diễn hình học khác nữa. Đó là biểu diễn số phức bởi điểm của mặt cầu gọi là mặt cầu Riemann.

Trong không gian Euclide ba chiều với hệ tọa độ Descartes vuông góc $(\xi;\eta;\zeta)$ ta xét mặt cầu với tâm tại điểm $\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$ với bán kính bằng $\dfrac{1}{2}$

$$S = \left\{(\xi;\eta;\zeta) : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

sao cho nó tiếp xúc với mặt phẳng z tại gốc tọa độ và trục thực của mặt phẳng z trùng với trục $\{\eta = 0; \zeta = 0\}$, còn trục ảo thì trùng với trục $\{\xi = 0; \zeta = 0\}$. Ta xét phép chiếu π với cực bắc tại điểm $P(0;0;1)$. Giả sử $z \in \mathbb{C}$ là điểm tùy ý. Nối điểm $z \in \mathbb{C}$ với cực bắc P bằng đoạn thẳng. đoạn thẳng này cắt mặt cầu S tại điểm $A(z)$. Và ngược lại, giả sử $A \in S$ là một điểm tùy ý của mặt cầu. Khi đó tia PA sẽ cắt mặt phẳng phức tại điểm z. Hiển nhiên rằng đó là một phép tương ứng đơn trị một-một.

Định nghĩa 1.3. *Phép tương ứng*

$$\pi : \mathbb{C} \ni z \mapsto A(z) \in S$$

như đã mô tả ở trên được gọi là phép chiếu nổi với cực tại điểm P. điểm $A(z) \in S$ được gọi là ảnh nổi hay là ảnh cầu của điểm z.

Định lý 1.1. *Trong phép chiếu nổi*

$$\pi : \mathbb{C} \ni z \mapsto A(z) \in S$$

điểm $x = x + iy \in \mathbb{C}$ sẽ tương ứng với điểm $A(z) \in S$ có tọa độ là

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}\,, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}\,, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\,\cdot \tag{1.11}$$

Công thức (1.11) được gọi là *công thức của phép chiếu nổi.*

Chứng minh. Thật vậy, vì ba điểm $P(0;0;1)$, $A(z) = (\xi;\eta;\zeta)$ và $z = (x;y;0)$ cùng nằm trên một đường thẳng nên các tọa độ của chúng phải thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}\,,$$

hay là

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}\,, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}\,, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}\,\cdot \tag{1.12}$$

Để ý rằng

$$|z|^2 = \frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2} \quad \text{và} \quad \xi^2+\eta^2+\Big(\zeta-\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}$$

ta thu được

$$|z|^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}\,,$$

và do đó $\zeta = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$. Thế giá trị ζ vào (1.12) ta tìm được

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}\,, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}\,\cdot$$

□

Hiển nhiên trong phép biến đổi π, điểm $P(0;0;1)$ không tương ứng với điểm z nào của mặt phẳng $\mathbb{C}$. Bây giờ ta xét số phức "lí tưởng" $z=\infty$ và "bổ sung" cho mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ bằng cách thêm cho nó điểm xa vô cùng duy nhất (gọi tắt là *điểm vô cùng*) tương ứng với số phức $z=\infty$.

Định nghĩa 1.4. *Tập hợp lập nên từ mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và điểm vô cùng (kí hiệu là ∞) được gọi là mặt phẳng phức mở rộng và kí hiệu là $\overline{\mathbb{C}}$.*

Như vậy $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ và $\overline{\mathbb{C}}$ không phải là một trường. Từ định lí 1.1 suy rằng phép chiếu nổi π xác lập sự tương ứng đơn trị một-một giữa các điểm của $\mathbb{C}$ và các điểm của $S\setminus\{P\}$.

Hiển nhiên khi $|z|\to\infty$ thì điểm $A(z)$ sẽ dần đến điểm $P(0;0;1)$. Thật vậy, từ tính đồng dạng của hai tam giác zOP và APO suy rằng

$$\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

và do đó $\overline{AP} \to 0$ khi $|z| \to \infty$.
Từ sự lí luận đó ta rút ra kết luận rằng phép chiếu nổi $\pi : \mathbb{C} \mapsto S \setminus \{P\}$ có thể thác triển vào $\overline{\mathbb{C}}$ thành

$$\pi^* : \overline{\mathbb{C}} \to S$$

bằng cách đặt

$$\pi^*\big|_{\mathbb{C}} = \pi, \quad z \in \mathbb{C}$$

và

$$\pi(\infty) = P(0; 0; 1).$$

Do đó, một cách tự nhiên ta có thể cho rằng điểm $z = \infty$ tương ứng với "cực bắc" P của mặt cầu S và mọi điểm trên mặt cầu S có thể xem như là mô tả điểm tương ứng của mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$. Phương pháp biểu diễn hình học các số phức như trên được gọi là *phương pháp biểu diễn cầu* của các số phức. Mặt cầu S, vì lí do đó, được gọi là *mặt cầu số phức* Riemann[6]. Tính ưu việt của mặt cầu Riemann là ở chỗ trên mặt cầu Riemann điểm vô cùng duy nhất của mặt phẳng phức được mô tả một cách khá trực quan. Sau này khi nghiên cứu một vấn đề nào đó nếu muốn xét cả điểm $z = \infty$ thì ta sẽ tiến hành các lập luận trên mặt cầu Riemann.

1.2.7 Khoảng cách trên $\mathbb{C}$

Tương ứng với hai phương pháp biểu diễn hình học số phức đã được mô tả, ta sẽ đưa vào trong $\mathbb{C}$ hai mêtric. Trong mêtric thứ nhất khoảng cách giữa hai điểm z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ được giả thiết bằng

$$d_{\mathbb{C}} = d_{\mathbb{C}}(z_1; z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

[6]B.Riemann (1826-1866) là nhà toán học Đức.

Mêtric này là *mêtric Euclide* thông thường trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Trong mêtric thứ hai (gọi là *mêtric cầu*) khoảng cách giữa hai điểm z_1 và $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ được hiểu là khoảng cách (trong không gian $\xi; \eta; \zeta$) giữa các ảnh cầu của chúng. Khoảng cách này được gọi là *khoảng cách cầu* hay *khoảng cách Jordan*[7] giữa hai điểm z_1 và $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$:

$$d_{\overline{\mathbb{C}}} \stackrel{def}{=} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2).$$

Định lý 1.2. *Giả sử $d_{\overline{\mathbb{C}}} = d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2)$ là khoảng cách cầu giữa các điểm $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó*

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{1/2} \cdot (1 + |z_2|^2)^{1/2}}, \tag{1.13}$$

nếu $z_2 = \infty$ thì

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} \tag{1.14}$$

và khoảng cách cầu thỏa mãn các tiên đề thông thường của một mêtric.

Chứng minh. 1. Thật vậy, từ công thức (1.11) ta có

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2) = [(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2]^{1/2}$$

$$= [\zeta_1 + \zeta_2 - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)]^{1/2}$$

$$= \Bigg\{ \frac{|z_1|^2}{1 + |z_1|^2|} + \frac{|z_2|^2}{1 + |z_2|^2} - 2\Big[\frac{x_1x_2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}$$

$$+ \frac{y_1y_2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} + \frac{|z_1|^2|z_2|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}\Big]\Bigg\}^{1/2}$$

$$= \frac{\{|z_1|^2(1 + |z_2)^2) + |z_2|^2(1 + |z_1|^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) - 2|z_1|^2|z_2|^2\}^{1/2}}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\,\sqrt{1 + |z_2|^2}}$$

$$= \frac{\big[|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2\big]^{1/2}}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\,\sqrt{1 + |z_2|^2}} = \frac{\big[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\big]^{1/2}}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\,\sqrt{1 + |z_2|^2}}$$

[7]C.Jordan (1838-1922) là nhà toán học Pháp.

$$= \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}\,.$$

Công thức (1.13) được chứng minh.

Trong trường hợp khi $z_2 = \infty$, ta có

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1;\infty) = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + (1-\zeta_1)^2} = \sqrt{1-\zeta_1} = \frac{1}{(1+|z+1|^2)^{1/2}}\,.$$

vì $z_2 = \infty$ nên $\zeta_2 = 1$.

Hiển nhiên rằng $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2) \geqslant 0$ và $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2) = 0 \Leftrightarrow z_2 = z_2$. Cũng dễ thấy $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2) = d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_2; z_1)$. Ta còn phải chứng minh rằng

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_3) \leqslant d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2) + d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_2; z_3).$$

Đối với z_1, z_2 và z_3, ta có đồng nhất sau

$$(z_1 - z_2)(1 + z_3\overline{z}_3) = (z_1 - z_3)(1 + z_2\overline{z}_3) + (z_3 - z_2)(1 + z_1\overline{z}_3).$$

Từ đó

$$|z_1 - z_2|(1 + |z_3|^2) \leqslant |z_1 - z_3|(|1 + z_2\overline{z}_3|) + |z_3 - z_2|(|1 + z_1\overline{z}_3|). \tag{1.15}$$

Nhưng để ý rằng

$$(1 + uv)(1 + \overline{u}\,\overline{v}) \leqslant (1 + |u|^2)(1 + |v|^2)$$

cho nên

$$|1 + z_2\overline{z}_3|^2 = (1 + z_2\overline{z}_3)(1 + \overline{z}_2 z_3) \leqslant (1 + |z_2|^2)(1 + |z_3|^2) \tag{1.16}$$

và

$$|1 + \overline{z}_1 z_3|^2 \leqslant (1 + |z_1|^2)(1 + |z_3|^2). \tag{1.17}$$

Từ các hệ thức (1.13) và (1.15) - (1.17) ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Ta nhận xét rằng trên các tập hợp bị chặn $M \subset \mathbb{C}$ (tức là những tập hợp được chứa trong hình tròn cố định nào đó $\{|z| \leqslant R, R < \infty\}$) hai mêtric Euclide và mêtric - cầu là tương đương với nhau.
Thật vậy, nếu $M \subset \{|z| \leqslant R\}$ thì từ (1.13) ta có

$$\frac{|z_1 - z_1|}{1 + R^2} \leqslant d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1; z_2) \leqslant |z_1 - z_2|, \quad \forall\, z_1, z_2 \in M.$$

Do đó mêtric cầu thường được áp dụng khi xét các tập hợp không bị chặn. Và nói chung, khi tiến hành các lập luận trên $\mathbb{C}$ ta sử dụng mêtric Euclide $d_{\mathbb{C}}$, còn trên $\overline{\mathbb{C}}$ thì sử dụng mêtric - cầu $d_{\overline{\mathbb{C}}}$.
Từ điều vừa chứng minh trên đây cũng suy ra rằng việc đưa vào mỗi mêtric trên đây đều biến $\mathbb{C}$ thành không gian mêtric.

1.3 Bài tập

Bài 1.1. Cho $a, b \in \mathbb{C}$, chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $|ab| = |a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;
2. $|a \pm b| \le |a| + |b|$; $|a \pm b| \ge ||a| - |b||$;
3. Nếu Re $a \ge 0$ thì $|1 + a| \ge \dfrac{1 + |a|}{\sqrt{2}}$;
4. $|a + b| \ge \dfrac{1}{2}(|a| + |b|)\left|\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|}\right|$.

Bài 1.2. Giả sử $a, b \in \mathbb{C}$, chứng minh các đồng nhất thức sau

1. $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.
2. $|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2$.
3. $|a + b|^2 = (|a| + |b|)^2 - 2[|a\bar{b}| - \text{Re }(a\bar{b})]$.
4. $|1 + a\bar{b}|^2 + |a - b|^2 = (|a|^2 + 1)(|b| + 1)$.

5. $(1+ab)(1+\bar{a}\bar{b}) \leq (1+|a|^2)(1+|b|^2)$.

Bài 1.3. Giả sử $z = a+bi$, $z \neq \pm 1$. Chứng minh rằng $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2+b^2 = 1$.

Bài 1.4. Giả sử số phức $z \neq -1$ và $|z| = 1$. Khi đó ta có thể biểu diễn z dưới dạng $z = \dfrac{1+it}{1-it}$, $t \in \mathbb{R}$.

Bài 1.5. Chứng minh rằng nếu giá trị chính arg $z=$ arg $(a+ib)$ thỏa mãn điều kiện $-\pi <$ arg $z \leq \pi$ thì nó được tính theo công thức

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{nếu } a > 0, \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0,\ b \geq 0, \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{nếu } a < 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Bài 1.6. Chứng minh rằng nếu giá trị chính $\arg z=\arg(a+ib)$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq \arg z < 2\pi$ thì nó được tính theo công thức

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{nếu } a > 0,\ b > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + 2\pi & \text{nếu } a > 0,\ b < 0, \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Bài 1.7. Chứng minh các bất đẳng thức sau

(i) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\arg z|$.

(ii) $|z-1| \leq ||z|-1| + |z|\arg z|$.

(iii) $|z| \leq |\text{Re } z + |\text{Im } z| \leq \sqrt{2}|z|$.

Bài 1.8. Giả sử $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Chứng minh rằng các bất đẳng thức $|z| < 1$ và $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$ là tương đương.

Bài 1.9. Giả sử $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$, $\arg z_1 = \varphi$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Tìm $\arg z_2$.

Bài 1.10. Giả sử $|z_1| = a$, $|z_2| = b$, $|z_1+z_2| = c$. Tính $|z_1-z_2|$.

Bài 1.11. Giả sử $|z-|z|| = |z|$. Tìm $\arg z$.

Bài 1.12. Giả sử $|z+\bar{z}| = |z|$. Tìm $\arg z$.

Bài 1.13. Giả sử $|z + |z|| = |z|$. Tìm $\arg z$.

Bài 1.14. Giả sử $|z| = |z - |z|i|$. Tìm $\arg z$.

Bài 1.15. Giả sử $z - \bar{z} = |z|i$. Tìm $\arg z$.

Chương 2

Số phức và biến phức trong lượng giác

2.1 Tính toán và biểu diễn một số biểu thức

Trong phần này, ta xét một số tính toán trên các số phức cụ thể.

Ví dụ 2.1. Tách phần thực và phần ảo của số

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}\cdot$$

Lời giải. Ta có

$$z = \frac{3+i}{1-2i+i+2} = \frac{3+i}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i} = \frac{9+6i-1}{9+1} = \frac{4}{5}+i\frac{3}{5},$$

vì $z\overline{z} = a^2+b^2$.
Từ đó $\operatorname{Re} z = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{3}{5}\cdot$

Ví dụ 2.2. Tách phần thực và phần ảo của

$$w = \frac{1}{z},\ \ z = x+iy.$$

Lời giải. Ta có

$$u+iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}\cdot$$

Từ đó suy ra

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2} \cdot$$

Ví dụ 2.3. Tìm argumen của số phức

$$z = -1 - \sqrt{3}i.$$

Lời giải. Trong trường hợp này ta có $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$. Ta nhận được hệ dạng

$$\begin{cases} \cos\varphi & = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi & = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\varphi_k = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Do đó

$$\arg z = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.4. Tìm $\operatorname{Arg}(-\sqrt{3}+i)$.

Lời giải. Mỗi giá trị argumen của số $-\sqrt{3}+i$ đều thỏa mãn phương trình

$$\tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot$$

Từ đó suy ra

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $z = -\sqrt{3}+i$ thuộc góc phần tư thứ hai nên φ_k là argumen nếu $k = 2n+1$ (số lẻ). Do đó

$$\operatorname{Arg}(-\sqrt{3}+i) = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.5. Biểu diễn số phức sau đây dưới dạng lượng giác

$$z = \frac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3}+i)}{i-1} \cdot$$

Lời giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),\\
z_2 &= \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),\\
z_3 &= i - 1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra rằng $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{11\pi}{12}$. Do đó

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right].$$

Ví dụ 2.6. Hãy biểu diễn $\tan 5\varphi$ qua $\tan\varphi$.

Lời giải. Ta có hệ thức $\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5$.
Sử dụng khai triển nhị thức Newton cho vế phải và tách phần thực và phần ảo, ta có

$$
\begin{aligned}
\cos 5\varphi &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi\\
\sin 5\varphi &= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra

$$\tan 5\varphi = \frac{5\tan\varphi - 10\tan^3\varphi + \tan^5\varphi}{1 - 10\tan^2\varphi + 5\tan^4\varphi}.$$

Ví dụ 2.7. Biểu diễn tuyến tính $\sin^5\varphi$ qua các hàm lượng giác của góc bội.

Lời giải. Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Khi đó $z^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$.

$$
\begin{aligned}
z^k &= \cos k\varphi + i\sin k\varphi,\\
z^{-k} &= \cos k\varphi - i\sin k\varphi.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra

$$\cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

$$z^k + z^{-k} = 2\cos k\varphi,$$
$$z^k - z^{-k} = 2i\sin k\varphi.$$

sử dụng các hệ thức này ta thu được

$$\begin{aligned}\sin^5\varphi = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^5 &= \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i}\\ &= \frac{(z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})}{32i}\\ &= \frac{2i\cdot\sin 5\varphi - 5\cdot 2i\cdot\sin 3\varphi + 10\cdot 2i\cdot\sin\varphi}{32i}\\ &= \frac{\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi}{16}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.8. Tìm $\sqrt[3]{2+2i}$.

Lời giải. Ta có $2 + 2i = \sqrt{8}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$.

Từ đó ta thu được

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2+2i} &= \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{45^\circ + k360^\circ}{3} + i\sin\frac{45^\circ + k360^\circ}{3}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos(15^\circ + k120^\circ) + i\sin(15^\circ + k120^\circ)\right).\end{aligned}$$

Do vậy, gọi các giá trị căn bậc ba của số phức $2 + 2i$ là w_0, w_1, w_2 ta được

$$\begin{aligned}w_0 &= \sqrt{2}\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)\ ;\\ w_1 &= \sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ\right) = \sqrt{2}(-\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\ ;\\ w_2 &= \sqrt{2}\left(\cos 255^\circ + i\sin 255^\circ\right) = \sqrt{2}(-\sin 15^\circ - i\cos 15^\circ).\end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ta có

$$w_1 = -1 + i.$$

Để tính w_0 và w_2, ta lưu ý $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$. Do đó

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Từ đó thu được

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$
$$w_2 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ví dụ 2.9. Tính $A = i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ và $B = i \cdot i^2 \cdots i^{99} \cdot i^{100}$.

Lời giải. Ta viết n theo mod 4 và có ngay

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 4k, \\ i & \text{nếu } n = 4k+1, \\ -1 & \text{nếu } n = 4k+2, \\ -i & \text{nếu } n = 4k+3, \end{cases}$$

Từ đây suy ra

$$A = i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$$

và

$$B = i \cdot i^2 \cdots i^{99} \cdot i^{100} = -1.$$

Sử dụng công thức biến đổi lượng giác quen thuộc hoặc sử dụng dạng lượng giác của số phức, ta dễ dàng thu được các tính chất sau.

Tính chất 2.1. *Đối với mọi đa thức lượng giác*

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

luôn tìm được các đa thức đại số $P_n(t)$ và $Q_{n-1}(t)$ lần lượt có bậc không quá n và $n-1$ đối với t sao cho

$$A_n(x) = P_n(\cos x) + \sin x Q_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 2.2. *Đối với mọi đa thức lượng giác theo sin bậc n ($n \geqslant 1$) dạng*

$$S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx$$

luôn tìm được đa thức đại số $Q_{n-1}(t)$ sao cho

$$S_n(x) = b_0 + \sin x Q_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 2.3. *Với mọi đa thức lượng giác theo cosin dạng*

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$$

luôn tìm được đa thức đại số $P_n(t)$ với hệ số bậc cao nhất là $2^{n-1}a_n$ sao cho $C_n(x) = P_n(\cos x)$.
Ngược lại, với mọi đa thức đại số $P_n(t)$ với hệ số bậc cao nhất bằng 1, qua phép đặt ẩn phụ $t = \cos x$ đều biến đổi được về dạng $C_n(x)$ với $a_n = 2^{1-n}$.

Ví dụ 2.10. Viết công thức biểu diễn của $\cos nx$ và $\sin nx$ theo các luỹ thừa của $\cos x$ và $\sin x$.

Lời giải. Theo công thức Moivre thì $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$.
Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k} x (i \sin x)^k$$
$$= \cos^n x + iC_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \cdots := A + iB,$$

trong đó

$$A = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n x \quad \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{n-1} \cos x \sin^{n-1} x \quad \text{nếu } n \text{ lẻ ;} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^2 \cos x \sin^{n-1} x \quad \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n x \quad \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Vậy

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \ \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \ \sin^4 x - \cdots + A,$$

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \ \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \ \sin^3 x + \cdots + B.$$

Ví dụ 2.11. Biểu diễn các hàm số $\sin^n x$ và $\cos^n x$ dưới dạng các đa thức lượng giác.

Lời giải. Giả sử $z = \cos t + i\sin t$. Khi đó

$$z^{-1} = (\cos t + i\sin t)^{-1} = \cos t - i\sin t.$$

Do đó $\cos t = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ và $\sin t = \dfrac{z + z^{-1}}{2i}$.
Ta có

$$(z + z^{-1})^n = z^n + C_n^1 z^{n-1}z^{-1} + C_n^2 z^{n-2}z^{-2} + \cdots + C_n^{n-1} z z^{-n+1} + z^{-n}$$

$$= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) + C_n^1(z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + C_n^{\frac{n}{2}} & \text{nếu } n \text{ chẵn},\\ (z^n + z^{-n}) + C_n^1(z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}}(z + z^{-1}) & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

và $(z - z^{-1})^n = z^n - C_n^1 z^{n-1}z^{-1} + C_n^2 z^{n-2}z^{-2} + \cdots + (-1)^n z^{-n}$

$$= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) - C_n^1(z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} & \text{nếu } n \text{ chẵn},\\ (z^n - z^{-n}) - C_n^1(z^{n-2} - z^{-(n-2)}) + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}}(z - z^{-1}) & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Vậy

$$\cos^n x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx + C_n^1\cos(n-2)x + \cdots + \dfrac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}\right] & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx + C_n^1\cos(n-2)x + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}}\cos x\right] & \text{nếu } n \text{ lẻ}, \end{cases}$$

$$\sin^n x = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\left[2\cos nx - 2C_n^1\cos(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}\right] & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\left[2\sin nx - 2iC_n^1\sin(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n^{\frac{n-1}{2}}2\sin x\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Ví dụ 2.12. Chứng minh đẳng thức

$$\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}} \text{ với } m \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Gọi P là vế trái của đẳng thức.

Xét phương trình $x^{2m}-1=0$. Ta thấy phương trình này có hai nghiệm thực là $x=\pm 1$ và $(2m-2)$ nghiệm phức. Kí hiệu ε_k là nghiệm phức của phương trình với $k=0,1,\ldots,2m-1$, ta có $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{2m}+i\sin\dfrac{2k\pi}{2m}$ (xem [4]).
Khi đó

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2m-k}&=\cos\frac{2(2m-k)\pi}{2m}+i\sin\frac{2(2m-k)\pi}{2m}\\&=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{2m}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{2m}\right)\\&=\cos\frac{2k\pi}{2m}-i\sin\frac{2k\pi}{2m}=\ \overline{\varepsilon_k}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}x^{2m}-1&=(x^2-1)(x-\varepsilon_1)(x-\overline{\varepsilon_1})\cdots(x-\varepsilon_{m-1})(x-\overline{\varepsilon_{m-1}})\\&=(x^2-1)[x^2-(\varepsilon_1+\overline{\varepsilon_1})x+1]\cdots[x^2-(\varepsilon_{m-1}+\overline{\varepsilon_{m-1}})x+1]\\&=(x^2-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2m}+1\right).\end{aligned}$$

Do đó với $x\neq\pm 1$, ta có

$$\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).$$

Chuyển qua giới hạn khi $x\to 1$, ta được

$$m=2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\frac{k\pi}{2m}=2^{2(m-1)}p^2.$$

Vậy nên $P=\dfrac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$.

2.2 Tính giá trị của một số biểu thức lượng giác

Trước hết ta tính giá trị của một số biểu thức lượng giác tại các điểm cho trước có các đặc thù đặc biệt bằng các công thức biến đổi lượng giác cơ bản.

Ví dụ 2.13. Chứng minh các công thức

$$\sin 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\ \ ;\ \ \cos 36^o = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\cos 54^o = \sin 36^o \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(3\cdot 18^o) = \sin(2\cdot 18^o)\\ &\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 18^o - 3\cos 18^o = 2\sin 18^o\cos 18^o\\ &\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 18^o + 2\sin 18^o - 1 = 0.\end{aligned}$$

Suy ra $\sin 18^o$ là nghiệm dương của phương trình $4t^2+2t-1=0$. Do đó $\sin 18^o = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ và suy ra $\cos 36^o = 1-\sin^2 18^o = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Ví dụ 2.14. Chứng minh công thức

$$\sin a\sin(60^o-a)\sin(60^o+a) = \frac{1}{4}\sin 3a.$$

Lời giải. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}&\sin a\sin(60^o-a)\sin(60^o+a) =\\ &= \sin a(\sin 60^o\cos a - \sin a\cos 60^o)(\sin 60^o\cos a + \sin a\cos 60^o)\\ &= \sin a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a - \frac{1}{2}\sin a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a + \frac{1}{2}\sin a\right)\\ &= \sin a\left(\frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a\right) = \frac{1}{4}\sin a[3(1-\sin^2 a)-\sin^2 a] = \frac{1}{4}\sin 3a.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.15. Chứng minh công thức

$$\sin 2^o\sin 18^o\sin 22^o\sin 38^o\sin 42^o\sin 58^o\sin 62^o\sin 78^o\sin 82^o = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}.$$

Lời giải. Sử dụng công thức $\sin a\sin(60^o-a)\sin(60^o+a) = \dfrac{1}{4}\sin 3a$, ta có

$$\begin{aligned}&\sin 2^o\sin 18^o\sin 22^o\sin 38^o\sin 42^o\sin 58^o\sin 62^o\sin 78^o\sin 82^o\\ &= (\sin 2^o\sin 58^o\sin 62^o)(\sin 18^o\sin 42^o\sin 78^o)(\sin 22^o\sin 38^o\sin 82^o)\\ &= \frac{1}{64}(\sin 6^o\sin 54^o\sin 66^o) = \frac{1}{256}\sin 18^o.\end{aligned}$$

Từ đẳng thức $\sin 18^o = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, ta suy ra

$$\sin 2^o \sin 18^o \sin 22^o \sin 38^o \sin 42^o \sin 58^o \sin 62^o \sin 78^o \sin 82^o = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}.$$

Ví dụ 2.16. Chứng minh $\sin 1^o$ là một số vô tỉ.

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng $\sin 1^o$ là một số hữu tỉ. Sử dụng công thức

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

ta thu được $\sin 3^o$ cũng là một số hữu tỉ.

Tương tự, ta suy ra $\sin 9^o, \sin 27^o, \sin 81^o$ là các số hữu tỉ.

Mà $\sin 81^o = \cos 9^o$ và $\sin 18^o = 2\sin 9^o \cos 9^o$ nên $\sin 18^o$ cũng là một số hữu tỉ.

Giả sử $\sin 18^o = \dfrac{p}{q},\ \ (p, q \in \mathbb{N}^*,\ \ (p;q) = 1)$. Mặt khác ta có $\sin 18^o = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ nên $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{p}{q}$. Suy ra $\sqrt{5} = \dfrac{4p+q}{q}$ là một số hữu tỉ (mâu thuẫn).

Vậy $\sin 1^o$ là số vô tỉ.

Ví dụ 2.17. Chứng minh đẳng thức

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)\\
&= 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\
&= \sin\frac{2\pi}{7} - \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{7}.
\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.18. Tính giá trị của biểu thức

$$\begin{aligned} S &= (\sin x + \sin 2x + \sin 4x)^5 - (-\sin x + \sin 2x + \sin 4x)^5 \\ &\quad - (\sin x - \sin 2x + \sin 4x)^5 - (\sin x + \sin 2x - \sin 4x)^5, \end{aligned}$$

ứng với $x = 20^o$.

Lời giải. Với $x = 20^o$ thì

$$\begin{aligned} &\sin x + \sin 2x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} = \sin 4x, \\ &\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right), \\ &\cos x \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} S &= 2^5[(\sin x + \sin 2x)^5 - \sin^5 2x - \sin^5 x] \\ &= 2^5.5[\sin x \sin 2x(\sin^3 2x + \sin^3 x) + 2\sin^2 x \sin^2 2x(\sin x + \sin 2x)] \\ &= 2^5.5\sin x \sin 2x(\sin 2x + \sin x)(\sin^2 x + \sin 2x \sin x + \sin^2 2x) \\ &= 2^5.5\sin x \sin 2x \cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin 2x \sin x\right) \\ &= 2^4.5\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 2^4.5\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{4} \\ &= 2^2\cdot 3\cdot 5\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 15\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.19. Cho biểu thức

$$S = 32x(x^2 - 1)(2x^2 - 1)^2 + \frac{1}{x}\cdot$$

Tính $S\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}\right)$.

Lời giải. Xét $x = \cos\alpha$ với $\alpha = \dfrac{2\pi}{9}$, ta có

$$\begin{aligned}
S &= 32\cos\alpha(\cos^2\alpha - 1)(2\cos^2\alpha - 1)^2 + \frac{1}{\cos\alpha}\\
&= \frac{1 - 32\cos^2\alpha\sin^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1)^2}{\cos\alpha}\\
&= \frac{1 - 8\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha}{\cos\alpha}\\
&= \frac{1 - 2\sin^2 4\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos 8\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha} = -1.
\end{aligned}$$

Vậy $S\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}\right) = -1$.

Ví dụ 2.20. Tính các tổng sau :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{5\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10},\\
S_2 &= \cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{5\pi}{10} + \cos\frac{5\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10}.
\end{aligned}$$

Lời giải. Nhận xét rằng

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
\cos 5\alpha &= \cos(2\alpha + 3\alpha)\\
&= \cos 2\alpha\cos 3\alpha - \sin 2\alpha\sin 3\alpha\\
&= (2\cos^2\alpha - 1)(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - 2\sin\alpha\cos\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\\
&= 8\cos^5\alpha - 4\cos^3\alpha - 6\cos^3\alpha + 3\cos\alpha - 6(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha - 8(1 - \cos^2\alpha)^2\cos\alpha\\
&= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Với các giá trị

$$\alpha = \frac{\pi}{10},\ \ \alpha = \frac{3\pi}{10},\ \ \alpha = \frac{5\pi}{10},\ \ \alpha = \frac{7\pi}{10},\ \ \alpha = \frac{9\pi}{10},$$

thì $\cos 5\alpha = 0$. Do vậy

$$\cos\frac{\pi}{10},\ \cos\frac{3\pi}{10},\ \cos\frac{5\pi}{10},\ \cos\frac{7\pi}{10},\ \cos\frac{9\pi}{10}$$

là các nghiệm của đa thức $f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

Theo định lí Viète, ta thu được

$$S_1 = 0\,,\ \ S_2 = -\frac{5}{4}.$$

Ví dụ 2.21. Tính tổng

$$S = \cos 5^o + \cos 77^o + \cos 149^o + \cos 221^o + \cos 293^o.$$

Lời giải.

Ta có $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$.

Với các giá trị

$$\alpha = 5^o,\ \ \alpha = 77^o,\ \ \alpha = 149^o,\ \ \alpha = 221^o,\ \ \alpha = 293^o,$$

thì $\cos 5\alpha$ đều bằng $\cos 25^o$. Do đó

$$\cos 5^o,\quad \cos 77^o,\quad \cos 149^o,\quad \cos 221^o,\quad \cos 293^o,$$

là các nghiệm của đa thức $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos 25^o$.

Theo Định lí Viète, ta có $S = 0$.

Ví dụ 2.22. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt[3]{7})}.$$

Lời giải. Nhận xét rằng

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}\ \ (k = 0, 1, \ldots, 6)$$

là các nghiệm của phương trình $x^7 = 1$. Từ đó suy ra

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}\ \ (k = 0, 1, \ldots, 6)$$

là các nghiệm của phương trình

$$x^6 + x^5 + \cdots + x + 1 = 0$$

và đồng thời cũng là nghiệm của phương trình

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Từ đó suy ra

$$y_k = x_k + \frac{1}{x_k} = x_k + \overline{x_k} = 2\cos\frac{2k\pi}{7} \quad (k = 1, 2, 3)$$

là các nghiệm của phương trình $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$. Nhưng vì

$$\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}$$

nên ta có thể thay $\cos\dfrac{6\pi}{7}$ bởi $\cos\dfrac{8\pi}{7}$.
Lập phương trình bậc ba có các nghiệm là

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}},\quad \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}},\quad \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}$$

rồi dựa theo các hệ thức giữa các nghiệm và các hệ số của phương trình mà tính được tổng cần thiết.

Một cách tổng quát, nếu $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ là các nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ còn $\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\beta}, \sqrt[3]{\gamma}$ là các nghiệm của phương trình $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ thì

$$\begin{aligned}
(-A)^3 &= \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}\right)^3 \\
&= \alpha + \beta + \gamma + 3\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}\right)\left(\sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta\gamma} + \sqrt[3]{\gamma\alpha}\right) - \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \\
&= -a - 3AB - 3\sqrt[3]{-C},
\end{aligned}$$

hay

$$A^3 = a + 3AB - 3\sqrt[3]{C}.$$

Tương tự ta cũng tìm được $B^3 = b + 3ABC - 3C^2$.

Trong trường hợp của bài toán đã cho thì

$$a = 1,\ \ b = -2,\ \ c = -1,\ \ C = -1.$$

Do đó, ta có

$$\begin{cases} A^3 = 3AB + 4 \\ B^3 = -3AB - 5. \end{cases}$$

Đặt $AB = z$ và nhân vế với vế của hai đẳng thức này, ta được

$$z^3 + 9z^2 + 27z + 20 = 0.$$

Suy ra $z = \sqrt[3]{7} - 3$. Do đó $A = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{7} - 5}$.

Vậy

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{4\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{8\cos\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt[3]{7}\right)}.$$

Nhận xét. Bằng phương pháp tương tự, ta có

$$i)\ \ \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3\sqrt[3]{9} - 6\right)},$$

$$ii)\ \ \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi} = 1 - C_n^2 \cdot \tan^2\varphi + C_n^4 \cdot \tan^4\varphi - \cdots + A,$$

trong đó

$$A = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \tan^n\varphi \text{ với } n \text{ chẵn}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{n-1} \cdot \tan^{n-1}\varphi \text{ với } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

$$iii)\ \ \frac{\sin n\varphi}{\cos\varphi} = C_n^1 \cdot \tan\varphi - C_n^3 \cdot \tan^3\varphi + C_n^5 \cdot \tan^5\varphi + \cdots + A,$$

trong đó

$$A = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}+1} C_n^{n-1} \tan^{n-1}\varphi, \quad \text{với } n \text{ chẵn} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \tan^n\varphi, \quad \text{với } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

2.3 Dạng phức của bất đẳng thức Cauchy

Ta có nhận xét rằng từ một đẳng thức đã cho đối với bộ số thực ta đều có thể mở rộng (theo nhiều cách thức khác nhau) thành một đẳng thức mới cho bộ số phức tương ứng. Chẳng hạn, ta có thể coi mọi số thực a đã cho như là phần thực của một số phức $z = a + ib$ với $b \in \mathbb{R}$.

Ta nêu một số đồng nhất thức về sau cần sử dụng.

Ví dụ 2.23. Với mọi bộ số $(a_j; b_j; u_j; v_j)$, ta luôn có đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} a_j u_j \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \sum_{j=1}^{n} u_j v_j\\ &= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - b_j a_k)(u_j v_k - u_k v_j). \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Nhận xét rằng, từ đồng nhất thức này ta thu được đồng nhất thức Lagrange sau đây đối với bộ số phức.

Ví dụ 2.24. Với mọi bộ số phức $(a_j; b_j)$, ta luôn có đẳng thức sau

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big| = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |\overline{a_j} b_k - a_k \overline{b_j}|. \qquad (2.2)$$

Chứng minh. Từ đẳng thức (2.1), bằng cách thay a_j bởi $\overline{a_j}$, v_j bởi $\overline{b_j}$ và u_j bởi a_j, ta sẽ thu được (2.2).

Hệ thức (2.2) cho ta bất đẳng thức Cauchy sau đây đối với bộ số phức.

Hệ quả 2.1. *Với mọi bộ số phức $(a_j; b_j)$, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \geqslant \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big|. \qquad (2.3)$$

Giả sử ta có bộ n cặp số dương $(a_k; b_k)$ sao cho

$$\frac{a_k}{b_k} \in [\alpha; \beta], \ \ \alpha > 0, \ \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó, theo Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai thì

$$\left(\beta - \frac{a_k}{b_k}\right)\left(\frac{a_k}{b_k} - \alpha\right) \geqslant 0,$$

hay

$$a_k^2 + \alpha\beta b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)a_k b_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \alpha\beta \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha\beta\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \alpha\beta\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Vậy nên

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha\beta\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Từ đây, ta thu được bất đẳng thức đảo Cauchy.

Định lý 2.1. *Giả sử ta có bộ n cặp số dương* $(a_k; b_k)$ *sao cho*

$$\frac{a_k}{b_k} \in [\alpha; \beta],\ \ \alpha > 0,\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{A}{G}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

trong đó

$$A = \frac{\alpha+\beta}{2},\ \ G = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Nhìn chung, có rất nhiều bất đẳng thức nhận được từ các đồng nhất thức. Vì vậy, việc thiết lập được các đồng nhất thức được coi như một phương pháp hữu hiệu để sáng tác và chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 2.25. Chứng minh rằng với mọi bộ ba số $(x; y; z)$, ta luôn có đẳng thức sau

$$(2x + 2y - z)^2 + (2y + 2z - x)^2 + (2z + 2x - y)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2).$$

Hãy tổng quát hoá?

Ví dụ 2.26. Chứng minh rằng với mọi bộ bốn số $(x; y; z; t)$, ta luôn có đẳng thức sau

$$(x+y+z-t)^2+(y+z+t-x)^2+(z+t+x-y)^2+(t+x+y-z)^2 = 4(x^2+y^2+z^2+t^2).$$

Hãy tổng quát hoá?

Ví dụ 2.27. Chứng minh rằng với mọi bộ số $(u_k; v_k; p_k)$, ta luôn có đẳng thức sau

$$\sum_{j,k=1}^{n} (u_k v_j + u_j v_k) p_j p_k = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} u_k p_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} v_k p_k \right).$$

Ví dụ 2.28. Chứng minh rằng với mọi bộ số $(u_k; v_k; p_k)$, ta luôn có đẳng thức sau

$$\sum_{j,k=1}^{n} (u_j v_j + u_k v_k) p_j p_k = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k p_k \right).$$

Tiếp theo, ta xét một số mở rộng khác (dạng phức) của bất đẳng thức Cauchy.

Định lý 2.2 (N.G.de Bruijn)**.** *Với bộ số thực $a_1, \dots, a_n$ và bộ số phức (hoặc thực) $z_1, \dots, z_n$, ta đều có*

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \Big|^2 \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \Big| \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \Big| \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_k = \mathrm{Re}\,(\lambda z_k)$ $(k = 1, \dots, n)$, trong đó λ là số phức và $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^2 z_k^2$ là số thực không âm.

Chứng minh. Bằng cách thực hiện đồng thời phép quay quanh gốc toạ độ đối với các z_k cùng một góc, ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geqslant 0.$$

Rõ ràng phép quay này không ảnh hưởng đến giá trị của modul các số.

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|, \qquad \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|, \qquad |z_k| \quad (k = 1, \dots, n).$$

Vậy chỉ cần chứng minh cho trường hợp

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geqslant 0.$$

Nếu ta đặt $z_k = x_k + iy_k \quad (k = 1, \dots, n)$, thì

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big).$$

Vì

$$2x_k^2 = |z_k|^2 + \operatorname{Re} z_k^2,$$

ta nhận được

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k^2\Big).$$

Từ bất đẳng thức này và

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k^2 = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|$$

ta thu được điều cần chứng minh.

2.4 Tổng và tích sinh bởi các đa thức lượng giác

Ví dụ 2.29. Tính tổng

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx).$$

Lời giải. Xét các tổng

$$A = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx, \quad B = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx.$$

Ta có

$$1 + A + iB = 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \cdots + (\cos nx + i\sin nx)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + \cdots + (\cos x + i\sin x)^n \\
&\frac{1-(\cos x + i\sin x)^{n+1}}{1-(\cos x + i\sin x)} = \frac{1-\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x}{1-\cos x - i\sin x} \\
&= \frac{2\sin^2\frac{n+1}{2}x - 2i\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{n+1}{2}x - i\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{n+1}{2}x - i\cos\frac{n+1}{2}x\right)\left(\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}x + i\sin\frac{n}{2}x\right) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + i\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$A = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} - 1.$$

Ví dụ 2.30. Rút gọn

$$A = \sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

với $m \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Xét phương trình $x^{2m} - 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm thực $x = \pm 1$ và $(2m-2)$ nghiệm phức. Gọi x_k là nghiệm phức của phương trình với

$k = 1, 2, \ldots, 2m-2$, tức $x_k = \cos\dfrac{2k\pi}{2m} + i\sin\dfrac{2k\pi}{2m}$.

Nhận xét rằng $x_{2m-k} = \cos\dfrac{2k\pi}{2m} - i\sin\dfrac{2k\pi}{2m} = \overline{x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

Vậy nên

$$x^{2m} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{m-1}(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2m} + 1).$$

Do đó

$$\frac{x^{2m}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{m-1}(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2m} + 1).$$

Cho $x \to 0$, ta thu được

$$m = 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\frac{k\pi}{2m} = 2^{2(m-1)}A^2.$$

Vậy $A = \dfrac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}\cdot$

2.4.1 Chứng minh công thức lượng giác

Ví dụ 2.31. Cho tam giác ABC có $A = \dfrac{\pi}{7}$, $B = \dfrac{2\pi}{7}$, $C = \dfrac{4\pi}{7}$. Chứng minh rằng

(i) $OH = OI_a = R\sqrt{2}$;

(ii) $R = 2r_a$;

(iii) $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$.

Lời giải. Ta có $a = 2R\sin\dfrac{\pi}{7}$, $b = 2R\sin\dfrac{2\pi}{7}$, $c = 2R\sin\dfrac{4\pi}{7}$.

Tiếp theo ta tính OH.

$$\begin{aligned} OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) &= 9R^2 - 4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}\right) \\ &= 9R^2 - 4R^2\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)\right] \\ &= 9R^2 - 4R^2\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right)\right]. \end{aligned}$$

Xét $z = \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$, ta thu được

$$z + z^3 + z^5 = \frac{z^7 - z}{z^2 - 1} = \frac{-1-z}{z^2-1} = \frac{1}{1-z}\cdot$$

Tách phần thực hai vế, ta được

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}\cdot$$

Vậy nên $OH^2 = 9R^2 - 7R^2 = 2R^2$ hay $OH = OI_a = R\sqrt{2}$.

Tiếp theo, tính OI_a. Ta có

$$OI_a^2 = R^2 + \frac{abc}{b+c-a} = R^2 + 4R^2\frac{\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}}\cdot$$

Do

$$\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \left(\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7}\right)$$

$$2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7},$$

nên $OI_a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ hay $OI_a = R\sqrt{2}$.

Ta sử dụng các công thức $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, suy ra

$$Rr_a = \frac{abc}{4(p-a)} = \frac{abc}{2(b+c-a)} = \frac{R^2}{2}$$

hay $R = 2r_a$.

Tiếp theo, theo câu (i) ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}\right) = 4R^2\frac{7}{4} = 7R^2.$$

Ví dụ 2.32. Chứng minh rằng

$$2^{2m}\cos^{2m}x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m}^k\cos 2(m-k)x.$$

Lời giải. Ta có $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\cdot$ Do đó

$$2^{2m}\cos^{2m}x = (e^{ix} + e^{-ix})^{2m}$$

$$= \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k (e^{ix})^k (e^{-ix})^{2m-k} = \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} + \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} + C_{2m}^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k\cos 2(m-k)x + C_{2m}^m\cos 2(m-m)x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m}^k\cos 2(m-k)x.$$

Ví dụ 2.33. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d. Tính các tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin a_k, \;\; T_n = \sum_{k=1}^{n} \cos a_k.$$

Lời giải. - Nếu $d = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì $S_n = n \sin a_1$;

- Nếu $d \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì $\sin\dfrac{d}{2} \neq 0$. ta có

$$\begin{aligned} 2\sin a_n \sin\frac{d}{2} &= 2\sin[a_1 + (n-1)d]\sin\frac{d}{2} \\ &= \cos\left[a_1 + \left(n - \frac{3}{2}\right)d\right] - \cos\left[a_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right]. \end{aligned}$$

Xét $g(n) = \cos\left[a_1 + \left(n - \dfrac{3}{2}\right)d\right]$, ta có

$$2\sin a_n . \sin\frac{d}{2} = g(n) - g(n+1).$$

Vậy

$$\begin{cases} 2\sin a_1 . \sin\dfrac{d}{2} = g(1) - g(2), \\ 2\sin a_2 . \sin\dfrac{d}{2} = g(2) - g(3), \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2\sin a_n . \sin\dfrac{d}{2} = g(n) - g(n+1). \end{cases}$$

Cộng các đồng nhất thức theo vế, ta được

$$\begin{aligned} 2S_n \sin\frac{d}{2} = g(1) - g(n+1) &= \cos\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \cos\left[a_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right] \\ &= -2\sin\left[a_1 + \frac{n-1}{2}d\right]\sin\left(-\frac{n}{2}d\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$S_n = \frac{\sin\left(a_1 + \dfrac{n-1}{2}d\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}d\right)}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

Theo cách giải như trên, ta thu được

- Nếu $d = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì $T_n = n \cos a_1$;

- Nếu $d \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì

$$T_n = \frac{\cos\left(a_1 + \dfrac{n-1}{2}d\right)\sin\dfrac{n}{2}d}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

Chú ý 2.1. *Như vậy, với mỗi một cấp số cộng, ta tìm được một công thức tính tổng tương ứng. Chẳng hạn, với $x \neq l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ ta có*

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x \\
&= \frac{\cos\left(x + \dfrac{n-1}{2}.2x\right).\sin\left(\dfrac{n}{2}.2x\right)}{\sin\dfrac{2x}{2}} = \frac{\cos nx.\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng, với những giá trị của x sao cho $\sin 2nx = \sin x$ $(\sin x \neq 0)$ thì ta luôn có $T_n = \dfrac{1}{2}$. Từ đó, ta thu được một số kết quả sau :
Với $n = 2$, chọn $x = \dfrac{\pi}{5}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Với $n = 3$, chọn $x = \dfrac{\pi}{7}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Với $n = 4$, chọn $x = \dfrac{\pi}{9}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.34. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx \text{ với } x \neq 2k\pi\ (l \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải. Trước hết, ta nhắc lại rằng (Bài toán 2.40)

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\sin\dfrac{x}{2}} ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k.\sin kx = \sum_{k=1}^{n}[-(\cos kx)'] = -\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)'$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx = \sum_{k=1}^{n}[(\sin kx)'] = \left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)'.$$

Từ đó suy ra các công thức cần tìm.

Ví dụ 2.35. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n đều tồn tại đa thức $P(x)$ bậc n thoả mãn hệ thức

$$\sin(n+1)t = \sin t \cdot P(\cos t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Tính tổng các hệ số của đa thức này.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n dựa vào hệ thức truy toán

$$\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 2\cos nx \sin x.$$

Để ý rằng, tổng các hệ số của $P(x)$ bằng $P(1)$. Lấy đạo hàm hai vế của (2.4) ta được

$$(n+1)\cos(n+1)t = \cos t \cdot P(\cos t) + \sin t \cdot P'(\cos t)(-\sin t).$$

Vì khi $\cos x = 1$ thì $\sin x = 0$ và $\cos mx = 1$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ nên $P(1) = n+1$.

Ví dụ 2.36. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}.\sin^3 \frac{x}{3^k}.$$

Lời giải. Xuất phát từ hệ thức

$$\sin^3 a = \frac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a),$$

ta tính được

$$S_n = \frac{1}{4}\left(3^n.\sin\frac{x}{3^n} - \sin x\right).$$

Ví dụ 2.37. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4}.$$

Lời giải. Đặt

$$1+n^2+n^4 = -xy,\ \ 2n = x+y.$$

Khi đó $x = n^2+n+1,\ \ y = -(n^2-n+1)$.

Ta có

$$\begin{aligned}\arctan\frac{2n}{2+n^2+n^4} &= \arctan\frac{x+y}{1-xy} = \arctan x + \arctan y\\ &= \arctan(n^2+n+1) - \arctan(n^2-n+1), \quad \text{vì } xy<1.\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}S_n &= \arctan 3 - \arctan 1 + \arctan 7 - \arctan 3 + \cdots + \arctan(n^2+n+1)\\ &\quad - \arctan(n^2-n+1)\\ &= \arctan(n^2+n+1) - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.38. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\sin a_k.$$

Lời giải. Xét $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin a_k$. Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k-(k+1)]B_k + n.B_n = -\sum_{k=1}^{n-1} B_k + n.B_n$$

Ta có

- Nếu $d = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, thì

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2}\sin a_1.$$

- Nếu $d \neq 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì

$$S_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(a_1-\frac{d}{2}\right)-\cos\left[a_1+\left(k-\frac{1}{2}\right)d\right]}{2\sin\frac{d}{2}} + \frac{n\sin\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)\sin\left(\frac{n}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sin\frac{d}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(a_1-\frac{d}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\cos\left[a_1+\left(k-\frac{1}{2}\right)d\right] -2n\sin\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right).\sin\left(\frac{n}{2}d\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{\sin\dfrac{d}{2}}\left\{(n-1)\cos\left(a_1-\frac{d}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\cos\left[a_1+\left(k-\frac{1}{2}\right)d\right] -2n\sin\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)\sin\left(\frac{n}{2}d\right)\right\},$$

trong đó

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(a_1-\frac{d}{2}+kd\right) = \frac{\cos\left(a_1-\dfrac{d}{2}+\dfrac{n-2}{2}d\right)\sin\left(\dfrac{n-1}{2}d\right)}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

Nhận xét 2.1. *Tương tự ta cũng tính được các tổng*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos a_k,\ \ U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\sin b_k,\ \ V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\cos b_k.$$

trong đó $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *là hai cấp số cộng.*

Ví dụ 2.39. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k\sin(\alpha+k\beta),\ \ T_n = \sum_{k=1}^{n} q^k\cos(\alpha+k\beta),$$

trong đó q, α, β là các số thực cho trước.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
T_n + iS_n &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + q[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + \cdots \\
&\quad + q^n[\cos(\alpha+n\beta) + i\sin(\alpha+n\beta)] \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)[1 + q(\cos\beta + i.\sin\beta) + \cdots + q^n(\cos n\beta + i.\sin n\beta)] \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)[1 + q\epsilon + \cdots + (q\epsilon)^n],
\end{aligned}$$

với $\epsilon = \cos\beta + i\sin\beta$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
T_n + iS_n &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{(q\epsilon)^{n+1} - 1}{q\epsilon - 1} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{((q\epsilon)^{n+1} - 1)(q\overline{\epsilon} - 1)}{(q\epsilon - 1)(q\overline{\epsilon} - 1)} \\
&= \frac{q^{n+2}[\cos(n\beta+\alpha) + i.\sin(n\beta+\alpha)] - q[\cos(n\beta-\alpha) + i.\sin(n\beta-\alpha)]}{1 - 2q\cos\beta + q^2} \\
&\quad + \frac{-q^{n+1}\{\cos[(n+1)\beta+\alpha] + i.\sin[(n+1)\beta+\alpha]\} + \cos\alpha + i.\sin\alpha}{1 - 2q\cos\beta + q^2} \\
&= \frac{\cos\alpha - q\cos(n\beta-\alpha) - q^{n+1}\cos[(n+1)\beta+\alpha] + q^{n+2}\cos(n\beta+\alpha)}{1 - 2q\cos\beta + q^2} \\
&\quad + i\frac{\sin\alpha - q\sin(n\beta-\alpha) - q^{n+1}\sin[(n+1)\beta+\alpha] + q^{n+2}\sin(n\beta+\alpha)}{1 - 2q\cos\beta + q^2}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$S_n = \frac{\sin\alpha - q\sin(n\beta-\alpha) - q^{n+1}\sin[(n+1)\beta+\alpha] + q^{n+2}\sin(n\beta+\alpha)}{1 - 2q\cos\beta + q^2}$$

và

$$T_n = \frac{\cos\alpha - q\cos(n\beta-\alpha) - q^{n+1}\cos[(n+1)\beta+\alpha] + q^{n+2}\cos(n\beta+\alpha)}{1 - 2q\cos\beta + q^2}.$$

Nhận xét 2.2. Bằng phương pháp tương tự, ta tính được các tổng sau :

i) $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin(\alpha + k\beta)$,

ii) $U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(\alpha + k\beta)$,

iii) $w_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin b_k$, $R_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos b_k$,

trong đó $\{a_n\}$ là cấp số nhân với công bội $q \neq 1$ và $\{b_n\}$ là cấp số cộng với công sai d.

2.4.2 Tổng và tích các phân thức của biểu thức lượng giác

Chú ý rằng, trong một số trường hợp, để tính tổng hữu hạn các phân thức lượng giác, người ta thường sử dụng một số tính chất của đa thức, đặc biệt là công thức nội suy Lagrange.

Dưới đây là một số định lí và áp dụng.

Định lý 2.3 (*Công thức nội suy Lagrange*)**.** *Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là m giá trị tuỳ ý đôi một khác nhau và $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn m thì ta có đồng nhất thức*

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} \\ & + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)} + \cdots \\ & + f(x_m)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}. \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} f(x) & - f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} \\ & - f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)} - \cdots \\ & - f(x_m)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})} \equiv 0. \end{aligned}$$

Vế trái của đẳng thức là một đa thức bậc không vượt quá $m-1$ và có m nghiệm $x_1,\ x_2, \ldots, x_m$. Vậy đa thức đó đồng nhất bằng 0. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.2. Ta có các đồng nhất thức sau đây :

i) $$\frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})(x-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{7})}+\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})(x-\sqrt{7})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{7})}$$
$$+\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}+\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}\equiv 1,$$

ii) $$a^2\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Định lý 2.4. *Nếu $f(x)$ là đa thức bậc không vượt quá $m-2$ và $x_1,\ x_2,\dots,\ x_m$ là m giá trị đôi một khác nhau tuỳ ý, thì ta có đồng nhất thức*
$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_m)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_m)}$$
$$+\dots+\frac{f(x_m)}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\dots(x_m-x_{m-1})}=0.$$

Chứng minh. Vế trái của đẳng thức chính là hệ số của hạng tử bậc $m-1$ trong đa thức $f(x)$ đã cho. Đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.40. Tính tổng
$$S=\frac{\cos 1^o}{(\cos 1^o-\cos 2^o)(\cos 1^o-\cos 3^o)}+\frac{\cos 2^o}{(\cos 2^o-\cos 1^o)(\cos 2^o-\cos 3^o)}$$
$$+\frac{\cos 3^o}{(\cos 3^o-\cos 1^o)(\cos 3^o-\cos 2^o)}.$$

Lời giải. Sử dụng Định lí 1, với
$$f(x)=x,\ \ x_1=\cos 1^o,\ \ x_2=\cos 2^o,\ \ x_3=\cos 3^o$$
thì $S=0$.

Ví dụ 2.41. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d, với $d,a_1,a_2,\dots,a_n$ khác bội của π. Tính tổng
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin a_k\sin a_{k+1}}.$$

Lời giải. Ta có

$$\cot a_n - \cot a_{n+1} = \frac{\sin(a_{n+1}-a_n)}{\sin a_n \sin a_{n+1}} = \frac{\sin d}{\sin a_n \sin a_{n+1}}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sin a_n \sin a_{n+1}} = \frac{1}{\sin d}(\cot a_n - \cot a_{n+1}).$$

Vậy

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sin d}(\cot a_1 - \cot a_2 + \cot a_2 - \cot a_3 + \ldots + \cot a_n - \cot a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sin d}(\cot a_1 - \cot a_{n+1}) = \frac{1}{\sin d}\cdot\frac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\sin a_1 \sin a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sin d}\cdot\frac{\sin nd}{\sin a_1 \sin(a_1+nd)}. \end{aligned}$$

Vậy

$$S_n = \frac{\sin nd}{\sin d \sin a_1 \sin(a_1+nd)}.$$

Ví dụ 2.42. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d, trong đó $d \neq l\pi$; $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$. Tính tổng

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos a_k \cos a_{k+1}}.$$

Lời giải. Ta có

$$\tan a_{n+1} - \tan a_n = \frac{\sin(a_{n+1}-a_n)}{\cos a_n \cos a_{n+1}} = \frac{\sin d}{\cos a_n \cos a_{n+1}}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\cos a_k \cos a_{k+1}} = -\frac{1}{\sin d}(\tan a_n - \tan a_{n+1}).$$

Vậy

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{\sin d}(-\tan a_1 + \tan a_2 - \tan a_2 + \tan a_3 - \ldots - \tan a_n + \tan a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sin d}(-\tan a_1 + \tan a_{n+1}). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.43. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \tan^2 \frac{x}{2^k} \tan \frac{x}{2^{k-1}}.$$

Lời giải. Ta có

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Suy ra

$$\tan^2 a \tan 2a = \tan 2a - 2\tan a.$$

Vậy

$$\begin{aligned} S_n &= 2^0 \tan^2 \frac{x}{2^1} \tan \frac{x}{2^0} + 2^1 \tan^2 \frac{x}{2^2} \tan \frac{x}{2^1} + \cdots + 2^{n-1} \tan^2 \frac{x}{2^n} \tan \frac{x}{2^{n-1}} \\ &= 2^0 \left(\tan \frac{x}{2^0} - 2\tan \frac{x}{2^1}\right) + 2^1 \left(\tan \frac{x}{2^1} - 2\tan \frac{x}{2^2}\right) + \cdots + 2^{n-1} \left(\tan \frac{x}{2^{n-1}} - 2\tan \frac{x}{2^n}\right) \\ &= \tan x - 2^n \tan \left(\frac{x}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.44. Tính tổng

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \tan \frac{x}{2^k - 1}.$$

Lời giải. Ta có

$$\tan a = \cot a - 2\cot 2a.$$

Suy ra

$$\tan^2 a . \tan 2a = \tan 2a - 2\tan a.$$

Vậy

$$\begin{aligned} T_n &= 2^0 \tan^2 \frac{x}{2^1} \tan \frac{x}{2^0} + 2^1 \tan^2 \frac{x}{2^2} \tan \frac{x}{2^1} + \cdots + 2^{n-1} \tan^2 \frac{x}{2^n} \tan \frac{x}{2^{n-1}} \\ &= 2^0 \left(\tan \frac{x}{2^0} - 2\tan \frac{x}{2^1}\right) + 2^1 \left(\tan \frac{x}{2^1} - 2\tan \frac{x}{2^2}\right) + \cdots + 2^{n-1} \left(\tan \frac{x}{2^{n-1}} - 2\tan \frac{x}{2^n}\right) \\ &= \tan x - 2^n \tan \frac{x}{2^n}. \end{aligned}$$

2.5 Bất đẳng thức lượng giác

Trong phần này, ta xét một số bất đẳng thức liên quan đến biểu thức (hàm số) lượng giác.

Ví dụ 2.45. Chứng minh rằng tập giá trị của mọi đa thức lượng giác bậc n ($n \geqslant 1$), không chứa số hạng tự do (tức $a_0 = 0$)

$$A_n(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \text{với} \quad a_n^2 + b_n^2 > 0$$

chứa cả giá trị dương và giá trị âm.

Lời giải. Vì $a_n^2 + b_n^2 > 0$ nên tồn tại một giá trị x_0 sao cho $A_n(x_0) \neq 0$.
Mặt khác với $x = x_0$ ta được (xem mục 1.1 Chương 1)

$$A_n(x_0) + A_n\left(x_0 + \frac{2\pi}{n+1}\right) + \cdots + A_n\left(x_0 + \frac{2n\pi}{n+1}\right) = 0.$$

Do $A_n(x_0) \neq 0$ nên tổng trên phải chứa ít nhất một số hạng dương và một số hạng âm.

Hệ quả 2.3. *Tập giá trị của mọi đa thức lượng giác bậc n ($n \geqslant 1$) dạng*

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \;\; (a_n^2 + b_n^2 > 0)$$

chứa cả giá trị lớn hơn a_0 và giá trị nhỏ hơn a_0.

Hệ quả 2.4. *Mọi đa thức lượng giác bậc n ($n \geqslant 1$), không chứa số hạng tự do*

$$A_n(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

luôn có ít nhất một nghiệm thực.

Chứng minh. Ta thấy $A_n(x)$ luôn nhận cả giá trị dương và giá trị âm. Hơn nữa, $A_n(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra tồn tại ít nhất một giá trị x_0 để $A_n(x_0) = 0$.

Ví dụ 2.46. Với n là một số tự nhiên và $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)$.
Chứng minh rằng

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x) < \tan nx \tan x. \tag{2.5}$$

Lời giải. Từ $0 < x(n+1) < \dfrac{\pi}{2}$, suy ra

$$0 < nx < \frac{\pi}{2},\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad \cos nx > 0,\ \cos x > 0.$$

Ta có $(1-\cos^n x)(1+\cos^n x) < \tan nx \tan x$

$$(2.5) \Leftrightarrow 1-\cos^{2n} x < \frac{\sin nx \sin x}{\cos nx \cos x},$$

hay

$$\cos(n+1)x < \cos^{2n+1} x \cos nx. \tag{2.6}$$

Dễ dàng chứng minh được (2.6) bằng phương pháp quy nạp theo n.
Vậy

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x) < \tan nx \tan x \text{ với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2(n+1)}\right),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 2.47. Với n là một số tự nhiên và $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)$.
Chứng minh rằng

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x) < \tan nx \sin x. \tag{2.7}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}(2.7) &\Leftrightarrow 1-\cos^{2n} x < \tan nx \sin x\\ &\Leftrightarrow \tan nx \sin x + \cos^{2n} x > 1.\end{aligned}$$

Kí hiệu $f(n) = \tan nx \sin x + \cos^{2n} x$.

Ta chứng minh $f(k+1) > f(k)$, với $k = 0; \dots; n-1$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&\tan kx\sin x + \cos^{2k} x < \tan(k+1)x\sin x + \cos^{2n+2} x\\
\Leftrightarrow\ &\cos^{2k} x - \cos^{2n+2} x < \sin x[\tan(k+1)x - \tan kx]\\
\Leftrightarrow\ &\cos^{2k} x\sin^2 x < \sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos(k+1)x\cos kx}.
\end{aligned}$$

Do $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2(n+1}\right)$, nên $\cos(k+1)x.coskx > 0$.
Vì vậy $\cos^{2k} x\cos(k+1)x\cos kx < 1$, điều này luôn đúng.
Vậy

$$f(n) > f(n-1) > \cdots > f(1) > f(0) = 1.$$

Do đó

$$\tan nx\sin x + \cos^{2n} x > 1.$$

Vậy

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x) < \tan nx\sin x \ \text{ với } \ x \in \left(0; \frac{\pi}{2(n+1)}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 2.48. Chứng minh rằng

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1, \text{ với mọi } n \geqslant 2.$$

Lời giải. Với mọi $n \geqslant 2$, ta có

$$\begin{aligned}
&(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1\\
\Leftrightarrow\ & n\left(\cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{\pi}{n}\right) > 1 - \cos\frac{\pi}{n+1}\\
\Leftrightarrow\ & n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

và

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin\frac{2n\pi}{2n(n+1)} > \sin\frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{2.8}$$

Mặt khác, bằng phương pháp quy nạp theo n, ta dễ dàng chứng minh được

$$\sin\frac{\pi}{2n(n+1)} > \sin\frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{2.9}$$

Từ (2.8) và (2.9), ta suy ra

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} > \sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Vậy

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} \quad > 1, \text{ với } \forall n \geqslant 2.$$

Ví dụ 2.49. Chứng minh rằng

$$2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \geqslant 3, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, có thể coi $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Khi đó bất đẳng thức đã cho có dạng

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 3, \ \ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} = 2^{\sin x} + \frac{1}{2}\cdot 2^{\cos x} + \frac{1}{2}\cdot 2^{\cos x} \geqslant 3\sqrt[3]{2^{\sin x + 2\cos x - 2}}.$$

Do $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ nên

$$\sin x + 2\cos x - 2 \geqslant 0,$$

và vì vậy

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 3, \ \ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn, khi $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2.50. Xác định số dương a sao cho

$$a^{\cos 2x} \geqslant 2\cos^2 x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Lời giải. Đặt $\cos 2x = t$ thì $t \in [-1;1]$ và (2.10) có dạng

$$a^t \geqslant 1 + t,\ \ \forall t \in [-1;1]. \tag{2.11}$$

Với $0 < t \leqslant 1$ thì (2.11) có dạng

$$a \geqslant (1+t)^{\frac{1}{t}},\ \ \forall t \in (0;1]. \tag{2.12}$$

Trong (2.12) cho $t \to 0$, ta thu được $a \geqslant e$.

Tương tự, với $-1 \leqslant t < 0$ thì (2.11) có dạng

$$a \leqslant (1+t)^{\frac{1}{t}},\ \ \forall t \in [-1;0). \tag{2.13}$$

Trong (2.13) cho $t \to 0$, ta thu được $a \leqslant e$.

Kết hợp, ta thu được $a = e$.

Với $a = e$ thì ta luôn có

$$e^t \geqslant 1 + t,\ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

nên

$$e^{\cos 2x} \geqslant 2\cos^2 x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2.51. Cho đa thức lượng giác

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx$$

thoả mãn điều kiện

$$|f(x)| \leqslant |\sin x|,\ \text{với mọi}\ \ x \in \mathbb{R},\ b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n.$$

Chứng minh rằng

$$|b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n| \ \leqslant\ 1.$$

Lời giải. Ta có

$$f'(x) = b_1 \cos x + 2b_2 \cos 2x + 3b_3 \cos 3x + \cdots + nb_n \cos nx.$$

Vậy nên

$$f(0) = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n.$$

Theo định nghĩa của đạo hàm tại điểm $x = 0$ thì

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Suy ra

$$|f'(0)| = \left|\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

Vậy

$$|b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n| \leqslant 1.$$

Ví dụ 2.52. Cho các số thực a, b, c, d. Chứng minh rằng nếu với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta đều có

$$a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x \leqslant \sqrt{c^2 + d^2}$$

thì $a = b = 0$.

Lời giải. Nếu $c^2 + d^2 = 0$ thì kết quả là hiển nhiên. Vì vậy ta giả thiết rằng $r = \sqrt{c^2 + d^2} > 0$.

Lấy góc φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$ sao cho $\cos 2\varphi = \dfrac{c}{r}$, $\sin 2\varphi = \dfrac{d}{r}$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} & a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x \\ = \ & a\cos x + b\sin x + r\cos 2(x - \varphi) \ \leqslant \ r \ , \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay x bởi $x + \varphi$ vào bất đẳng thức trên, ta thu được

$$r\cos 2x + A\cos x + B\sin x \ \leqslant \ r \ , \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

với $A = a\cos\varphi + b\sin\varphi$ và $B = b\cos\varphi - a\sin\varphi$.

Trong (2.14) cho $x = 0$ và $x = \pi$, ta được $A = 0$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} r\cos 2x + B\sin x &\leqslant r,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow\ r(1-2\sin^2 x) + B\sin x &\leqslant r,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow\ \sin x(2r\sin x - B) &\geqslant 0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nếu $B\neq 0$, ta chọn x_0 sao cho $0<\sin x_0<\dfrac{B}{2r}$. Khi đó

$$\sin x_0(2r\sin x_0 - B) < 0 \ \text{(mâu thuẫn)}.$$

Vậy $B=0$, nên

$$\begin{cases} a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0\\ b\cos\varphi - a\sin\varphi = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=0\\ b=0.\end{cases}$$

Ví dụ 2.53. Cho các số thực a,b,A,B. Xét đa thức lượng giác

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x.$$

Chứng minh rằng nếu $f(x)\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thì $a^2+b^2\leqslant 2$ và $A^2+B^2\leqslant 1$.

Lời giải. Đặt $r=a^2+b^2,\ \ R=A^2+B^2$. Chọn $\alpha,\ \beta$ sao cho

$$a=\sqrt{r}\cos\alpha\ ;\ \ b=\sqrt{r}\sin\alpha\ ; a\cos x + b\sin x = \sqrt{r}\cos(x-\alpha);$$

$$A=\sqrt{R}\cos 2\beta\ ;\ \ B=\sqrt{R}\sin 2\beta\ ;\ \ A\cos 2x + B\sin 2x = \sqrt{R}\cos 2(x-\beta).$$

Suy ra

$$f(x) = 1-\sqrt{r}\cos(x-\alpha) - \sqrt{R}\cos 2(x-\beta)\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) &= 1-\sqrt{r}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{R}\cos 2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right)\\ f\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) &= 1-\sqrt{r}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{R}\cos 2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

• Nếu $r > 2$ thì $1 - \sqrt{r} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0$. Mặt khác, thì

$$\cos 2\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left[\pi - 2\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -\cos 2\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{4}\right),$$

nên một trong hai số $f\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$ hoặc $f\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ phải có một số âm (mâu thuẫn). Vậy $r \leqslant 2$.

Ta lại có

$$f(\beta) = 1 - \sqrt{r}\cos(\beta - \alpha) - \sqrt{R},$$
$$f(\beta + \pi) = 1 - \sqrt{r}\cos(\beta - \alpha + \pi) - \sqrt{R}.$$

• Nếu $R > 1$ thì $1 - \sqrt{R} < 0$. Mà

$$\cos(\beta - \alpha) = -\cos(\beta - \alpha + \pi),$$

nên một trong hai số $f(\beta)$ hoặc $f(\beta + \pi)$ phải có một số âm (mâu thuẫn). Vậy $R \leqslant 1$.

Ví dụ 2.54. Cho đa thức lượng giác

$$f(x) = 1 + a\cos x + b\cos 2x + \cos 3x.$$

Chứng minh rằng nếu $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a = b = 0$.

Lời giải. Cho $x = \pi$ ta có $f(\pi) = 1 - a + b - 1 = -a + b \geqslant 0$.
Cho $x = \dfrac{\pi}{3}$ ta có $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}(a - b) \geqslant 0 \Rightarrow a = b$.
Ta có

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \cos 3x + a(\cos 2x + \cos x)\\
&= 1 + 4\cos^3 x - 3\cos x + a(2\cos^2 x - 1 + \cos x)\\
&= (\cos x + 1)(4\cos^2 x - 4\cos x + 1) + a(\cos x + 1)(2\cos x - 1)\\
&= (\cos x + 1)(2\cos x - 1)(2\cos x - 1 + a) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nếu $a = 0$ thì

$$f(x) = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)^2 \geqslant 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{ điều này đúng.}$$

Nếu $a < 0$, chọn x sao cho $\dfrac{1}{2} < \cos x < \dfrac{1-a}{2}$ thì $f(x) < 0$ (mâu thuẫn).

Nếu $a > 0$, chọn x sao cho $\dfrac{1}{2} > \cos x > \dfrac{1-a}{2}$ thì $f(x) < 0$ (mâu thuẫn).

Vậy $a = b = 0$.

2.6 Đặc trưng hàm của hàm số lượng giác

Ví dụ 2.55. Tìm hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện $f(1) = a$ với $a \in [-1; 1]$ cho trước và

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ \forall\ x, y\ \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải.

• Cho $x = y = 0$ ta được $2f(0) = 2f^2(0)$ nên $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Nếu $f(0) = 0$ thì cho $y = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}$ ta được $2f(x) = 0$ nên $f(x) \equiv 0$.

Nếu $f(0) = 1$ thì cho $x = y = 1$, ta được $f(2) + 1 = 2f^2(1)$

nên $f(2) = 2f^2(1) - 1 = 2a^2 - 1 = \cos(2\arccos a)$ (xem mục 5.1).

• Cho $x = 2,\ y = 1$ ta được

$$f(3) + f(1) = 2f(2)f(1)$$
$$\Rightarrow \quad f(3) = 2(2a^2 - 1)a - a = 4a^3 - 3a = \cos(3\arccos a).$$

Chứng minh quy nạp theo n ta được $f(n) = \cos(n\arccos a),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

• Cho $x = 0$, $\forall\ y\ \in \mathbb{Z}$ ta được $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ nên $f(y) = f(-y)$.

Do đó $f(x) = \cos(x\arccos a),\ \forall\ x\ \in \mathbb{Z}$.

Thử lại ta thấy $f(x) = \cos(x\arccos a)$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Vậy $f(x) = \cos(x\arccos a),\ \forall\ x\ \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2.56. Cho $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực. Tồn tại hay không tồn tại một đa thức

$$P_n(x) \ = \ x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

thoả mãn điều kiện

$$|P_n(x)| \leqslant a,\ \ \forall x \in [-a; a]?$$

Lời giải. Xét đa thức $P_n(x) = a\cos\left(n \arccos \dfrac{x}{a}\right),\ \forall x \in [-a; a]$.
Chứng minh quy nạp theo n ta thấy $P_n(x)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2.57. Tìm đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ với $a_0 \neq 0$ thoả mãn điều kiện

$$(1 - x^2)[P'(x)]^2 = n^2[1 - P^2(x)]\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

trong đó $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$.

Lời giải. Dễ thấy hai đa thức dạng $P(x) = \cos(n \arccos x)$ và $Q(x) = -\cos(n \arccos x)$ thoả mãn điều kiện bài toán. Ta chứng minh không còn đa thức nào khác thoả mãn bài ra.

Thật vậy

$$(2.15) \Rightarrow \begin{cases} P^2(1) = 1, \\ [(1 - x^2)(P'(x))^2]' = n^2[1 - P^2(x)]',\ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P^2(1) = 1, \\ P'(x)[n^2P(x) - xP'(x) + (1 - x^2)P''(x)] = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nhưng $P'(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm nên

$$n^2P(x) - xP'(x) + (1 - x^2)P''(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

So sánh các hệ số trong (2.16) ta được $a_{n-1} = 0$ và

$$k(k - 2n)a_{n-k} = (n - k + 2)(n - k + 1)a_{n-k+2}\ \ (\text{với } 2 \leqslant k \leqslant n).$$

Suy ra $a_{n-3} = a_{n-5} = \cdots = 0$, còn $a_{n-2},\ a_{n-4},\ \ldots$ được xác định duy nhất theo a_n.

Mặt khác, ta có

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)^2 = 1\ \ \big(= P^2(1)\big)$$

nên a_n chỉ nhận hai giá trị đối nhau.

Vậy chỉ có không quá hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2.58. Cho $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n$; $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$; $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu

$$h(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

thì $|h(z)|^2$ là một đa thức lượng giác bậc n theo t.

Lời giải. Ta có $e^{it} = \cos t + i \sin t$ nên $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Đặt $c_k = a_k + ib_k$ với $a_k, b_k \in \mathbb{R}$; $k = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
h(z) &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + ib_k)(\cos kt + i \sin kt) \\
&= \sum_{k=0}^{n} [(a_k \cos kt - b_k \sin kt) + i(b_k \cos kt + a_k \sin kt)], \\
|h(z)|^2 &= \left[\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt - b_k \sin kt)\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{n} (b_k \cos kt + a_k \sin kt)\right]^2 \\
&= \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j \cos jt + \mu_j \sin jt),
\end{aligned}$$

với

$$\lambda_0 = \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2; \;\; \lambda_k + i\mu_k = 2 \sum_{j=0}^{n} c_j c_{k-j}, \;\; (k = 1, \ldots, n-1).$$

$$\lambda_n + i\mu_n = 2c_0 c_n \neq 0 \text{ (do } c_0 \text{ và } c_n \text{ cùng khác 0).}$$

Vậy $|h(z)|^2$ là một đa thức lượng giác bậc n theo t.

Ví dụ 2.59. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \sin^{2p} x \;\text{ (p là một số tự nhiên)}$$

là một đa thức lượng giác theo hàm số cosin.

Lời giải. Từ công thức $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ dễ dàng suy ra

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \ \ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Vậy nên

$$\sin^{2p} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2p}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k \cdot e^{ikx} \cdot e^{-i(2p-k)x}\\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \cdot e^{2ikx - 2ipx}\right.\\
&\quad \left. + \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k \cdot e^{2i(k-p)x}\right) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k (e^{2i(k-p)x} + e^{-2i(k-p)x}) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \cdot \cos 2(k-p)x + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.
\end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là một đa thức lượng giác theo côsin bậc $2p$.

Ví dụ 2.60. Tìm các hàm $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = 2003, \ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2004,\\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cdot \cos y, \ \ \forall x, y \ \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lời giải. Trong điều kiện $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cdot\cos y, \ \forall x, y \ \in \mathbb{R}$ thay $x = t - \dfrac{\pi}{2}, \ y = \dfrac{\pi}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}$, ta thu được

$$f(t) + f(t-\pi) = 2f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0. \tag{2.17}$$

Tiếp tục thay $x = \dfrac{\pi}{2}, \ y = t - \dfrac{\pi}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}$, ta được

$$f(t) + f(\pi - t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot 2004\cdot \sin t. \tag{2.18}$$

Thay tiếp $x = 0,\ y = t - \pi,\ \forall t \in \mathbb{R}$, ta được

$$f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2f(0)\cdot\cos(t-\pi) = -2\cdot 2003\cdot\cos t. \tag{2.19}$$

Từ (2.17) và (2.18) ta suy ra

$$2f(t) + f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2\cdot 2004\cdot\sin t. \tag{2.20}$$

Từ (2.19) và (2.20) ta suy ra

$2f(t) - 2\cdot 2003\cdot\cos t = 2\cdot 2004\cdot\sin t$ nên $f(t) = 2003\cos t + 2004\sin t$.

Thử lại ta thấy

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2003\cdot\cos 0 + 2004\cdot\sin 0 = 2003,\\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2003\cdot\cos\frac{\pi}{2} + 2004\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 2004,
\end{aligned}$$

$f(x+y) + f(x-y) =$

$= 2003\cos(x+y) + 2004\sin(x+y) + 2003\cos(x-y) + 2004\sin(x-y)$

$= 2003\cdot 2\cos x\cos y + 2004\cdot 2\sin x\cos y$

$= 2\cdot(2003\cos x + 2004\cdot\sin x)\cos y = 2\cdot f(x)\cdot\cos y.$

Vậy $f(x) = 2003\cos x + 2004\sin x$.

Ví dụ 2.61. Tìm các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = 1,\\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Lời giải. Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 1 > 0$ nên $\exists\delta > 0$ sao cho

$$f(x) > 0,\ \forall x \in (-\delta; \delta).$$

Trong phương trình đã cho đổi chỗ x và y, ta được

$$f(y+x) + f(y-x) = 2f(y)f(x) \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $f(x-y) = f(y-x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Cho $y = 0$ ta thu được $f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Nói cách khác, $f(x)$ là hàm số chẵn.

Ta xét các trường hợp sau :

Trường hợp 1. $| f(x) |= 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó, do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 1$ nên $f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số này thoả mãn điều kiện bài toán.

Trường hợp 2. $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ | f(x_0) |< 1$.

Nhận xét rằng với n_0 đủ lớn và δ như trên, thì

$$\frac{x_0}{2^{n_0}} \in (-\delta\ ;\ \delta) \ \Rightarrow\ f\left(\frac{x_0}{2^{n_0}}\right) > 0.$$

Nếu $\exists n \in \mathbb{N}^* :\ f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$ thì trong phương trình đã cho ta đặt $y = x$ được

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Từ đây có

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) &= 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right]^2 - 1 = 1,\\
f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right) &= 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\right]^2 - 1 = 1,\\
f\left(\frac{x_0}{2^{n-3}}\right) &= 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right)\right]^2 - 1 = 1,\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
f(x_0) &= 2\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 - 1 = 1, \text{ trái với giả thiết.}
\end{aligned}$$

Vậy nên $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chọn $x_1 = \frac{x_0}{2^{n_0}}$ thì $x_1 \neq 0$ và

$$0 < f(x_1) < 1 \ \text{ và } f(x) > 0,\ \forall x \in (-|x_1|; |x_1|).$$

Đặt $f(x_1) = \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Từ (7) ta có

$$f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha.$$

Giả sử $f(kx_1) = \cos k\alpha,\ \forall k \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
f((n+1)x_1) = f(nx_1 + x_1) &= 2f(nx_1)f(x_1) - f((n-1)x_1)\\
&= 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha\\
&= \cos(n+1)\alpha.
\end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp, ta có

$$f(mx_1) = \cos m\alpha,\ \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{2.23}$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên từ kết quả trên, kết hợp với giả thiết $f(0) = 1 = \cos 0\alpha$. Ta có

$$f(mx_1) = \cos m\alpha,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.24}$$

Trong (2.22) thay x bởi $\dfrac{x_1}{2}$ ta có

$$f(x_1) = 2\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 - 1.$$

Từ đó suy ra

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + f(x_1)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Giả sử $f\left(\dfrac{x_1}{2^k}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2^k},\ \forall k \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + f\left(\dfrac{x_1}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\dfrac{\alpha}{2^n}}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp thì

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.25}$$

Từ (2.24) và (2.25), ta có

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right) = \cos\frac{m\alpha}{2^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.26}$$

Từ (2.26) và do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x_1 t) = \cos\alpha t,\ \forall t \in \mathbb{R}$, hay bằng cách đặt $x_1 t = x$; $\dfrac{\alpha}{x_1} = a$, ta thu được

$$f(x) = \cos ax,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số này thoả mãn điều kiện bài toán.

2.7 Bài tập

Bài 2.1. Tìm số nguyên n nếu $(1+i)^n = (1-i)^n$.

Bài 2.2. Biểu diễn các số phức sau dưới dạng lượng giác

1. $a = -1 + i\sqrt{3}l$;
2. $b = 2 + \sqrt{3} + i$;
3. $c = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$;
4. $d = \dfrac{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}{1+\cos\varphi - i\sin\varphi}\cdot$

Bài 2.3. Tìm điều kiện để $\mathrm{Re}\,(z_1z_2) = (\mathrm{Re}\,z_1)(\mathrm{Re}\,z_2)$.

Bài 2.4. Áp dụng công thức Moivre hãy:

1. Biểu diễn $\tan 5\varphi$ qua $\tan\varphi$.
2. Biểu diễn tuyến tính $\sin^5\varphi$ qua các hàm sin của góc bội của φ.
3. Biểu diễn $\cos^4\varphi$ và $\sin^4\varphi\cos^3\varphi$ qua hàm cosin của các góc bội.

Bài 2.5. Chứng minh rằng

1. $\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \cdots + \sin(\varphi+n\alpha) = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi + \frac{(n)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$
2. $\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi+2\alpha) + \cdots + \cos(\varphi+n\alpha) = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi + \frac{(n)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot$
3. $1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \cdots + a^n\cos n\varphi$
$$= \frac{a^{n+2}\cos n\varphi - a^{n+1}\cos(n+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}\cdot$$
4. $a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \cdots + a^n\sin n\varphi$
$$= \frac{a^{n+2}\sin n\varphi - a^{n+1}\sin(n+1)\varphi + a\sin\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}\cdot$$

Bài 2.6. Chứng minh rằng

1. $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha = \dfrac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha} + \dfrac{n-1}{2}\cdot$
2. $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cdots + \sin^2 n\alpha = \dfrac{n+1}{2} - \dfrac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}\cdot$

Bài 2.7. Chứng minh rằng

1. $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{4\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\dfrac{2n\pi}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}\cdot$
2. $\cos\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2}}+2}}{2}\cdot$
3. $\sin\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\cdot$

Bài 2.8. Chứng minh rằng với mọi n chẵn $(n=2m)$, ta đều có

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\cdots+(-1)^mC_n^n\sin^n\varphi.$$

Bài 2.9. Chứng minh rằng với mọi n lẻ $(n=2m+1)$, ta đều có

$$\sin n\varphi=C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\cdots+(-1)^{m-1}C_n^{n-1}\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi.$$

Bài 2.10. Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{Z}$, ta đều có

1. $\cos\varphi+C_n^1\cos2\varphi+\cdots+C_n^{n-1}\cos n\varphi+\cos n+1\varphi=2^n\cos^n\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{n+2}{2}\varphi,$
2. $\sin\varphi+C_n^1\sin2\varphi+\cdots+C_n^{n-1}\sin n\varphi+\sin n+1\varphi=2^n\cos^n\dfrac{\varphi}{2}\sin\dfrac{n+2}{2}\varphi.$

Bài 2.11. Lập phương trình mà nghiệm của nó là các số

1. $\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1},\ \sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1},\ \sin^2\dfrac{3\pi}{2n+1},\ \cdots,\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1};$
2. $\cot^2\dfrac{\pi}{2n+1},\ \cot^2\dfrac{2\pi}{2n+1},\ \cot^2\dfrac{3\pi}{2n+1},\ \cdots,\cot^2\dfrac{n\pi}{2n+1};$

Bài 2.12. Chứng minh các đẳng thức sau

1. $\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n},$
2. $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}.$

Bài 2.13. Chứng minh các đẳng thức sau

1. $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$
2. $\cos\dfrac{\pi}{2n}\cos\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$

Bài 2.14. Tìm tất cả các giá trị của

1. căn bậc hai $\sqrt{4-3i}$;
2. căn bậc n của đơn vị ;
3. căn bậc 5 của $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{8+8i}$.

Bài 2.15. Chứng minh rằng nếu α là một giá trị của căn bậc n của số phức $z \in \mathbb{C}$ thì mọi giá trị khác của căn đó thu được bằng phép nhân α với từng giá trị ε_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ là căn bậc n của đơn vị, tức là

$$\alpha, \alpha\varepsilon_1, \alpha\varepsilon_2, \ldots, \alpha\varepsilon_{n-1}.$$

Bài 2.16. 1. Tính tổng S mọi căn bậc n của 1.

2. Tính tổng các lũy thừa bậc k của mọi căn bậc n của số phức α.

Bài 2.17. Tính tổng

$$S = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}.$$

Bài 2.18. Cho $1 < n \in \mathbb{N}$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$, giải các phương trình sau:

1. $(x+c)^n - (x-c)^n = 0$;
2. $(x+ci)^n - (x-ci)^n = 0$;
3. $(x+ci)^n + i(x-ci)^n = 0$;
4. $(x+ci)^n - (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x-ci)^n = 0, \quad \alpha \neq 2k\pi$.

Bài 2.19. Chứng minh rằng nếu n là bội của 3 thì

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$$

và nếu n không chia hết cho 3 thì

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = -1.$$

Bài 2.20. Tính các biểu thức

1. $\sigma_1 = \left(1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \left[1 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2^2}\right] \cdots \left[1 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2^n}\right].$

2. $\sigma_2 = \left(1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n \left[1 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2^2}\right] \cdots \left[1 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2^n}\right].$

Bài 2.21. Chứng minh rằng

1. $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\cos\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ với $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$
;

2. $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ với $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$
;

3. $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)\,x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$ với $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

4. $\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)\,x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$ với $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

5. $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx = \dfrac{\sin(2n+1)x}{2\sin x}$ với $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
;

6. $\sin 2x + \sin 4x + \cdots + \sin 2nx = \dfrac{\sin nx\sin(n+1)x}{\sin x}$ với $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 2.22. Chứng minh rằng

1. $\sin x + 3\sin 3x + \cdots + (2n-1)\sin(2n-1)x$
$= \dfrac{\sin 2nx\cos x - 2n\cos 2nx\sin x}{2\sin^2 x}$ với $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

2. $\cos x + 2^2\cos 2x + 3^2\cos 3x + \cdots + n^2\cos nx$
$= -\dfrac{2n\sin\dfrac{x}{2}\cos nx + 2n^2\sin^2\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}x + \cos\dfrac{x}{2}\sin nx}{4\sin^3\dfrac{x}{2}}$
với $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$;

3. $\cos x + 3^2\cos 3x + 5^2\cos 5x + \cdots + (2n-1)^2\cos(2n-1)x$
$= \dfrac{(4n^2+1)\sin 2nx\sin^2 x - 2\sin 2nx + 2n\sin 2x\cos 2nx}{2\sin^3 x}$
với $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 2.23. Tồn tại hay không tồn tại đa thức dạng

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

và thoả mãn $|P_n(x)| \leqslant 2,\ \forall x \in [-2; 2]$?

Bài 2.24. Chứng minh hàm số $f(x) = \cos^{2p} x$ (với p là một số tự nhiên) là một đa thức lượng giác.

Bài 2.25. Tìm tất cả các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 2.26. Chứng minh rằng nếu với mọi $x \in \mathbb{R}$ thoả mãn

$$a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x \geqslant -\sqrt{c^2 + d^2}.$$

thì $a = b = 0$.

Bài 2.27. Cho đa thức lượng giác $f(x) = 1 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x$. Chứng minh rằng nếu $f(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 3$.

Bài 2.28. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = 4\sin 3x - 4\cos 2x - 5\sin x + 5.$$

Chương 3

Một số ứng dụng của số phức trong đại số

3.1 Phương trình và hệ phương trình đại số

3.1.1 Phương trình bậc hai

Ta nhắc lại tính chất nghiệm của tam thức bậc hai với hệ số thực

$$f(x) := ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0,\ \ \Delta = b^2 - 4ac.$$

- Nếu $\Delta < 0$, phương trình không có nghiệm thực.
- Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Nhận xét rằng trong trường hợp $\Delta < 0$, phương trình tuy không có nghiệm thực nhưng vẫn có hai nghiệm phức là các số phức liên hợp $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Khi các hệ số của phương trình bậc hai $f(x) = 0$ là các số phức thì ta vẫn sử dụng các phép biến đổi đồng nhất thức như trong trường hợp số thực.

Ta viết

$$af(x) = a^2x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)(ax) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} = 0,$$

hay

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4},$$

Ví dụ 3.1. Cho cặp số dương a, b với $a \geq b$ và $a + b = 1$. Gọi u_n, v_n là các nghiệm của tam thức bậc hai

$$f_n(x) = x^2 - b^n x - a^n, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng

$$u_n, v_n \in (-1; 1), \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Ta có $\Delta = b^{2n} + 4a^{2n} > 0$ nên các phương trình tương ứng đều có nghiệm phân biệt. Theo giả thiết thì

$$f_n(-1) = 1 + b^n - a^n > 0, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

và

$$f_n(1) = 1 - b^n - a^n > 0, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy -1 và 1 nằm ngoài khoảng nghiệm. Mặt khác

$$-1 < \frac{b^n}{2} = \frac{u_n + v_n}{2} < 1,$$

nên

$$u_n, v_n \in (-1; 1), \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 3.2. Cho $0 < p < q$. Giả thiết các số

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

thoả mãn bất phương trình bậc hai

$$f(t) := t^2 - (p + q)t + pq \leq 0.$$

Kí hiệu

$$A = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \cdots + t_n),$$
$$B = \frac{1}{n}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2).$$

Chứng minh rằng

$$\frac{A^2}{B} \geq \frac{4pq}{(p+q)^2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - p)(t_k - q) \leq 0$$

hay

$$\sum_{k=1}^{n} t_k^2 - (p+q)\sum_{k=1}^{n} t_k + npq \leq 0.$$

Sử dụng kí hiệu của bài toán, ta có

$$B - (p+q)A + pq \leq 0.$$

Vậy nên

$$\frac{B}{A^2} \leq \frac{-pq}{A^2} + \frac{p+q}{A^2} = -pq\left(\frac{1}{A} - \frac{p+q}{2pq}\right)^2 + \frac{(p+q)^2}{4pq} \leq \frac{(p+q)^2}{4pq},$$

điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(t_k - p)(t_k - q) = 0, \;\; A = \frac{2pq}{p+q}, \;\; k = 1, \dots, n.$$

Ví dụ 3.3. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $q > 0$ và cho tam thức bậc hai

$$g(x) = a(q^2 + q^{-2})x^2 + b(q^{\sqrt{2}} + q^{-\sqrt{2}})x + c(q^0 + q^{-0})$$

không có nghiệm đều thực. Chứng minh rằng tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

không có nghiệm thực.

Lời giải. Với $q = 1$, điều cần chứng minh là hiển nhiên.
Không mất tính tổng quát ta có thể coi $q > 1$ vì vai trò của q và $p = \dfrac{1}{q}$ là bình đẳng.
Giả sử $\Delta_f = b^2 - 4ac \geq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}\Delta_g &= b^2(q^{\sqrt{2}} + q^{-\sqrt{2}})^2 - 8ac(q^2 + q^{-2})\\ &\geq b^2(q^{\sqrt{2}} + q^{-\sqrt{2}})^2 - 2b^2(q^2 + q^{-2}).\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$(q^{\sqrt{2}} + q^{-\sqrt{2}})^2 \geq 2(q^2 + q^{-2})$$

hay

$$q^{\sqrt{2}} - q^{-\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}(q^1 - q^{-1}) \tag{3.1}$$

và từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.
Viết (3.1) dưới dạng

$$h(q) := q^{\sqrt{2}} - q^{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}(q^1 - q^{-1}) \geq 0.$$

Khi đó ta có

$$h'(q) = \frac{\sqrt{2}}{q}(q^{\sqrt{2}} - q)\left(1 - \frac{1}{qq^{\sqrt{2}}}\right) \geq 0 \ \ \forall q > 1.$$

Vậy nên $h(q)$ là hàm đồng biến trong $[1; +\infty)$ và vì vậy

$$h(q) \geq h(1) = 0 \ \ \forall q \geq 1.$$

Từ đó ta có (3.1) đúng, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.4. Cho biết $\tan x, \tan y$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$at^2 + vd + c = 0.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$M = a\sin^2(x + y) + b\sin(x + y)\cos(x + y) + c\cos^2(x + y).$$

Lời giải. Theo Định lí Viète thì

$$\tan x + \tan y = -\frac{b}{a},\ \ \tan x \tan y = \frac{c}{a}.$$

Khi $\cos(x+y) = 0$ thì $\tan x \tan y = 1$ và khi đó $a = c$ nên $M = c$.

Khi $\cos(x+y) \neq 0$ thì $\tan x \tan y \neq 1$ và khi đó $a \neq c$ và

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{b}{c-a}.$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} M &= [a\tan^2(x+y) + b\tan(x+y) + c]\cos^2(x+y) \\ &= \frac{a\tan^2(x+y) + b\tan(x+y) + c}{1 + \tan^2(x+y)} = c. \end{aligned}$$

3.1.2 Phương trình bậc ba

Xét phương trình bậc ba với hệ số thực hoặc phức.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ \ (a \neq 0).$$

Trong trường hợp khi các hệ số là các số thực, thì ta quan tâm nhiều hơn đến các nghiệm thực của phương trình.

Ví dụ 3.5. Giải phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ \ (a \neq 0) \tag{3.2}$$

biết $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

Lời giải. Vì x_0 là một nghiệm của phương trình (3.2) nên

$$ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0.$$

Do đó có thể viết (1) dưới dạng

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0.$$

Từ đó ta nhận được

$$(x - x_0)[ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c] = 0.$$

Xét phương trình

$$ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c = 0. \tag{3.3}$$

Ta có

$$\Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a(ax_0^2 + bx_0 + c).$$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (3.3) vô nghiệm và như vậy thì phương trình (3.2) có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình (3.3) có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm là

$$x_0; x_{1,2} = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ví dụ 3.6. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = m, \ \ |m| \leq 1. \tag{3.4}$$

Lời giải. Đặt $m = \cos\alpha$ $(= \cos(\alpha \pm 2\pi))$. Vì $\cos\alpha = 4\cos^3\dfrac{\alpha}{3} - 3\cos\dfrac{\alpha}{3}$, nên phương trình (3.4) có 3 nghiệm là

$$x_1 = \cos\frac{\alpha}{3}; \ \ x_{2,3} = \cos\frac{\alpha \pm 2\pi}{3}.$$

Ví dụ 3.7. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = m, \ \ |m| > 1. \tag{3.5}$$

Lời giải. Nhận xét rằng khi $|x| \leq 1$ thì trị tuyệt đối của biểu thức ở vế trái của phương trình không vượt quá 1 nên $\neq m$. Vì vậy, ta có thể đặt

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right), \ \ a \neq 0.$$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right).$$

Từ đó ta có cách giải đối với phương trình (3.5) như sau

Đặt

$$m = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right).$$

Khi đó

$$a = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 - 1}}$$

và phương trình (3.5) có dạng

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right).$$

Phương trình này có nghiệm

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Ta chứng minh rằng phương trình (3.5) có nghiệm duy nhất.

Giả sử phương trình (3.5) có nghiệm x_0 thì $x_0 \notin [-1; 1]$. Do đó $|x_0| > 1$. Khi đó (3.5) có dạng

$$4x^3 - 3x = 4x_0^3 - 3x_0$$

hay

$$(x - x_0)[4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3] = 0.$$

Xét phương trình

$$4x^2 + 4x_0x + 4x_0^2 - 3 = 0. \tag{3.6}$$

Ta có $\Delta' = 12 - 12x_0^2 < 0$ và vì vậy phương trình (3.6) vô nghiệm.

Vậy phương trình (3.5) có một nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}\right).$$

Ví dụ 3.8. Giải và biện luận phương trình

$$4x^3 + 3x = m,\ \ m \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Lời giải. Nếu phương trình (3.7) có nghiệm $x = x_0$ thì đó cũng chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy, với $x > x_0$ thì $4x^3 + 3x > 4x_0^3 + 3x_0 = m$ và với $x < x_0$ thì ta có $4x^3 + 3x < 4x_0^3 + 3x_0 = m$. Do đó phương trình (3.7) có không quá một nghiệm.

Đặt

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) \ \ (a \neq 0).$$

Ta dễ dàng chứng minh đẳng thức

$$4x^3 + 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right),$$

Do đó, nếu đặt

$$m = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$$

thì

$$a^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1}$$

và khi đó nghiệm duy nhất của phương trình (3.7) là

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}\right).$$

Ví dụ 3.9. Giải và biện luận phương trình

$$t^3 + at^2 + vd + c = 0. \tag{3.8}$$

Lời giải. Đặt $t = y - \frac{a}{3}$. Khi đó phương trình (3.8) có thể viết được dưới dạng

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

$$\Leftrightarrow y^3 - py = q,\ \ p = \frac{a^2}{3} - b;\ \ q = -\frac{a^3}{27} + \frac{ab}{3} + c. \tag{3.9}$$

Nếu $p = 0$ thì phương trình (3.8) có nghiệm duy nhất $y = \sqrt[3]{q}$.

Nếu $p > 0$ thì ta đưa phương trình đã cho về dạng các bài toán đã xét bằng cách đặt $y = 2\sqrt{\frac{p}{3}}x$ ta thu được phương trình dạng

$$4x^3 - 3x = m,\ \ m = \frac{3\sqrt{3q}}{2p\sqrt{p}}. \tag{3.10}$$

Nếu $|m| \leq 1$ thì ta đặt $m = \cos\alpha$ và phương trình (3.10) có 3 nghiệm

$$x_1 = \cos\frac{\alpha}{3};\ \ x_{2,3} = \cos\frac{\alpha \pm 2\pi}{3}.$$

Nếu $|m| \geq 1$ thì đặt

$$m = \frac{1}{2}\left(d^3 + \frac{1}{d^3}\right)$$

ta thu được nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là

$$x = \frac{1}{2}\left(d + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2+1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2+1}}\right).$$

Nếu $p < 0$ thì đặt $y = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}x$ ta sẽ được phương trình $4x^3 + 3x = m$.

Đặt

$$m = \frac{1}{2}\left(d^3 - \frac{1}{d^3}\right),$$

với

$$d^3 = m \pm \sqrt{m^2+1}.$$

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}\right).$$

Từ nghiệm x ta tính được nghiệm y và từ đó suy ra nghiệm t

$$t = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}\right) - \frac{a}{3}.$$

Ví dụ 3.10. Giải phương trình

$$8x^3 + 24x^2 + 6x - 10 - 3\sqrt{6} = 0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$$x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{10+3\sqrt{6}}{8} = 0.$$

Đặt $x = y - 1$. Ta thu được phương trình

$$y^3 - \frac{9}{4}y - \frac{3\sqrt{6}}{8} = 0.$$

Lại đặt $y = t\sqrt{3}$ ta thu được phương trình

$$4t^3 - 3t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Phương trình này có các nghiệm là

$$t_1 = \cos\frac{\pi}{12},\ \ t_2 = \cos\frac{3\pi}{4},\ \ t_3 = \cos\frac{7\pi}{12}.$$

Trở lại với ẩn x ta có các nghiệm

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{12} - 1,\ \ x_2 = \cos\frac{3\pi}{4} - 1,\ \ x_3 = \cos\frac{7\pi}{12} - 1.$$

3.1.3 Phương trình bậc bốn

Xét phương trình bậc bốn với hệ số thực hoặc phức

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \ \ (a \neq 0).$$

Ví dụ 3.11. Giải phương trình trùng phương

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ \ (a, b, c \in \mathbb{R}, \ \ a \neq 0, \ c \neq 0) \tag{3.11}$$

Lời giải. Đặt $x^2 = y$, $y \geq 0$. Khi đó phương trình (3.11) trở thành

$$ay^2 + by + c = 0, \ \ y \geq 0.$$

Giải phương trình bậc hai này ta tìm được y, từ đó (với $y \geq 0$) tính được x.

Nếu $ac < 0$ thì

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Nếu $ac \geq 0$ và $b^2 - 4ac \geq 0$ thì

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Nếu $ac \geq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình (3.11) vô nghiệm.

Ví dụ 3.12. Giải phương trình

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$$

với giả thiết rằng $a + b = c + d$.

Lời giải. Đặt $x^2 + (a + b)x = x^2 + (c + d)x = t$, ta thu được phương trình

$$(t + ab)(t + cd) = m.$$

Giải và biện luận phương trình này ta thu được t và từ đó tính được x.

Ví dụ 3.13. Giải phương trình

$$(x+a)^4+(x+b)^4=m. \tag{3.12}$$

Lời giải. Đặt $x=t-\dfrac{a+b}{2}$. Phương trình (3.12) trở thành phương trình trùng phương dạng (9)

$$2t^4+12t^2+2-m=0.$$

Giải phương trình này tìm được t, từ đó tính được x.

Ví dụ 3.14. Giải phương trình

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{3.13}$$

với điều kiện

$$ad^2=eb^2 \ \ (a,e\neq 0). \tag{3.14}$$

Phương trình (3.13) với điều kiện (3.14) được gọi là phương trình hồi quy.

Lời giải. Viết điều kiện (3.14) dưới dạng

$$\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2,\ \ \frac{d}{b}=\alpha.$$

Ta có $d=b\alpha$, $e=a\alpha^2$ và sau khi thế vào phương trình (3.13), ta thu được

$$ax^4+bx^3+cx^2+b\alpha x+a\alpha^2=0. \tag{3.15}$$

Nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (3.15). Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta thu được

$$at^2+vd+c-2a\alpha=0,\ \ t=x+\frac{\alpha}{x}. \tag{3.16}$$

Giải và biện luận phương trình (3.16), từ đó tìm được t, sau đó tính x.

Ví dụ 3.15. Giải phương trình

$$x^4 = ax^2 + bx + c, \tag{3.17}$$

biết rằng

$$b^2 = 4(a+2)(c+1),\ b \neq 0. \tag{3.18}$$

Lời giải. Xét tam thức bậc hai ứng với biệt thức

$$\Delta = b^2 - 4(a+2)(c+1) = 0$$

dạng

$$f(x) = (a+2)x^2 + bx + c + 1.$$

Viết phương trình (3.18) dưới dạng tương đương sau

$$(x^2+1)^2 = (a+2)x^2 + bx + c + 1. \tag{3.19}$$

Nếu $a + 2 < 0$ tức $a < -2$ thì

$$(x^2+1)^2 > 0,\ \ (a+2)x^2 + bx + c + 1 \leq 0$$

nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $a + 2 > 0$ tức $a > -2$ thì ta có thể viết (3.19) dưới dạng

$$(x^2+1)^2 = \left(\sqrt{a+2}x \pm \sqrt{c+1}\right)^2$$

(dấu $(+)$ ứng với trường hợp $b > 0$, dấu $(-)$ ứng với trường hợp $b < 0$).

Ta thu được các phương trình bậc hai

$$x^2 + 1 = \pm\left(\sqrt{a+2}x \pm \sqrt{c+1}\right).$$

Ví dụ 3.16. Giải phương trình

$$x^4 = ax^2 + bx + c\ \ (b \neq 0). \tag{3.20}$$

Lời giải. Gọi α là số thực thoả mãn hệ thức

$$b^2 = 4(a+2\alpha)(c+\alpha^2). \tag{3.21}$$

Nhận xét rằng luôn luôn tồn tại số α như trên vì phương trình (3.21) là một phương trình bậc 3 đối với α. Khi đó tam thức bậc hai

$$f(x) := (a+2\alpha)x^2 + bx + (c+\alpha^2)$$

có nghiệm kép và

$$f(x) = \begin{cases} (a+2\alpha)\left[x + \dfrac{b}{2(a+2\alpha)}\right]^2 & \text{nếu} \quad a+2\alpha \neq 0,\\ c+\alpha^2 & \text{nếu} \quad a+2\alpha = 0. \end{cases}$$

Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 = f(x)$$

hay

$$(x^2+\alpha)^2 = f(x). \tag{3.22}$$

Nếu $a+2\alpha = 0$ thì (3.22) có dạng $(x^2+\alpha)^2 = c+\alpha^2$.

Nếu $a+2\alpha < 0$ thì phương trình (3.22) vô nghiệm.

Nếu $a+2\alpha > 0$ thì phương trình (3.22) trở thành cặp phương trình bậc hai

$$x^2+\alpha = \pm\sqrt{a+2\alpha}\left(x - \frac{b}{2(a+2\alpha)}\right).$$

Ví dụ 3.17. Giải phương trình

$$t^4 + \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta = 0. \tag{3.23}$$

Lời giải. Đặt $t = x - \dfrac{a}{4}$. Khi đó phương trình (3.23) có dạng

$$x^4 = ax^2 + bx + c, \tag{3.24}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
a =& \frac{6\alpha^2}{16} - \beta,\\
b =& \frac{2\alpha^3}{16} + \frac{1}{2}\alpha\beta - \gamma,\\
c =& \frac{1}{16}(3\alpha^4 - 16\beta\alpha^2 + 64\alpha\beta - 256\delta).
\end{aligned}$$

Tiếp theo ta giải (3.24) theo cách giải của bài toán trước.

Ví dụ 3.18. Cho $a > 0$. Khai triển biểu thức

$$\left(1 - a\sqrt{x}\right)^8 + \left(1 + a\sqrt{x}\right)^8$$

ta thu được đa thức (bậc 4) $P(x)$. Giải phương trình $P(x) = 0$.

Lời giải. Đặt $a^2x = t$ ta thu được phương trình

$$t^4 + 28t^3 + 70t^2 + 28t + 1 = 0.$$

Đây là phương trình hồi quy nên dễ dàng đưa về dạng phương trình bậc hai

$$y^2 + 28y + 68 = 0$$

với $y = t + \frac{1}{t}$.

Phương trình bậc hai này có hai nghiệm $y_{1,2} = -14 \pm \sqrt{128}$. Từ đó ta tìm được t và tính được phương trình có 4 nghiệm thực âm.

Ví dụ 3.19. Giải phương trình

$$t^4 + 4t^3 + 3t^2 - 12t - 16 = 0.$$

Lời giải. Đặt $t = x - 1$. Ta được phương trình

$$x^4 = 3x^2 + 10x + 4.$$

Ta xác định a sao cho $10^2 = 4(3+2a)(4+a^2)$ hay

$$2a^3 + 3a^2 + 8a - 13 = 0.$$

Ta thấy $a = 1$ thoả mãn phương trình. Vậy có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$$(x^2+1)^2 = 5x^2 + 10x + 5,$$

hay

$$(x^2+1)^2 = 5(x+1)^2.$$

Giải phương trình này ta thu được các nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}.$$

3.1.4 Phương trình bậc cao

Ta xét một số trường hợp đặc biệt của phương trình bậc cao giải được bằng cách sử dụng các đồng nhất thức đại số và lượng giác.

Ví dụ 3.20. Cho bộ số $m, n, p \in \mathbb{R}$. Giải phương trình

$$\frac{x^3+m^3}{(x+m)^3} + \frac{x^3+n^3}{(x+n)^3 + \dfrac{x^3+p^3}{(x+p)^3}} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x-m}{x+m} \cdot \frac{x-n}{x+n} \cdot \frac{x-p}{x+p} = 0.$$

Lời giải. Nhận xét rằng

$$\frac{x^3+m^3}{(x+m)^3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{(x-m)^2}{(x+m)^2}.$$

Vì vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{(x-m)^2}{(x+m)^2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{(x-n)^2}{(x+n)^2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{(x-p)^2}{(x+p)^2} - \\ - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x-m}{x+m} \cdot \frac{x-n}{x+n} \cdot \frac{x-p}{x+p} = 0. \quad (3.25)$$

Đặt

$$\frac{x-m}{x+m}=a,\ \ \frac{x-n}{x+n}=b,\ \ \frac{x-p}{x+p}=c$$

và để ý rằng

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}b^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}c^2-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}abc=0$$

có thể biến đổi được về dạng

$$(ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2). \tag{3.26}$$

Thay các giá trị a, b, c theo biến x, m, n, p ta được

$$(ab+c)^2=\frac{4[x^3+(mn-mp-np)x]^2}{(x+m)^2(x+n)^2(x+p)^2},$$

$$1-a^2=\frac{4mx}{(x+m)^2},\ \ 1-b^2=\frac{4nx}{(x+n)^2}.$$

Vậy (3.26) có dạng

$$x^2[x^2+2(x+p)\sqrt{mn}+mn-mp-np][x^2-2(x+p)\sqrt{mn}+mn-mp-np]=0.$$

Giải ra ta được các nghiệm của phương trình là

$$x_1=x_2=0,$$

$$x_{3,4}=\pm(\sqrt{mp}-\sqrt{np})-\sqrt{mn},$$

$$x_{5,6}=\sqrt{mn}\pm(\sqrt{mp}+\sqrt{np}.$$

Ví dụ 3.21. Cho $0<\alpha<\dfrac{\pi}{n+2}$.
Chứng minh rằng với mọi đa thức $Q(x)\in\mathbb{R}[x]$ bậc n thì đa thức

$$P(x)=(x^2-2x\cos\alpha+1)Q(x)$$

không thể có tất cả các hệ số đều không âm.

Lời giải. Giả sử

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

và

$$P(x) = b_0x^{n+2} + b_1x^{n+1} + \cdots + b_{n+1}x + b_{n+2}.$$

Khi đó

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 - 2a_0 \cos\alpha, \\ b_2 = a_2 + a_0 - 2a_1 \cos\alpha, \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n+1} = a_{n-1} - 2a_n \cos\alpha, \\ b_{n+2} = a_n. \end{cases}$$

Suy ra

$$b_k = a_k + a_{k-2} - 2a_{k-1}\cos\alpha, \;\; a_{n+2} = a_{n+1} = 0, \;\; a_{-1} = a_{-2} = 0$$

và

$$\sum_{k=0}^{n+2} b_k \sin k\alpha = 0.$$

Mà $\sin k\alpha > 0$ vì $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{n+2}\right)$ nên tồn tại hệ số $b_j < 0$.

Ví dụ 3.22. Cho $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là $n+1$ số đôi một khác nhau. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_0 + x_1a_0 + x_2a_0^2 + \cdots + x_na_0^n &= 0 \\ x_0 + x_1a_1 + x_2a_1^2 + \cdots + x_na_1^n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_0 + x_1a_n + x_2a_n^2 + \cdots + x_na_n^n &= 0. \end{cases} \tag{1}$$

Lời giải. Xét đa thức

$$f(y) = x_ny^n + x_{n-1}y^{n-1} + \cdots + x_1y + x_0.$$

Ta có $\deg f \le n$. Từ hệ (1) ta có

$$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0,$$

nên $f(y)$ có $n+1$ nghiệm phân biệt, do đó $f(y) \equiv 0$. Từ đó suy ra

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

Thử lại ta thấy $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 0$ thoả mãn hệ đã cho. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

$$(x_0; x_1; \cdots; x_n) = (0; 0; \cdots; 0).$$

Ví dụ 3.23. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số thực đôi một khác nhau. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 + a_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_n + a_1^n & = 0 \\ a_2^{n-1}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \cdots + x_n + a_2^n & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n^{n-1}x_1 + a_n^{n-2}x_2 + \cdots + x_n + a_n^n & = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Xét đa thức

$$f(u) = u^n + x_1u^{n-1} + \cdots + x_{n-1}u + x_n.$$

Từ hệ trên ta có

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0.$$

Xét

$$\begin{aligned} g(u) &= (u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_n) \\ &= u^n + A_1u^{n-1} + \cdots + A_{n-1}u + A_n, \end{aligned}$$

trong đó do $g(u)$ có n nghiệm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $\deg g = n$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên theo Định lí Viète thì

$$\begin{cases} A_1 & = (-1)^1(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ A_2 & = (-1)^2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ A_n & = a_1a_2\cdots a_n \end{cases} \tag{2}$$

Xét đa thức

$$h(u) = f(u) - g(u) = (x_1 - A_1)u^{n-1} + (x_2 - A_2)u^{n-2} + \cdots + (x_n - A_n).$$

Ta có deg $h \leq n-1$ và $h(u)$ cũng có n nghiệm là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ phân biệt nên $h(u) \equiv 0$. Do đó ta có

$$x_1 = A_1,\ x_2 = A_2,\ \ldots,\ x_n = A_n, \tag{3.27}$$

trong đó các số A_i được xác định từ (2). Vậy hệ có nghiệm được xác định như ở (3) và (2).

Ví dụ 3.24. Tồn tại hay không tồn tại các số $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ là các nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k a_k^k x^{n-k}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các số như vậy. Khi đó theo Định lí Viète thì

$$C_n^k a_k^k = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} \ \ (k = 1, \ldots, n)$$

(tổng này có C_n^k số hạng).

Giả sử

$$|a_k| = \max\{|a_1|,\ |a_2|, \ldots, |a_n|\}.$$

Khi đó ta có

$$C_n^k |a_k|^k = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} |a_{i_1}||a_{i_2}| \cdots |a_{i_k}| \leq C_n^k |a_k|^k.$$

Vậy

$$|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n|.$$

Mặt khác

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| = n|a_1|$$

nên $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ cùng dấu và do đó chúng bằng nhau và đặt bằng a. Ta được $P(x) = (x-a)^n$ là đa thức thoả mãn điều kiện bài ra.

Ví dụ 3.25. Chứng minh rằng không tồn tại một tập hữu hạn các số thực dương M sao cho ứng với mỗi n nguyên dương đều tồn tại đa thức bậc n thuộc $M[x]$ có đúng n nghiệm đều thuộc M.

Lời giải. Giả sử tồn tại tập

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \ \ (a = a_1 < \cdots < a_n = b)$$

thoả mãn yêu cầu của bài toán. Khi đó theo giả thiết thì tồn tại đa thức

$$P(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in M[x]$$

sao cho $P(x)$ có n nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc M. Theo Định lí Viète thì

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \left(-\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 - 2\frac{b_{n-2}}{b_n} < \left(-\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 + 2\frac{|b_{n-2}|}{|b_n|}.$$

Suy ra

$$na^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

điều này là không thể xảy ra. Vậy không tồn tại một tập hữu hạn các số thực dương M sao cho ứng với mỗi n nguyên dương đều tồn tại đa thức bậc n thuộc $M[x]$ có đúng n nghiệm đều thuộc M.

Ví dụ 3.26. Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có ít nhất 2 nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = f(x) - f'(x)$ cũng có ít nhất 2 nghiệm thực.

Lời giải. Giả sử x_1, x_2 $(x_1 \leq x_2)$ là nghiệm của $f(x)$. Xét hàm số

$$g(x) = e^{-x} f(x).$$

Ta có

$$g'(x) = e^{-x}[f'(x) - f(x)].$$

Theo Định lí Rolle thì $g'(x)$ có ít nhất một nghiệm thực trong (x_1, x_2) nếu $x_1 < x_2$ và có nghiệm bằng x_1 nếu $x_2 = x_1$. Suy ra đa thức $P(x)$ có ít nhất một nghiệm thực. Vì $\deg f(x) = \deg P(x) = n$ nên nếu n lẻ thì hiển nhiên $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực và vì vậy theo lập luận trên thì $P(x)$ sẽ có ít nhất 2 nghiệm thực. Nếu n chẵn thì do $P(x)$ có nghiệm thực nên nó phải có ít nhất 2 nghiệm thực.

3.1.5 Các bài toán về phương trình, hệ phương trình đại số

Một phương trình với ẩn phức $f(z) = 0$ và với nghiệm $z = x + iy$, có thể giải bằng cách tách phần thực và phần ảo, ta luôn có thể đưa về dạng hệ phương trình

$$\begin{cases} h(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Chẳng hạn, để tìm căn bậc ba của số phức $1 + i$, ta tìm số phức $z = x + iy$ sao cho $z^3 = 1 + i$. Bằng cách tách phần thực và phần ảo trong đẳng thức

$$(x + iy)^3 = 1 + i,$$

ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

Giải hệ này, tìm được (x, y), từ đó, ta sẽ tìm được z. Tuy nhiên, rõ ràng z có thể tìm được bằng cách khai căn $1 + i$, cụ thể là

$$\begin{aligned} z = \sqrt[3]{1+i} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Từ đó, ngược lại ta đã tìm được nghiệm của hệ phương trình (3.28) là

$$(x, y) = \left(\sqrt[6]{2}\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right), \sqrt[6]{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Như thế, một số hệ phương trình có thể có "xuất xứ" từ các phương trình nghiệm phức. Bằng cách đi ngược lại quá trình từ phương trình nghiệm phức về hệ phương trình, từ hệ phương trình đã cho ta thu được phương trình nghiệm phức gốc. Giải phương trình nghiệm phức này, so sánh phần thực và phần ảo, ta được nghiệm của hệ phương trình.
Tiếp theo, ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.27. *(Việt Nam 1996)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Lời giải. Trước hết, ta nhận thấy $x, y > 0$. Đặt $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u\left(1+\dfrac{1}{u^2+v^2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v\left(1-\dfrac{1}{u^2+v^2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Vì u^2+v^2 là bình phương của mô-đun số phức $z=u+iv$, bằng cách cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai (sau khi nhân với i), ta được

$$u+iv+\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\cdot$$

Vì $\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}=\dfrac{1}{z}$, nên phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$z+\frac{1}{z}=\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow z^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)z+1=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}+i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2}\right)\cdot$$

Từ đó suy ra

$$(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right).$$

Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$(x,y) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2, \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right)^2\right) = \left(\frac{11}{21} \pm \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{22}{7} \pm \frac{8}{\sqrt{7}}\right).$$

3.2 Các bài toán về đa thức

3.2.1 Phương trình hàm trong đa thức

Nghiệm của đa thức đóng vai trò quan trọng trong việc xác định một đa thức. Cụ thể nếu đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì $P(x)$ có dạng

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Tuy nhiên, nếu chỉ xét các nghiệm thực của đa thức thì trong nhiều trường hợp sẽ không có đủ số nghiệm. Hơn nữa, trong các bài toán phương trình hàm đa thức, nếu chỉ xét các nghiệm thực thì lời giải sẽ là không hoàn chỉnh. Định lí cơ bản của đại số vì vậy đóng một vai trò hết sức quan trọng trong dạng toán này. Ta sử dụng cách phát biểu đơn giản nhất của nó: một đa thức với hệ số phức (bao gồm cả số thực) luôn có ít nhất một nghiệm phức (bao gồm cả nghiệm thực).

Dưới đây ta xem xét một số áp dụng.

Ví dụ 3.28. Cho $0 < \alpha < 1$. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ bậc n $(n \geq 2)$ sao cho tồn tại dãy số $r_1, r_2, \ldots, r_n$ $(r_1 < r_2 < \ldots < r_n)$ thoả mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} f(r_i) = 0, \\ f'(\alpha r_i + (1-\alpha) r_{i+1}) = 0 \end{cases} (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Lời giải. Nhận xét rằng với $a < b$ và $x = \alpha a + (1-\alpha)b$ thì $x \in (a, b)$. Khi đó

$$p = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2\alpha - 1}{\alpha(1-\alpha)(b-a)}.$$

Do vậy $p > 0$ khi và chỉ khi $\alpha > \frac{1}{2}$, $p < 0$ khi và chỉ khi $\alpha < \frac{1}{2}$ và $p = 0$ khi và chỉ khi $\alpha = \frac{1}{2}$. Theo giả thiết thì

$$f(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - r_i)$$

nên

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x - r_i}.$$

Với $n \geq 3$ và $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ta đặt $x = \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2$. Khi đó theo giả thiết thì $f'(x) = 0$ và đồng thời ta lại có

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - r_1} + \frac{1}{x - r_2} + \sum_{i=3}^{n}\frac{1}{x - r_i} < 0,$$

mâu thuẫn. Tương tự với $n \geq 3$ và $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ta cũng nhận được điều vô lí. Nếu $n = 2$ và $\alpha \neq \frac{1}{2}$ thì tương tự như trên cũng dẫn đến điều mâu thuẫn. Do vậy chỉ còn trường hợp $n = 2$ và $\alpha = \frac{1}{2}$ để xét. Khi đó mọi tam thức bậc hai có 2 nghiệm phân biệt đều thoả mãn đề bài.

Ví dụ 3.29. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác hằng sao cho*

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1), \;\; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Lời giải. Giả sử x_0 là nghiệm của $P(x) = 0$. Khi đó $x_0^2 + x_0 + 1$ cũng là nghiệm. Thay x bởi $x - 1$ trong (3.29), ta thấy rằng

$$P(x-1)P(x) = P(x^2 - x + 1).$$

Vì $P(x_0) = 0$ nên $x_0^2 + x_0 + 1$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$.

Chọn α là nghiệm có mô-đun lớn nhất (nếu tồn tại vài nghiệm với mô-đun lớn nhất, ta chọn một trong số các nghiệm đó). Từ cách chọn α như vậy ta suy ra $|\alpha^2+\alpha+1| \leq |\alpha|$ và $|\alpha^2-\alpha+1| \leq |\alpha|$ vì cả $\alpha^2+\alpha+1$ và $\alpha^2-\alpha+1$ đều là nghiệm của $P(x)=0$.

Ta nhận xét rằng $\alpha \neq 0$. Tiếp theo, ta có

$$2|\alpha| = |(\alpha^2+\alpha+1)-(\alpha^2-\alpha+1)| \leq |\alpha^2+\alpha+1|+|\alpha^2-\alpha+1| \leq |\alpha|+|\alpha| \leq 2|\alpha|.$$

Vậy phải xảy ra dấu đẳng thức nên từ đây suy ra $\alpha^2+\alpha+1 = -\beta(\alpha^2-\alpha+1)$ với một hằng số dương β nào đó. Hơn nữa từ tính lớn nhất của $|\alpha|$ ta còn suy ra

$$|\alpha^2+\alpha+1| = |\alpha^2-\alpha+1| = |\alpha|.$$

Như vậy $\beta = 1$ và ta có

$$\alpha^2+\alpha+1 = -(\alpha^2-\alpha+1),$$

suy ra $\alpha^2+1=0$. Từ đó $\alpha = \pm i$ và x^2+1 là thừa số của $P(x)$. Như vậy ta có thể viết $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = (x^2+1)^m Q(x),$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho x^2+1. Thế ngược trở lại vào phương trình (3.29), ta thấy $Q(x)$ cũng thoả mãn điều kiện

$$Q(x)Q(x+1) = Q(x^2+x+1), \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Nếu phương trình $Q(x)=0$ lại có nghiệm thì lí luận trên đây suy ra nghiệm có mô-đun lớn nhất của nó phải là $\pm i$. Điều này không thể xảy ra vì x^2+1 không chia hết $Q(x)$. Ta suy ra rằng $Q(x)$ là một hằng số, giả sử là c. Thay vào phương trình (3.30) của $Q(x)$, ta được $c=1$. Như vậy lớp các đa thức thoả mãn phương trình (3.29) là $P(x) = (x^2+1)^m$ với m là một số nguyên dương nào đó.

Ví dụ 3.30. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$$P(x)P(x+1) = P(x^2), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Lời giải. Giả sử α là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$. Khi đó từ phương trình suy ra α^2, α^4, $\alpha^8, \ldots$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$. Từ đây suy ra rằng $|\alpha| = 0$ hoặc $|\alpha| = 1$, vì nếu ngược lại ta sẽ thu được dãy vô hạn các nghiệm phân biệt của $P(x)$. Tương tự $\alpha - 1$ là nghiệm của $P(x)$ và lí luận tương tự, ta cũng được $|\alpha - 1| = 0$ hoặc $|\alpha - 1| = 1$. Giả sử rằng $|\alpha| = 1$ và $|\alpha - 1| = 1$. Ta viết $\alpha = cos\beta + isin\beta$, ta thấy rằng $2cos\beta = 1$. Từ đây suy ra $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$ hay $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ hoặc $\beta = 5\dfrac{\pi}{3}$. Giả sử $\beta = \dfrac{\pi}{3}$. Xét α^2 cũng là nghiệm của $P(x) = 0$. Như vậy $\alpha^2 - 1$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$ và $|\alpha^2 - 1| = \left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3$. Mâu thuẫn vì mọi nghiệm của $P(x) = 0$ có mô-đun bằng 0 hoặc 1. Tương tự với trường hợp $\beta = 5\dfrac{\pi}{3}$.
Như vậy ta có thể kết luận rằng $\alpha = 1$, hoặc $\alpha - 1 = 0$. Từ đây $P(x)$ có dạng $P(x) = cx^m(1-x)^n$, với c là một hằng số nào đó và m, n là các số nguyên không âm. Thay vào phương trình đã cho, ta dễ dàng kiểm tra được rằng $c = 1$ và $m = n$. Như vậy lớp các đa thức thoả mãn điều kiện đã cho là

$$P(x) = x^m(1-x)^m,$$

trong đó m là một số tự nhiên.

Ví dụ 3.31. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P^2(x) - P(x^2) = 2x^4, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Lời giải. Nếu đặt $P(x) = ax^k + R(x)$ với $\deg R(x) = r < k$ thì ta có

$$P^2(x) - P(x^2) = (a^2 - a)x^{2k} + 2ax^kR(x) + R^2(x) - R^(x^2).$$

Từ đó suy ra $\deg(P^2(x) - P(x^2))$ hoặc bằng $2k$ nếu $a \neq 1$, hoặc bằng $k + r$ nếu $a = 1$ và $r \geq 0$, hoặc bằng $-\infty$ khi $a = 1$ và $r = -\infty$ (tức là đồng nhất bằng 0). Từ đó, suy ra $k \leq 4$. Đến đây ta dễ dàng tìm được các nghiệm của (3.32) là $x^4+1, x^3+x, 2x^2$ và $-x^2$.

Ví dụ 3.32. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P(x^2-2) = P^2(x) - 2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

Lời giải. Có hai đa thức hằng thỏa mãn phương trình là đa thức đồng nhất -1 và đa thức đồng nhất 2. Với các đa thức bậc lớn hơn hay bằng 1, áp dụng hệ quả của định lí ta suy ra với mỗi số nguyên dương n, tồn tại không quá một đa thức $P(x)$ thỏa mãn (3.33). Điểm khó ở đây là ta không có cơ chế đơn giản để xây dựng các nghiệm. Dùng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm được các nghiệm bậc 1, 2, 3, 4 lần lượt là:

$$x, x^2-2, x^3-3x, x^4-4x^2+2.$$

Từ đây, có thể dự đoán được quy luật của dãy nghiệm như sau:

$$P_o = 2, \ P_1 = x, \ P_{n+1} = xP_n - P_{n-1}, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.34}$$

Cuối cùng, để hoàn tất lời giải bài toán, ta chỉ cần chứng minh các đa thức được xác định bởi (3.34) thỏa mãn phương trình (3.33). Ta có thể thực hiện điều này bằng cách sử dụng quy nạp toán học hoặc bằng cách sau:
Xét x bất kỳ thuộc $[-2;2]$, đặt $x = 2\cos t$ thì từ công thức (3.34), ta suy ra

$$P_2(x) = 4\cos 2t - 2 = 2\cos 2t, \ P_3(x) = 2\cos t.2\cos 2t - 2\cos t = 2\cos 3t,$$

và nói chung $P_n(x) = 2\cos(nt)$. Từ đó, ta có

$$P_n(x^2-2) = P_n(4\cos^2 t - 2) = P_n(2\cos 2t) = 2\cos(2nt) = 4\cos^2(nt) - 2 = P^2(x) - 2.$$

Đẳng thức này đúng với mọi $x \in [-2;2]$ do đó đúng với mọi x. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Ví dụ 3.33. Tìm tất cả các bộ $(a; P; Q)$ trong đó a là hằng số thực, P, Q là các đa thức sao cho:

$$\frac{P^2(x)}{Q^2(x)} = \frac{P(x^2)}{Q(x^2)} + a. \tag{3.35}$$

Lời giải. Nếu $(a; P; Q)$ là nghiệm thì $(a; P \cdot R; Q \cdot R)$ cũng là nghiệm. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $(P; Q) = 1$.

Phương trình có thể viết lại thành

$$P^2(x)Q(x^2) = Q^2(x)(P(x^2) + aQ(x^2)). \tag{3.36}$$

Do $(P^2(x); Q^2(x)) = 1$ nên từ đây ta suy ra $Q^2(x) = cQ(x^2)$. Từ đó giải ra được $Q(x) = cx^n$, với n là số tự nhiên nào đó. Thay vào phương trình (3.36), ta được

$$P^2(x) = cP(x^2) + ac^2x^{2n}.$$

Đặt $R(x) = \dfrac{P(x)}{c}$, ta được phương trình

$$R^2(x) = R(x^2) + ax^{2n}. \tag{3.37}$$

Thay $x = 0$ vào phương trình (3.37), ta được $R^2(0) = R(0)$. Do $(P; Q) = 1$ nên $a \neq 0$ và $R(0) \neq 0$. Từ đó $R(0) = 1$. Đặt $R(x) = 1 + x^kS(x)$ với $S(0) \neq 0$. Thay vào (3.37), ta được:

$$\begin{aligned} & 1 + 2x^kS(x) + x^{2k}S^2(x) = 1 + x^{2k}S(x^2) + a^{2n} \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^kS(x) + x^{2k}(S^2(x) - S(x^2)) = ax^{2n}. \end{aligned}$$

Nếu $k > 2n$ thì chia cả hai vế cho x^{2n}, ta được

$$2x^{k-2n}S(x) + x^{2k-2n}(S^2(x) - S(x^2)) = a.$$

Thay $x = 0$ vào suy ra $0 = a$, mâu thuẫn.

Nếu $k < 2n$ thì chia hai vế cho k, ta được

$$2S(x) + x^k(S^2(x) - S(x^2)) = ax^{2n-k}.$$

Thay $x = 0$ vào, suy ra $S(0) = 0$, mâu thuẫn.

Vậy chỉ còn một khả năng có thể xảy ra là $k = 2n$. Lúc đó ta được phương trình

$$2S(x) + x^{2n}(S^2(x) - S(x^2)) = a.$$

lí luận tương tự như trong lời giải của ví dụ 3.31, ta suy ra $S^2(x) - S(x^2)$ hoặc đồng nhất bằng 0, hoặc có bậc $\geq$ bậc của $S(x)$. Như vậy, nếu $S^2(x) - S(x^2)$ không đồng nhất 0 thì vế trái sẽ có bậc là $2n + s$, mâu thuẫn.

Vậy $S^2(x) - S(x^2) = 0$, suy ra $S(x) = \dfrac{a}{2}$, và thay lại vào đẳng thức $S^2(x) - S(x^2) = 0$ ta suy ra $a = 2$. Ta được kết quả

$$a = 2,\ Q(x) = cx^n,\ P(x) = c(1 + x^{2n}).$$

Ví dụ 3.34 (*Việt Nam 2006*)**.** Hãy xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn hệ thức sau:

$$P(x^2) + x(3P(x) + P(-x)) = (P(x))^2 + 2x^2,\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.38}$$

Lời giải. Thay $x = -x$ vào (3.38), ta được

$$P(x^2) - x(3P(-x) + P(x)) = (P(-x))^2 + 2x^2. \tag{3.39}$$

Trừ (3.38) cho (3.39), ta được

$$\begin{aligned} &4x(P(x) + P(-x)) = P^2(x) - P^2(-x) \\ \Leftrightarrow\ &(P(x) + P(-x))(P(x) - P(-x) - 4x) = 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.40) đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, do đó ta phải có hoặc là $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với vô số các giá trị x hoặc $P(x) - P(-x) - 4x = 0$ đúng với vô số các giá trị x.

Do $P(x)$ là đa thức nên từ đây ta suy ra hoặc $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với mọi x hoặc $P(x) - P(-x) - 4x = 0$ đúng với mọi x.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $P(x) + P(-x) = 0$. Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2) + 2xP(x) = (P(x))^2 + 2x^2 \Leftrightarrow P(x^2) - x^2 = (P(x) - x)^2.$$

Đặt $Q(x) = P(x) - x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$, ta được $Q \equiv 0,\ Q \equiv 1,\ Q(x) = x^n$. Từ đó $P(x) = x,\ P(x) = x + 1,\ P(x) = x^n + x$. So sánh với điều kiện $P(x) + P(-x) = 0$, ta chỉ nhận được các nghiệm:

$P(x) = x$ và $P(x) = x^{2k+1} + x,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Trường hợp 2. $P(x) - P(-x) - 4x = 0$. Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2) + x(4P(x) - 4x) = P^2(x) + 2x^2 \Leftrightarrow P(x^2) - 2x^2 = (P(x) - 2x)^2.$$

Đặt $Q(x) = P(x) - 2x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$, ta được $Q \equiv 0,\ Q \equiv 1,\ Q(x) = x^n$. Từ đó $P(x) = 2x,\ P(x) = 2x + 1,\ P(x) = x^n + 2x$. So sánh với điều kiện $P(x) - P(-x) - 4x = 0$, ta chỉ nhận được các nghiệm:

$P(x) = 2x,\ P(x) = 2x + 1$ và $P(x) = x^{2k} + 2x,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Tổng hợp hai trường hợp, ta có tất cả nghiệm của (3.38) là các đa thức

$$P(x) = x,\ P(x) = 2x,\ P(x) = 2x + 1,$$

$$P(x) = x^{2k+1} + x,\ P(x) = x^{2k} + 2x \text{ với } k = 2, 3, \ldots$$

Ví dụ 3.35. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn đẳng thức sau với mọi số thực x

$$P(x)(2x^2) = P(2x^3 + x). \tag{3.41}$$

Lời giải. Ta sẽ đi tìm nghiệm không đồng nhất hằng số bậc nhỏ nhất của (3.41). Xét trường hợp $P(x)$ có bậc nhất, $P(x) = ax + b$. Thay vào (3.41), ta có

$$(ax + b)(2ax^2 + b) = a(2x^3 + x) + b$$

So sánh hệ số của các đơn thức ở hai vế, ta được hệ

$$a^3 = 2a, \quad 2ba^2 = 0, \quad ab = a, \quad b^2 = b$$

Hệ này vô nghiệm (do $a \neq 0$) nên ta có thể kết luận: không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn (3.41).

Xét trường hợp $P(x)$ có bậc 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Thay vào (3.41), ta có

$$(ax^2 + bx + c)(4ax^4 + 2bx^2 + c) = a(2x^3 + x)^2 + b(2x^3 + x) + c$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2x^6 + 4abx^5 + (4ac + 2ab)x^4 + 2b^2x^3 + (ac + 2bc)x^2 + bcx + c^2$$
$$= 4ax^6 + 4ax^4 + 2bx^3 + ax^2 + bx + c$$

So sánh hệ số các đơn thức ở hai vế, ta được hệ

$$4a^2 = 4a, \; 4ab = 0, \; 4ac + 2ab = 4a, \; 2b^2 = 2b, \; ac + 2bc = a, \; bc = b, \; c^2 = c$$

Hệ này có nghiệm $a = c = 1, \; b = 0$. Như vậy, $P(x) = x^2 + 1$ là đa thức bậc hai thỏa mãn (3.41). Ta suy ra $(x^2+1)^k$ là tất cả các đa thức bậc chẵn (không đồng nhất hằng số) thỏa mãn (3.41).

Vậy còn các nghiệm của (3.41) có bậc lẻ thì sao? Rõ ràng đa thức x^2+1 không "sinh" ra được các nghiệm bậc lẻ. Rất may mắn, ta có thể chứng minh đa thức bậc lẻ không thể là nghiệm của (3.41). Để chứng minh điều này, dựa vào tính chất mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm thực, ta chỉ cần chứng minh nếu $P(x)$ là một đa thức khác hằng số thỏa mãn (3.41) thì $P(x)$ không có nghiệm thực (đây chính là nội dung bài thi HSG Việt Nam 1990).

Thật vậy, giả sử α là nghiệm thực của $P(x)$, khi đó $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Nếu $\alpha > 0$ thì ta có $\alpha, \alpha + 2\alpha^3, \alpha + 2\alpha^3 + 2(\alpha + 2\alpha^3)^3, \ldots$ dãy tăng và tất cả đều là nghiệm của $P(x)$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $\alpha < 0$ thì dãy nói trên là dãy giảm và ta cũng có $P(x)$ có vô số nghiệm. Nếu $\alpha = 0$, đặt

$P(x) = x^k Q(x)$ với $Q(0) \neq 0$, thay vào phương trình ta có:

$$\begin{aligned} & x^k Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) = (2x^3+x)^k Q(2x^3+x) \\ \Leftrightarrow\ \ & Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) = (2x^2+1)^k Q(2x^3+x). \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ vào ta được $0 = Q(0)$, mâu thuẫn.
Vậy $P(x)$ không có nghiệm thực, có nghĩa là $P(x)$ không thể có bậc lẻ. Nói cách khác, bài toán đã được giải quyết hoàn toàn.

3.2.2 Các bài toán về đa thức bất khả quy

Nghiệm phức của đa thức với hệ số nguyên, trong nhiều trường hợp là chìa khoá để chứng minh tính bất khả quy (trên $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Q}$) của đa thức đó. Chúng ta tìm hiểu các lí luận mẫu trong vấn đề này thông qua các tính chất và ví dụ sau đây.
Trước hết xét một số tiêu chuẩn xét tính bất khả quy của đa thức với hệ số nguyên.

Định lý 3.1. (Tiêu chuẩn Eisenstein[1])
Cho $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *là một đa thức hệ số nguyên. Giả sử tồn tại số nguyên tố* p *thỏa mãn những điều kiện sau:*

1) a_n *không chia hết cho* p.
2) *Tất cả những hệ số còn lại đều chia hết cho* p.
3) a_0 *không chia hết cho* p^2.

Khi đó đa thức $P(x)$ *bất khả quy trên* $\mathbb{Q}[x]$.

Chứng minh. Giả sử đa thức $P(x)$ khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ và $P(x) = g(x)h(x)$, trong đó

$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r,\ \ b_i \in \mathbb{Z},\ \ 0 < r < n$
$h(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_s x^s,\ \ c_i \in \mathbb{Z},\ \ 0 < s < n.$

[1]M.Eisenstein (1823-1852) là nhà toán học Đức.

Đồng nhất hệ số trong đẳng thức $P(x) = g(x)h(x)$ ta được

$$\begin{cases} a_0 = b_0c_0 \\ a_1 = b_1c_0 + b_0c_1 \\ \dots\dots \\ a_k = b_kc_0 + b_{k-1}c_1 + \dots + b_0c_k \\ \dots\dots\dots \\ a_n = b_rc_s. \end{cases}$$

Theo giả thiết p chia hết $a_0 = b_0c_0$, mà p là số nguyên tố nên hoặc p chia hết b_0 hoặc p chia hết c_0. Giả sử p chia hết b_0, thế thì p không chia hết c_0,vì nếu không thì p^2 chia hết $a_0 = b_0c_0$, trái giả thiết. p không thể chia hết mọi hệ số của $g(x)$, vì nếu thế thì p sẽ chia hết $a_n = b_rc_s$, trái giả thiết.

Giả sử b_t $(0 < t < n)$ là hệ số đầu tiên trong dãy hệ số $b_0, b_1, \dots, b_r$ của $g(x)$ không chia hết cho p.

Xét $a_t = b_tc_0 + b_{t-1}c_1 + \dots + b_0c_t$, trong đó $a_t, b_{t-1}, \dots, b_0$ đều chia hết cho p. Vậy b_tc_0 phải chia hết cho p, mà p nguyên tố, ta suy ra hoặc c_0 chia hết cho p, hoặc b_t chia hết cho p, mâu thuẫn giả thiết về b_t và c_0.

Ví dụ 3.36. Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố, thì đa thức

$$P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Lời giải. Ta biến đổi đa thức $P(x)$

$$P(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}, \text{ với } x \neq 1.$$

Đặt $x - 1 = y$, ta nhận được:

$$P(x) = \frac{(y+1)^p - 1}{y} = y^{p-1} + C_p^1 y^{p-2} + \dots + C_p^{p-2} y + C_p^{p-1}.$$

Đặt $Q(y) = y^{p-1} + C_p^1 y^{p-2} + \dots + C_p^{p-2} y + C_p^{p-1}$. Do $Q(y)$ là đa thức Eisenstein, $Q(y)$ bất khả quy, suy ra cả $P(x)$ cũng bất khả quy, vô lí.

Qua ví dụ trên ta thấy rằng bằng cách đổi biến ta có thể chứng minh sự bất khả quy của đa thức chưa thỏa mãn tiêu chuẩn Eisenstein thành đa thức thỏa mãn tiêu chuẩn Eisenstein. Điều này phát huy tác dụng của tiêu chuẩn Eisenstein. Có rất nhiều ví dụ để thực hiện phương pháp này như $P(x) = x^4 - 2x + 3$ bất khả quy vì ta thay thế $x = y + 1$ vào đa thức $P(x)$ thì nhận được đa thức thỏa mãn tiêu chuẩn Eisenstein $y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 2y + 2$. Nhưng không phải lúc nào cũng thay biến để đưa một đa thức chưa thỏa mãn tiêu chuẩn Eisenstein thành đa thức thỏa mãn tiêu chuẩn Eisenstein. Ta xét tiếp ví dụ sau

Ví dụ 3.37. Tồn tại đa thức bất khả quy, mà nó không có một cách biến đổi tuyến tính của ẩn nào có thể chuyển nó thành đa thức Eisenstein (với số nguyên tố p nào đó).

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = 2x^2 + 1$, đa thức này bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$. Đổi biến $x = ay + b$ (a, b là những số nguyên bất kì). Khi đó ta có

$$Q(y) = 2a^2y^2 + 4aby + 2b^2 + 1.$$

Giả sử $Q(y)$ là đa thức thỏa mãn tiêu chuẩn Eisenstein, nghĩa là tồn tại số nguyên tố p sao cho $2a^2$ không chia hết cho p, và $4ab$; $(2b^2 + 1)$ cùng chia hết cho p.

Suy ra, b không chia hết cho p, nhưng khi đó $4a$ chia hết cho p, từ đây có hoặc a chia hết cho p hoặc 4 chia hết cho p.

Từ trường hợp thứ nhất ta nhận được hệ số cao nhất của đa thức $Q(y)$ chia hết cho p, điều này vô lí.

Từ trường hợp thứ hai 4 chia hết cho p, suy ra $p = 2$. Nhưng khi đó $2b^2 + 1$ không chia hết cho p ta cũng thu được điều vô lí.

Định lý 3.2. (Tiêu chuẩn Eisenstein mở rộng)

Cho $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ là một đa thức hệ số nguyên có bậc n. Giả sử tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn những điều kiện sau:

1) *a_n không chia hết cho p.*
2) *Tồn tại k, $0 \leqslant k < n$ sao cho $a_0, a_1, \ldots, a_k$ chia hết cho p.*

3) *a_0 không chia hết cho p^2.*

Khi đó đa thức $P(x)$ có đa thức ước bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ mà bậc của nó không nhỏ thua $k+1$.

Với $k = n-1$ ta được tiêu chuẩn Eisenstein quen thuộc.

Chứng minh

Nếu đa thức $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ thì định lí được chứng minh.

Nếu đa thức $P(x)$ không bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ và được biểu diễn thành tích của những đa thức với hệ số nguyên bất khả quy

$$P(x) = g(x)f(x)\ldots$$

Do $a_0 \;\vdots\; p$, nên hệ số tự do của một đa thức nào đó cũng chia hết cho p.

Không mất tính chất tổng quát ta coi đó là hệ số tự do của đa thức $g(x)$.

Khi đó ta có thể viết $P(x)$ dưới dạng sau

$$P(x) = g(x)h(x),$$

trong đó

$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_rx^r,\;\; b_i \in \mathbb{Z},\;\; 0 < r < n$

$h(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_sx^s,\;\; c_i \in \mathbb{Z},\;\; 0 < s < n.$

Vì đa thức $g(x)$ được chọn sao cho $b_0 \;\vdots\; p$, mà $a_0 = b_0c_0 \;\not\vdots\; p^2$ nên $c_0 \;\not\vdots\; p$.

Cũng theo giả thiết thì $a_n = b_rc_s \;\not\vdots\; p \Rightarrow b_r \;\not\vdots\; p$.

Giả sử b_t $(0 < t \leqslant r)$ là hệ số đầu tiên của $g(x)$ trong dãy $b_0, b_1, \ldots, b_r$ không chia hết cho p. Ta xét

$$a_t = b_tc_0 + b_{t-1}c_1 + \cdots + c_tb_0.$$

Ở vế phải của đẳng thức này có số hạng đầu tiên của tổng không chia hết cho p, còn lại các chia hết cho p. Nên a_t không chia hết cho p, và theo giả thiết thứ 2 của định lí thì $t \geqslant k+1$, suy ra $k+1-t \leqslant 0$.

Ta có $r \geqslant r + k + 1 - t = (k+1) + r - t \geqslant k+1$.

Ví dụ 3.38. Chứng minh đa thức sau bất khả quy

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x - 3.$$

Lời giải. Giả sử $P(x)$ không bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$. Áp dụng định lí trên với $k = 2,\ \ p = 3$, suy ra đa thức ước thực sự của $P(x)$ là $G(x)$ có bậc $\geqslant 2+1 = 3$ bất khả quy. Từ đó $\deg G(x) = 3$, suy ra $P(x)$ có nghiệm hữu tỉ, nhưng nghiệm hữu tỉ của $P(x)$ nếu có là ước của 3, kiểm tra thấy các ước này đều không là nghiệm của $P(x)$. Vậy $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ nên bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Bổ đề 3.1. *Cho ξ là một số phức sao cho $\operatorname{Re}\xi < b - \dfrac{1}{2}$. Khi đó*

$$\left|b - \xi\right| > \left|b - 1 - \xi\right|.$$

Chứng minh. Đặt $\xi = \eta + i\zeta$ với $\eta,\ \ \zeta$ là các số thực, và kí hiệu $\operatorname{Re}\xi$ là phần thực của số phức ξ.
Theo giả thiết thì $\operatorname{Re}\,\xi = \eta$ và $\eta < b - \dfrac{1}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}\left|b - \xi\right| > \left|b - 1 - \xi\right| &\Leftrightarrow \left|b - \xi\right|^2 > \left|b - 1 - \xi\right|^2\\ &\Leftrightarrow b^2 - 2b\eta + \eta^2 + \zeta^2 = b^2 + 1 + \eta^2 - 2b - 2b\eta + 2\eta + \xi^2\\ &\Leftrightarrow \eta < b - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

Định lý 3.3 (Tiêu chuẩn Perron)**.** *Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Giả thiết tồn tại số nguyên b và số nguyên tố p, sao cho chúng thỏa mãn những điều kiện sau:*

1. $P(b) = p$,
2. $P(b-1) \neq 0$,
3. *Tất cả các nghiệm ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ của đa thức $P(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức $\operatorname{Re}\xi_i < b - \dfrac{1}{2}$.*

Khi đó đa thức $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Chứng minh. Giả sử $P(x) = G(x)H(x)$, ở đây $G(x), H(x)$ là đa thức nguyên không phải là hằng số.

Từ đẳng thức $P(b) = p$ (do p là số nguyên tố) suy ra $G(b) = \pm 1$ và $H(b) = \pm p$ hoặc là $G(b) = \pm p$ và $H(b) = \pm 1$.

Xét $G(b) = 1$ và giả sử nghiệm của $G(x)$ là $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ $(1 \leqslant k < n)$. Khi đó

$$G(x) = c(x - \xi_1)(x - \xi_2)\dots(x - \xi_n),$$

ở đây c là hệ số cao nhất của $G(x)$.

Vì $G(b) = 1$ và $G(b-1) \in \mathbb{Z}^*$, ta có bất đẳng thức $\left|\dfrac{G(b)}{G(b-1)}\right| \leqslant 1$ hay là

$$\left|\frac{b-\xi_1}{b-1-\xi_1}\right|\left|\frac{b-\xi_2}{b-1-\xi_2}\right|\cdots\left|\frac{b-\xi_k}{b-1-\xi_k}\right| \leqslant 1, \qquad (*)$$

điều này vô lí, vì theo với bổ đề 3.2 thì có $\left|\dfrac{b-\xi_i}{b-1-\xi_i}\right| > 1$ với mọi i. Như vậy, đa thức $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Ví dụ 3.39. Cho $b \geqslant 3$ là số nguyên và p là một số nguyên tố.

Ta viết p trong hệ số cơ số b, nghĩa là p có dạng

$$p = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n,$$

ở đây n là số tự nhiên, $a_0 \neq 0$ và $0 \leqslant a_i < b$ $(i = 0, 1, \dots, n)$. Xét đa thức

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Chứng minh rằng $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ (giả thiết $p \geqslant b$ vì với $p < b$ thì đa thức là hằng số).

Lời giải. Ta dùng tiêu chuẩn Perron. Hiển nhiên $P(b) = p$ và $P(b-1) \neq 0$, vì $b - 1 > 1$, và tất cả hệ số a_i không âm và ít nhất một trong chúng là số dương.

Ta chỉ cần chứng minh mọi nghiệm ξ của $P(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\operatorname{Re}\xi < b - \frac{1}{2}.$$

Nếu $\mathrm{Re}\,\xi \leqslant 0$ bất đẳng thức $\mathrm{Re}\,\xi < b - \dfrac{1}{2}$ là hiển nhiên.

Nếu $\mathrm{Re}\,\xi > 0$. Ta kí hiệu r là mô đun của ξ, nghĩa là $\left|\xi\right| = r$.

• Nếu $r \leqslant 1$, từ bất đẳng thức hiển nhiên $\mathrm{Re}\,\xi \leqslant \left|\mathrm{Re}\,\xi\right| \leqslant r \leqslant 1 < b - \dfrac{1}{2}$ suy ra $\mathrm{Re}\,\xi < b - \dfrac{1}{2}$ là hiển nhiên vì $b \geqslant 2$.

• Nếu $r > 1$, với các điều ở trên thì $\xi \neq 0$, khi đó chia cả hai vế của đẳng thức $P(\xi) = 0$ cho ξ^n ta nhận được

$$a_0 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \cdots + \frac{a_n}{\xi^n} = 0.$$

Từ đây ta có

$$\left|a_0 + \frac{a_1}{\xi}\right| = \left|\frac{a_2}{\xi^2} + \cdots + \frac{a_n}{\xi^n}\right|.$$

Theo bất đẳng thức về môđun cho vế phải, ta có

$$\left|\frac{a_2}{\xi^2} + \cdots + \frac{a_n}{\xi^n}\right| \leqslant \frac{a_2}{\left|\xi\right|^2} + \cdots + \frac{a_n}{\left|\xi\right|^n} = \frac{a_2}{r^2} + \cdots + \frac{a_n}{r^n},$$

mà $\left|\mathrm{Re}\left(a_0 + \dfrac{a_1}{\xi}\right)\right| \leqslant \left|\left(a_0 + \dfrac{a_1}{\xi}\right)\right|$ nên

$$\left|\mathrm{Re}\left(a_0 + \frac{a_1}{\xi}\right)\right| \leqslant \frac{a_2}{r^2} + \cdots + \frac{a_n}{r^n}.$$

Ta biết rằng $a_i \leqslant b - 1$, ta có thể đánh giá vế phải của bất đẳng thức trên

$$\frac{a_2}{r^2} + \cdots + \frac{a_n}{r^n} \leqslant (b-1)\Big(\frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n}\Big) = \frac{b-1}{r^2}.\frac{1 - \dfrac{1}{r^{n-1}}}{1 - \dfrac{1}{r}}.$$

Bởi vì $r > 1$, từ bất đẳng thức cuối cùng ta nhận được

$$\frac{a_2}{r^2} + \cdots + \frac{a_n}{r^n} < (b-1)\frac{1}{r^2}.\frac{1}{1 - \dfrac{1}{r}} = (b-1)\frac{1}{r(r-1)},$$

từ đó suy ra

$$\left|\mathrm{Re}\left(a_0 + \frac{a_1}{\xi}\right)\right| < (b-1)\frac{1}{r(r-1)}.$$

Nhưng ta giả thiết $\mathrm{Re}\,\xi > 0$ suy ra $\mathrm{Re}\,\dfrac{a_1}{\xi} > 0$ (vì a_1 là số không âm) và vì a_0 là một số nguyên dương, nên $\mathrm{Re}\left(a_0 + \dfrac{a_1}{\xi}\right) \geqslant 1$. Suy ra

$$\mathrm{Re}\left(a_0 + \frac{a_1}{\xi}\right) = \left|\mathrm{Re}\left(a_0 + \frac{a_1}{\xi}\right)\right| \geqslant 1$$

và cuối cùng ta nhận được bất đẳng thức

$$1 < (b-1)\frac{1}{r(r-1)}.$$

Vì $r > 1$ nên từ bất đẳng thức cuối cùng ta suy ra $r(r-1) < b-1$.
Giả sử $\mathrm{Re}\,\xi \geqslant b - \dfrac{1}{2}$, hay là $r \geqslant b - \dfrac{1}{2} \Rightarrow r - 1 \geqslant b - \dfrac{3}{2}$.
Nhân hai vế bất đẳng thức trên ta có $r(r-1) \geqslant b^2 - 2b + \dfrac{3}{4}$, từ đó có

$$b^2 - 2b + \frac{3}{4} < b - 1 \text{ hoặc } b^2 - 3b < -\frac{7}{4}.$$

Vì $b \geqslant 3$ nên bất đẳng thức cuối không xảy ra. Ta có điều cần chứng minh.

Sau đây ta tiếp tục xét thêm một số lớp đa thức bất khả quy khác nữa

Ví dụ 3.40. Cho $P(x)$ là đa thức có bậc lẻ $n = 2m+1$ và $P(a_i) = \pm 1$ với n số nguyên khác nhau $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Khi đó $P(x)$ bất khả quy.

Lời giải. Giả sử đa thức $P(x)$ phân tích được thành tích $P(x) = G(x)H(x)$ với $G(x)$, $H(x)$ là những đa thức hệ số nguyên khác hằng số. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\deg G(x) \leqslant m$.
Từ đẳng thức $P(a_i) = \pm 1$, suy ra $G(a_i)H(a_i) = \pm 1$. Do những số $G(a_i), H(a_i)$ là những số nguyên, ta nhận được $G(a_i) = \pm 1$ với mọi $i = \overline{1, n}$.
Nhưng $n = 2m + 1 > m$, suy ra ít nhất trong các đẳng thức $G(a_i) = 1$ hoặc $G(a_i) = -1$ thỏa mãn với hơn m giá trị của i.
Mặt khác, $\deg G(x) = m$ nên $G(x)$ là đa thức hằng số 1 hoặc -1, điều này trái với giả sử.

Ví dụ 3.41. Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên bậc $n \geqslant 8$. Giả sử tồn tại k những số nguyên khác nhau a_1, $a_2, \ldots, a_k$, ở đây $k > \dfrac{n}{2}$, sao cho $P(a_k) = \pm 1$. Khi đó đa thức $P(x)$ bất khả quy.

Giải. Giả sử $P(x) = G(x)H(x)$, khi đó ít nhất một trong những đa thức $G(x)$ và $H(x)$, cho đó là $G(x)$, có bậc $m \leqslant \dfrac{n}{2}$ sao cho phương trình $\big|G(x)\big| = 1$ sẽ có k nghiệm a_k. Do $k > \dfrac{n}{2}, m \leqslant \dfrac{n}{2}$, nên $k > m$. Nhưng theo giả thiết thì $n \geqslant 8$, khi đó $k \geqslant 5$. Ta có hoặc là $G(a_i) = 1$, hoặc là $G(a_i) = -1$. Mà bậc của $G(x)$ nhỏ hơn k nên trong cả hai trường hợp ta nhận được $G(x)$ là hằng số $+1$ hoặc -1, là điều vô lí.

Ví dụ 3.42. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ bậc n mà nhận giá trị bằng ± 1 tại nhiều hơn $2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ điểm nguyên phân biệt thì $f(x)$ là đa thức bất khả quy.

Lời giải. Đặt $\left[\dfrac{n}{2}\right] = m$. Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$, trong đó $g(x), f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và

$$0 < \deg g(x) < \deg h(x) < n.$$

Vì $n = 2m$ hoặc $n = 2m+1$ nên $\deg g(x) \leqslant m$. Mặt khác, theo giả thiết tồn tại l số $x_1,\ \ x_2, \dots, x_l$ $\ (l > 2m)$ sao cho

$$f(x_i) = g(x_i)h(x_i) = \pm 1,\ \ i = 1, 2, \dots, l\ \ (l > 2m).$$

Suy ra $g(x_i) = \pm 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, l$. Vậy trong l số x_i phải có ít nhất $m+1$ số để $g(x_i) = 1$ hoặc $g(x_i) = -1$ mà $g(x)$ chỉ là đa thức bậc nhỏ thua hoặc bằng m nên $g(x) \equiv 1$ hoặc $g(x) \equiv -1$, trái với giả sử. Vậy $f(x)$ là đa thức bất khả quy.

Ví dụ 3.43. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng

$$P(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$$

là bất khả quy.

Lời giải. Giả sử $P(x)$ là khả quy. Khi đó $P(x) = f(x)g(x)$, trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức có hệ số nguyên và có bậc lớn hơn 0. Có thể coi hệ số cao nhất của $f(x)$ dương. Do $P(x)$ vô nghiệm nên $f(x)$, $g(x)$ cũng vô nghiệm, nên $f(x), g(x)$ là đa thức dương trên $\mathbb{R}$ và $f(a_k)g(a_k) = 1$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$. Giả sử

$$f(x) = x^r + \cdots, \ \ g(x) = x^s + \cdots, \ \text{ với } s + r = 2n$$

Nếu xảy ra $r < s$ thì $r < n$ nên $g(x) \equiv 1$, vô lí.

Nếu xảy ra $r = s = n$ thì $f(x) - g(x)$ có bậc $\leqslant n - 1$ và triệt tiêu tại n điểm a_k nên

$$f(x) - g(x) = 0 \ \text{ hay } f(x) = g(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Do đó ta có

$$P(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1 = \big[g(x)\big]^2$$

với $g(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ và vì vậy

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1 = \big((x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + 1\big)^2,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này không thể xảy ra. Vậy $P(x)$ bất khả quy.

Ví dụ 3.44. Cho $a_1, \ a_2, \ldots, a_n$ là n những số nguyên khác nhau, p là số nguyên bất kì và

$$P(x) = p(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + 1.$$

Đa thức này bất khả quy, loại trừ các trường hợp sau đây:

1. $p = 4, n = 2$ và a_1, a_2 là hai số liên tiếp, nghĩa là $a_1 = a_2 \pm 1$. Cụ thể
$P(x) = 4(x - a_1)(x - a_1 - 1) + 1 = \big(2(x - a_1) - 1\big)^2$.

2. $p = 1, n = 4$ và a_1, a_2, a_3, a_4 (sắp xếp thích hợp) là bốn số liên tiếp. Khi đó

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - a_1)(x - a_1 - 1)(x - a_1 - 2)(x - a_1 - 3) + 1 \\ &= \big((x - a_1 - 1)(x - a_1 - 2) - 1\big)^2. \end{aligned}$$

3. $p = 1, n = 2$ và a_1, a_2 khác nhau 2 đơn vị, nghĩa là $a_1 = a_2 \pm 2$.

Khi đó $P(x) = (x - a_1)(x - a_1 - 2) + 1 = (x - a_1 - 1)^2$.

Lời giải. Giả sử $P(x)$ phân tích được dưới dạng $P(x) = G(x).H(x)$ với $G(x), H(x)$ là những đa thức có hệ số nguyên và có bậc nhỏ hơn n.
Vì $P(a_i) = 1$, với $i = 1, 2, \ldots, n$, nên ta có $G(a_i)H(a_i) = 1$. Mặt khác, $G(a_i),\ H(a_i)$ là những số nguyên, suy ra với mọi i thì

$$G(a_i) = H(a_i) = 1 \ \vee\ G(a_i) = H(a_i) = -1.$$

Khi đó $G(a_i) - H(a_i) = 0$, suy ra $G(x) - H(x)$ có n nghiệm.
Mà $\deg(G(x) - H(x)) < n$ nên ta được

$$G(x) - H(x) = 0 \Leftrightarrow G(x) = H(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $P(x) = G(x)^2,\ \ n$ là số chẵn, và hệ số cao nhất của $P(x)$ là p phải là số chính phương
Nghĩa là $P(x)$ bất khả quy khi ta chỉ ra n là một số lẻ, hoặc n là chẵn nhưng p không là số chính phương, trong trường hợp riêng p là một số âm.
Ta đặt $p = q^2$ và $n = 2m$, ở đây q là hệ số cao nhất của $G(x)$ còn m là bậc của nó. Không mất tính tổng quát giả sử $q > 0$ (trường hợp ngược lại có thể thay toàn bộ dấu của $G(x)$).
Ta xét đa thức $G(x)$, với mỗi i ta có $G(a_i) = 1$ hoặc là $G(a_i) = -1$. Ta sẽ chứng minh mỗi đẳng thức này thỏa mãn với đúng m giá trị của i.
Thật vậy, nếu $G(a_i) = 1$ đúng với nhiều hơn m giá trị của i, mà bậc của $G(x)$ là m nên $G(x)$ trùng với hằng số 1, vô lí.
Suy ra số lượng k của chỉ số i sao cho $G(a_i) = 1$ không lớn hơn m.
Nếu $k < m$, Ta sẽ nhận được $G(a_i) = -1$ với $n - k > m$ chỉ số của i, từ đây ta lại suy ra $G(x)$ trùng với hằng số -1, vô lí.
Như vậy, đẳng thức $G(a_i) = 1$ chỉ thỏa mãn với đúng m giá trị của i.
Không mất tính tổng quát ta có thể cho $G(a_1) = G(a_2) = \cdots = G(a_m) = 1$ và khi đó $G(a_{m+1}) = G(a_{m+2}) = \cdots = G(a_n) = -1$

Ta xét đa thức $G(x)-1$. Đa thức này có bậc m, hệ số cao nhất là q và đã biết m nghiệm khác nhau $a_1, a_2, \ldots, a_m$.
Suy ra $G(x)-1 = q(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$. Đặt

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),\\ \varphi_2(x) &= (x-a_{m+1})(x-a_{m+2})\ldots(x-a_n),\\ \varphi(x) &= \varphi_1(x)\varphi_2(x).\end{aligned}$$

Từ $P(x) = G(x)^2$ ta có:

$$p\varphi(x)+1 = (q\varphi_1(x)+1)^2, \text{ suy ra } p\varphi(x) = q^2\varphi_1^2(x) + 2q\varphi_1(x).$$

Ta biết rằng $p = q^2$ và $\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x),\ \ n = 2m$, chia cả hai vế đẳng thức trên cho $q\varphi_1(x)$, ta nhận được

$$q\big(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big) = 2. \tag{$*$}$$

Ta so sánh hệ số tự do hai vế trái đẳng thức, đó là

$$(-1)^m q\big(a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_n - a_1a_2\ldots a_m\big) = 2.$$

Suy ra $q = 1$ hoặc $q = 2$, và tương ứng $p = 1$ hoặc $p = 4$.
Như vậy ta đã chứng minh được đa thức $P(x)$ bất khả quy khi $p \neq 1$ và $p \neq 4$.
Ta xét hai trường hợp cụ thể này

Trường hợp $p = 4$ $(q = 2)$: Trong trường hợp này $(*)$ có dạng

$$(x-a_{m+1})(x-a_{m+2})\ldots(x-a_n) - (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m) = 1. \tag{α}$$

Ta chứng minh (α) chỉ đúng với $m = 1$. Thật vậy, cho $x = a_1$ ta nhận được

$$(a_1-a_{m+1})(a_1-a_{m+2})\ldots(a_1-a_n) = 1. \tag{$**$}$$

Vì các thừa số ở vế trái là những số nguyên, nên các thừa số thuộc $\{+1; -1\}$.
Nếu $m \geqslant 3$, ít nhất hai trong những thừa số này trùng nhau, vô lí.

Nếu $m = 2$ ta chỉ có hai thừa số và vì tích của chúng dương nên chúng cùng dấu, suy ra chúng trùng nhau, vô lí.
Nếu $m = 1$ thì $(**)$ có dạng $(x - a_2) - (x - a_1) = 1$. Suy ra $a_1 = a_2 + 1$. Như vậy phần *1* được chứng minh.

Trường hợp $p = 1$ $(q = 1)$: Trong trường hợp này $(*)$ có dạng

$$(x - a_{m+1})(x - a_{m+2}) \dots (x - a_n) - (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) = 2. \quad (***)$$

Ta chứng minh $m \leqslant 3$. Thật vậy, thay $x = a_1$ vào $(***)$ nhận được

$$(a_1 - a_{m+1})(a_1 - a_{m+2}) \dots (a_1 - a_n) = 2.$$

Nếu $m \geqslant 4$ thì chứng minh tương tự phần trên có ít nhất hai thừa số bằng nhau. Suy ra $m \leqslant 3$.
Nếu $m = 3$, thì $(***)$ có dạng

$$(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_1 - a_6) = 2.$$

Từ đẳng thức này suy ra hai trong những thừa số ở vế trái bằng ± 1, như vậy chúng phải có dấu trái nhau, vì ngược lại thì chúng trùng nhau.
Ta cho đó là $a_1 - a_5 = 1$, $a_1 - a_6 = -1$, khi đó $a_1 - a_4 = -2$ hay $a_1 = a_4 - 2$.
Ta lặp lại cùng lí luận như đối với a_2 thay vào chỗ a_1. Ta nhận được $a_2 = a_i - 2$, ở đây i là số nào đấy trong các số $4, 5, 6$. Đẳng thức $a_2 = a_4 - 2$ không xảy ra vì khi ấy thì $a_1 = a_2$. Suy ra $a_2 = a_5 - 2$ hoặc là $a_2 = a_6 - 2$. Không mất tính chất tổng quát ta cho $a_2 = a_5 - 2$.
Cuối cùng bằng cách thay $x = a_3$ vào $(***)$ và lí luận tương tự có $a_3 = a_6 - 2$.
So sánh hệ số của x^2 ở $(***)$ có $-a_4 - a_5 - a_6 + a_1 + a_2 + a_3 = -6 \neq 0$, vô lí.
Như vậy $m \neq 3$ và m chỉ còn lại hai khả năng $m = 1$ và $m = 2$.
Nếu $m = 2$: lần lượt thay vào $(***)$ $x = a_1$ và $x = a_2$ ta nhận được

$$(a_1 - a_3)(a_1 - a_4) = 2, \quad (a_2 - a_3)(a_2 - a_4) = 2.$$

Từ đẳng thức thứ nhất suy ra bốn khả năng sau:

$a_1 - a_3 = 1,\ \ a_1 - a_4 = 2;\ \ a_1 - a_3 = -1,\ \ a_1 - a_4 = -2;$

$a_1 - a_3 = 2,\ \ a_1 - a_4 = 1;\ \ a_1 - a_3 = -2,\ \ a_1 - a_4 = -1.$

Vì vai trò của a_3 và a_4 là đối xứng, nên ta chỉ xét hai trường hợp đầu là đủ.

Trường hợp $a_3 = a_1 + 1$ và $a_4 = a_1 + 2$.

Thay vào đẳng thức $(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) = 2$, ta nhận được

$$(a_2 - a_1 - 1)(a_2 - a_1 - 2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 - a_1 - 2 & = -2 \\ a_2 - a_1 - 1 & = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a_2 - a_1 - 2 & = 1 \\ a_2 - a_1 - 1 & = 2. \end{cases}$$

Trong trường hợp thứ nhất nhận được $a_1 = a_2$, trái giả thiết.

Từ trường hợp thứ hai suy ra $a_2 = a_1 + 3$.

Như vậy $a_1; a_3 = a_1 + 1, a_4 = a_1 + 2, a_2 = a_1 + 3$ là bốn số nguyên liên tiếp, điều này đã chứng tỏ phần *2* được chứng minh.

Nếu $m = 1$, thì $(***)$ có dạng $(x - a_2) - (x - a_1) = 2$, từ đây suy ra $a_1 = a_2 + 2$, tức là phần *3* được chứng minh.

Ví dụ 3.45 (IMO 1993)**.** Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, đa thức $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ không thể phân tích thành tích của hai đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 với hệ số nguyên.

Lời giải. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là tất cả các nghiệm của đa thức $P(x)$. Khi đó ta có

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Suy ra $3 = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n$. Ta có với mỗi i thì

$$x_i^n + 5x_i^{n-1} + 3 = 0 \Rightarrow 3 = |x_i^{n-1}||x_i + 5|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.42}$$

Giả sử ngược lại rằng đa thức $P(x)$ khả quy, tức là $P(x) = Q(x).S(x)$ với $Q(x), S(x)$ là các đa thức khác hằng với hệ số nguyên. Thế thì rõ ràng $Q(x)$ sẽ là tích của một số thừa số $x - x_i$ và $S(x)$ là tích của các thừa số còn lại.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k), \;\; S(x) = (x - x_{k+1})\ldots(x - x_n).$$

Suy ra $|x_1x_2\cdots x_k|$ và $|x_{k+1}\cdots x_n|$ là các số nguyên có tích là 3. Như vậy một số bằng 1 và một số bằng 3. Không mất tính tổng quát, giả sử $|x_1x_2\cdots x_k| = 3$ và $|x_{k+1}\cdots x_n| = 1$.

Trong (3.42) cho i chạy từ 1 đến k rồi nhân vế theo vế, ta được

$$3k = |x_1\cdots x_k|^{n-1}|(x_1+5)\cdots(x_k+5)| = 3^{n-1}.|Q(-5)|.$$

Suy ra $k \geq n-1$. Như vậy $S(x)$ là nhị thức bậc nhất và $P(x)$ có nghiệm nguyên. Nhưng nghiệm nguyên của $P(x)$ chỉ có thể là -1, 1, -3, 3. Kiểm tra lại thì chúng đều không là nghiệm. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử trên là sai, tức đa thức $P(x)$ là bất khả quy.

Ví dụ 3.46 (Nhật Bản 1999)**.** Chứng minh rằng không thể phân tích đa thức

$$f(x) = (x^2+1^2)(x^2+2^2)\cdots(x^2+n^2)+1$$

thành tích của hai đa thức hệ số nguyên bậc lớn hơn hay bằng 1.

Lời giải. Giả sử ngược lại, ta có $f(x) = g(x).h(x)$ với $g(x), h(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1. Khi đó, để ý rằng $f(\pm ki) = 1$ với $k = 1, 2, \ldots, n$, ta có

$$1 = g(ki)h(ki), \;\; k = \pm 1, \pm 2, , \pm n.$$

Vì số 1 chỉ có 4 cách phân tích thành tích của các số nguyên trong $\mathbb{Z}[i]$ là $1.1, (-1).(-1), i.(-i)$ và $(-i).i$ nên ta có với mọi $k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ thì

$$(g(ki); h(ki)) \in \{(1;1); (-1;-1); (i;-i); (-i;i)\}.$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $g(ki) = \overline{h(ki)} = h(-ki)$. Như thế đa thức $g(x) - h(-x)$ có $2n$ nghiệm phân biệt, trong khi bậc của nó nhỏ thua $2n$.

Vậy ta phải có $g(x) - h(-x)$ là đa thức hằng 0, tức là $g(x) = h(-x)$. Từ đó $\deg g(x) = \deg h(x) = n$.

Vì $f(x)$ là đa thức đơn khởi (hệ số bậc cao nhất bằng 1) nên ta có thể giả sử $g(x), h(x)$ đơn khởi. Khi đó đa thức $g^2(x) - h^2(x)$ có bậc nhỏ hơn $2n$. Đa thức này có ít nhất $2n$ nghiệm ki với $k \in \{\pm1; \pm2; \ldots; \pm n\}$. Suy ra $g^2(x) - h^2(x) = 0$. Ta không thể có $g(x) = -h(x)$ vì g và h đơn khởi. Vậy ta phải có $g(x) = h(x)$. Như thế $f(x) = g^2(x)$. Từ đây suy ra $(g(0))^2 = f(0) = (n!)^2 + 1$. Điều này là không thể vì $g(0)$ là số nguyên và $n \geq 1$.

3.2.3 Bài toán về sự chia hết của đa thức

Nhận xét rằng nếu đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ thì mọi nghiệm của $Q(x)$ đều là nghiệm của $P(x)$. Tính chất đơn giản này là chìa khoá để giải nhiều bài toán về sự chia hết của đa thức. Chúng ta xem xét một số ví dụ.

Ví dụ 3.47. Với giá trị nào của n thì $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Lời giải. Nhận xét rằng $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ là nghiệm của phương trình $Q(x) = x^2 + x + 1 = 0$. Đa thức $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $Q(x)$ khi và chỉ khi $P(\varepsilon) = 0$. Điều này tương đương với

$$\cos\frac{4n\pi}{3} + i\sin\frac{4n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow n = 3k+1 \text{ hoặc } n = 3k+2.$$

Vậy với $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

Trong ví dụ dưới đây, một lần nữa, căn của đơn vị lại đóng vai trò then chốt.

Ví dụ 3.48 (USA MO 1976)**.** Cho $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ là các đa thức sao cho

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho $x - 1$.

Lời giải. Đặt $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ thì $\varepsilon^5 = 1$. Thay x lần lượt bởi $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$, ta được các phương trình

$$P(1) + \varepsilon Q(1) + \varepsilon^2 R(1) = 0$$

$$P(1) + \varepsilon^2 Q(1) + \varepsilon^4 R(1) = 0$$

$$P(1) + \varepsilon^3 Q(1) + \varepsilon^6 R(1) = 0$$

$$P(1) + \varepsilon^4 Q(1) + \varepsilon^8 R(1) = 0$$

Nhân các phương trình từ thứ nhất đến thứ tư lần lượt với $-\varepsilon, -\varepsilon^2, -\varepsilon^3, -\varepsilon^4$, ta được

$$-\varepsilon P(1) - \varepsilon^2 Q(1) - \varepsilon^3 R(1) = 0$$

$$-\varepsilon^2 P(1) - \varepsilon^4 Q(1) - \varepsilon^R(1) = 0$$

$$-\varepsilon^3 P(1) - \varepsilon Q(1) - \varepsilon^4 R(1) = 0$$

$$-\varepsilon^4 P(1) - \varepsilon^3 Q(1) - \varepsilon^2 R(1) = 0$$

Sử dụng đẳng thức $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$, ta được $5P(1) = 0$, tức là $P(x)$ chia hết cho $x - 1$.

3.2.4 Quy tắc dấu Descartes trong ứng dụng

Tiếp theo, ta xét một số bài toán khảo sát số nghiệm thực, số nghiệm phức của đa thức thông qua số lần đổi dấu hoặc số lần giữ nguyên dấu của dãy hệ số tương ứng bằng cách sử dụng quy tắc dấu Descartes. Trên cơ sở đó mở rộng phạm vi ứng dụng của quy tắc này trong đại số.

Bổ đề 3.2. *Kí hiệu số vị trí đổi dấu của dãy các hệ số của các đa thức bậc n*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n$$

lần lượt là W^+ và W^-. Giả sử a_ν là số hạng đầu tiên khác 0 trong dãy các hệ số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\nu-1}, a_\nu, \dots, a_n$ của đa thức $f(x)$. Khi đó

$$n - \nu - (W^+ + W^-) \geqslant 0.$$

Chứng minh. Kí hiệu $a_k x^k$ và $a_l x^l$ là hai số hạng thoả mãn điều kiện

$$a_k \neq 0, a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{l-1} = 0, a_l \neq 0.$$

Khi đó

$$f(x) = a_\nu x^\nu + \cdots + a_k x^k + a_l x^l + \cdots + a_n x^n,\ \ a_n \neq 0.$$

Suy ra ν là một giá trị riêng của k.

Nếu $(n-k)$ lẻ thì với mỗi cặp $a_k x^k + a_l x^l$ sẽ đóng góp một đơn vị vào cho W^+ hoặc cho W^-.

Nếu $(n-k)$ chẵn thì từ cặp $a_k x^k + a_l x^l$ hai đại lượng W^+ và W^- nhận thêm một đơn vị cho mỗi đại lượng hoặc không nhận gì cả.

Mặt khác ta có

$$(n-\nu) = \sum^{L}(l-k) + \sum^{C}(l-k),$$

trong đó tổng $\sum^{L}$ được lấy theo các hiệu $(l-k)$ lẻ, $\sum^{C}$ được lấy theo các hiệu $(l-k)$ chẵn. Từ đó suy ra

$$(n-\nu) - (W^+ + W^-) = \sum^{L}(l-k-1) + \sum^{C}\{l-k-[1-\operatorname{sign}(a_k a_l)]\}.$$

Nhận xét rằng, các số hạng trong $\sum^{L}$ và $\sum^{C}$ đều không âm. Do đó

$$(n-\nu) - (W^+ + W^-) \geqslant 0.$$

Định lý 3.4. *Giả sử đa thức $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$ có các nghiệm đều thực, gọi W là số vị trí đổi dấu của dãy hệ số $a_0, a_1, \dots, a_n$ và N là số không điểm dương của đa thức $f(x)$ thì $W = N$.*

Chứng minh. Giả sử N^+ là số không điểm dương, N^- là số không điểm âm của $f(x)$. Khi đó N^- là số không điểm dương của $f(-x)$. Do đa thức $f(x)$ chỉ có các nghiệm thực nên với các kí hiệu như bổ đề 3.2, ta có

$$n = N^+ + \nu + N^- \text{ hay } n - \nu = N^+ + N^-$$

và

$$0 \leqslant (n-\nu)-(W^+ + W^-) = (N^+ + N^-)-(W^+ + W^-) = (N^+ - W^+)+(N^- - W^-).$$

Theo quy tắc dấu Descartes, ta có

$$(N^+ - W^+) \leqslant 0 \text{ và } (N^- - W^-) \leqslant 0.$$

Do đó

$$(N^+ - W^+) = 0 \text{ và } (N^- - W^-) = 0.$$

Suy ra $N^+ = W^+$ tức là $N = W$.

Ví dụ 3.49. Cho đa thức

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

thoả mãn các điều kiện

$$a_0 \neq 0, \ a_n \neq 0 \ \text{ và } 2m \text{ hệ số liên tiếp đều bằng } 0, \text{ với } m \in \mathbb{Z}^+, m < \frac{n}{2}.$$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất $2m$ nghiệm phức.

Lời giải. Với các kí hiệu như bổ đề 3.2 và kí hiệu N^+, N^- lần lượt là số nghiệm dương và âm của $f(x)$.

Theo quy tắc dấu Descartes, ta có $W^+ \geqslant N^+$, $W^- \geqslant N^-$. Suy ra

$$W^+ + \nu + W^- \geqslant N^+ + \nu + N^-$$

Do $N^+ + \nu + N^-$ là số nghiệm thực của $f(x)$ nên số nghiệm phức của $f(x)$ là

$$n - (N^+ + \nu + N^-) \geqslant n - (W^+ + \nu + W^-).$$

Theo lời giải bổ đề 3.2 ta có

$$n - (W^+ + \nu + W^-) = \sum^{L}(l - k - 1) + \sum^{C}\{l - k - [1 - \operatorname{sign}(a_k a_l)]\}.$$

Do đó nếu $a_k \neq 0, a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{k+2m} = 0$ thì

- ⋄ Hoặc $l - k$ lẻ và $l - k \geqslant 2m + 1$;
- ⋄ Hoặc $l - k$ chẵn và $l - k \geqslant 2m + 2$.

Vậy số nghiệm phức của đa thức $f(x)$ là $n - (N^+ + \nu + N^-) \geqslant 2m$.

Ví dụ 3.50. Kí hiệu $\mathbb{H}_2$ là tập hợp tất cả các đa thức hệ số thực $P_2(x)$ bậc hai với hệ số tự do bằng 1 (tức $P_2(0) = 1$) và có nghiệm thực. Giả sử

$$\frac{1}{P_2(x)} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_m x^m + \cdots$$

Chứng minh rằng với mọi $P_2(x) \in \mathbb{H}_2$, các đa thức

$$\hat{P}_{2m}(x) := 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{2m} x^{2m}, \ \ m \in \mathbb{N}$$

đều không có nghiệm thực.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, xét đa thức

$$P_2(x) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x), \ \text{ trong đó } \ \alpha_1\alpha_2 \neq 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_2(x)} &= \frac{1}{(1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x)}\\
&= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\Big[\frac{1}{\alpha_2(1 - \alpha_1 x)} - \frac{1}{\alpha_1(1 - \alpha_2 x)}\Big]\\
&= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\Big[\frac{1}{\alpha_2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_1^k x^k - \frac{1}{\alpha_1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_2^k x^k\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\Big[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_2}x+\frac{\alpha_1^3-\alpha_2^3}{\alpha_1\alpha_2}x^2+\cdots+\frac{\alpha_1^k-\alpha_2^k}{\alpha_1\alpha_2}x^k+\cdots\Big]\\
=&1+(\alpha_1+\alpha_2)x+(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)x^2+\cdots+\sum_{i+j=k}\alpha_1^i\alpha_2^jx^k+\cdots
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\hat{P}_2(x)=&1+(\alpha_1+\alpha_2)x+(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)x^2+\cdots+\sum_{i+j=k}\alpha_1^i\alpha_2^jx^k\\
&+\cdots+\sum_{i+j=2m-1}\alpha_1^i\alpha_2^jx^{2m-1}+\sum_{i+j=2m}\alpha_1^i\alpha_2^jx^{2m}\ \ (i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Xét tích

$$\begin{aligned}
P(x)\hat{P}_2(x)=&\\
&=\Big[1-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2x^2\Big]\Big[1+(\alpha_1+\alpha_2)x+(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)x^2\\
&+\cdots+\sum_{i+j=k}\alpha_1^i\alpha_2^jx^k+\cdots+\sum_{i+j=2m-1}\alpha_1^i\alpha_2^jx^{2m-1}+\sum_{i+j=2m}\alpha_1^i\alpha_2^jx^{2m}\Big].
\end{aligned}$$

Ta thực hiện phép nhân đa thức, rồi thu gọn các đơn thức đồng dạng. Sau đây ta tiến hành thu gọn các đơn thức bậc k $(k\leqslant 2m)$ sinh ra từ tích hai đa thức trên.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i+j=k}\alpha_1^i\alpha_2^jx^k-(\alpha_1+\alpha_2)\sum_{i+j=k-1}\alpha_1^i\alpha_2^jx^k+\alpha_1\alpha_2\sum_{i+j=k-2}\alpha_1^i\alpha_2^jx^k\\
=&\Big[\sum_{i+j=k}\alpha_1^i\alpha_2^j-\sum_{i+j=k-1}\alpha_1^{i+1}\alpha_2^j-\sum_{i+j=k-1}\alpha_1^i\alpha_2^{j+1}+\sum_{i+j=k-2}\alpha_1^{i+1}\alpha_2^{j+1}\Big]x^k=0.
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta thu gọn các đơn thức bậc $2m+1$

$$\begin{aligned}
&-(\alpha_1+\alpha_2)\sum_{i+j=2m}\alpha_1^i\alpha_2^jx^{2m+1}+\alpha_1\alpha_2\sum_{i+j=2m-1}\alpha_1^i\alpha_2^jx^{2m+1}\\
&=\Big[-\sum_{i+j=2m}\alpha_1^{i+1}\alpha_2^j-\sum_{i+j=2m}\alpha_1^i\alpha_2^{j+1}+\sum_{i+j=2m-1}\alpha_1^{i+1}\alpha_2^{j+1}\Big]x^{2m+1}\\
&=-\sum_{i+j=2m+1}\alpha_1^i\alpha_2^jx^{2m+1}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, khi nhân hai đa thức trên ta thấy chỉ xuất hiện một hạng tử bậc $2m+2$ là

$$\alpha_1\alpha_2 x^2 \sum_{i+j=2m} \alpha_1^i \alpha_2^j x^{2m} = \sum_{i+j=2m} \alpha_1^{i+1}\alpha_2^{j+1} x^{2m+2}.$$

Ta thu được

$$P(x)\hat{P}_2(x) = 1 - \sum_{i+j=2m+1} \alpha_1^i \alpha_2^j x^{2m+1} + \sum_{i+j=2m} \alpha_1^{i+1}\alpha_2^{j+1} x^{2m+2}.$$

Như vậy trong số các hệ số của đa thức $H(x) = P(x)\hat{P}_2(x)$ có $2m$ hệ số liên tiếp bằng 0. Theo bài toán 3.49 thì $H(x)$ có ít nhất $2m$ nghiệm phức nhưng $\deg H(x) = 2m+2$ nên $H(x)$ có không quá hai nghiệm thực. Theo đề bài, đa thức $P(x)$ có hai nghiệm thực nên $\hat{P}_2(x)$ không có nghiệm thực.

Tiếp theo, ta chứng minh định lí quan trọng sau đây mô tả một số lớp đa thức không có nghiệm thực.

Định lý 3.5 (Laguerre)**.** [2] *Kí hiệu $\mathbb{H}_n$ là tập hợp đa thức hệ số thực $P_n(x)$ bậc n, $(n > 0)$ với hệ số tự do bằng 1 và có tất cả các nghiệm đều thực. Giả sử*

$$\frac{1}{P_n(x)} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_k x^k + \cdots .$$

Khi đó, ứng với mỗi $P_n(x) \in \mathbb{H}_n$, các đa thức dạng

$$\hat{P}_{2m}(x) := 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{2m} x^{2m}, \ \ m \in \mathbb{N}$$

đều không có nghiệm thực.

Chứng minh. Giả sử

$$P_n(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \ \text{ với } \ a_n \neq 0$$

là đa thức thuộc $\mathbb{H}_n$.

[2] N.Laguerre (1834-1886) là nhà toán học Pháp.

Từ giả thiết, ta có

$$1 = P_n(x)(1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{2m}x^{2m} + p_{2m+1}x^{2m+1} + \cdots)$$

hay

$$1 = P_n(x)[\hat{P}_{2m}(x) + p_{2m+1}x^{2m+1} + \cdots].$$

Từ hệ thức cuối này, ta thu được

$$P_n(x)\hat{P}_{2m}(x) = 1 - p_{2m+1}x^{2m+1} + \cdots$$

So sánh (đồng nhất thức theo luỹ thừa) hai vế, ta có đẳng thức

$$P_n(x)\hat{P}_{2m}(x) = 1 + q_{2m+1}x^{2m+1} + q_{2m+2}x^{2m+2} + \cdots + q_{2m+n}x^{2m+n},$$

trong đó $q_{2m+1} = -p_{2m+1}$, $q_{2m+n} = p_{2m}a_n$.
Theo bài toán 3.49, thì đa thức

$$H(x) := P_n(x)\hat{P}_{2m}(x)$$

có ít nhất $2m$ nghiệm phức, tức là $H(x)$ có không quá n nghiệm thực (do $\deg H(x) = 2m + n$). Nhưng theo giả thiết thì đa thức $P_n(x)$ có n nghiệm thực nên đa thức $\hat{P}_{2m}(x)$ không có nghiệm thực.

Tiếp theo, ta phát biểu kết quả quan trọng sau đây như là một hệ quả trực tiếp suy ra từ định lí Laguerre.

Hệ quả 3.1. *Giả sử $P_n(x)$ là đa thức thực bậc n $(n > 0)$ với hệ số tự do bằng 1 $(P_n(0) = 1)$ và có các nghiệm đều thực. Khi đó, ứng với mỗi m $(m \in \mathbb{N}^*)$ cho trước, luôn tồn tại đa thức $\hat{P}_{2m}(x)$ bậc $2m$ không có nghiệm thực sao cho*

$$P_n(x)\hat{P}_{2m}(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_{2m+n}x^{2m+n},$$

trong đó $q_1 = q_2 = \cdots = q_{2m} = 0$.

Chứng minh. Do $P_n(x)$ là đa thức bậc n $(n > 0)$ với hệ số tự do bằng 1, có các nghiệm đều thực nên

$$\frac{1}{P_n(x)} = 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{2m}x^{2m} + p_{2m+1}x^{2m+1} \cdots .$$

Theo định lí 3.5 với mỗi $m \in \mathbb{N}$ luôn tồn tại đa thức

$$\hat{P}_{2m}(x) = 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{2m}x^{2m}$$

không có nghiệm thực. Khi đó,

$$\frac{1}{P_n(x)} = \hat{P}_{2m}(x) + p_{2m+1}x^{2m+1} \cdots .$$

Suy ra

$$P_n(x)\hat{P}_{2m}(x) = 1 - p_{2m+1}x^{2m+1} + \cdots .$$

Đồng nhất hệ số theo từng bậc luỹ thừa ở hai vế, ta thu được

$$q_{2m+1} = -p_{2m+1}, \cdots , q_{2m+n} = p_{2m}a_n.$$

Vậy

$$P_n(x)\hat{P}_{2m}(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_{2m+n}x^{2m+n},$$

trong đó $q_1 = q_2 = \cdots = q_{2m} = 0$.

Sau đây ta mô tả một lớp đa thức bậc lẻ có duy nhất một nghiệm thực (đơn).

Ví dụ 3.51. Kí hiệu $\mathbb{H}_n$ là tập hợp đa thức thực $P_n(x)$ bậc $n, (n > 0)$ với hệ số tự do bằng 1 (tức $P_n(0) = 1$) và có các nghiệm đều thực. Giả sử

$$\frac{1}{P_n(x)} = 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_kx^k + \cdots$$

Chứng minh rằng ứng với mỗi $P_n(x) \in \mathbb{H}_n$, các đa thức

$$\hat{P}_{2m+1}(x) := 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{2m+1}x^{2m+1}, \ \ m \in \mathbb{N}$$

đều có duy nhất một nghiệm thực (đơn).

Lời giải. Tương tự như cách chứng minh định lí trên, ta giả sử

$$P_n(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

là đa thức thuộc $\mathbb{H}_n$ và

$$1 = P_n(x)(1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{2m+1}x^{2m+1} + p_{2m+2}x^{2m+2} + \cdots).$$

Do đó

$$1 = P_n(x)[\hat{P}_{2m+1}(x) + p_{2m+2}x^{2m+2} + \cdots].$$

Từ hệ thức này, ta suy ra

$$P_n(x)\hat{P}_{2m+1}(x) = 1 - p_{2m+2}x^{2m+2} + \cdots .$$

So sánh đồng nhất thức theo luỹ thừa ở hai vế, ta thu được đẳng thức

$$P_n(x)\hat{P}_{2m+1}(x) = 1 + q_{2m+2}x^{2m+2} + q_{2m+3}x^{2m+3} + \cdots + q_{2m+n+1}x^{2m+n+1},$$

trong đó $q_{2m+2} = -p_{2m+2}$, $q_{2m+n+1} = p_{2m+1}a_n$.
Theo bài toán 3.49 thì đa thức

$$H(x) := P_n(x)\hat{P}_{2m+1}(x)$$

có ít nhất $2m$ nghiệm phức, tức là $H(x)$ có không quá $n+1$ nghiệm thực. Vì đa thức $P_n(x)$ có n nghiệm thực, nên đa thức $\hat{P}_{2m+1}(x)$ sẽ có không quá một nghiệm thực. Mặt khác, $\hat{P}_{2m+1}(x)$ là đa thức bậc lẻ nên nó có ít nhất một nghiệm thực. Do đó đa thức $\hat{P}_{2m+1}(x)$ có duy nhất một nghiệm thực.

3.3 Phương trình hàm với biến đổi phân tuyến tính

Ta khảo sát lớp các phương trình hàm với acgumen biến đổi sinh bởi hàm phân tuyến tính thực dạng

$$f(\omega(x)) = af(x) + b,$$

trong đó

$$\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma}, \ \ \alpha\gamma - \beta \neq 0.$$

3.3.1 Một số tính chất của hàm phân tuyến tính

Trước hết, ta khảo sát phương trình đại số với hệ số thực dạng

$$\frac{m}{x + \gamma} = x, \ m \neq 0. \tag{3.43}$$

Phương trình (3.43) tương đương với phương trình bậc 2

$$x^2 + \gamma x - m = 0. \ m \neq 0. \tag{3.44}$$

Phương trình (3.44) có nghiệm thực khi và chỉ khi $\Delta := \gamma^2 + 4m \geq 0$.

(i) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (3.44) có nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{\gamma}{2}\cdot$

(ii) Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (3.44) có 2 nghiệm thực phân biệt

$$x_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\cdot$$

Trong trường hợp khi $\Delta < 0$ thì phương trình (3.44) có 2 nghiệm phức liên hợp

$$z_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \mp \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}\cdot$$

Tiếp theo, ta chỉ ra cách đặt ẩn số phụ để đưa phương trình đại số tổng quát sinh bởi hàm phân tuyến tính $\omega(x)$ dạng

$$\frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} = x, \ \alpha\gamma - \beta \neq 0 \tag{3.45}$$

về phương trình dạng (3.43).

Ta sử dụng các đồng nhất thức sau

$$\frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} = \alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{x + \gamma}$$

và viết phương trình dạng (3.45) dưới dạng

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{x + \gamma} = x \Leftrightarrow \alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{(x - \alpha) + (\gamma + \alpha)} = (x - \alpha) + \alpha,$$

hay

$$\frac{\beta - \alpha\gamma}{t + (\gamma + \alpha)} = t, \tag{3.46}$$

trong đó $t = x - \alpha$. Rõ ràng phương trình (3.46) có dạng (3.43).

Trường hợp đặc biệt khi $\gamma + \alpha = 0$ thì phương trình (3.46) có dạng đơn giản

$$\frac{\beta + \alpha^2}{t} = t \tag{3.47}$$

và hàm phân tuyến tính tương ứng

$$\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma}$$

có tính chất đặc biệt

$$\omega(\omega(x)) \equiv x,$$

tức hàm $\omega(x)$ là phép biến đổi đối hợp.

3.3.2 Đẳng cấu phân tuyến tính.

Ánh xạ phân tuyến tính đã được đề cập ở phần trên, ở đây ta sẽ trình bày các tính chất cơ bản nhất của ánh xạ đó.

Ánh xạ phân tuyến tính được xác định bởi hệ thức

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{3.48}$$

trong đó a, b, c, d là các số phức.

Với điều kiện $ad - bc \neq 0$ ta có $w \not\equiv \text{const}$. Trong công thức (3.48) nếu $c = 0$ còn $d \neq 0$ thì

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \tilde{a}z + \tilde{b}.$$

Đó là một hàm nguyên.

Định lý 3.6. *Ánh xạ phân tuyến tính* (3.48) *là một phép đồng phôi từ* $\overline{\mathbb{C}}$ *lên* $\overline{\mathbb{C}}$.

Chứng minh

1. Trường hợp $c = 0$ là hiển nhiên.

2. Ta xét trường hợp $c \neq 0$. Giải phương trình (3.48) đối với z ta có

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0. \tag{3.49}$$

Đó là hàm ngược của (3.48). Ánh xạ (3.49) đơn trị trong mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ và là ánh xạ phân tuyến tính. Do đó (3.48) đơn trị một - một trên $\overline{\mathbb{C}}$.

Tính liên tục của (3.48) tại các điểm $z \neq -\dfrac{d}{c}, \infty$ là hiển nhiên. Bằng cách đặt

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

ta thấy rằng (3.48) liên tục trên $\overline{\mathbb{C}}$. Định lí được chứng minh.

Định lý 3.7. *Ánh xạ phân tuyến tính bảo giác khắp nơi trên* $\overline{\mathbb{C}}$.

Chứng minh. Đối với trường hợp $z \neq -\dfrac{d}{c}, \infty$ tính bảo giác suy ra từ nhận xét rằng tại các điểm đó

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Bây giờ giả sử hai đường cong γ_1 và γ_2 đi qua điểm $z = -\dfrac{d}{c}$ và α là góc giữa γ_1 và γ_2 tại điểm ấy. Suy ra rằng góc giữa các ảnh γ_1^* và γ_2^* của γ_1 và γ_2 tương ứng qua ánh xạ (3.48) tại điểm $w = \infty$ (tương ứng với $z = -\dfrac{d}{c}$) là bằng α vì

$$\lim_{z \to -\frac{d}{c}} \frac{1}{\dfrac{az + b}{cz + d}\left(z + \dfrac{d}{c}\right)} = \lim_{z \to -\frac{d}{c}} \frac{c}{az + b} \neq 0.$$

Trường hợp $z = \infty$ cũng được chứng minh tương tự.

Định nghĩa 3.1. *Ánh xạ phân tuyến tính biến miền D lên miền D^* được gọi là đẳng cấu phân tuyến tính, còn các miền D và D^* được gọi là những miền đẳng cấu phân tuyến tính với nhau.*

Định lý 3.8. *Tập hợp mọi đẳng cấu phân tuyến tính lập thành một nhóm với phép toán lập hàm hợp, nghĩa là*

1) *Hợp (tích) các đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.*

2) *Ánh xạ ngược của đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.*

Chứng minh. Khẳng định 2) là hiển nhiên. Ta chứng minh 1). Giả sử

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0,$$
$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0.$$

Khi đó

$$w = \frac{a_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)} = \frac{az + b}{cz + d},$$

trong đó $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$.

Nhận xét 3.1. Hiển nhiên rằng nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính là nhóm không giao hoán. Thật vậy, giả sử $w(z) = \dfrac{1}{z}$, $\varphi(z) = z + 1$.
Khi đó

$$w(\varphi(z)) = \frac{1}{z+1}, \quad \varphi(w(z)) = \frac{1}{z} + 1.$$

Do đó

$$w(\varphi(z)) \neq \varphi(w(z)).$$

Vì qua phép chiếu nổi cả đường thẳng lẫn đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đều tương ứng với đường tròn trên mặt cầu Riemann nên ta có thể quy ước gọi đường thẳng hay đường tròn trên mặt phẳng phức đều là "đường tròn" trên $\overline{\mathbb{C}}$ (ta xem đường thẳng trên $\mathbb{C}$ là đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đi qua điểm ∞), và gọi hình tròn, phần ngoài hình tròn và nửa mặt phẳng (hình tròn với bán kính vô cùng) đều là "hình tròn" trên $\overline{\mathbb{C}}$.

$$S(a,R) = \{|z-a| < R\} \text{ – hình tròn},$$
$$S^*(a,R) = \{|z-a| > R\} \text{ – phần ngoài hình tròn},$$
$$P(R,\varphi) = \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > R\big\} \text{ là nửa mặt phẳng}.$$

Thật vậy, đặt $e^{+i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $z = x + iy$, ta có

$$P(R,\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\cos\varphi + y\sin\varphi > R\}.$$

Đó là nửa mặt phẳng.

Định lý 3.9. *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến "hình tròn" ("đường tròn") thành "hình tròn" (tương ứng thành "đường tròn").*

Nói cách khác: "hình tròn" và "đường tròn" đều là bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.

Chứng minh. Ánh xạ phân tuyến tính có thể biểu diễn dưới dạng hợp của các ánh xạ:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\xi; \quad \xi = \frac{1}{\zeta}\,; \quad \zeta = z + \frac{d}{c}\,,$$

trong đó có hai ánh xạ tuyến tính và ánh xạ $\xi = \dfrac{1}{\zeta}$. Đối với các ánh xạ tuyến tính định lí 3.9 là hiển nhiên. Ta chỉ cần xét phép nghịch đảo $w = \dfrac{1}{z}$.

1. Ta xét trường hợp hình tròn $S(a,R)$. Ảnh của nó sẽ là

$$\left|\frac{1}{w} - a\right| < R, \quad |1-aw| < R|w|, \quad |1-aw|^2 < R^2|w|^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2\mathrm{Re}(aw) + |a^2||w|^2 < R^2|w|^2.$$

Tiếp theo ta xét ba trường hợp sau

a) $|a| > R$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(|a|^2 - R^2)|w|^2 - 2\mathrm{Re}(aw) + 1 < 0\\
\Rightarrow &|w|^2 - 2\mathrm{Re}\frac{aw}{|a|^2 - R^2} + \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2} < \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2} - \frac{1}{|a|^2 - R^2}\\
\Rightarrow &\left|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\right|^2 < \frac{R^2}{(|a|^2 - R^2)^2}\\
\Rightarrow &\left|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\right| < \frac{R}{|a|^2 - R^2}\cdot
\end{aligned}$$

Đó là hình tròn.

b) Giả sử $|a| < R$. Tương tự như trên ta có

$$\left|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\right| > \frac{R}{R^2 - |a|^2}\cdot$$

c) Giả sử $|a| = R$. Đặt $a = |a|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg a$, ta có:

$$\mathrm{Re}(aw) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > \frac{1}{2|a|}\cdot$$

đó là nửa mặt phẳng.

2. Đối với phần ngoài hình tròn $A^*(a, R)$ định lí được xét tương tự.

3. Bây giờ ta xét phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > -R$, $R > 0$. ảnh của nó sẽ là

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}\frac{1}{w}\right) > -R \Rightarrow \mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right) > -R \Rightarrow \mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > -R|w|^2,$$

và do đó

$$\begin{aligned}
2R|w|^2 + 2\mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > 0 \Rightarrow &|w|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2R}w\right) + \frac{1}{4R^2} > \frac{1}{4R^2}\\
\Rightarrow &\left|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\right|^2 > \frac{1}{4R^2}\,, \quad \left|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\right| > \frac{1}{2R}\cdot
\end{aligned}$$

Đó là phần ngoài hình tròn. Phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > R > 0$ được xét tương tự.

Nhận xét 3.2. Trong mọi trường hợp, điểm a được ánh xạ thành điểm $\dfrac{1}{a}$. điểm này thuộc ảnh hình tròn $S(a, R)$ cùng với một lân cận nào đó của nó.

Định lý 3.10. *Ánh xạ phân tuyến tính biến miền thành miền.*

Chứng minh. Giả sử B là miền, $w = \varphi(z)$ là ánh xạ phân tuyến tính, $D = \varphi(B)$.

1. Chứng minh D là tập hợp mở. Với mọi $w_0 \in D$, tồn tại duy nhất điểm $z_0 \in B$ sao cho $\varphi(z_0) = w_0$. Giả sử $U(z_0) \subset B$ là lân cận của điểm z_0 (hình tròn với tâm z_0 nếu $z_0 \neq \infty$ hoặc phần ngoài hình tròn nếu $z_0 = \infty$). Khi đó theo định lí 3.9 ta có $\varphi(U(z_0))$ là "hình tròn" chứa điểm w_0 cùng với một lân cận nào đó của nó. Như vậy w_0 là điểm trong của D và do đó D là tập hợp mở.

2. Chứng minh D là tập hợp liên thông. Vì B là tập liên thông nên từ định lí 3.6 suy ra rằng D là tập hợp liên thông.

Như vậy D là tập hợp mở liên thông, nghĩa là: D là một miền.

Định lí 3.6, 3.7 và 3.9 là những tính chất đặc trưng của ánh xạ phân tuyến tính.

Ngoài tính bảo giác và bảo toàn đường tròn, nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính còn có những bất biến khác nữa.

Đẳng cấu phân tuyến tính (3.48) chứa ba tham số phức làtỉ số của ba trong bốn hệ số a, b, c, d với hệ số thứ tư ($\neq 0$). Các tham số này được xác định đơn trị bởi điều kiện: ba điểm cho trước z_1, z_2, z_3 của mặt phẳng phức (z) biến thành ba điểm w_1, w_2, w_3 của mặt phẳng phức (w). điều đó được suy ra từ định lí sau đây.

Định lý 3.11. *Tồn tại đẳng cấu phân tuyến tính duy nhất biến ba điểm khác nhau $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ thành ba điểm khác nhau $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tương ứng. Đẳng* *cấu đó được xác định theo công thức*

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\cdot \tag{3.50}$$

Chứng minh

1. *Tính duy nhất.* Giả sử ta có hai đẳng cấu $w_1(z)$ và $w_2(z)$ thỏa mãn các điều kiện của định lí. Giả sử $\zeta_2(w)$ là ánh xạ ngược của $w_2(z)$.

Ta xét ánh xạ $\zeta_2[w_1(z)]$. đó là một đẳng cấu phân tuyến tính. đẳng cấu này có ba điểm bất động z_1, z_2 và z_3 vì

$$w_1(z_k)=w_k,\quad k=1,2,3,$$

$$\zeta_2(w_k)=z_k,\quad k=1,2,3.$$

Do đó nếu đặt $\zeta_2[w_1(z)]=\dfrac{az+b}{cz+d}$ thì

$$\frac{az_k+b}{cz_k+d}=z_k,\quad k=1,2,3,$$

hay là

$$cz_k^2+(d-a)z_k-b=0,\quad k=1,2,3.$$

Đa thức bậc hai ở vế trái chỉ có thể có ba nghiệm khác nhau ($z_1\neq x_2\neq z_3$) khi mọi hệ số của nó đều bằng 0, tức là $a=d$, $b=c=0$ và $\zeta_2[w_1(z)]\equiv z$ hay là $w_1(z)\equiv w_2(z)$.

2. *Sự tồn tại.* Đẳng cấu phân tuyến tính thỏa mãn điều kiện của định lí được xác định theo công thức (3.50). Thật vậy, giải phương trình (3.50) đối với w ta thu được hàm phân tuyến tính. Ngoài ra khi thế cặp $z=z_1$ và $w=w_1$ vào eq3.50 thì cả hai vế của (3.50) đều bằng 0. Thế cặp $z=z_3$ và $w=w_3$ vào (3.50) ta thu được cả hai vế đều bằng 1 và cuối cùng, thế cặp $z=z_2$ và $w=w_2$ ta thu được cả hai vế đều bằng ∞.

Trong hình học, biểu thức

$$\lambda=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

được gọi là *tỉ số phi điều hòa* của bốn điểm z, z_1, z_2 và z_3.
Nếu bốn điểm z_1, z_2, z, z_3 nằm trên một đường tròn (hoặc đường thẳng) thìtỉ số phi điều hòa là một số thực. Thật vậy

a) Nếu các điểm z_1, z_2, z, z_3 nằm trên đường thẳng

$$\zeta = \zeta_0 + te^{i\alpha},\ -\infty < t < \infty$$

ta có: $z_1 = \zeta_0 + t_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = \zeta_0 + t_2 e^{i\alpha}$, $z = \zeta_0 + t_0 e^{i\alpha}$, $z_3 = \zeta_0 + t_3 e^{i\alpha}$ và từ đó

$$(z_1, z_2, z, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2} : \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \in \mathbb{R}.$$

b) Nếu các điểm z, z_1, z_2, z_3 nằm trên đường tròn $\zeta = \zeta_0 + re^{it}$, $r > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, ta có $z_1 = \zeta_0 + re^{i\varphi_1}$, $z_2 = \zeta_0 + re^{i\varphi_2}$, $z_3 = \zeta_0 + re^{i\varphi_3}$ và từ đó ta có

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_2}} : \frac{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_2}} \\
&= \frac{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}\right]}{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}\right]} : \frac{e^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}\right]}{e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}}\right]} \\
&= \frac{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_2}{2}} : \frac{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Từ định lí 3.11 ta rút ra một tính chất quan trọng nữa của đẳng cấu phân tuyến tính.

Hệ quả 3.2. *Tỉ số phi điều hòa là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

Định nghĩa 3.2.

1. Hai điểm z và z^* được gọi là *đối xứng với nhau qua đường tròn* $\Gamma = \{|z - z_0| = R\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ nếu chúng có các tính chất sau:

a) z và z^* cùng nằm trên một tia đi từ z_0;

b) $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.

2. Mọi điểm trên đường tròn Γ được xem là đối xứng với chính nó qua Γ. Từ định nghĩa 3.2 suy ra rằng các điểm đối xứng qua đường tròn Γ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}\cdot$$

Thật vậy, từ biểu thức vừa viết suy ra

$$|w - z_0|\ |z - z_0| = R^2$$

và

$$\arg(w - z_0) = \arg(z - z_0).$$

Trong hình học sơ cấp ta biết rằng hai điểm z và z^* đối xứng với nhau qua đường tròn Γ khi và chỉ khi mọi đường tròn $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ đi qua z và z^* đều trực giao với Γ. Ta có định lí sau.

Định lý 3.12. *Tính đối xứng tương hỗ giữa các điểm là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

Chứng minh. Kết luận của định lí được suy từ định lí 3.7 và 3.9.

Từ sự bất biến của tính đối xứng giữa các điểm suy ra rằng trong trường hợp khi đường tròn biến thành đường thẳng, tính đối xứng trùng với khái niệm đối xứng thông thường.
Ta minh họa việc áp dụng tính bất biến của các điểm đối xứng qua đẳng cấu phân tuyến tính bằng các định lí sau đây.

Định lý 3.13. *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị đều có dạng*

$$w = e^{i\lambda}\frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0, \tag{3.51}$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là số thực tùy ý.

Chứng minh. Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ ($\operatorname{Im} \alpha > 0$).
Ta nhận xét rằng điểm $w = 0$ và $w = \infty$ sẽ tương ứng với các giá trị liên hợp của z, do đó $c \neq 0$ (vì nếu $c = 0$ thì điểm ∞ sẽ tương ứng với điểm ∞).
Các điểm $w = 0$, $w = \infty$ sẽ tương ứng với các điểm $-\dfrac{b}{a}$ và $-\dfrac{d}{c}$. Do đó có thể viết $-\dfrac{b}{a} = \alpha$, $-\dfrac{d}{c} = \overline{\alpha}$ và $w = \dfrac{a}{c}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\cdot$
Vì các điểm của trục thực có ảnh nằm trên đường tròn đơn vị, tức là $|w| = 1$ khi $z = x \in \mathbb{R}$, cho nên

$$\Big|\frac{a}{c}\ \frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}\Big| = \Big|\frac{a}{c}\Big| = 1$$

và $a = ce^{i\lambda}$. Như vậy $w = e^{i\lambda}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\cdot$
Ta chứng minh rằng đó là đẳng cấu phải tìm. Thật vậy, nếu $z = x \in \mathbb{R}$ thì hiển nhiên $|w| = 1$. Nếu $\operatorname{Im} z > 0$ thì z gần α hơn so với $\overline{\alpha}$ (tức là $|z-\alpha| < |z-\overline{\alpha}|$) và do đó $|w| < 1$.

Nhận xét 3.3. Trong ánh xạ (3.51) góc quay của các đường cong tại điểm α là bằng $\lambda - \dfrac{\pi}{2}$ vì từ (3.51) ta có

$$arg\, w'(\alpha) = \lambda - \frac{\pi}{2}\cdot$$

Định lý 3.14. *Mọi đẳng cấu phân tuyến tính biến hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ đều có dạng*

$$w = e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\,, \tag{3.52}$$

trong đó $|\alpha| < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ là số thực tùy ý.

Chứng minh. Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ biến hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ ($|\alpha| < 1$). Theo tính chất bảo toàn điểm đối xứng, các điểm $w = 0$, $w = \infty$ tương ứng với các điểm liên hợp $z = \alpha$ và $z = \dfrac{1}{\overline{\alpha}}$, $|\alpha| < 1$. Do đó

$$-\frac{b}{a} = \alpha, \quad -\frac{d}{c} = \frac{1}{\overline{\alpha}}, \quad |\alpha| < 1,$$

và

$$w = \frac{a}{c}\ \frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}} = \frac{a\overline{\alpha}}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1} = -\frac{a\overline{\alpha}}{c}\ \frac{z-\alpha}{1-\alpha\overline{z}}\cdot$$

Vì các điểm của đường tròn đơn vị phải biến thành các điểm của đường tròn đơn vị nên $|w| = 1$ khi $|z| = 1$. Vì $z\cdot\overline{z} = |z|^2$ nên $z\overline{z} = 1$ khi $|z| = 1$. Vì số $1-\overline{\alpha}z$ và $1-\alpha\overline{z}$ liên hợp với nhau và $|1-\overline{\alpha}z| = |1-\overline{\alpha z}|$ nên nếu $|z| = 1$ thì

$$|1-\overline{\alpha}z| = |1-\alpha\overline{z}|\cdot|z| = |z-\alpha\overline{z}z| = |z-\alpha|.$$

Do đó khi $|z| = 1$ thì ta có:

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = 1.$$

Nhưng khi đó $|w| = 1$ cho nên $\left|\dfrac{a\overline{\alpha}}{c}\right| = 1$ và $\dfrac{a\overline{\alpha}}{c} = e^{i\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Như vậy ta thu được (3.52).

Ta cần chứng minh rằng đó là đẳng cấu muốn tìm. Thật vậy nếu $z = e^{i\theta}$ và $\alpha = r_1e^{i\beta}$ thì

$$|w| = \left|\frac{e^{i\theta}-r_1e^{i\beta}}{1-r_1e^{-i\beta}\cdot e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{1-r_1e^{i\beta}e^{-i\theta}}{1-r_1e^{-i\beta}e^{i\theta}}\right| = 1.$$

Nếu $z = re^{i\theta}$ $(r<1)$ thì

$$\begin{aligned}|z-a|^2-|1-\overline{\alpha}z|^2 &= r^2-2rr_1\cos(\theta-\beta)+r_1^2-(r_1^2r^2-2r_1r\cos(\theta-\beta)+1)\\ &= (r^2-1)(1-r_1^2) < 0\end{aligned}$$

và do đó $|z-\alpha|^2-|1-\overline{\alpha}z|^2 < 0$ và $|w| < 1$.

Nhận xét 3.4. Vì

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\alpha} = e^{i\lambda}\frac{1}{1-|\alpha|^2}\,, \quad |\alpha| < 1,$$

cho nên về mặt hình học λ bằng góc quay của ánh xạ (3.52) tại điểm α:

$$\lambda = \left[\arg\frac{dw}{dz}\right]_{z=\alpha}.$$

Từ công thức (3.52) ta còn rút ra hệ thức

$$\left(\left|\frac{dw}{dz}\right|\right)_{z=\alpha} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

và do đó độ giãn dần đến ∞ khi điểm α dần đến biên của hình tròn đơn vị.

Nhận xét 3.5. Phép đẳng cấu biến hình tròn $\{|z| < R\}$ lên hình tròn $\{|w| < R'\}$ có dạng

$$w = RR'e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - R^2}\,, \quad |\alpha| < R, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.52. Giả sử $U_1 = \{|z| < 1\}$, $U_2 = \{|z-1| < 1\}$ và $D = U_1 \cap U_2$. Tìm đẳng cấu biến miền D lên nửa mặt phẳng trên.

Lời giải. Giao điểm của các cung tròn giới hạn miền D là các điểm sau:

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad a^* = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Giả sử cung tròn đi qua điểm $z = 1$ được kí hiệu là δ_1 và cung tròn đi qua điểm $z = 0$ là δ_2. Ta áp dụng các ánh xạ trung gian sau

1. Ánh xạ

$$z_1 = \frac{z - \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}\,,$$

biến miền đã cho D thành một góc trong mặt phẳng z_1 với đỉnh là $z_1 = 0$. Vì góc giữa hai cung tròn δ_1 và δ_2 tại các điểm a cũng như a^* đều bằng $\dfrac{2\pi}{3}$ nên độ mở của góc vừa thu được bằng $\dfrac{2\pi}{3}$. Dễ dàng thấy rằng

$$z_1(1) = \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1(0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

và do đó góc - ảnh thu được có cạnh đi qua điểm $z_1(1)$ và $z_1(0)$. Ta kí hiệu góc đó là $D(z_1)$.

2. Ánh xạ quay $z_2 = e^{\frac{-2\pi i}{3}} z_1$ biến góc $D(z_1)$ thành góc có một cạnh trùng với phần dương của trục thực, còn cạnh kia đi qua điểm $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

3. Ánh xạ cần tìm có dạng $w = z_2^{\frac{3}{2}}$ $\left(\text{góc có độ mở } \dfrac{2\pi}{3} \cdot \dfrac{3}{2} = \pi\,!\right)$.

Hợp nhất 1) - 3) ta thu được

$$w = -\left(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

và hiển nhiên đó chỉ là một trong các hàm thực hiện ánh xạ phải tìm.

Ví dụ 3.53. Ánh xạ miền D là góc $\{0 < \arg z < \pi\beta, 0 < \beta < 2\}$ với nhát cắt theo một cung của đường tròn đơn vị từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\alpha\pi}$, $0 < \alpha < \beta$ (hãy vẽ hình).

Lời giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây

1. Ánh xạ $z_1 = z^{\frac{1}{\beta}}$ biến góc đã cho thành góc $D(z_1)$ có độ mở bằng π với nhát cắt thuộc đường tròn đơn vị đi từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\frac{\alpha}{\beta}\pi}$.

2. Ánh xạ phân tuyến tính

$$z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$$

biến miền $D(z_1)$ thành nửa mặt phẳng trên với nhát cắt theo trục ảo từ gốc tọa độ đến điểm $i\tan\dfrac{\alpha}{2\beta}\pi$. Ta kí hiệu miền ảnh đó là $D(z_2)$.

3. Ánh xạ $z_3 = z_2^2$ biến miền $D(z_2)$ thành mặt phẳng với nhát cắt theo $\left(-\tan^2\dfrac{\alpha}{2\beta}\pi;\infty\right)\subset\mathbb{R}$. Ta kí hiệu miền thu được là $D(z_3)$.

Hiển nhiên hàm cần tìm có dạng

$$w=\sqrt{z_3+\tan^2\frac{\alpha}{2\beta}\pi}=\sqrt{\left(\frac{z^{\frac{1}{\beta}}-1}{z^{\frac{1}{\beta}}+1}\right)^2+\tan^2\frac{\alpha}{2\beta}\pi}\,.$$

Để kết thúc phần này, ta chứng minh rằng *ánh xạ phân tuyến tính* (3.48) $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, *$ad-bc\neq 0$ biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó khi và chỉ khi mọi hệ số a,b,c,d đều là những số thực thỏa mãn điều kiện $ad-bc>0$.*

Giả sử ánh xạ (3.48) biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó. Ta xét ba điểm khác nhau z_1, z_2 và z_3 của trục thực trong mặt phẳng z. ảnh của ba điểm này là những điểm biên của nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} w>0$, tức là các số $w_k=w(z_k)$, $k=1,2,3$ là những số thực. Từ đó, ta thu được hệ phương trình với các hệ số thực để xác định a,b,c,d. Do đó với sự chính xác đến một thừa số nào đó từ hệ phương trình tuyến tính vừa thu được dễ dàng suy ra rằng các hệ số của (3.48) đều là thực. Vì $w=u+iv$, $z=x+iy$ nên khi $y>0$ ta có $v>0$. Thay $w=u+iv$, $z=x+iy$ vào (3.48) ta có

$$v=\frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2+(cy^2)}\,\cdot$$

Từ đó suy ra $ad-bc>0$.

Ngược lại, nếu các hệ số a,b,c và d đều thực thì trục thực của mặt phẳng (z) được ánh xạ lên trục thực của mặt phẳng (w) và vì $ad-bc>0$ nên nửa mặt phẳng trên được ánh xạ lên nửa mặt phẳng trên.

3.3.3 Phương trình hàm sinh bởi hàm phân tuyến tính

Bài toán tổng quát 3.1. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f\left(\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}\right) = af(x)+b,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-\gamma\}, \tag{3.53}$$

trong đó $\alpha,\beta,\gamma;\ a,b$ là các hằng số thực, $a \neq 0,\ \alpha\gamma-\beta \neq 0$.

Ta khảo sát bài toán tổng quát (3.53) trong ba trường hợp đặc trưng điển hình sau đây:

(i) Phương trình $\omega(x)=x$ có hai nghiệm thực phân biệt.

(ii) Phương trình $\omega(x)=x$ có 1 nghiệm kép (thực).

(iii) Phương trình $\omega(x)=x$ không có nghiệm thực.

Nhận xét rằng, phương trình trong trường hợp (iii) tương đương với phương trình $\omega(x)=x$ có hai nghiệm (phức) là các số liên hợp phức của nhau.

Ta chuyển bài toán tổng quát 3.1 về bài toán tổng quát sinh bởi hàm bậc nhất quen biết mà cách giải đã biết

Bài toán tổng quát 3.2. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\alpha x+\beta)) = af(x)+b,\ \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.54}$$

trong đó $\alpha,\beta,\ a,b$ là các hằng số thực, $a \neq 0,\ \alpha \neq 0$.

hoặc về dạng bài toán tổng quát sinh bởi phép đối hợp bậc n dạng sau đây.

Bài toán tổng quát 3.3. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f\left(\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}\right) = af(x)+b,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-\gamma\}, \tag{3.55}$$

trong đó $\alpha,\beta,\gamma,\ a,b$ là các hằng số thực, $a \neq 0,\ \alpha\gamma-\beta \neq 0$, và

$$\omega_n(x) \equiv x,\ \ \omega_{k+1} := \omega(\omega_k(x)),\ \ \omega_0(x) := x.$$

Tiếp theo, ta minh họa cách giải ứng với các trường hợp thông qua các bài toán cụ thể sau đây.

Từ kết quả khảo sát của phần trước, ta chỉ cần xét các phương trình hàm sinh bởi $\omega(x)$ có dạng

$$\omega(x) = \frac{m}{x+\gamma},\ m \neq 0\cdot$$

Ví dụ 3.54. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f\left(\frac{1}{2-x}\right) = 2f(x) - 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \tag{3.56}$$

Lời giải. Nhận xét rằng phương trình

$$\frac{1}{2-x} = x$$

có hai nghiệm thực $x = 1$ và $x = 2$. Sử dụng phép đổi biến

$$\frac{x-1}{x-2} = t,$$

ta thu được

$$x = 2 + \frac{3}{t-1},\ \ \frac{1}{2-x} = 2 + \frac{3}{\frac{1}{2}t - 1}\cdot$$

Vậy (3.56) có dạng

$$f\left(2 + \frac{3}{\frac{1}{2}t-1}\right) = 2f\left(2+\frac{3}{t-1}\right) - 1,\ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\ ;\ 1\},$$

hay

$$g\left(\frac{1}{2}t\right) = 2g(t) - 1,\ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\ ;\ 1\}, \tag{3.57}$$

trong đó

$$g(t) = f\left(2 + \frac{3}{t-1}\right).$$

Ví dụ 3.55. Xác định các hàm số f thỏa mãn điều kiện sau

$$f\left(\frac{2}{3-x}\right) = 3f(x) + 2,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}. \tag{3.58}$$

Lời giải. Phương trình

$$\frac{2}{3-x} = x$$

có một nghiệm (thực) kép $x = 1$. Sử dụng phép đổi biến

$$\frac{1}{x-1} = t,$$

ta thu được

$$x = 1 + \frac{1}{t},\ \ \frac{2}{3-x} = 1 + \frac{1}{t-1}\cdot$$

Vậy (3.58) có dạng

$$f\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = 3f\left(1 + \frac{1}{t}\right) + 2,\ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\ ;\ 1\},$$

hay

$$g(t-1) = 3g(t) + 2,\ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\ ;\ 1\},$$

trong đó

$$g(t) = f\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

Ví dụ 3.56. Xác định các hàm số f thỏa mãn điều kiện sau

$$f\left(\frac{2}{2-x}\right) = 2f(x) + 5,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \tag{3.59}$$

Lời giải. Đây là trường hợp phương trình hàm với nghiệm đặc trưng của phương trình sinh $\omega(x) = x$ không có nghiệm thực. Phương trình sinh $\dfrac{2}{2-x} = x$, có nghiệm $z_{1,2} = 1 \pm i$. Sử dụng phép đổi biến $x - 1 = t$, ta thu được

$$x = 1 + t,\ \ \frac{2}{2-x} = 1 + \frac{1+t}{1-t}$$

và viết phương trình (3.59) dưới dạng

$$f\left(1 + \frac{1+t}{1-t}\right) = 2f(1+t) + 5,\ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

hay

$$g\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2g(t) + 5,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \tag{3.60}$$

trong đó

$$g(t) = f(1+t). \tag{3.61}$$

Xét phương trình hàm (3.60) ứng với trường hợp $\omega(t) = \dfrac{1+t}{1-t}$ và phương trình sinh tương ứng $\omega(t) = t$ có hai nghiệm thuần ảo $\pm i$. Ta viết

$$\omega(t) = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1 + t\tan^2\frac{\pi}{4}}{1 - t\tan^2\frac{\pi}{4}},$$

do đó $\omega(t)$ có tính tuần hoàn (đối hợp) bậc bốn, nghĩa là

$$\omega(\omega(\omega(\omega(t)))) \equiv t.$$

Vì vậy, phương trình hàm (3.60)-(3.61) đưa về hệ phương trình tuyến tính và có nghiệm duy nhất $g(t) \equiv -5 \Rightarrow f(x) = -5,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3.4 Bài tập

Bài 3.1. Xác định c ($c \in \mathbb{C}$) sao cho phương trình

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{2002} = c$$

có các nghiệm đều thực.

Bài 3.2. Cho đa thức $P(x) \not\equiv \text{const}$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau chỉ có không quá hữu hạn số nghiệm thực

$$\begin{cases} \int\limits_0^x P(t)\sin t\,dt &= 0 \\ \int\limits_0^x P(t)\cos t\,dt &= 0. \end{cases}$$

Bài 3.3. Cho số nguyên dương n và các số $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình

$$x + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(-\pi\ ;\ \pi)$.

Bài 3.4. Cho $M > 0$ và cho tam thức bậc hai

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

có các hệ số nằm trong $[-M\ ; M]$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực hoặc phức của $f(x)$. Chứng minh rằng

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) \leq 4\sqrt{3}M.$$

Bài 3.5. Cho tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

có các nghiệm đều thực và đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$$

có 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng khi đó đa thức

$$Q(x) = aP(x) + bP'(x) + cP''(x)$$

cũng có ít nhất ba nghiệm thực.

Bài 3.6. Cho các số thực a, b, c, d, e, r thoả mãn điều kiện

$$abcder \neq 0, \quad ar + be + cd = 0.$$

Giải hệ phương trình (ẩn x, y, z, u, v):

$$\frac{xz - y^2}{a} = \frac{xu - yz}{b} = \frac{xv - yu}{c} = \frac{yu - z^2}{d} = \frac{xu - yv}{e} = \frac{zv - u^2}{r}.$$

Bài 3.7. Cho số tự nhiên

$$p = \overline{a_0 a_1 \ldots a_n}$$

là một số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức tương ứng

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

sẽ không có nghiệm hữutỉ.

Bài 3.8. Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}, \ \ 1 \le n \in \mathbb{N}, \ \ a \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.9. Giải phương trình

$$\left(\frac{i-x}{i+x}\right)^n = \frac{\cot\alpha + i}{\cot\alpha - i}, \ \ 1 \le n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.10. Giải các phương trình sau :

1. $x^n - nax^{n-1} - C_n^2 a^2 x^{n-2} - \cdots - a^n = 0.$

2. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$

3. $x^5 + \alpha x^4 + \alpha^2 x^3 + \alpha^3 x^2 + \alpha^4 x + \alpha^5 = 0, \ \ 0 \ne \alpha \in \mathbb{C}.$

Bài 3.11. Giải các hệ phương trình sau trong $\mathbb{C}$:

1. $\begin{cases} z^3 + \overline{w}^7 &= 0 \\ z^5 w^{11} &= 1 \ ; \end{cases}$

2. $\begin{cases} z^5 \overline{w}^7 &= 1 \\ z^2 - \overline{w}^3 &= 0 \ ; \end{cases}$

3. $\begin{cases} z^3 + w^5 &= 0 \\ z^2 \overline{w}^4 &= 1 \ ; \end{cases}$

4. $\begin{cases} z^{13} w^{19} &= 1 \\ z^5 w^7 &= 1 \\ z^2 + w^2 &= -2. \end{cases}$

Bài 3.12. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Bài 3.13. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{12}{3x + y}\right) = 2 \\ \sqrt{y}\left(1 + \dfrac{12}{3x + y}\right) = 6. \end{cases}$$

Bài 3.14. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2 y - y^3 = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Chương 4

Số phức trong các bài toán số học và tổ hợp

4.1 Giải phương trình Diophant

Vành các số phức nguyên $\mathbb{Z}[i]$ và nói chung là các vành số nguyên đại số có những ứng dụng khá hiệu quả trong việc giải các bài toán về phương trình Diophant. Ở đây ta thường dùng đến tính chất quen thuộc sau đây: nếu a, b là các số nguyên (nguyên đại số) nguyên tố cùng nhau và tích $a.b$ là luỹ thừa đúng bậc n thì a, b kết hợp với một luỹ thừa đúng bậc n.

Ví dụ 4.1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2+1 = y^3$.

Lời giải. Ta có $(x+i)(x-i) = y^3$. Ta sẽ chứng minh hai số $x+i$ và $x-i$ là nguyên tố cùng nhau.

Giả sử trái lại có số nguyên tố Gauss π sao cho $\pi \mid x+i$ và $\pi \mid x-i$. Suy ra $\pi \mid 2i$ do đó $\pi \mid 2$. Vậy $N(\pi)|N(2) = 4$, suy ra $N(\pi)$ chẵn.

Vì $N(\pi)|N(x+i) = x^2+1 = y^3$ nên y chẵn do đó x lẻ và $x^2+1 = y^3$ chia hết cho 8.

Nhưng $x^2+1 = 2(\text{mod } 4)$. Ta có mâu thuẫn. Vậy $(x+i, x-i) = 1$. Như thế $x+i$ kết hợp với một lập phương nào đó. Vì $-1 = (-1)^3,\ i = (-i)^3,\ (-i) = i^3$

nên chính $x+i$ là một lập phương. Ta có

$$x+i=(a+ib)^3=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3),$$

suy ra $x=a(a^2-3b)$; $1=b(3a^2-b^2)$ hay $|b|=1$; $|3a^2-b^2|=1$. Ta thu được $|3a^2-1|=1$ hay $a=0,\ b=-1$. Do đó $x=0,\ y=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 4.2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, tồn tại các số nguyên (a,b,c) với $(a\,;\,b)=1$ sao cho $a^2+b^2=cn$.

Lời giải. Lấy x,y là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và giả sử $(x+iy)^n=a+ib$. Khi đó

$$a^2+b^2=N(a+ib)=N((x+iy)^n)=(N(x+iy))^n=(x^2+y^2)^n.$$

Đặt $x^2+y^2=c$, ta có ngay hệ thức $a^2+b^2=c^n$.

4.2 Rút gọn một số tổng tổ hợp

Căn nguyên thuỷ bậc n của đơn vị với tính chất cơ bản là

$$1+\varepsilon^k+\cdots+\varepsilon^{k(n-1)}=0$$

với $(k,n)=1$ có ứng dụng khá hiệu quả trong việc rút gọn các tổng tổ hợp. Ngoài ra công thức Euler $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ có thể đưa các tổng lượng giác thành các cấp số nhân hoặc công thức khai triển nhị thức.

Dưới đây chúng ta xem xét hai ví dụ tiêu biểu

Ví dụ 4.3. Tính tổng

$$\sum_{k=0}^{[n/3]} C_n^{3k}.$$

Lời giải. Xét đa thức

$$P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Xét ε là căn nguyên thuỷ bậc ba của đơn vị, tức là $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ thì ta có $\varepsilon^{2k} + \varepsilon^k + 1 = 0$ khi k không chia hết cho ba và bằng ba nếu k chia hết cho ba. Vì thế

$$P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}) = 3\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]} C_n^{3k}.$$

Cuối cùng, do $P(1) = (1+1)^n = 2^n$,

$$P(\varepsilon) = \left[1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3},$$

$$P(\varepsilon^2) = \left[1 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3},$$

nên ta được tổng cần tìm bằng $\dfrac{1}{3}\left(2^n + \cos\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 4.4. Tính tổng

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx.$$

Lời giải. Xét các tổng

$$C = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx, \quad S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx.$$

Ta có

$$\begin{aligned} C + iS &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos kx + i\sin kx) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n \\ &= (1 + \cos x + i\sin x)^n = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right). \end{aligned}$$

Từ đó

$$C = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \cos\frac{nx}{2},$$

hay

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \cos\frac{nx}{2}\cdot$$

Ví dụ 4.5. Chứng minh rằng

$$2^{2m}\cos^{2m} x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x.$$

Lời giải. Ta có $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ và $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot$ Do đó

$$\begin{aligned}
2^{2m}\cos^{2m} x &= (e^{ix}+e^{-ix})^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k (e^{ix})^k (e^{-ix})^{2m-k} = \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix}\\
&= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} + \sum_{k=m+1}^{m-1} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} + C_{2m}^m\\
&= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m \cos 2(m-m)x\\
&= \sum_{k=0}^{m} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x.
\end{aligned}$$

4.3 Các bài toán đếm

Số phức có những ứng dụng rất hiệu quả trong các bài toán đếm. Và vai trò trung tâm trong kỹ thuật ứng dụng số phức vào các bài toán đếm tiếp tục lại là căn nguyên thuỷ của đơn vị. Chú ý là nếu ε là căn nguyên thuỷ bậc n của đơn vị thì ta có

i) $1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{n-1} = 0,$

ii) $1 + \varepsilon^k + \cdots + \varepsilon^{k(n-1)} = 0$ với $(k\,;\,n) = 1.$

Đây chính là tính chất quan trọng của căn nguyên thuỷ thường được sử dụng.

Ví dụ 4.6 (PTNK 2009)**.** Tìm số tất cả các số có n chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3.

Lời giải. Gọi c_n là số các số có n chữ số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi α là một nghiệm của phương trình $x^2+x+1=0$. Khi đó $\alpha^3=1$ và $\alpha^{2k}+\alpha^k+1=0$ nếu k không chia hết cho 3, $\alpha^{2k}+\alpha^k+1=3$ nếu k chia hết cho 3.
Xét đa thức

$$P(x)=(x^3+x^4+x^5+x^6)^n.$$

Dễ thấy c_n chính là bằng tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3 trong khai triển của $P(x)$. Nói cách khác, nếu

$$P(x)=\sum_{k=0}^{6n} a_k x^k$$

thì $c_n=\sum\limits_{k=0}^{2n} a_{3k}$. Mặt khác ta có

$$P(1)+P(\alpha)+P(\alpha^2)=\sum_{k=0}^{6n} a_k(1+\alpha^k+\alpha^{2k})=\sum_{k=0}^{2n} 3a_{3k}.$$

Cuối cùng, do $P(1)=4^n$, $P(\alpha)=P(\alpha^2)=1$ nên ta có

$$c_n=\sum_{k=0}^{2n} a_{3k}=\frac{4^n+2}{3}\cdot$$

Ví dụ 4.7 (IMO 1995)**.** Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1,2,\ldots,2p\}$, biết rằng

(i) A chứa đúng p phần tử ;

(ii) Tổng các phần tử của A chia hết cho p.

Lời giải. Xét đa thức $P(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$. Đa thức này có $p-1$ nghiệm phức phân biệt. Gọi α là một nghiệm bất kì của $P(x)$. Chú ý rằng $\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{p-1}$ là $p-1$ nghiệm phân biệt của $P(x)$ và $\alpha^p=1$.
Do đó, theo định lí Viète, $x^{p-1}-1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{p-1})$.

Xét đa thức

$$Q(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{2p})$$

và gọi

$$H = \{A \subset \{1, 2, \dots, 2p\} : \ |A| = p\}.$$

Giả sử

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2p} a_k x^k.$$

Khi đó

$$a_p = -\sum_{A\in H} \alpha^{S(A)}, \ S(A) = \sum_{x\in A} x.$$

Vì nếu $S(A) = j(\bmod p)$ thì $\alpha^{S(A)} = \alpha^j$ nên

$$a_p = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \alpha^j,$$

trong đó n_j là số các $A \in H$ sao cho $S(A) = j(\bmod p)$.

Mặt khác $Q(x) = (x^p - 1)^2$, suy ra $a_p = -2$. Thành thử

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j \alpha^j = 2. \tag{4.1}$$

Xét đa thức

$$R(x) = \sum_{j=0}^{p-1} n_j x^j + n_0 - 2.$$

Từ đẳng thức (4.1), suy ra α là một nghiệm của $R(x)$. Vì $\deg P = \deg R$ và α là một nghiệm bất kì của $P(x)$ nên $P(x)$ và $R(x)$ chỉ sai khác nhau hằng số nhân. Từ đó

$$n_{p-1} = n_{p-2} = \cdots = n_1 = n_0 - 2,$$

suy ra

$$n_0 - 2 = \frac{n_{p-1} + n_{p-2} + \cdots + n_1 + n_0 - 2}{p} = \frac{C_{2p}^p - 2}{p}.$$

Vậy đáp số của bài toán là

$$n_0 = 2 + \frac{C_{2p}^p - 2}{p}\cdot$$

Ví dụ 4.8 (Rookie Contest 1999)**.** Cho n là số nguyên tố và $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là các số nguyên dương. Gọi $f(k)$ là số các bộ m số $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ thoả mãn điều kiện $0 \leq c_i \leq a_i$ và $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = k (\mathrm{mod}\ n)$. Chứng minh rằng $f(0) = f(1) = \cdots = f(n-1)$ khi và chỉ khi $n \mid a_j$ với j nào đó thuộc $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Lời giải. Xét $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Chú ý rằng hệ thức sau đúng

$$\prod_{k=1}^{m}(X + X^2 + \cdots + X^{a_k}) = \prod_{1 \leq c_k \leq a_k} X^{c_1 + \cdots + c_n}$$

và

$$f(0) + f(1)\alpha + f(n-1)\alpha^{n-1} = \prod_{1 \leq c_k \leq a_k} X^{c_1 + \cdots + c_n} = \prod_{k=1}^{m}(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{a_k}).$$

Từ đây suy ra $f(0) = f(1) = \cdots = f(n-1)$ khi và chỉ khi

$$f(0) + f(1)\alpha + \cdots + f(n-1)\alpha^{n-1} = 0.$$

Điều này tương đương với $\prod\limits_{k=1}^{m}(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{a_k}) = 0$, tức là $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{a_k} = 0$ với j nào đó thuộc $\{1, 2, \ldots, m\}$. Từ đây suy ra $\alpha^{a_j} - 1 = 0$, tức là $n \mid a_j$.

4.4 Số phức nguyên và ứng dụng trong lí thuyết số

Ta xét bài toán tìm tất cả các cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thoả mãn phương trình

$$x^2 - y^3 = 1.$$

Sử dụng số phức ta có thể giải nó bằng cách trước hết nhận xét phương trình trên tương đương với $x^2 + 1 = y^3$ hay $(x+i)(x-i) = y^3$.

Tích hai số là một lập phương thì bản thân mỗi số cũng là một lập phương. Thành thử $x + i = (a + bi)^3$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, hay

$$x + i = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3).$$

Tách phần thực và phần ảo ở hai vế, ta thu được

$$x = a(a^2 - 3b)\,;\, 1 = b(3a^2 - b^2).$$

Từ phương trình $1 = b(3a^2 - b^2)$ suy ra $|b| = 1, |3a^2 - b^2| = 1 \Rightarrow |3a^2 - 1| = 1$ hay $a = 0$. Suy ra $x = 0$ và $y = 1$. Vậy $(0\,;\,1)$ là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình đã cho.

Lời giải trên cho đáp số đúng và số phức được dùng để trả lời câu hỏi về số tự nhiên! Tuy nhiên, về phương diện logic chặt chẽ thì các lập luận trên không thể chấp nhận được vì ta đã mặc nhiên dùng các tính chất của tập số nguyên $\mathbb{Z}$ cho một tập hợp khác, cụ thể là tập các số dạng $a + bi$ với a, b là số nguyên. Sau đây chúng ta chứng tỏ rằng tập các số phức dạng $a + bi$ có rất nhiều tính chất như tập $\mathbb{Z}$ do đó chúng ta có thể làm số học trên các số phức này. Và điều quan trọng hơn là nhờ nó chúng ta có thể giải được các bài toán về tập $\mathbb{Z}$ mà nếu chỉ đứng trong $\mathbb{Z}$ ta sẽ không thể tìm được lời giải.

Định nghĩa 4.1. *Số phức có dạng $a + bi$ ở đó $a, b \in \mathbb{Z}$ được gọi là số phức nguyên* (hay số nguyên Gauss).

Tập tất cả các số phức nguyên (được Gauss khảo sát đầu tiên (1832) được kí hiệu là $\mathbb{Z}[i]$ và thường được kí hiệu bằng các chữ cái Hylạp $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Rõ ràng $Z \subset Z[i]$. Như vậy, một số nguyên thông thường là số phức nguyên có phần ảo bằng 0. Trên mặt phẳng phức, tập $\mathbb{Z}[i]$ là tập các điểm $(a\ ;\ b)$ có tọa độ nguyên.

Dễ kiểm tra rằng tổng, hiệu, tích của hai số phức nguyên lại là một số phức nguyên. Từ đó suy ra tập $\mathbb{Z}[i]$ đóng đối với phép cộng, trừ, nhân.

Ngay từ năm 300 trước công nguyên Euclide đã nhận thấy rằng khái niệm chia hết và khái niệm số nguyên tố là hai khái niệm quan trọng nhất của số nguyên. Nhiều tính chất có vẻ rất hiển nhiên của các số nguyên lại liên quan đến những suy luận khá tinh vi. Chẳng hạn, để chứng minh rằng nếu tích của hai số nguyên ab chia hết cho số nguyên tố p thì hoặc a hoặc b phải chia hết cho p, ta phải đưa ra khái niệm ước chung lớn nhất của hai số và dùng thuật toán Euclide để mô tả ước chung lớn nhất. Cũng từ đó người ta thiết lập nên định lí cơ bản của số học: *Nếu n là một số nguyên thì n có thể phân tích một cách duy nhất thành tích các số nguyên tố.* Như vậy, muốn làm số học trên các số nguyên phức $\mathbb{Z}[i]$, ta cũng phải xây dựng được khái niệm chia hết và khái niệm số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[i]$.

4.4.1 Tính chất chia hết trong tập các số phức nguyên

Định nghĩa 4.2. *Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ trong đó $\alpha \neq 0$. Ta nói β chia hết α hay α chia hết cho β nếu tồn tại $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho $\alpha = \gamma\beta$. Nếu β chia hết α, ta nói β là một ước của α và viết $\beta \mid \alpha$ hay α là một bội của β và viết $\alpha \,\vdots\, \beta$. Số phức nguyên ε được gọi là đơn vị nếu ε là ước của mọi số phức nguyên α.*
Chuẩn của số phức nguyên $\alpha = a + bi$, kí hiệu bởi $N(\alpha)$, được xác định bởi công thức sau

$$N(\alpha) = |\alpha|^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha} = a^2 + b^2.$$

Tính chất 4.1. *Nếu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho $\alpha|\beta, \beta|\gamma$ thì $\alpha \mid \gamma$*

Tính chất 4.2. *Nếu $\alpha, \beta, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho $\gamma|\alpha, \gamma \mid \beta$ thì $\gamma \mid (z_1\alpha + z_2\beta)$.*

Tính chất 4.3. *Chuẩn $N(\alpha)$ là một số tự nhiên.*
$N(\alpha) = 0$ khi và chỉ khi $\alpha = 0$.

Tính chất 4.4. *Nếu $\alpha = \gamma\beta$ thì $N(\alpha) = N(\gamma)N(\beta)$. Nói riêng, nếu α chia hết cho β thì $N(\alpha)$ chia hết cho $N(\beta)$.*

Tính chất 4.5. *Tập U tất cả các đơn vị của $Z[i]$ là $U = \{\pm 1, \pm i\}$. Tập U lập thành một nhóm nhân, đóng đối với phép lấy liên hợp và số phức nguyên α là một đơn vị khi và chỉ khi $N(\alpha) = 1$.*

Định lý 4.1 (Thuật chia Euclide)**.** *Cho α, β là hai số phức nguyên bất kì với $\beta \neq 0$. Khi đó tồn tại các số phức nguyên γ, δ sao cho*

$$\alpha = \gamma\beta + \delta, \quad 0 \leq N(\delta) < N(\beta). \tag{4.2}$$

Chứng minh. Giả sử $\dfrac{\alpha}{\beta} = u + iv$ với $u, v \in \mathbb{Q}$. Ta có thể chọn $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho x gần u nhất và y gần v nhất tức là

$$|u - x| \leq \frac{1}{2}, \quad |v - y| \leq \frac{1}{2}.$$

Đặt $\gamma = x + iy \in \mathbb{Z}[i], \delta = \alpha - \gamma\beta$. Khi đó ta có $\alpha = \gamma\beta + \delta$. Ta chứng tỏ rằng $N(\delta) < N(\beta)$. Thật vậy

$$N(\delta) = |\alpha - \gamma\beta|^2 = |\beta(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma)|^2 = N(\beta)|\frac{\alpha}{\beta} - \gamma)|^2.$$

Mặt khác

$$|\frac{\alpha}{\beta} - \gamma)|^2 = |(u - x) + (v - y)i|^2 = |u - x|^2 + |v - y|^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1.$$

Do đó $N(\delta) < N(\beta)$.

Ta có thể minh hoạ hình học thuật chia Euclidean như sau:

Các bội của số phức nguyên β được biểu diễn bởi các đỉnh của một lưới các ô vuông với ô vuông cơ bản là ô vuông với bốn đỉnh là $0, \beta, i\beta, (1 + i)\beta$.

Số nguyên α sẽ nằm trong một ô vuông nào đó. Phần dư δ chính là hiệu giũa α với đỉnh gần nhất với α của ô vuông. $N(\delta) < N(\beta)$ vì dễ chứng minh được rằng trong một hình vuông khoảng cách từ một điểm bất kì của hình vuông tới đỉnh gần nhất với nó thì phải bé hơn cạnh của hình vuông.

Chú ý. Biểu diễn (4.2) là không duy nhất. Nói cách khác, trong thuật chia nói trên thì phần dư và thương số là không duy nhất. Chẳng hạn

$$5 + 4i = (3 + 2i) + (2 + 2i) = 2(3 + 2i) + (-1),$$
$$N(3 + 2i) = 13 > N(2 + 2i) = 8, N(3 + 2i) = 13 > 1 = N(-1).$$

Định nghĩa 4.3. *Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ là hai số phức nguyên khác không. Chúng được gọi là* nguyên tố cùng nhau *nếu tất cả các ước chung của α và β chỉ là $\{\pm 1\,;\, \pm i\}$. Nói cách khác, nếu $\gamma \mid \alpha$ và $\gamma \mid \beta$ thì $\gamma \in \{\pm 1\,;\, \pm i\}$.*

Định lý 4.2. *Giả sử α và β nguyên tố cùng nhau. Khi đó tồn tại các số phức nguyên μ_0, ν_0 sao cho $\alpha\mu_0 + \beta\nu_0 = 1$.*

Chứng minh. Đặt $A = \{\alpha\mu + \beta\nu\}$, trong đó μ, ν chạy trên tập $Z[i]$ và lấy $\gamma \in A$ là phần tử mà chuẩn $N(\gamma)$ có giá trị nhỏ nhất trong các chuẩn của các phần tử khác không trong A. Theo thuật chia Euclide ta tìm được $\theta, \delta \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho

$$\alpha = \theta\gamma + \delta, \quad 0 \le N(\delta) < N(\gamma).$$

Ta chứng tỏ rằng $\delta \in A$. Thật vậy, vì $\gamma \in A$ nên $\gamma = \alpha\mu_1 + \beta\nu_1$. Do đó

$$\delta = \alpha - \theta\gamma = \alpha - \theta(\alpha\mu_1 + \beta\nu_1) = \alpha(1 - \theta\mu_1) + \beta(-\theta\nu_1) = \alpha\mu_2 + \beta\nu_2.$$

Vì rằng $N(\delta) < N(\gamma), \delta \in A$ và $N(\gamma)$ có giá trị nhỏ nhất trong các chuẩn của các phần tử khác không trong A nên ta phải có $\delta = 0$. Do đó $\alpha = \theta\gamma$. Vậy γ là một ước của α. Tương tự, γ cũng là một ước của β tức là γ là một ước chung của α và β. Vì rằng α và β là nguyên tố cùng nhau nên γ phải là một đơn vị. Vậy

$$1 = \gamma\bar{\gamma} = \alpha(\mu_1\bar{\gamma}) + \beta(\nu_1\bar{\gamma}) = \alpha\mu_0 + \beta\nu_0.$$

Định nghĩa 4.4. *Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ là hai số phức nguyên khác không. Ta nói rằng $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ là ước chung lớn nhất (UCLN) của α và β và viết $(\alpha\,;\,\beta) = \gamma$*

nếu γ là ước chung của hai số α, β và chuẩn $N(\gamma)$ có giá trị lớn nhất trong tập hợp chuẩn của tất cả các ước chung của α và β.

UCLN luôn tồn tại vì chuẩn của ước của α không vượt quá chuẩn của α.

Định lý 4.3. *Giả sử rằng $(\alpha\ ;\ \beta) = \gamma$. Khi đó, tồn tại các số phức nguyên μ, ν sao cho $\alpha\mu + \beta\nu = \gamma$.*
Nếu π là một ước chung bất kì của α và β thì $\pi \mid \gamma$.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $\alpha = \pi_1\gamma, \beta = \pi_2\gamma$. Ta chứng minh π_1 và π_2 nguyên tố cùng nhau. Thật vậy giả sử $\varepsilon = (\pi_1\,;\,\pi_2) \Rightarrow \pi_1 = \omega_1\varepsilon, \pi_2 = \omega_2\varepsilon$. Vậy $\alpha = \omega_1\varepsilon\gamma, \beta = \omega_2\varepsilon\gamma$. Suy ra $\varepsilon\gamma \mid \alpha,\ \varepsilon\gamma \mid \beta$ tức là $\varepsilon\gamma$ là ước chung của α và β. Theo định nghĩa ta phải có $N(\varepsilon)N(\gamma) = N(\varepsilon\gamma) \leq N(\gamma) \Rightarrow N(\varepsilon) = 1$. Suy ra ε là đơn vị. Vậy π_1, π_2 nguyên tố cùng nhau. Theo định lí 4.2 có tồn tại các số phức nguyên μ, ν sao cho

$$\pi_1\mu + \pi_2\nu = 1$$

Thành thử

$$\pi_1\mu\gamma + \pi_2\nu\gamma = \gamma \Rightarrow \alpha\mu + \beta\nu = \gamma.$$

Tiếp theo, ta có $\pi|\alpha, \pi|\beta \Rightarrow \pi \mid (\alpha\mu + \beta\nu) = \gamma$.

Hệ quả 4.1. *Nếu $\gamma|\alpha\beta$ và γ, α nguyên tố cùng nhau, thì $\gamma \mid \beta$.*

Chứng minh. Thật vậy, tồn tại các số phức nguyên μ, ν sao cho $\alpha\mu + \gamma\nu = 1$. Do đó $\beta = \alpha\beta\mu + \gamma\nu\beta$. Vì $\gamma \mid \alpha\beta,\ \gamma|\gamma\nu$ nên $\gamma \mid (\alpha\beta\mu + \gamma\nu\beta) \Rightarrow \gamma \mid \beta$.

4.4.2 Số nguyên tố Gauss

Định nghĩa 4.5. *Một số phức nguyên khác đơn vị π được gọi là một số nguyên tố Gauss nếu π không thể biểu diễn được dưới dạng tích của hai số phức nguyên khác đơn vị. Nói cách khác, π được gọi là một số nguyên tố Gauss nếu từ đẳng thức $\pi = \alpha\beta$ ta phải có α hoặc β là đơn vị. Nếu π không là số nguyên tố Gauss* *ta nói π là một hợp số Gauss. Nói cách khác, π được gọi là hợp số Gauss nếu nó có thể viết dưới dạng $\pi = \alpha\beta$, với α, β là hai số phức nguyên khác đơn vị.*

Định nghĩa 4.6. *Số β gọi là một số kết hợp với α nếu $\alpha = \varepsilon\beta$ ở đó ε là một đơn vị. Nhân hai vế với $\bar{\varepsilon}$ ta được $\beta = \bar{\varepsilon}\alpha$, do đó α cũng là kết hợp với β. Như vậy ta có thể nói α và β là hai số* kết hợp với nhau. *Quan hệ "kết hợp" là một quan hệ tương đương (có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu).*

Tính chất 4.6. *Nếu một số nguyên thông thường là số nguyên tố Gauss thì chính bản thân nó phải là số nguyên tố. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Một số nguyên tố thông thường chưa chắc là một số nguyên tố Gauss. Chẳng hạn 5 là số nguyên tố thông thường nhưng vì $5 = (2+i)(2-i)$ do đó 5 là hợp số Gauss.*

Tính chất 4.7. *Số Gauss π là số nguyên tố Gauss khi và chỉ khi số kết hợp với nó là số nguyên tố Gauss.*

Tính chất 4.8. *Số Gauss π là số nguyên tố Gauss nếu và chỉ nếu nó chỉ chia hết cho các đơn vị và các số kết hợp với nó.*

Định lý 4.4. *Giả sử π là một số nguyên tố Gauss. Khi đó, nếu $\pi|(\alpha\beta)$ thì $\pi \mid \alpha$ hoặc $\pi|\beta$.*
Một cách tổng quát, nếu $\pi|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, $(n \geq 2)$ thì π chia hết một thừa số α_i nào đó của tích.

Chứng minh. Giả sử π không phải là ước của α. Ta chứng minh rằng khi đó α, π là nguyên tố cùng nhau. Thật vậy giả sử không phải như vậy. Gọi γ là ước chung khác đơn vị của π và α. Ta có $\pi = \gamma\pi_1, \alpha = \gamma\alpha_1$. Vì γ không phải là đơn vị và π là số nguyên tố Gauss nên π_1 là đơn vị. Do đó $\pi = \gamma\varepsilon \Rightarrow \gamma = \pi\bar{\varepsilon} \Rightarrow \pi|\gamma \Rightarrow \pi|\alpha$. Điều này trái với giả thiết. Thành thử α, π là nguyên tố cùng nhau. Do hệ quả 6.4, ta suy ra $\pi|\beta$.

Kết luận tổng quát được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 2$ thì khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với n và $\pi|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1} = \beta\alpha_{n+1}$ trong đó ta đặt $\beta = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Theo trên ta có $\pi|\beta$ hoặc $\pi|\alpha_{n+1}$. Nếu $\pi|\beta$ ta áp dụng giả thiết quy nạp để kết luận rằng tồn tại i với $1 \leq i \leq n$ để $\pi \mid \alpha_i$.

Bây giờ ta có thể chứng minh định lí phân tích một số phức nguyên thành các thừa số nguyên tố Gauss.

Định lý 4.5 (Định lí cơ bản về các số phức nguyên)**.** *Cho α là số phức nguyên khác không và đơn vị. Khi đó α có thể biểu diễn dưới dạng*

$$\alpha = \pi_1\pi_2\ldots\pi_m,$$

trong đó π_i là các số nguyên tố Gauss. Nếu có hai biểu diễn

$$\alpha = \pi_1\pi_2\ldots\pi_m = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n$$

thì ta phải có $m = n$ và tồn tại một hoán vị $(i_1, \ldots, i_n)$ của $(1, 2, \ldots, n)$ sao cho π_j và ω_{i_j} là hai số kết hợp với nhau ($j = 1, 2, \ldots, n$). Nghĩa là, mỗi số phức nguyên α khác không và đơn vị có thể biểu diễn (phân tích) thành tích của các số nguyên tố Gauss. Thêm vào đó, biểu diễn này là duy nhất, chỉ sai khác thứ tụ và các thừa số đơn vị.

Chứng minh. Nếu α là số nguyên tố Gauss thì chính α là thành phần duy nhất trong biểu diễn. Nếu trái lại, α được phân tích thành tích của hai số phức nguyên khác không và khác đơn vị $\alpha = \beta_1\beta_2$. Nếu β_1 là số nguyên tố Gauss thì ta giữ nguyên nó. Nếu trái lại nó được phân tích thành tích của hai số phức nguyên khác không và khác đơn vị $\beta_1 = \beta_3\beta_4$. Ta cũng làm điều tương tụ như vậy cho β_2. Ta tiếp tục quá trình này chừng nào còn có hợp số Gauss xuất hiện (nếu xuất hiện hợp số ta lại phân tích nó thành tích của hai số phức nguyên khác không và khác đơn vị). Sau một số hữu hạn bước quá trình phải kết thúc (tức là không còn hợp số nữa). Thật vậy giả sử $\alpha = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ thì

$N(\alpha) = N(\beta_1)\dots N(\beta_n) \geq 2^n$ do đó $n \leq \log_2 N(\alpha)$ do đó n không thể tăng vô hạn được.

Tiếp theo ta chứng tỏ tính duy nhất của sự phân tích (sai khác thứ tự và các thừa số đơn vị). Giả sử ta có

$$\alpha = \pi_1\pi_2\dots\pi_m = \omega_1\omega_2\dots\omega_n \quad (m \leq n),$$

trong đó các nhân tử π_i và ω_j là các số nguyên tố Gauss, không nhất thiết phân biệt. Vì $\pi_1|\omega_1\omega_2\dots\omega_m$ do đó theo định lí 4.4, π_1 là ước của một nhân tử, kí hiệu nhân tử đó là $\omega_{i_1}, \pi_1|\omega_{i_1}$. Vì ω_{i_1} là số nguyên tố Gauss nên π_1, ω_{i_1} là hai số kết hợp, $\omega_{i_1} = \varepsilon_1\pi_1$. Giản ước hai vế cho π_1 ta thu được

$$\pi_2\dots\pi_n = \varepsilon_1\omega_2\dots\omega_m.$$

Tiếp tục quá trình này ta thu được $\omega_{i_2} = \varepsilon_2\pi_2, \dots, \omega_{i_m} = \varepsilon_m\pi_m$. Nếu $n > m$ thì ta có

$$1 = \varepsilon_1\dots\varepsilon_m\Pi\omega_j$$

trong đó $j \notin \{i_1\,;\,\dots\,;\,i_m\}$. Vậy $\omega_j \mid 1$ do đó ω_j là đơn vị. Ta có mâu thuẫn. Thành thử, $m = n$ và

$$\alpha = \pi_1\pi_2\dots\pi_m = (\varepsilon_1\pi_1)(\varepsilon_2\pi_2)\dots(\varepsilon_m\pi_m)$$

ε_i là các đơn vị với $\Pi\varepsilon_i = 1$.

Định lí sau đây có nhiều áp dụng trong việc giải các bài toán khác nhau.

Định lý 4.6. *Cho α và β là hai số phức nguyên nguyên tố cùng nhau. Giả sử*

$$\alpha\beta = \gamma^k$$

trong đó $k \geq 2$ là một số nguyên dương. Khi đó tồn tại các số phức nguyên α_1, β_1 và các đơn vị ε, δ sao cho

$$\alpha = \varepsilon\alpha_1^k \quad ; \quad \beta = \delta\beta_1^k.$$

Chứng minh. Giả sử rằng $\alpha = \pi_1^{s_1} \dots \pi_m^{s_m}, \beta = \omega_1^{t_1} \dots \omega_n^{t_n}$ ở đó π_i, ω_j là các số nguyên tố Gauss đôi một phân biệt, s_i, t_j là các số nguyên dương. Từ định lí 4.4, dễ thấy $\{\pi_i, \omega_j\}$ là tập tất cả các ước nguyên tố của γ. Giả sử $\gamma = \pi_1^{r_1} \dots \pi_m^{r_m} \omega_1^{l_1} \dots \omega_n^{l_n}$. Đặt $\alpha_1 = \pi_1^{r_1} \dots \pi^{r_m}, \beta_1 = \omega_1^{l_1} \dots \omega_n^{l_n}$ ta có $\alpha\beta = \alpha_1^k \beta_1^k$. Vì $\alpha_1^k \mid \alpha\beta$ và α_1^k, β là hai số nguyên tố cùng nhau nên theo hệ quả 6.4 ta kết luận rằng $\alpha_1^k | \alpha$. Vì $\alpha | \alpha_1^k \beta_1^k$ và α, β_1^k là hai số nguyên tố cùng nhau nên theo hệ quả 6.4 ta kết luận rằng $\alpha | \alpha_1^k$. Thành thử hai số α và α_1^k là kết hợp với nhau. Tương tự, hai số β và β_1^k là kết hợp với nhau. Vậy định lí được chứng minh.

Ví dụ 4.9. Cho p là số nguyên tố. Khi đó phương trình $p = x^2 + y^2$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi p không có dạng $4k + 3$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, phương trình $p = x^2 + y^2$ có nghiệm nguyên $(a\,; b)$ và $p = 4k + 3$. Dễ thấy a, b đều không chia hết cho p. Ta có

$$a^2 \equiv -b^2 \pmod p \Rightarrow a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} b^{p-1} \pmod p \Rightarrow 1 \equiv -1 \pmod p.$$

Ta có mâu thuẫn. Đảo lại giả sử p không có dạng $4k + 3$. Khi đó $p = 2$ hoặc $p = 4k + 1$. Nếu $p = 2$ thì phương trình $2 = x^2 + y^2$ rõ ràng có nghiệm $(1\,;\,1)$. Giả sử $p = 4k + 1$. Dễ thấy tập $\left\{\pm 1; \pm 2; \dots; \pm \dfrac{p-1}{2}\right\}$ là hệ thặng dư thu gọn $\pmod p$ thành thử

$$(\pm 1)(\pm 2) \dots \left(\pm \frac{p-1}{2}\right) \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Vì $\dfrac{p-1}{2}$ là số chẵn nên

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Đặt $m = \left[\left(\dfrac{p-1}{2}\right)!\right]$ và $q = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$. Xét tập $\{x + my, x, y = 0, 1, 2, \dots, q\}$. Vì $(q+1)^2 > p$ nên tồn tại $(x_1\,; y_1) \neq (x_2\,; y_2)$ sao cho $x_1 + my_1 \equiv x_2 + my_2 \pmod p$ suy ra $(x_1 - x_2) \equiv m(y_2 - y_1)$, hay là $(x_1 - y_1)^2 \equiv m^2(y_2 - y_1)^2$.

Đặt $a = |x_1 - x_2|, b = |y_1 - y_2|$. Vì $m^2 \equiv -1 \pmod p$ nên suy ra $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$. Lại có $a^2 \leq q^2 < p, b^2 \leq q^2 < p, a^2 + b^2 \neq 0$ nên suy ra $a^2 + b^2 = p$.

Định lí sau đây sẽ xác định tất cả các số nguyên tố Gauss.

Định lý 4.7. *Cho $\pi = a + bi$ là số phức nguyên khác đơn vị. Khi đó:*

1) Nếu $b = 0, a \neq 0$ thì π là số nguyên tố Gauss nếu và chỉ nếu a là số nguyên tố thông thường có dạng $4k + 3$.

2) Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì π là số nguyên tố Gauss nếu và chỉ nếu b là số nguyên tố thông thường có dạng $4k + 3$.

3) Nếu $a \neq 0, b \neq 0$ thì π là số nguyên tố Gauss nếu và chỉ nếu $N(\pi) = a^2 + b^2$ là số nguyên tố thông thường.

Vậy tập hợp tất cả các số nguyên tố Gauss gồm

- Tất cả các số nguyên tố thông thường p có dạng $4k + 3$ và các số phức nguyên kết hợp với chúng.

- Tất cả các số phức nguyên $a + bi$, trong đó $(a\,;\,b)$ là nghiệm nguyên của phương trình $p = a^2 + b^2$ với $p = 2$ hoặc p là số nguyên tố có dạng $4k + 1$. (Nghiệm $(a\,;\,b)$ luôn tồn tại theo bài toán 4.9).

Chứng minh. Ta có $\pi = a$. Nếu π là số nguyên tố Gauss thì a phải là số nguyên tố thông thường. Ta chứng minh a có dạng $4k + 3$. Giả sử a không có dạng $4k + 3$. Theo bài toán 4.9, tồn tại số nguyên x, y sao cho

$$a = x^2 + y^2, x, y \in N^* \Rightarrow a = (x + iy)(x - iy).$$

Do đó $\pi = a$ là hợp số Gauss. Mâu thuẫn. Đảo lại giả sử $\pi = a$ là số nguyên tố thông thường có dạng $4k + 3$ và π là hợp số Gauss. Khi đó

$$\pi = \alpha\beta \Rightarrow N(\pi) = a^2 = N(\alpha)N(\beta) \Rightarrow N(\alpha) = N(\beta) = a.$$

Giả sử $\alpha = x + iy$. Khi đó $N(\alpha) = x^2 + y^2 = a$. Điều này trái với bài toán 4.9 vì a là số nguyên tố dạng $4k + 3$.

Ta có $\pi = ib$. Do đó π và b hai số phức nguyên kết hợp. Do đó π là số nguyên tố Gauss nếu và chỉ nếu b là số nguyên tố Gauss. Do 1) ta có điều cần chứng minh.

Giả sử rằng $N(\pi)$ là số nguyên tố thông thường. Nếu π là hợp số Gauss thì ta có $\pi = \alpha\beta$ trong đó α, β là các số phức nguyên khác đơn vị. Do đó $N(\pi) = N(\alpha)N(\beta)$. Suy ra $N(\alpha) = 1$ hoặc $N(\beta) = 1$. Ta có mâu thuẫn. Ngược lại giả sử π là số nguyên tố Gauss. Ta phải chứng minh $N(\pi)$ là số nguyên tố thông thường. Trước hết ta chỉ ra rằng có tồn tại số nguyên tố thông thường p sao cho $\pi | p$. Thật vậy vì $\pi\bar{\pi} = N(\pi)$ do đó π là ước của số nguyên dương thông thường $N(\pi)$. Gọi n là số nguyên dương thông thường bé nhất nhận π là ước. Khi đó n là số nguyên tố thông thường. Thật vậy, nếu trái lại giả sử $n = n_1 n_2, 1 < n_1 < n, 1 < n_2 < n$. Vì $\pi | n_1 n_2 = n$ nên theo định lí 4.4 ta có $\pi | n_1$ hoặc $\pi | n_2$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn n. Vậy n phải là một số nguyên tố thông thường, ta kí hiệu nó là p. Ta có $p = \pi\beta$ (do $\pi \mid p$). Số β không phải là đơn vị vì $a \neq 0, b \neq 0$. Vậy $N(\pi) < N(p) = p^2$. Mà $N(\pi) | N(p) = p^2$ nên suy ra $N(\pi) = p$. Định lí được chứng minh xong

Tiếp theo, ta xét một số vấn đề liên quan đến đồng dư.

Định nghĩa 4.7. *Cho $\alpha, \beta\gamma$ là các số phức nguyên. Ta nói rằng α đồng dư với β modulo γ nếu $\gamma | (\alpha - \beta)$. Khi đó ta viết $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma}$. Dễ thấy quan hệ đồng dư modulo γ xác định một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}[i]$.*

Định lý 4.8 (Tính chất của quan hệ modulo γ)**.** *1. Nếu $\gamma = m$ là một số nguyên thông thường, $\alpha = a + bi, \beta = x + iy$ thì $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma}$ nếu và chỉ nếu $a \equiv x \pmod{m}, b \equiv y \pmod{m}$.*

2. Nếu $\alpha_1 \equiv \beta_1 \pmod{\gamma}$ *và* $\alpha_2 \equiv \beta_2 \pmod{\gamma}$ *thì*

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \equiv \beta_1 \pm \beta_2 \pmod{\gamma} \quad \text{và} \quad \alpha_1\alpha_2 \equiv \beta_1\beta_2 \pmod{\gamma}.$$

Định lý 4.9. *Cho* $p > 2$ *là một số nguyên tố thông thường và* α *là một số phức nguyên. Khi đó*

1) $\alpha^p \equiv \begin{cases} \bar{\alpha}(mod\ p) & \text{nếu } p = 4k+3 \\ \alpha mod\ p & \text{nếu } p = 4k+1. \end{cases}$

2) Với mọi số nguyên tố p thông thường ta luôn có $\alpha^{p^2} \equiv \alpha mod\ p$.

3) $\alpha^{p^2-1} \equiv 1(mod\ p)$ *nếu* $p = 4k+3, \alpha \neq 0 mod\ p$

$\alpha^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$ *nếu* $p = 4k+1,\ N(\alpha) \neq 0(mod\ p)$.

Chứng minh. Giả sử $\alpha = a + bi$. Vì $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}$, $(1 \leq k \leq p-1)$ và theo định lí Fermat, ta có

$$\alpha^p = (a+bi)^p \equiv a^p + (ib)^p \equiv a + i^p b \pmod{p}.$$

Mặt khác, nếu $p = 4k+3$ thì $i^p = -i$ và nếu $p = 4k+1$ thì $i^p = i$. Thành thử, $\alpha^p \equiv \alpha \pmod{p}$ với $p = 4k+1$ và $\alpha^p \equiv \bar{\alpha} \pmod{p}$ for $p = 4k+3$.

Nếu $p = 4k+1$ ta có $\alpha^{p^2} \equiv \alpha^p \equiv \alpha \pmod{p}$.

Nếu $p = 4k+3$ ta có $\alpha^{p^2} \equiv \bar{\alpha}^p \equiv \alpha \pmod{p}$.

Giả sử $\alpha = a + bi \neq 0 \pmod{p}$, $p = 4k+3$. Khi đó $a^2 + b^2 \neq 0 \pmod{p}$ (vì nếu trái lại thì $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \alpha = a + bi \equiv 0 \pmod{p}$).

Do đó tồn tại $c \in N$ sao cho $c(a^2+b^2) \equiv 1 \pmod{p}$.

Đặt $\beta = c(a - bi) \Rightarrow \alpha\beta = c(a^2+b^2) \equiv 1 \pmod{p}$. Do 2) ta có

$$\alpha(\alpha^{p^2-1}-1) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \beta\alpha(\alpha^{p^2-1}-1) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \alpha^{p^2-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Giả sử $\alpha = a + bi \neq 0 \pmod{p}, p = 4k+3, N(\alpha) = a^2 + b^2 \neq 0 \pmod{p}$.

Tương tự như trên có tồn tại β sao cho $\beta\alpha \equiv 1 \pmod{p}$.

Bằng lập luận như 2) từ $\alpha^p \equiv \alpha \pmod{p}$ ta dẫn đến $\alpha^{p-1} \equiv \alpha^p \equiv \alpha \pmod{p}$.

4.4.3 Một số áp dụng số phức nguyên

Ví dụ 4.10. Tìm tất cả các bộ ba Pitago $(x\,;\,y\,;\,z)$ tức là tìm tất cả các nghiệm nguyên dương $(x\,;\,y\,;\,z)$ của phương trình $x^2+y^2=z^2$.

Lời giải. Vì rằng bộ $(x\,;\,y\,;\,z)$ là bộ ba Pitago khi và chỉ khi $(kx\,;\,ky\,;\,kz)$ là bộ ba Pitago với $k\in N^*$ nên không giảm tổng quát ta giả sử rằng $(x\,;\,y\,;\,z)=1$, tức là $(x\,;\,y\,;\,z)$ là bộ ba Pitago nguyên thuỷ. Từ đó suy ra

$$(x\,;\,y)=(y\,;\,z)=(z\,;\,x)=1,$$

do đó x, y không cùng chẵn. Tuy nhiên x, y không thể cùng lẻ vì nếu thế thì $z^2\equiv 1+1=2 \pmod 4$ là vô lí. Giả sử x chẵn, y lẻ. Khi đó $(x+iy)(x-iy)=z^2$. Bây giờ ta chứng minh hai số phức nguyên $x+iy$ và $x-iy$ là nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, giả sử trái lại tồn tại số nguyên tố Gauss π sao cho $\pi|x+iy, \pi|x-iy$ Suy ra $\pi|2x, \pi|2iy$. Ta chỉ ra rằng π không là ước của 2. Thật vậy nếu $\pi|2$ thì $N(\pi)|N(2)=4$. Do đó $N(\pi)$ chẵn. Vì $N(\pi)|N(x+iy)=x^2+y^2$ do đó x^2+y^2 là số chẵn. Mâu thuẫn. Từ đó $\pi|x, \pi|y$. Suy ra

$$N(\pi)|N(x)=x^2, N(\pi)|N(y)=y^2.$$

Theo định lí 4.7 ta có $N(\pi)=p$ là một số nguyên tố thông thường, vậy $p|x, p|y$. Điều này trái với giả thiết $(x\,;\,y)=1$. Theo định lí 4.6 ta có

$$x+iy=\pm(m+in)^2=\pm(m^2-n^2)+\pm(2mn)i$$

hoặc

$$x+iy=\pm i(m+in)^2=\pm 2mn\pm(m^2-n^2)i.$$

Vì x chẵn, y lẻ $x, y\in N^*$, ta thu được $x=2mn, y=\pm(m^2-n^2)$. Từ đó $z=(m^2+n^2)$. Vì $(y\,;\,z)=1$ nên $(m\,;\,n)=1$ và m, n không có cùng tính chẵn lẻ. Ngược lại, ta dễ kiểm tra công thức

$$\begin{cases} x &= 2mn\\ y &= |m^2-n^2|\\ z &= m^2+n^2\end{cases} \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} x &= |m^2-n^2|\\ y &= 2mn\\ z &= m^2+n^2,\end{cases}$$

trong đó $m, n \in N^*, (m\,;\,n) = 1, m \neq n \pmod 2$, xác định cho ta một bộ ba Pitago nguyên thuỷ $(x\,;\,y\,;\,z)$

Ví dụ 4.11. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c phân biệt sao cho a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng.

Lời giải. Bài toán quy về việc tìm nghiệm nguyên $x \neq y$ của phương trình

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \tag{4.3}$$

Vì rằng bộ $(x\,;\,y\,;\,z)$ là nghiệm của (4.3) khi và chỉ khi $(kx\,;\,ky\,;\,kz)$ là nghiệm của (4.3) với $k \in N^*$ nên không giảm tổng quát ta giả sử rằng $(x\,;\,y\,;\,z) = 1$. Nếu x, y chẵn thì suy ra z chẵn, vô lí. Giả sử x lẻ do đó y lẻ. Vậy vế trái chia 4 dư 2 do đó z lẻ. Nếu $p|x, p|y$ thì $p|z$ (do p lẻ). Vậy $(x\,;\,y) = 1$. Ta có

$$(x + iy)(x - iy) = 2z^2 = (1 + i)(1 - i)z^2. \tag{4.4}$$

Suy ra $(1 + i)|x + iy$ hoặc $(1 + i)|x - iy$.
Vậy $x + iy = (1 + i)(u + iv)$ hoặc $x - iy = (1 + i)(u + iv)$.
Cân bằng phần thực và ảo ta được $x = u - v, y = \pm(u + v)$.
Thay vào (4.3) ta được $u^2 + v^2 = z^2$. Vì $x \neq y$ nên $u, v \neq 0$.
Do $(x\,;\,y) = 1$ nên $(u\,;\,v) = 1$. Thành thử

$$\begin{cases} u &= 2mn \\ v &= \pm(m^2 - n^2) \\ z &= \pm(m^2 + n^2) \end{cases} \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} u &= \pm(m^2 - n^2) \\ v &= 2mn \\ z &= \pm(m^2 + n^2), \end{cases}$$

trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, (m\,;\,n) = 1, m \neq n \pmod 2$. Ta có

$$|x| = |u - v|, |y| = u + v, |z| = m^2 + n^2.$$

Từ đó ta nhận được công thức nghiệm nguyên dương là

$$a = |2mn + n^2 - m^2|, c = |2mn + m^2 - n^2|, b = m^2 + n^2$$

hay dưới dạng đối xứng hơn

$$a = |(m+n)^2 - 2n^2|, c = |(m+n)^2 - 2m^2|, b = m^2 + n^2$$

trong đó m, n là các số nguyên dương phân biệt nguyên tố cùng nhau, khác tính chẵn lẻ.

Ví dụ 4.12. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thoả mãn $x^2 + 1 = y^3$.

Lời giải. Ta có $(x+i)(x-i) = y^3$. Ta sẽ chỉ ra hai số $x+i, x-i$ là nguyên tố cùng nhau. Giả sử trái lại có số nguyên tố Gauss π sao cho $\pi | x+i, \pi | x-i$. Suy ra $\pi | 2i$ do đó $\pi | 2$. Vậy $N(\pi) | N(2) = 4$, suy ra $N(\pi)$ chẵn.
Vì $N(\pi) | N(x+i) = x^2 + 1 = y^3$ nên y chẵn do đó x lẻ và $x^2 + 1 = y^3$ chia hết cho 8. Nhưng $x^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$. Ta có mâu thuẫn.
Ta thấy $x+i$ là kết hợp với một lập phương nào đó. Mà ta có $-1 = (-1)^3$, $i = (-i)^3, (-i) = i^3$ nên chính $x+i$ là một lập phương. Vậy

$$\begin{aligned}
&x + i = (a+ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)\\
\Rightarrow &x = a(a^2 - 3b); 1 = b(3a^2 - b^2) \Rightarrow |b| = 1\,;\ |3a^2 - b^2| = 1\\
\Rightarrow &|3a^2 - 1| = 1 \Rightarrow a = 0, b = -1.
\end{aligned}$$

Do đó $x = 0, y = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 4.13. Chứng minh rằng một số nguyên dương $n > 1$ được biểu diễn thành tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi trong phân tích tiêu chuẩn của n các ước nguyên tố dạng $4k+3$ có luỹ thừa chẵn.

Lời giải. Giả sử rằng $n = x^2 + y^2$ ở đó $x, y \in N$. Khi đó $n = (x+iy)(x-iy)$. Vì $n > 1$ nên $x+iy$ không là đơn vị. Phân tích $x+iy$ thành tích các số nguyên tố Gauss ta được

$$x + iy = \Pi(\varepsilon_i q_i)^{s_i} \Pi(\delta_j \pi_j)^{t_j}$$

trong đó ε_i, δ_j là các đơn vị, q_i là các số nguyên tố thông thường dạng $4k+3$ (đó cũng là các số nguyên tố Gauss) và $\pi_j = a_j + ib_j$ là các số nguyên tố Gauss với $a_j \neq 0, b_j \neq 0$. Ta có

$$x - iy = \overline{x + iy} = \Pi(\bar{\varepsilon}_i q_i)^{s_i}\Pi(\bar{\delta}_j \bar{\pi}_j)^{t_j}.$$

Vậy

$$n = \Pi q_i^{2s_i}\Pi(N(\pi_j))^{t_j}.$$

Đặt $N(\pi_j) = p_j$. Theo định lí 4.7, p_j là các số nguyên tố thông thường không có dạng $4k+3$. Vậy phân tích tiêu chuẩn của n là

$$n = \Pi q_i^{2s_i}\Pi p_j^{t_j}.$$

Ngược lại, giả sử

$$n = \Pi q_i^{2s_i}\Pi p_j^{t_j}.$$

Theo bài toán 4.9, p_j có thể viết dưới dạng tổng của hai số chính phương khác 0, $p_j = a_j^2 + b_j^2$. Đặt $\pi_j = a_j + ib_j$ ta có $N(\pi_j) = \pi_j\bar{\pi}_j = a_j^2 + b_j^2 = p_j$. Ta xét số phức nguyên sau đây

$$\alpha = \Pi q_i^{s_i}\Pi \pi_j^{t_j}.$$

Khi đó $\alpha\bar{\alpha} = \Pi q_i^{2s_i}\Pi p_j^{t_j} = n$. Giả sử $\alpha = x + iy$. Khi đó $n = x^2 + y^2$.

Ta có thể xét số phức nguyên khác sau đây

$$\gamma = \Pi q_i^{s_i}\Pi \pi_j^{l_j}\Pi \bar{\pi}_j^{r_j}$$

trong đó $l_j, r_j \in N$ sao cho $l_j + r_j = t_j$. Khi đó

$$\gamma\bar{\gamma} = \Pi q_i^{2s_i}\Pi p_j^{l_j + r_j} = \Pi q_i^{2s_i}\Pi p_j^{t_j} = n.$$

Giả sử $\gamma = u + iv$ thì $n = u^2 + v^2$ và ta có một cách biểu diễn khác của n thành tổng của hai số chính phương. Có thể chứng minh rằng nếu phân tích tiêu chuẩn của n là

$$n = \Pi q_i^{2s_i}\Pi p_j^{t_j}$$

thì số nghiệm nguyên không âm $(x\,;\,y)$ của phương trình $n = x^2 + y^2$ là $\Pi(1 + t_j)$.

Ví dụ 4.14. Cho p là số nguyên tố dạng $4k+3$ và x, y, z là các số nguyên dương thoả mãn

$$x^2 + y^2 = z^{\frac{p+1}{2}}$$

Giả sử rằng x, y nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng xy chia hết cho p.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh hai số phức nguyên $x + iy, x - iy$ là nguyên tố cùng nhau. Nếu giả sử trái lại có số nguyên tố Gauss π sao cho $\pi | x + iy, \pi | x - iy$. Khi đó $\pi | 2x, \pi | 2iy$. Ta chỉ ra rằng π không phải là ước của 2. Thật vậy, nếu $\pi | 2$ thì $N(\pi) | N(2) = 4$. Do đó $N(\pi)$ chẵn. Vì $N(\pi) | N(x + iy) = x^2 + y^2 = z^{\frac{p+1}{2}}$ nên $z^{\frac{p+1}{2}}$ chẵn. Do đó z chẵn, điều này kéo theo $4 | z^{\frac{p+1}{2}} = x^2 + y^2$. Lại có $(x\,;\,y) = 1$ nên x, y không cùng chẵn. Vậy $x^2 + y^2 \equiv 1, 2 \pmod 4$. Ta có mâu thuẫn. Vậy $\pi | x, \pi | y$. Suy ra $N(\pi) | N(x) = x^2, N(\pi) | N(y) = y^2$. Do định lí 4.7, $N(\pi) = p$ là số nguyên tố, nên $p | x, p | y$. Điều này trái với giả thiết $(x\,;\,y) = 1$. Vì $x + iy = \varepsilon(a + bi)^{\frac{p+1}{2}}$ nên

$$(x + iy)^2 = \pm(a + bi)^{p+1} = \pm(a + bi)(a + bi)^p.$$

Do vậy $(a + bi)^p \equiv (a - bi) \pmod p$ nên

$$(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \equiv \pm(a^2 + b^2) \pmod p.$$

Từ đó $2xy \equiv 0 \pmod p$. Vì p là số nguyên tố lẻ nên ta kết luận được $p | xy$.

4.5 Bài tập

Bài 4.1. Chứng minh rằng một số nguyên dương $n > 1$ biểu diễn thành tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi trong phân tích tiêu chuẩn của n các ước nguyên tố dạng $4k + 3$ có luỹ thừa chẵn.

Bài 4.2 (IMO 1974)**.** Chứng minh rằng số

$$\sum_{k=1}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$$

không chia hết cho 5 với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Bài 4.3. Tính tổng $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \cos kx$ với $x \in [0\,;\,\pi]$.

Bài 4.4 (Cuộc thi Traian Lalescu - Romania, 2003)**.** Có bao nhiêu số có n chữ số chọn từ tập hợp $\{2\,;\,3\,;\,7\,;\,9\}$ và chia hết cho 3?

Bài 4.5. Cho ba số nguyên dương m, n, p, trong đó $m > 1$ và $n + 2 \equiv 0 \pmod{m}$. Tìm số bộ $(x_1\,;\,x_2;\ldots\,;\,x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $(x_1 + x_2 + \cdots x_p)$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x_1, x_2, \ldots, x_p$ đều không lớn hơn m.

Bài 4.6 (IMO 2007 Shorlist)**.** Với số nguyên dương $n > 1$, xét tập

$$S = \{1\,;\,2\,;\,3;\ldots\,;\,n\}.$$

Tô các số của S bằng 2 màu, u số được tô màu đỏ và v số được tô màu xanh. Hãy tìm số các bộ $(x\,;\,y\,;\,z)$ thuộc S^3 sao cho

a) x, y, z được tô cùng màu ;

b) $x + y + z$ chia hết cho n.

Bài 4.7 (Việt Nam TST 2008, Bài 6)**.** Kí hiệu M là tập hợp gồm 2008 số nguyên dương đầu tiên. Tô tất cả các số thuộc M bởi ba màu xanh, vàng, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi một màu và mỗi màu đều được dùng để tô ít nhất một số. Xét các tập hợp

$S_1 = \{(x\,;\,y\,;\,z) \in M^3 \mid x, y, z \text{ cùng màu và } x + y + z \equiv 0 \pmod{2008}\}$;

$S_2 = \{(x\,;\,y\,;\,z) \in M^3 \mid x, y, z \text{ đôi một khác màu và } x + y + z \equiv 0 \pmod{2008}\}$.

Chứng minh rằng $2|S_1| > |S_2|$.

(Ta kí hiệu $M^3 := M \times M \times M$ và $|X|$ là số phần tử của tập hữu hạn X).

Bài 4.8. Tìm công thức tổng quát của dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_{n+3} = 2x_{n+2} - 3x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n.$$

Bài 4.9. Xét khai triển

$$\frac{1}{1 + ax + bx^2} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

Chứng minh rằng nếu $a_j > 0$ với mọi $j = 1, 2, 3, \ldots$ thì phương trình

$$1 + ax + bx^2 = 0$$

có các nghiệm đều thực.

Bài 4.10. Chứng minh rằng nếu $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$ thì $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos(n\alpha)$.

Chương 5

Một số ứng dụng của số phức trong hình học

Chương trình Toán học ở bậc Trung học phổ thông của hầu hết các nước đều có phần kiến thức số phức. Ở nước ta, sau nhiều lần cải cách, nội dung số phức cuối cùng cũng đã được đưa vào chương trình Giải tích 12, tuy nhiên còn rất đơn giản. Vì nhiều lý do khác nhau, rất nhiều học sinh, thậm chí là học sinh khá, giỏi sau khi học xong phần số phức cũng chỉ hiểu một cách rất đơn sơ: sử dụng số phức, có thể giải được mọi phương trình bậc hai, tính một vài tổng đặc biệt, ...

Việc sử dụng số phức trong nghiên cứu, khảo sát hình học phẳng tỏ ra có nhiều thuận lợi, nhất là trong việc xem xét các vấn đề liên quan đến các phép biến hình của mặt phẳng cùng với hình học của chúng.

Trong chương này sẽ mô tả một số kết quả, khái niệm cơ bản của Hình học Euclid phẳng dưới dạng ngôn ngữ số phức như góc, khoảng cách, sự đồng quy, thẳng hàng, đường thẳng, đường tròn cùng với một số phép dời hình, đồng dạng ở dạng cơ bản nhất.

5.1 Mô tả một số kết quả của hình học phẳng bằng ngôn ngữ số phức

Cho trước hai điểm $M(m), N(n)$. Khi đó, độ dài đoạn MN bằng $MN = |n-m| = d(m;n)$

Trong mặt phẳng cho trước đoạn thẳng AB. Khi đó, điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$,

$$a - m = k \cdot (b - m)$$

trong đó a, b và m là tọa vị của các điểm A, B và M theo thứ tự đó.

Từ đó, nếu ký hiệu $[AB]$ là chỉ đoạn thẳng AB, ký hiệu (AB) là chỉ đường thẳng AB, ký hiệu $[AB)$ là chỉ tia AB, ta có các kết quả sau

Cho trước hai điểm $A(a), B(b)$ phân biệt và điểm $M(m)$. Khi đó

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \geq 0 : z - m = t \cdot (b - m) \Leftrightarrow \exists t \in [0;1] : m = (1-t)a + t \cdot b \quad (1)$$

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \, : \, m - a = t(b-a) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \, : \, m = (1-t)a + tb \quad (2)$$

Định lý 5.1. *Cho trước hai điểm $A(a), B(b)$ phân biệt và điểm $M(m)$. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương*

- $M \in [AB)$
- $\exists t > 0 \, : \, m = (1-t)a + tb$
- $\arg(m-a) = \arg(b-a)$
- $\dfrac{m-a}{b-a} = t \in \mathbb{R}^+$

Từ đó, để ý rằng $\overline{t} = t \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, ta thu được phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm $W_1(w_1), W_2(w_2)$ là

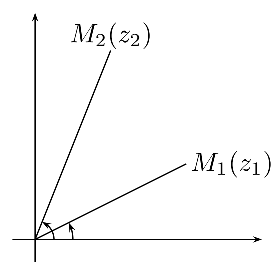
$$(z - w_1) \cdot \overline{(w_2 - w_1)} - \overline{(z - w_1)} \cdot (w_2 - w_1) = 0 \quad (3)$$

5.1.1 Góc giữa hai đường thẳng

Trong mặt phẳng phức, cho hai điểm $M_1(z_1), M_2(z_2)$ và $\alpha_k = \arg z_k$, $k = 1, 2$. Khi đó, do

$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2}) \equiv (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM_2}) \pmod{2\pi}$

nên



$$(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2}) \equiv (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM_2}) - (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM_1}) \pmod{2\pi}$$

hay góc định hướng tạo bởi tia OM_1 với tia OM_2 bằng $\arg \dfrac{z_2}{z_1}$ Từ đó, nếu cho bốn điểm phân biệt $M_k(z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ thì góc (định hướng) tạo bởi đường thẳng M_1M_3 với đường thẳng M_2M_4 bằng $\arg \dfrac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$

Định lý 5.2. *Hai tam giác $ABC, A'B'C'$ đồng dạng cùng hướng khi và chỉ khi*

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}$$

Và hai tam giác $ABC, A'B'C'$ đồng dạng ngược hướng khi và chỉ khi

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\overline{c'} - \overline{a'}}{\overline{b'} - \overline{a'}}$$

5.1.2 Tích vô hướng của hai số phức

Trong mặt phẳng phức cho hai điểm $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Khi đó

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos \angle M_1OM_2$$

Nếu z_k có modul bằng r_k, và có argument bằng α_k thì

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = r_1 r_2 (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2)$$

Do đó

$$< z_1; z_2 >= \frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2)$$

Từ đó suy ra $\overline{< z_1; z_2 >} =< z_1; z_2 >$ và do đó $< z_1; z_2 > \in \mathbb{R}$ Tích vô hướng của hai số phức cũng có các tính chất như tích vô hướng của hai véc-tơ. Ngoài ra $< z_1; zz_2 >= \overline{z} \cdot < z_1; z_2 >$ và $< zz_1; z_2 >= z \cdot < z_1; z_2 >$.

Nhận xét 5.1. *1. Trong mặt phẳng phức cho hai điểm $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Khi đó $< z_1; z_2 >$ bằng phương tích của O với đường tròn đường kính M_1M_2*

2. Nếu $A(a), B(b), C(c)$ và $D(d)$ là bốn điểm phân biệt của mặt phẳng phức, thì

$$AB \perp CD \Longleftrightarrow < b - a; d - c >= 0 \Longleftrightarrow Re\left(\frac{b-a}{d-c}\right) = 0$$

5.1.3 Tích ngoài của hai số phức. Diện tích tam giác

Trong mặt phẳng phức cho hai điểm $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Khi đó

$$\overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \sin\angle M_1OM_2$$

Nếu z_k có modul bằng r_k, và có argument bằng α_k thì

$$\overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_2} = r_1 r_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = r_1 r_2 (\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1)$$

Do đó

$$z_1 \times z_2 = \frac{i}{2}\,(z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2)$$

Từ đó, do $\overline{z_1 \times z_2} = z_1 \times z_2$ nên suy ra $\operatorname{Im} z_1 \times z_2 = 0$

Tích ngoài của hai số phức cũng có các tính chất như tích ngoài của hai véc-tơ trong mặt phẳng, ngoài ra $(zz_1) \times z_2 = z \cdot (z_1 \times z_2)$ và $z_1 \times (zz_2) = \overline{z} \cdot (z_1 \times z_2)$

Nhận xét 5.2. 1. *Ba điểm $A(a), B(b), C(c)$ thẳng hàng khi và chỉ khi $(b-a)\times(c-a)=0$*

2. *Nếu $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt, không thẳng hàng với O thì $a\times b = 2\cdot[OAB]$, trong đó, ký hiệu $[A_1A_2\dots A_n]$ là để chỉ diện tích đại số của đa giác định hướng $A_1A_2\dots A_n$*

3. *Từ nhận xét 2, với ba điểm $A(a), B(b)$ và $C(c)$ phân biệt, không thẳng hàng, thì*
$$[ABC] = \frac{1}{2}(a\times b + b\times c + c\times a)$$

5.1.4 Đường tròn

Đường tròn tâm $M_0(z_0)$ bán kính R là tập hợp những điểm $M(z)$ sao cho $M_0M = R$ hay $|z-z_0| = R$ tức là
$$z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} - R^2 = 0$$
Từ đó, mọi đường tròn đều có phương trình dạng
$$z\overline{z} + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + \beta = 0$$
trong đó $\alpha\in\mathbb{C}$ và $\beta\in\mathbb{R}$.
Đường tròn nay có tâm với tọa vị $-\alpha$, bán kính $R=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-\beta}$

5.1.5 Mô tả các phép biến hình phẳng bằng ngôn ngữ số phức

Phép dời hình.

Phép tịnh tiến. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{v} = (v)$ là phép biến hình biến điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$. Do đó, biểu thức của phép tịnh tiến là $z' = f(z) = z+v$

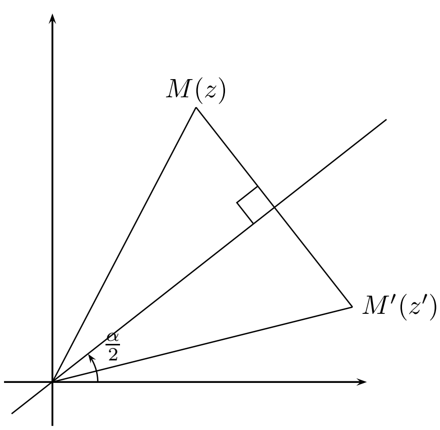
Phép quay. Phép quay tâm $M_0(z_0)$ góc quay α là phép biến hình biến $M(z)$ thành điểm $M'(z')$mà $M_0M = M_0M'$ và $(\overrightarrow{M_0M};\overrightarrow{M_0M'}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. Từ đó, biểu thức của phép quay là $z'-z_0 = e^{i\cdot\alpha}(z-z_0)$

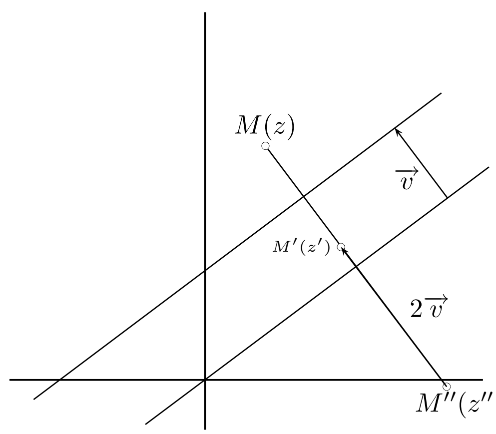
Phép đối xứng-trục. Phép đối xứng qua đường thẳng ℓ là phép biến hình biến mỗi điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ sao cho ℓ là trung trực của MM'. Từ đó

- Phép đối xứng qua trục thực: $z' = f(z) = \overline{z}$
- Phép đối xứng qua trục ảo: $z' = f(z) = -\overline{z}$
- Do $2(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{\ell}) = (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM'}$ (ở đây $\overrightarrow{\ell} = (z_0)$) nên phép đối xứng qua đường thẳng ℓ đi qua gốc O và điểm $z_0 = e^{i\frac{\alpha}{2}}$ có biểu thức $z' = f(z) = e^{i\alpha}\overline{z}$

Từ đó, nếu $\Delta = T_{\overrightarrow{v}}(\ell)$ với $\overrightarrow{v} = (z_0)$ thì phép đối xứng qua Δ có biểu thức

$$z' = e^{i\alpha}\overline{z} + 2z_0$$





Phép vị tự

Phép vị tự tâm $C(z_0)$, tỷ số $r \in \mathbb{R}^\star$ lf phép biến hình biến điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ mà $\overrightarrow{CM'} = r \cdot \overrightarrow{CM}$. Do đó, có biểu thức

$$z' = r \cdot (z - z_0) + z_0$$

5.1.6 Điều kiện đồng quy, thẳng hàng, vuông góc và cùng nằm trên một đường tròn (đồng viên)

Định lý 5.3. *Cho ba đường thẳng với phương trình* $\Delta_1 : (z - z_1) \times u_1 = 0$ $\Delta_2; (z - z_2) \times u_2 = 0$ $\Delta_3 : (z - z_3) \times u_3 = 0$*. Khi đó, ba đường thẳng* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ *đồng quy khi và chỉ khi*

$$\begin{cases} (u_1 \times u_2)^2 + (u_2 \times u_3)^2 + (u_3 \times u_1)^2 \neq 0 \\ (u_1 \times u_2)(z_3 \times u_3) + (u_2 \times u_3)(z_1 \times u_1) + (u_3 \times u_1)(z_2 \times u_2) = 0 \end{cases}$$

Định lý 5.4. *Ba điểm* $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ *thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^\star$$

hay $Im\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0$

Định lý 5.5. *Bốn điểm* $M_k(z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ *cùng nằm trên một đường thẳng hay đường tròn khi và chỉ khi*

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}$$

Hệ quả 5.1. *Bốn điểm* $M_k(z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ *cùng nằm trên một đường thẳng khi và chỉ khi* $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}$ *và* $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}$

Bốn điểm $M_k(z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ *cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi* $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}$ *nhưng* $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R}$ *và* $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \notin \mathbb{R}$

Định lý 5.6. *Nếu* $A(a), B(b), C(c)$ *và* $D(d)$ *là bốn điểm phân biệt của mặt phẳng phức, thì*

$$AB \perp CD \Longleftrightarrow < b - a; d - c >= 0 \Longleftrightarrow Re\left(\frac{b - a}{d - c}\right) = 0$$

5.2 Một số ví dụ áp dụng

Cho $A(a), B(b), C(c)$ là ba đỉnh của một tam giác. Khi đó tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi hai tam giác ABC, BCA là đồng dạng cùng hướng. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} = \frac{a-b}{c-b} &\Leftrightarrow (c-a)(c-b) = (a-b)(b-a)\\ &\Leftrightarrow c^2 - ca - bc + ab = -a^2 - b^2 + 2ab\\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca\end{aligned}$$

Mặt khác, tam giác ABC đều, định hướng dương (tương ứng âm) khi và chỉ khi phép quay tâm A, góc quay $+\frac{\pi}{3}$ (tương ứng $-\frac{\pi}{3}$) biến B thành C, do đó

Tam giác ABC đều, định hướng dương khi và chỉ khi $a + b\omega + c\omega^2 = 0$, và tam giác ABC đều, định hướng âm khi và chỉ khi $a\omega^2 + b\omega + c = 0$, trong đó $\omega^3 = 1$.

Ví dụ 5.1 (Napoléon)**.** Lấy các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC làm đáy, dựng ra ngoài các tam giác đều với tâm tương ứng A_0, B_0, C_0. Chứng minh rằng A_0, B_0, C_0 là đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải. Giả sử tam giác ABC định hướng dương. Gọi x là tọa vị của điểm X nào đó trong mặt phẳng. Ta có

$$a + c_1\omega + b\omega^2 = 0, b + a_1\omega + c\omega^2 = 0, c + b_1\omega + a\omega^2 = 0$$

Do A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 nên

$$3a_0 = b + c + a_1, 3b_0 = c + a + b_1, 3c_0 = a + b + c_1$$

Từ đó

$$\begin{aligned}3(c_0 + a_0\omega + b_0\omega^2 &= a + b + c_1 + \omega(b + c + a_1) + \omega^2(c + a + b_1)\\ &= (b + a_1\omega + c\omega^2) + (c + b_1\omega + a\omega^2)\omega + (a + c_1\omega + b\omega^2)\omega^2 = 0\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

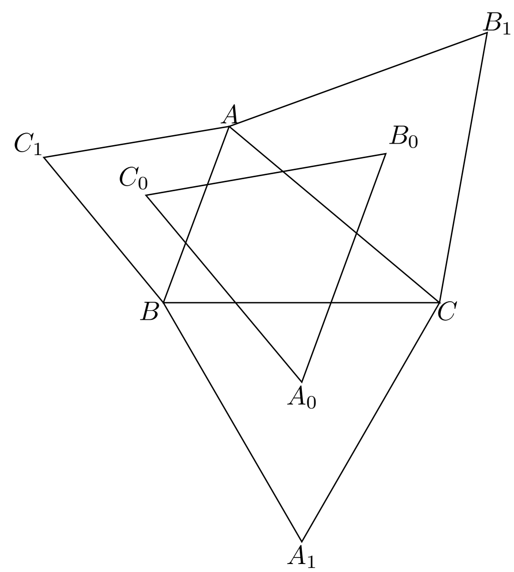
Lời giải 2. Giả sử tam giác ABC định hướng âm, và x là tọa vị của điểm X nào đó trong mặt phẳng. Khi đó, ta có

$$c = e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(b - a_0) + a_0, a = e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(c - b_0) + b_0, b = e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(a - c_0) + c_0$$

Suy ra

$$\begin{aligned} b &= e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(c-b_0)+b_0-c_0)+c_0 \\ &= e^{i\cdot\frac{4\pi}{3}}(e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(b-a_0)+a_0-b_0)+e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(b_0-c_0)+c_0 \\ &= b-a_0+e^{i\cdot\frac{4\pi}{3}}(a_0-b_0)+e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}(b_0-c_0)+c_0 \end{aligned}$$

Từ đó $c_0-a_0=e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}(b_0-a_0)$ điều đó có nghĩa là tam giác $A_0B_0C_0$ đều

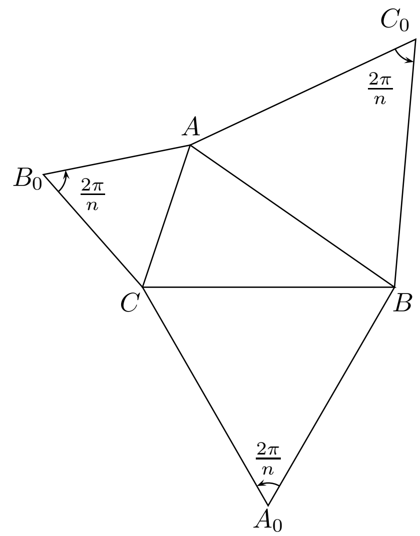


Ví dụ 5.2 (BMO 1990 - Shortlist)**.** Cho tam giác ABC. Lấy các cạnh làm đáy, dựng ra ngoài ba $n-$giác đều. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho tâm của ba đa giác đều đó là đỉnh của một tam giác đều.

Giải. Giả sử tam giác ABC định hướng âm. Gọi A_0, B_0, C_0 là tâm của các đa giác đều dựng trên cạnh BC, CA, AB (hình vẽ). Khi đó $\angle BA_0C = \angle CB_0A = \angle AB_0C = \frac{2\pi}{n}$

Đặt $\omega = e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}$ và gọi a, b, c, a_0, b_0, c_0 lần lượt là tọa vị của các điểm A, B, C, A_0, B_0, C_0 theo thứ tự đó. Từ giả thiết, ta có

$$a = b_0 + (c-b_0)\omega, b = c_0 + (a-c_0)\omega, c = a_0 + (b-a_0)\omega$$



Từ đó

$$b_0 = \frac{a - c\omega}{1 - \omega}\ ;\ c_0 = \frac{b - a\omega}{1 - \omega}\ ;\ a_0 = \frac{c - b\omega}{1 - \omega}$$

Tam giác $A_0B_0C_0$ đều khi và chỉ khi $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0$

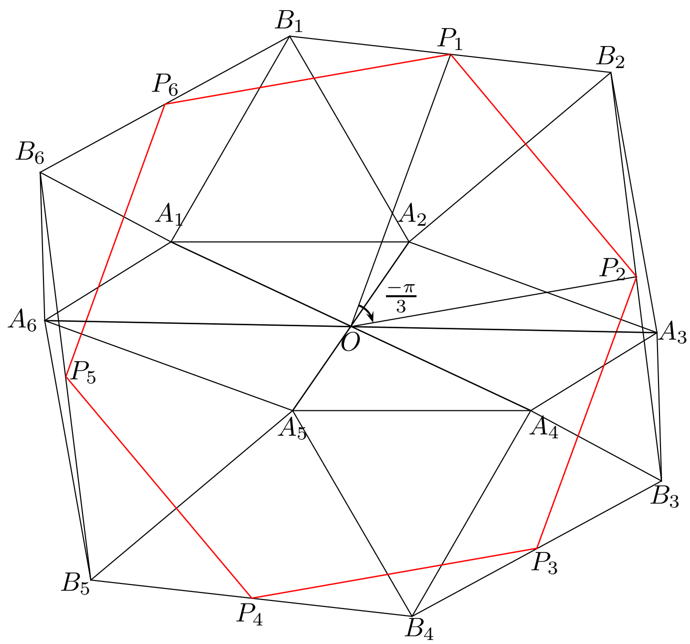
Thay a_0, b_0, c_0 tìm được ở trên vào, khai triển, rút gọn, ta được

$$(1 + \omega + \omega^2)\left[(b - a)^2 + (a - c)^2 + (c - b)^2\right] = 0$$

Điều này tương đương với $1 + \omega + \omega^2 = 0$ do đó $n = 3$.

Ví dụ 5.3. Trên các cạnh của lục giác lồi có tâm đối xứng $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, dựng về phía ngoài các tam giác đều $A_kA_{k+1}B_k$ (với $k = 1, 2, \ldots, 6$ và quy ước $A_7 \equiv A_1$). Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng B_kB_{k+1} là đỉnh của một lục giác đều (với $k = 1, 2, \ldots, 6$ và $B_7 \equiv B_1$)

Lời giải. Giả sử lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ định hướng âm. Chọn tâm đối xứng O của lục giác làm gốc, gọi x là tọa vị của điểm X trong mặt phẳng phức, đặt $e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} = \omega$. Khi đó $a_{k+3} = -a_k$. Do tam giác $A_kA_{k+1}B_k$ đều, có hướng dương, nên $b_k + \omega^2 a_k + \omega^4 a_{k+1} \Leftrightarrow b_k = \omega a_{k+1} + \overline{\omega} a_k$. Suy ra $b_k = -b_{k+3}$



Do P_k là trung điểm của B_kB_{k+1} nên $p_k = \frac{b_k+b_{k+1}}{2}$ $\forall k = 1, 2, \ldots, 6$ Từ đó

$$p_k + p_{k+3} = \frac{b_k + b_{k+1}}{2} + \frac{b_{k+3} + b_{k+4}}{2} = \frac{(b_k + b_{k+3}) + (b_{k+1} + b_{k+4})}{2} = 0$$

do đó lục giác $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ nhận O làm tâm đối xứng.

Ký hiệu f là phép quay tâm O góc quay $-\frac{\pi}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned} f(p_1) &= \overline{\omega} \cdot (\frac{b_1 + b_2}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \overline{\omega} \cdot (\omega a_2 + \overline{\omega} a_1 + \omega a_3 + \overline{\omega} a_2) \\ &= \frac{1}{2}\overline{\omega} \left(a_2 + \overline{\omega} a_1 + \omega a_3\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(a_3 + \overline{\omega} a_2 + \overline{\omega}^2 a_1\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(a_3 + \overline{\omega} a_2 + \omega a_4\right) = p_2 \end{aligned}$$

Do đó, $f(p_1) = p_2$. Tương tự, cũng được $f(p_2) = p_3, f(p_3) = p_4$, đpcm.

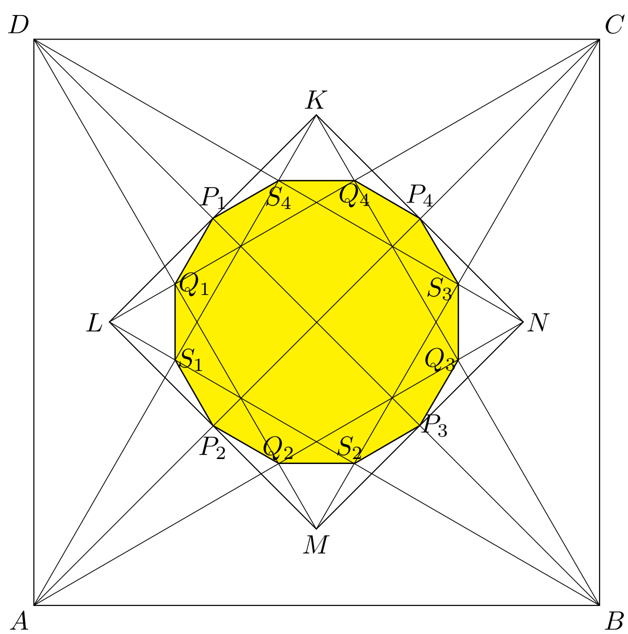
Ví dụ 5.4 (IMO 1977)**.** Cho hình vuông $ABCD$. Dựng về phía trong hình vuông các tam giác đều ABK, BCL, CDM và DAN. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng $KL, LM, MN, NK, BK, BL, CL, DM, DN$ và NA là đỉnh của một thập nhị giác đều.

Lời giải. Giả sử hình vuông $ABCD$ định hướng dương. Chọn tâm O của hình vuông làm gốc, gọi x là tọa vị của điểm X trong mặt phẳng phức.
Khi đó $b = ia, c = -a, d = -ia$.

Đặt $e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} = \omega$ ta có

$$k = (i\omega + \overline{\omega})a, \ell = (-\omega + i\overline{\omega})a,$$
$$m = (-i\omega - \overline{\omega})a, n = (\omega - i\overline{\omega})a$$

Để ý rằng đa giác $P_1Q_1S_1P_2Q_2S_2P_3Q_3S_3P_4Q_4S_4$ nhận O làm tâm đối xứng, do đó với f là phép quay tâm O, góc quay $+\frac{\pi}{6}$ thì chỉ cần chứng minh $f(p_k) = q_k, f(q_k) = s_k$ và $f(s_k) = p_{k+1}$ $(k = 1, 2)$ là đủ



Từ cách dựng, ta có

$$p_1 = \frac{1}{2}(k+\ell) = \frac{a}{2}\left[(i-1)\omega + (i+1)\overline{\omega}\right],\ p_2 = \frac{a}{2}\left[-(i+1)\omega + (i-1)\overline{\omega}\right],$$

$$q_1 = -\frac{a}{2}\left[i(1+\omega)+\overline{\omega}\right],\ s_1 = \frac{a}{2}\left[1+i\omega+\overline{\omega}\right]$$

Khi đó, với $\varepsilon = e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$ thì

$$f(p_1) = \varepsilon p_1 = \frac{a}{2}\left[(i-1)\varepsilon\omega + (i+1)\varepsilon\overline{\omega}\right] = q_1$$
$$f(q_1) = \varepsilon q_1 = \frac{a}{2}\left[i\varepsilon + i\varepsilon\omega + \varepsilon\overline{\omega}\right] = s_1$$
$$f(s_1) = \varepsilon s_1 = \frac{a}{2}\left[\varepsilon + i\varepsilon\omega + \varepsilon\overline{\omega}\right] = p_2$$

Một cách tương tự, cũng được $f(p_2) = q_2, f(q_2) = s_2, f(s_2) = p_3$ (ĐPCM)

Nhận xét. Bài toán này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp tọa độ như trong [5], hay phương pháp tổng hợp như trong [6], tuy nhiên lời giải quá dài. Lời giải được trình bày ở trên được xuất phát từ ý tưởng sử dụng phép quay véc-tơ, tuy nhiên bằng công cụ số phức, đã làm giảm đi đáng kể các động tác biến đổi phức tạp trên các véc-tơ

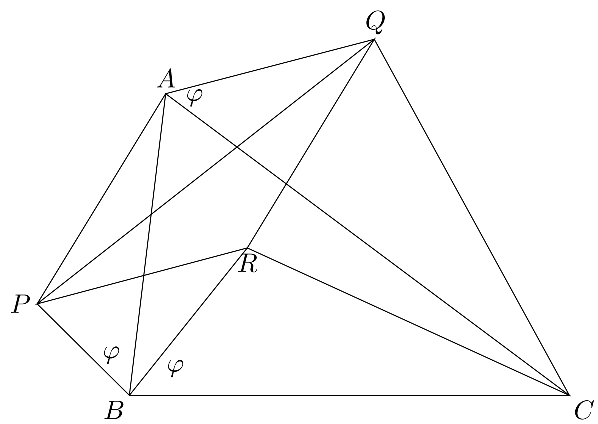
Ví dụ 5.5 (SEA-MO 1998)**.** Cho tam giác ABC. Lấy điểm P khác phía với C đối với đường thẳng AB, điểm Q khác phía với B đối với đường thẳng CA và điểm R cùng phía với A đối với đường thẳng BC sao cho các tam giác BCR, ACQ và BAP đồng dạng. Chứng minh rằng tứ giác $APRQ$ là một hình bình hành.

Lời giải 1. Giả sử tam giác ABC định hướng dương và gọi x là tọa vị của điểm X. Đặt $\frac{BP}{BA} = \frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BC} = t, \angle ABP = \angle CAQ = \angle CBR = \varphi, \omega = e^{i\varphi}$. Khi đó, từ giả thiết suy ra

$$p = (t\omega+1)b - t\omega a,$$

$$q = (t\omega+1)a - t\omega c$$

và $r = (t\omega+1)b - t\omega c$



Khi đó $p+q = (t\omega+1)(a+b)-t\omega(a+c) = (t\omega+1)b-t\omega c+(t\omega+1)a-t\omega a = a+r$ (ĐPCM)

Lời giải 2. Từ giả thiết, suy ra các tam giác BCR, ACQ và BAP đồng dạng cùng hướng. Vậy

$$\frac{r-b}{r-c} = \frac{q-a}{q-c} = \frac{p-b}{p-a} = z \in \mathbb{C}$$

Từ đó

$$p = \frac{b-za}{1-z}\ ;\ q = \frac{a-zc}{1-z}\ ;\ r = \frac{b-zc}{1-z}$$

Suy ra

$$p+q = \frac{b-zc+(1-z)a}{1-z} = a+r$$

Ví dụ 5.6. Trong mặt phẳng cho bốn tam giác ABC, AB_1C_1, A_2BC_2 và A_3B_3C đồng dạng, cùng hướng. Gọi A_0, B_0 và C_0 theo thứ tự là trung điểm của A_2A_3, B_1B_3 và C_1C_2. Chứng minh rằng $\triangle A_0B_0C_0 \backsim \triangle ABC$

Lời giải. Gọi x là tọa vị của điểm X. Giả sử phép đồng dạng $f_1(z) = \alpha_1 z + \beta_1$ biến tam giác ABC thành tam giác AB_1C_1, phép đồng dạng $f_2(z) = \alpha_2 z + \beta_2$ biến tam giác ABC thành tam giác A_2BC_2, phép đồng dạng $f_3(z) = \alpha_3 z + \beta_3$ biến tam giác ABC thành tam giác A_3B_3C.

Khi đó

$$b_0 - a_0 = \frac{1}{2}(b_1 + b_3 - a_2 - a_3) = \frac{1}{2}\left[(b_1 - a) + (a - b) + (b - a_2) + (b_3 - a_3)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1\right)(b - a)$$

Tương tự, cũng được $c_0 - a_0 = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1\right)(c - a)$

Vậy $\dfrac{c_0 - a_0}{b_0 - a_0} = \dfrac{c - a}{b - a}$ (ĐPCM)

Nhận xét 5.3. *Nếu đặt $\frac{AB}{AC} = t$ và $\alpha = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$, thì bằng cách làm tương tự như lời giải 1 bài toán 5, ta cũng chứng minh được $b_0 - a_0 = te^{i\alpha}(c_0 - a_0)$ và cũng được điều phải chứng minh. Bằng những cách làm như trên, không những ta chứng minh được các tam giác đồng dạng, mà còn chỉ ra được chúng đồng dạng cùng hướng, và cũng tìm được tỷ số đồng dạng theo các tỷ số đã cho.*

Ví dụ 5.7 (Italy MO 1996)**.** Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài (O). Với mỗi điểm P trên đường tròn, dựng hình vuông $APQR$, với các đỉnh theo ngược chiều kim đồng hồ. Tìm quỹ tích điểm Q khi P chạy khắp trên (O).

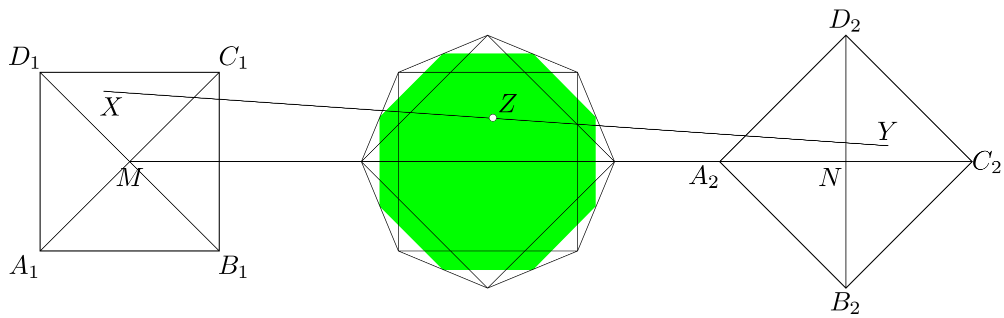
Lời giải. Không mất tổng quát, coi đường tròn (O) có tâm tại gốc, bán kính bằng 1, gọi x là tọa vị của điểm X trên mặt phẳng. Khi đó, ta có

$$q = e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}(a - p) + p \Longleftrightarrow q = -ia + (1 - i)p$$

Do đó, quỹ tích của điểm Q là đường tròn có tâm tại điểm $A'(-ia)$ (tức là $A' = Q_O^{-\frac{\pi}{2}}(A)$), bán kính $R = |(1 - i)p| = \sqrt{2}$

Ví dụ 5.8 (Bulgaria MO 1997)**.** Cho hai hình vuông đơn vị K_1, K_2 với tâm M, N trong mặt phẳng sao cho $MN = 4$. Biết rằng hình vuông K_1 có hai cạnh song song với MN, hình vuông K_2 có một đường chéo nằm trên đường thẳng MN, tìm quỹ tích trung điểm XY, trong đó X là một điểm trong của K_1, Y là một điểm trong của K_2

Lời giải. Không mất tổng quát, coi $M(-2), N(2)$ và gọi w là tọa vị của điểm W trong mặt phẳng phức. Khi đó $a_1 = -\frac{5}{2} - \frac{i}{2}, b_1 = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}, c_1 = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}, d_1 = -\frac{5}{2} + \frac{i}{2}$ và $a_2 = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, b_2 = 2 - \frac{i}{\sqrt{2}}, c_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, d_2 = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}}$



Ta có X nằm trong hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ khi và chỉ khi $x = x_1 + x_2 i$, $x_k \in \mathbb{R}$ với $|x_2| < \frac{1}{2}, |x_1 + 2| < \frac{1}{2}$

Và Y nằm trong hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ khi và chỉ khi $y = y_1 + y_2 i$, $y_k \in \mathbb{R}$ với $|y_1 + y_2 - 2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $|y_1 - y_2 - 2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy, với Z là trung điểm XY thì $z = \frac{x_1+y_1}{2} + i \cdot \frac{x_2+y_2}{2} = u + iv$.

Từ $-2 - \frac{1}{2} < x_1 < -2 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} < y_1 \pm y_2 < 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ suy ra $|u| < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

Tương tự, cũng được $|v| < \frac{1+\sqrt{2}}{2}, |u + v|, |u - v| < \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$

Vậy, quỹ tích điểm Z là miền bát giác giới hạn bởi các đường thẳng $|x| = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, $|y| = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, $|x + y| = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$, $|x - y| = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$

Nhận xét. Về mặt hình học, quỹ tích điểm Z là miền trong đa giác đều có đỉnh là trung điểm các đoạn nối các đỉnh của hai hình vuông là ảnh của $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ tương ứng qua các phép tịnh tiến theo các véc-tơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ và $\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$ (hình vẽ)

Ví dụ 5.9 (Poland MO 1999)**.** Cho lục giác lồi $ABCDEF$ có $\angle A + \angle C + \angle E = 360°$ và $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Chứng minh rằng

$$AB \cdot FD \cdot EC = BF \cdot DE \cdot CA$$

Lời giải. Gọi w là tọa vị của điểm W trong mặt phẳng phức. Đặt $b-a = x, c-b = y, d-c = z, e-d = t, f-e = u, a-f = v$.

Do $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$ nên $|xzu| = |ytv|$ (1)

Do $\angle A + \angle C + \angle E = 360°$ nên $\arg\left(\frac{x}{-v} \cdot \frac{z}{-y} \cdot \frac{u}{-t}\right) = 0$ điều này có nghĩa là $\frac{x}{-v} \cdot \frac{z}{-y} \cdot \frac{u}{-t}$ là một số thực dương. (2)

Từ (1),(2) suy ra $xzu = -vyt$ hay $xzu + vyt = 0$

Do $x + y + z + t + u + v = 0$ nên

$$
\begin{aligned}
& xt(x+y+z+t+u+v) + (xzu+vyt) = 0 \\
\Longleftrightarrow & x^2t + xty + xtz + xt^2 + xtu + xtv + xzu + vyt = 0 \\
\Longleftrightarrow & (xt^2 + xtz + xtu + xzu) + (x^2t + xty + xtv + vyt) = 0 \\
\Longleftrightarrow & x(t+z)(t+u) + t(x+y)(x+v) = 0
\end{aligned}
$$

Do đó $|x(t+z)(t+u)| = |t(x+y)(x+v)|$ (ĐPCM)

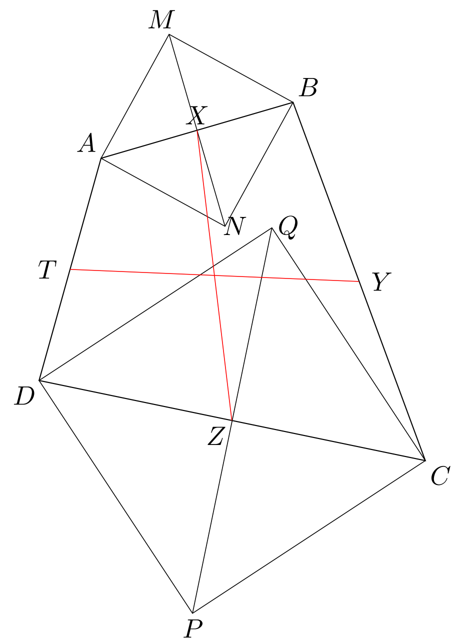
Ví dụ 5.10. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Dựng các hình vuông $AMBN$ và $CPDQ$ cùng hướng. Chứng minh rằng $|MQ^2 - NP^2| = 4S_{ABCD}$

Giải. Coi tứ giác $ABCD$ định hướng âm (hình vẽ). Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$. Gọi w là tọa vị của điểm W trong mặt phẳng phức. Để ý rằng $MP^2 - NQ^2 = (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ})(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NQ})$

Ta có

$$
\begin{aligned}
(p-m)^2 - (q-n)^2 &= 2 < z - x; n - m + p - q > \\
&= 2 < z - x; i(a - b + d - c) > \\
&= -4i \cdot < z - x; t - y >
\end{aligned}
$$

Vậy $|(p-m)^2 - (q-n)^2| = 4S_{ABCD}$ (Do $S_{ABCD} = 2S_{XYZT}$)



Ví dụ 5.11. Xét tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh nào song song. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d theo thứ tự là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng nếu $AG_a = BG_b$ và $CG_c = DG_d$ thì $ABCD$ là một hình thang cân.

Lời giải. Gọi x là tọa vị của điểm X trong mặt phẳng phức và đặt $s = a + b + c + d$. Ta có

$$g_a = \frac{b+c+d}{3} = \frac{s-a}{3}\ ,\ g_b = \frac{s-b}{3}\ ,\ g_c = \frac{s-c}{3}\ ,\ g_d = \frac{s-d}{3}$$

Do $AG_a = BG_b$ nên

$$|a - g_a| = |b - g_b| \Leftrightarrow |4a - s| = |4b - s| \Leftrightarrow < 4a - s; 4a - s > = < 4b - s; 4b - s >$$

Từ đó $2(|a|^2 - |b|^2) = < (a - b); s >$ (1)

Tương tự, từ $CG_c = DG_d$ cũng được $2(|c|^2 - |d|^2) = < (c - d); s >$ (2)

Trừ (1) cho (2) vế đối vế, ta được

$$2(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2) = < (a-b-c+d);(a+b+c+d) >$$

$$\Leftrightarrow 2(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2) = |a+d|^2 - |b+c|^2$$

$$\Leftrightarrow a\overline{a} - a\overline{d} - \overline{a}d + d\overline{d} = b\overline{b} - b\overline{c} - \overline{bc} + c\overline{c}$$

$$\Leftrightarrow |a-d|^2 = |b-c|^2$$

Tức là $AD = BC$ (3)

Cộng (1) với (2) vế đối vế, ta được

$$2(|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2) = < a-b-d+c; a+b+c+d >$$

và tương tự như trên, thu được $AC = BD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.12. Gọi G là trọng tâm tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $GA \perp GD \Longleftrightarrow AD = MN$, trong đó M, N theo thứ tự là trung điểm AD, BC.

Lời giải. Gọi w là tọa vị của điểm W trong mặt phẳng phức. Do $G(g)$ là trọng tâm tứ giác $ABCD$ nên $g = \frac{a+b+c+d}{4}$

Ta có

$$\begin{aligned}
GA \perp GD &\Leftrightarrow < a-g; d-g > = 0\\
&\Leftrightarrow < a - \frac{a+b+c+d}{4}; d - \frac{a+b+c+d}{4} > = 0\\
&\Leftrightarrow < 3a-b-c-d; 3d-b-c-a > = 0\\
&\Leftrightarrow < (a-b-c+d) + 2(a-d); (a-b-c+d) - 2_a - d) > = 0\\
&\Leftrightarrow < a+d-b-c; a+d-b-c > = 4 < a-d; a-d >\\
&\Leftrightarrow \left|\frac{a+d}{2} - \frac{b+c}{2}\right|^2 = |a-d|^2 \Leftrightarrow MN = AD
\end{aligned}$$

Ví dụ 5.13 (St. Petersburg 2000)**.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn ω. Đường thẳng ℓ là tiếp tuyến của ω tại B, K là hình chiếu của trực tâm H của tam giác ABC trên ℓ, và gọi M là trung điểm AC. Chứng minh rằng tam giác BKM cân.

Lời giải. Không mất tổng quát, coi ω là đường tròn đơn vị, $a = x + yi, b = i, c = z + ti$. Khi đó $\ell = \frac{x+z}{2} + i \cdot \frac{y+t}{2}$

Do H là trực tâm của tam giác, nên $h = x + z + (y + t + 1)i$. Khi đó $k = x + z + i$.

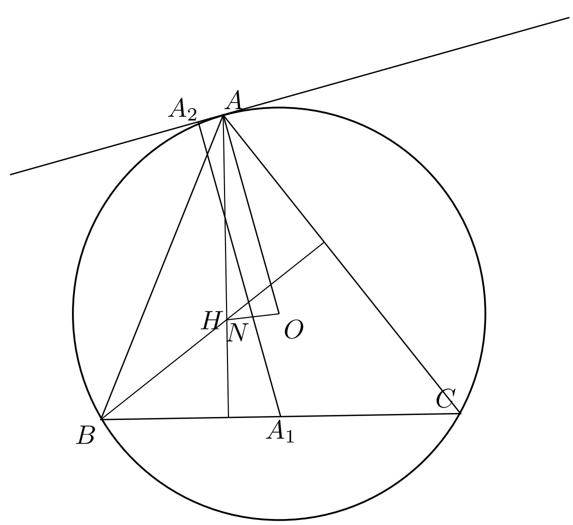
Ta có $|b - \ell| = \sqrt{\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+t-2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+z)^2 + (y+t-2)^2}$ (1)

Và $|k - \ell| = \sqrt{\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-y-t}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+z)^2 + (y+t-2)^2}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ω. Gọi A_1 là trung điểm cạnh BC và A_2 là hình chiếu của A_1 trên tiếp tuyến của ω tại A. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy. Hãy xác định vị trí hình học điểm đồng quy.

Lời giải. Không mất tổng quát, coi ω là đường tròn đơn vị. Gọi w là tọa vị của điểm W trong mặt phẳng phức.



Ta có $a_1 = \frac{b+c}{2}$ và đường thẳng A_1A_2 là đường thẳng đi qua $A_1(a_1)$, song

song với OA, do đó A_1A_2 có phương trình

$$\overline{a}z - a\overline{z} = \overline{a}\cdot\frac{b+c}{2} - a\cdot\overline{\left(\frac{b+c}{2}\right)}$$

Do $a\overline{a} = 1$ nên phương trình được viết lại dưới dạng

$$z - a^2\overline{z} = \left(\frac{b+c}{2} - a^2\cdot\overline{\left(\frac{b+c}{2}\right)}\right)$$

hay

$$z - a^2\overline{z} = \frac{a+b+c}{2} - a^2\overline{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác, thì $n = \frac{a+b+c}{2}$ do đó A_1A_2 đi qua N. Tương tự cũng có B_1B_2, C_1C_2 đi qua N (ĐPCM)

5.3 Chứng minh bất đẳng thức hình học

Việc biểu diễn các điểm trong mặt phẳng bằng các số phức (toạ vị) cho phép chúng ta đưa các bất đẳng thức hình học về các bất đẳng thức về mô-đun số phức. Khi đó, các hằng đẳng thức đại số và bất đẳng thức tam giác đơn giản: |z1 + z2| ? |z1| + |z2|, trong rất nhiều trường hợp, là chìa khoá cho lời giải bài toán.

Ví dụ 5.15 (Bất đẳng thức Ptolemy)**.** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng ta luôn có $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B, C, D theo thứ tự là đỉnh của một tứ giác lồi nội tiếp một đường tròn.

Lời giải. Xét mặt phẳng phức, gọi a, b, c, d là tọa vị của các đỉnh A, B, C, D trong mặt phẳng phức.

Ta có

$$AB.CD + AD.BC = |a-d| \times |d-c| + |d-a| \times |c-b|$$

$$\geq |(a-d)\times(d-c) + (d-a)\times(c-b)| = |(c-a)(d-b)| = AC.BD$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(b-a)(d-c) = t(d-a)(c-b),\ \ t > 0$.

Khi đó

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{1}{t} \times \frac{d-c}{c-b} \Leftrightarrow \arg\left\{\frac{d-a}{b-a}\right\} = \arg\left\{\frac{d-c}{c-b}\right\}$$

hay $\angle DAB = \pi - \angle DCB$ hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 5.16. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý nằm trong mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{MB.MC}{AB.AC} + \frac{MC.MA}{BC.BA} + \frac{MA.MB}{CA.CB} \geq 1\cdot$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có

$$\frac{(m-a)(m-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(m-b)(m-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(m-c)(m-a)}{(b-c)(b-a)} = 1. \qquad (5.1)$$

Chọn hệ tọa độ nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác làm đường tròn đơn vị. Gọi m, a, b, c tương ứng là toạ vị của M, A, B, C tương ứng. Khi đó

$$MA = |m-a|,\ \ MB = |m-b|,\ \ MC = |m-c|,$$

$$AB = |a-b|,\ \ AC = |a-c|,\ \ BC = |b-c|.$$

Áp dụng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối, từ (5.1) suy ra

$$\frac{|m-a| \times |m-b|}{|c-a| \times |c-b|} + \frac{|m-b| \times |m-c|}{|a-b| \times |a-c|} + \frac{|m-c| \times |m-a|}{|b-c| \times |b-a|} \geq 1.$$

và đó chính là điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.17. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ nằm trong mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{MB.MC}{AB.AC} + \frac{MC.MA}{BC.BA} + \frac{MA.MB}{CA.CB} \geq 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có

$$\frac{(m-a)(m-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(m-b)(m-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(m-c)(m-a)}{(b-c)(b-a)}=1. \qquad (5.2)$$

Chọn hệ tọa độ nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác làm đường tròn đơn vị. Gọi m, a, b, c tương ứng là toạ vị của M, A, B, C, tương ứng. Khi đó

$$MA = |m-a|,\ \ MB = |m-b|,\ \ MC = |m-c|$$

$$AB = |a-b|,\ \ BC = |b-c|,\ \ CA = |c-a|.$$

Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối, từ (5.3), suy ra

$$\frac{|m-a||m-b|}{|c-a||c-b|}+\frac{|m-b||m-c|}{|a-b||a-c|}+\frac{|m-c||m-a|}{|b-c||b-a|}\geq 1,$$

và đó chính là điều phải chứng minh.

5.4 Các bài toán hình học chứng minh và tính toán

Số phức có ứng dụng to lớn và hiệu quả trong các bài toán hình học. Bằng cách biểu diễn toạ vị các điểm của một hình hình học bằng các số phức, ta có thể biểu diễn các điều kiện đề bài có bản chất hình học bằng các đẳng thức đại số và chuyển kết luận hình học về các đẳng thức đại số. Như vậy, bài toán chứng minh hình học có thể đưa về việc kiểm tra một hằng đẳng thức, hoặc một hằng đẳng thức có điều kiện.

Ví dụ 5.18. Cho tam giác ABC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, dựng hình vuông $ABDE$. Trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, dựng hình vuông $BCFG$. Chứng minh rằng GA vuông góc với CD và $GA = CD$.

Lời giải. Lấy hệ tọa độ vuông góc có gốc tại B, véctơ $\overline{BC}$ là chiều dương của trục thực. Ký hiệu nhãn của các đỉnh của tam giác ABC tương ứng là $a,\ b = 0,\ c$.

Khi đó tọa độ của G là ic.

Tọa độ của điểm D là $-ia$.

Gọi góc giữa GA và CD ký hiệu là φ thì

$$\varphi = \arg\frac{-ia-c}{a-ic}.$$

Xét $\frac{-ia-c}{a-ic} = \frac{(-ia-c)(a+ic)}{(a-ic)(a+ic)} = \frac{-i(a^2+c^2)}{a^2+c^2} = -i.$

Do $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ nên GA vuông góc với CD. Ngoài ra thì

$$|GA| = |a-ic| = |-ia-c| = |CD|.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 5.4. *Để ý đến biểu thức toạ độ của các phép biến hình, ta thấy phép tịnh tiến tương ứng với phép cộng số phức, phép quay là phép nhân với số phức có mô-đun bằng 1, phép vị tự là phép nhân với số thực, phép vị tự quay là phép nhân với số phức bất kỳ.*

Ví dụ 5.19 (IMO 1986)**.** Trong mặt phẳng cho tam giác $A_1A_2A_3$ và điểm P_0. Với mỗi $s \geq 4$ ta đặt $A_s = A_{s-3}$. Dựng dãy điểm $P_0, P_1, \dots$ sao cho điểm P_{k+1} là ảnh của P_k với phép quay tâm A_{k+1} $(k = 0, 1, \dots)$ một góc $\dfrac{2\pi}{3}$ theo chiều kim đồng hồ. Chứng minh rằng nếu $P_{1986} = P_0$ thì tam giác $A_1A_2A_3$ là tam giác đều.

Lời giải. Với mỗi k $k \geq 0$, tam giác $A_{k+1}P_kP_{k+1}$ cân với $P_kA_{k+1}P_{k+1} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Gọi p_k, a_k là tọa độ của các điểm P_k, A_k tương ứng với $k = 0, 1, \dots$.

Thì $p_{k+1} - a_{k+1} = \alpha(p_k - a_{k+1}$ với $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Cụ thể,

$$p_1 = a_1 + \alpha(P_0 - a_1),\;\; p_2 = a_2 + \alpha(p_1 - a_2),\;\; p_3 = a_3 + \alpha(p_2 - a_3).$$

Do đó

$$p_2 = a_2 - \alpha a_2 + \alpha[a_1 + \alpha(p_0 - a_1)] = (1-\alpha)a_2 + \alpha(1-\alpha)a_1 + \alpha^2 p_0,$$

$p_3 = a_3 - \alpha a_3 + \alpha[(1-\alpha)a_2 + \alpha(1-\alpha)a_1 + \alpha^2 p_0] = (1-\alpha)(a_3 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_1] + \alpha^3 p_0,$

Lại do $\alpha^3 = 1$ nên

$$p_3 = (1-\alpha)(a_3 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_1 + p_0,$$

Nhận xét rằng $p_0.p_3, p_6, \dots$ lập thành cấp số cộng với số hạng đầu tiên p_0 và với công sai $(1-\alpha)(a_3 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_1)$.

Vậy nên nếu $P_{1986} = P_0$ thì

$$3 \times 662(1-\alpha)(a_3 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_1) + p_0 = p_0.$$

Suy ra

$$a_3 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_1 \tag{5.3}$$

Mà $\alpha = \beta^2 = \beta - 1$ và $\alpha^2 = \beta^4 == \beta^3\beta = -\beta$ với $\beta = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Thay vào (5.3) ta có

$$a_3 + (\beta - 1)a_2 + \beta a_1 = 0$$

suy ra

$$a_3 = a_2 + \beta(a_1 - a_2)$$

nên tam giác $A_1A_2A_3$ đều.

Ví dụ 5.20. Cho tam giác ABC trực tâm H, vẽ đường tròn đường kính CH, cắt các cạnh AB và AC tại P và Q. Chứng minh rằng những tiếp tuyến tại điểm P và Q đối với đường tròn cắt nhau tại điểm giữa của AB.

Lời giải. Chọn hệ tọa độ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đơn vị. Do P, Q là chân đường cao của tam giác hạ từ A, B nên

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}(a + b + c - bc\bar{a}) \\ q = \frac{1}{2}(a + b + c - ac\bar{b}) \end{cases}$$

Tâm O của đường tròn đường kính CH là trung điểm CH nên

$$a = \frac{1}{2}(c+h) = \frac{1}{2}(c+a+b+c) = a + \frac{1}{2}(a+b).$$

Gọi M là trung điểm của AB, thì $m = \dfrac{a+b}{2}$.

Ta có

$$\frac{m-p}{0-p} = \frac{\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a+b+c-bc\bar{a})}{c+\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a+b) - bc\bar{a}}$$
$$= \frac{bc\bar{a}-c}{c+bc\bar{a}} = \frac{b\bar{a}-1}{1+b\bar{a}} = \frac{b-a}{b+a}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{m-q}{0-q} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Các tỉ số trên là số ảo. Thật vậy nếu $b = x_0 + iy_0$, $a = x_1 + iy_1$ thì $\frac{a-b}{a+b}$ có phần thực là phân số với tử số bằng 0:

$$(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) + (y_0 - y_1)(y_0 + y_1) = (x_0^2 + y_0^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 0.$$

Chứng tỏ $MP \perp OP$, $MQ \perp OQ$. nghĩa là MP, MQ là tiếp tuyến của đường tròn (đpcm).

Nhận xét rằng, số phức tỏ ra đặc biệt hiệu quả với các bài toán liên quan đến vuông góc.

Ví dụ 5.21. Về phía ngoài của tứ giác lồi $ABCD$, lần lượt dựng các hình vuông nhận AB, BC, CD, DA làm cạnh. Các hình vuông này có tâm là O_1, O_2, O_3, O_4. Chứng minh rằng O_1O_3 vuông góc với O_2O_4 và $O_1O_3 = O_2O_4$.

Lời giải. Giả sử các hình vuông là $ABMM'$, $BCNN'$, $CDPP'$, $DAQQ'$ có tâm là O_1, O_2, O_3, O_4. Ta quy ước chữ cái thường là toạ vị của các đỉnh, chẳng hạn a là toạ vị của điểm A.

Ta nhận thấy rằng, điểm M nhận được từ phép quay tâm B, góc quay $\pi/2$. Từ đó suy ra $m = b + (a-b)i$.

Tương tự

$$n = c + (b - c)i, \;\; p = d + (c - d)i, \;\; q = a + (d - a)i.$$

Do đó

$$o_1 = \frac{a + m}{2} = \frac{a + b + (a - b)i}{2}, \;\; o_1 = \frac{b + c + (b - c)i}{2},$$
$$o_3 = \frac{c + d + (c - d)i}{2}, \;\; o_4 = \frac{d + a + (d - a)i}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} = \frac{(c + d - a - b) + i(c - d - a - b)}{a + d - b - c + i(d - a - b + c)} = -i.$$

Do đó O_1O_3 vuông góc O_2O_4. Hơn nữa,

$$\left|\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2}\right| = |-i| = 1$$

nên $O_1O_3 = O_2O_4$. .

Ví dụ 5.22 (IMO 17, 1975)**.** Về phía ngoài của tam giác ABC, lần lượt dựng các tam giác ABR, BCP, CAQ sao cho $\angle PBC = \angle CAQ = 45^0$, $\angle BCP = \angle QCA = 30^0$, $\angle ABR = \angle RAB = 15^0$. Chứng minh rằng

$$\angle QRP = 90^0, \;\; RQ = RP.$$

Lời giải. Ta xét bài toán trong mặt phẳng phức. Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ điểm P xuống đường thẳng BC. Ta qui ước chữ cái thường là tọa vị của đỉnh tương ứng, chẳng hạn, a là tọa vị của điểm A. Vì $MP = MB$ và $\dfrac{MC}{MP} = \sqrt{3}$ nên

$$\frac{p - m}{b - m} = i \quad \text{và} \quad \frac{c - m}{p - m} = i\sqrt{3}.$$

Do đó

$$p = \frac{c + \sqrt{3}b}{1 + \sqrt{3}} + i\frac{b - c}{1 + \sqrt{3}}.$$

Tương tự ta cũng tính được

$$q = \frac{c + \sqrt{3}a}{1 + \sqrt{3}} + i\frac{a - c}{1 + \sqrt{3}}.$$

Điểm B nhận đường từ điểm A bằng phép quay tâm R, góc quay $q = 150^0$. Do đó

$$b = a\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big).$$

Từ đó, bằng các phép biến đổi đại số, ta được

$$\frac{p}{q} = \Big(\frac{c+\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}} + i\frac{b-c}{1+\sqrt{3}}\Big) : \Big(\frac{c+\sqrt{3}a}{1+\sqrt{3}} + i\frac{a-c}{1+\sqrt{3}}\Big) = i.$$

Suy ra QR vuông góc với PR hay $\angle QRP = 90^0$. Hơn nữa, $|p| = |iq| = |q|$ nên $RQ = RP$.

Bên cạnh các bài toán chứng minh vuông góc, số phức cũng tỏ ra hiệu quả trong các bài toán về thẳng hàng, đồng quy.

Ví dụ 5.23. Cho $ABCD$ và $BNMK$ là hai hình vuông không giao nhau, E là trung điểm của AN. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B xuống đường thẳng CK. Chứng minh rằng các điểm E, F, B thẳng hàng.

Lời giải. Ta xét bài toán trong mặt phẳng phức. Chọn F làm gốc toạ độ và CK, FB lần lượt là trục hoành và trục tung. Gọi c, k, bi lần lượt là toạ vị của các điểm C, K, B với $c, k, b \in \mathbb{R}$. Phép quay tâm B, góc quay $q = 90^0$ biến điểm C thành điểm A, do đó A có toạ vị là $a = b(1-i) + ci$. Tương tự, điểm N là ảnh của điểm K qua phép quay tâm B, góc quay $q = -90^0$ nên điểm N có toạ vị là $n = b(1+i) - ki$. Từ đó suy ra toạ vị điểm E, trung điểm của đoạn thẳng AN là

$$e = \frac{a+n}{2} = b + \frac{c-k}{2}.$$

Từ đó suy ra điểm E nằm trên đường thẳng FB hay các điểm E, F, B thẳng hàng.

Ví dụ 5.24. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC ta lần lượt dựng các tam giác đồng dạng có cùng hướng là ADB, BEC, CFA. Chứng minh rằng các tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Lời giải. Ta qui ước chữ cái thường là tọa vị của đỉnh tương ứng, chẳng hạn, a là tọa vị của điểm A. Vì ADB, BEC, CFA là các tam giác đồng dạng có cùng hướng nên

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = z.$$

Do đó $d = a + (b-a)z,\ \ e = b + (c-b)z,\ \ f = c + (a-c)z$. Suy ra

$$\frac{c+d+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Hay các tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Ví dụ 5.25 (IMO Shortlist)**.** Cho ABC là một tam giác đều có tâm là S và $A'B'O$ là một tam giác đều khác có cùng hướng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $A'B$ và AB'. Chứng minh rằng các tam giác $SB'M$ và $SA'N$ đồng dạng.

Lời giải. Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABO, đặt

$$e = \cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3}\cdot$$

Ta xét bài toán trong mặt phẳng phức. Chọn S là gốc tọa độ và SO là trục thực (trục hoành). Khi đó, toạ độ của các điểm O, A, B là R, Re, Re^2.

Gọi $R + z$ là tọa độ của điểm B', thì $R - ze$ là tọa độ của điểm A'. Suy ra toạ độ của M, N là

$$z_M = \frac{z_B + z_{A'}}{2} = \frac{Re^2 + R - ze}{2} = \frac{R(e^2+1) - ze}{2} = \frac{-Re - ze}{2} = \frac{-e(R+z)}{2},$$

$$z_N = \frac{z_A + z_{B'}}{2} = \frac{Re + R - z}{2} = \frac{R(e+1) + z}{2} = \frac{-Re^2 + z}{2} = \frac{z - \frac{R}{e}}{2} = \frac{R - ze}{-2e}.$$

Ta có

$$\frac{z_{B'} - z_S}{z_M - z_S} = \frac{\overline{z_{A'}} - \overline{z_S}}{\overline{z_N} - \overline{z_S}} \Leftrightarrow \frac{R+z}{\frac{-e(R+z)}{2}} = \frac{\overline{R - ze}}{\overline{\frac{R-ze}{-2e}}} \Leftrightarrow e\bar{e} = 1 \Leftrightarrow |e|^2 = 1.$$

Từ đó suy ra các tam giác $SB'M$ và $SA'N$ đồng dạng.

5.4.1 Số phức và đa giác đều

Căn bậc n của đơn vị là các số phức có biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là đỉnh của một n-giác đều. Tính chất đơn giản này có thể sử dụng để giải nhiều bài toán liên quan đến n- giác đều.

Ví dụ 5.26 (Romania 1997)**.** Cho $n > 2$ là một số nguyên và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm số sao cho với mọi n-giác đều $A_1A_2\ldots A_n$, ta có

$$f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) = 0.$$

Chứng minh rằng $f(A) = 0$ với mọi A thuộc $\mathbb{R}^2$.

Lời giải. Ta đồng nhất $\mathbb{R}^2$ với mặt phẳng phức và đặt $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. Khi đó điều kiện đề bài chính là ứng với mọi số phức z và số thực t ta đều có

$$\sum_{j=1}^{n}(z + t\varepsilon)^j = 0.$$

Từ đó, như những trường hợp riêng, ta có với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n}(z - \varepsilon^k + t\varepsilon)^j = 0.$$

Cộng các đẳng thức này lại, ta được

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(z - (1 - \varepsilon^m)\varepsilon)^k = 0.$$

Với $m = n$ tổng trong bằng $nf(z)$; với các giá trị m khác, tổng trong lại chạy qua đỉnh của n-giác đều, do đó bằng 0. Vậy $f(z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$.

Ví dụ 5.27 (Balkan MO 2001)**.** Một ngũ giác lồi có các góc bằng nhau và có các cạnh là các số hữu tỷ. Chứng minh rằng ngũ giác đó đều.

Lời giải. Ta dùng số phức để giải. Giả sử đỉnh của đa giác lồi là các số phức $v_1, v_2, \ldots, v_5$. Xét $z_1 = v_2 - v_1,\ z_2 = v_3 - v_2,\ z_3 = v_4 - v_3,\ z_4 = v_5 - v_4,\ z_5 = v_1 - v_5$.

Khi đó ta có $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$.

Đặt $w_j = z_j/z_1$. Ta có $w_1 = 1$ và $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 0$. Vì ngũ giác lồi có các góc bằng nhau, ta có (đánh số lại nếu cần),

$$w_2 = a_2\omega,\ w_3 = a_3\omega^2,\ w_4 = a_4\omega^3,\ w_5 = a_5\omega^4,$$

trong đó $\omega = e^{2pi/5}$ và mọi a_j là các số hữu tỷ. Như vậy ω là nghiệm của đa thức với hệ số hữu tỷ

$$1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + a_4\omega^3 + a_5\omega^4 = 0.$$

Nhưng đa thức tối tiểu của ω trên $\mathbb{Q}[x]$ là $1 + t + t^2 + t^3 + t^4$, tức $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$. Từ đó suy ra $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$, tức là $|w_j| = 1$, suy ra $|z_j| = |z_1|$, nghĩa là ngũ giác là đều.

5.4.2 Đẳng thức lượng giác trong tam giác

Ví dụ 5.28. Cho tam giác ABC có $A = \pi/7,\ B = 2\pi/7,\ C = 4\pi/7$. Chứng minh rằng

$$OH = OI_a = R\sqrt{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$a = 2R\sin\frac{\pi}{7},\ \ b = 2R\sin\frac{2\pi}{7},\ \ c = 2R\sin\frac{4\pi}{7}.$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) &= 9R^2 - 4R^2\Big(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}\Big)\\ &9R^2 - 4R^2\Big[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\Big)\Big]\\ &9R^2 - 4R^2\Big[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Đặt $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$, ta được

$$z + z^3 + z^5 = \frac{z^7 - z}{z^2 - 1} = \frac{-1 - z}{z^2 - 1} = \frac{1}{1 - z}.$$

Lấy phần thực hai vế ta được

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}\cdot$$

Vậy $OH^2 = 9R^2 - 7R^2$ và $OH = R\sqrt{2}$.

Ví dụ 5.29. Cho tam giác ABC có $A = \pi/7,\ B = 2\pi/7,\ C = 4\pi/7$. Chứng minh rằng

$$R = 2r_a.$$

Lời giải. Ta có

$$OI_a^2 = R^2 + \frac{abc}{b+c-a} = R^2 + 4R^2\frac{\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}\cdot$$

Do

$$\begin{aligned}\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7} &= \sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\Big(\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}\Big)\\ &= 2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = 2\sin\frac{4\pi}{7}\Big(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}\Big)\\ &= 4\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\end{aligned}$$

Vậy nên $OI_a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ suy ra $OI_a = R\sqrt{2}$.

Ví dụ 5.30. Cho tam giác ABC có $A = \pi/7,\ B = 2\pi/7,\ C = 4\pi/7$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 = 7R^2.$$

Lời giải. Ta có

$$a^2+b^2+c^2 = 4R^2\Big(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}\Big) = 4R^2\frac{7}{4} = 7R^2\cdot$$

5.5 Bảng các công thức cơ bản ứng dụng số phức vào giải toán hình học

Sau đây là một bảng (liệt kê) các công thức cơ bản cần dùng đến trong việc giải toán Hình học phẳng bằng số phức mà chúng ta sẽ gặp sau này. Đó là những công thức để tính độ dài, tính độ lớn của góc, tính diện tích, tính tỷ số đơn (của ba điểm), tính tỷ số kép (của bốn điểm); thiết lập điều kiện song song, vuông góc của các đường thẳng, điều kiện (dấu hiệu) đồng dạng của hai tam giác, điều kiện liên thuộc, phương trình đường tròn...

1. $\overline{OA}^2 = a\overline{a}, \overline{AB}^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$

2. $C \in (AB) \Leftrightarrow \overline{AB}\cdot\overline{AC} = (b-a)(\overline{c}-\overline{a}) \Leftrightarrow (abc) = \dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} = \overline{(abc)}$ (tỷ số đơn của ba điểm $A(a), B(b), C(c)$ là số thực)

3. Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng hay đồng viên cần và đủ là tỷ số kép (a, b, c, d) là thực

$$(a,b,c,d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} : \frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{b}} = \overline{(a,b,c,d)}$$

   Cụ thể

   A, B, C, D thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$; $\dfrac{c-a}{c-b}$ và $\dfrac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}$

   A, B, C, D đồng viên cần và đủ là $\dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}$ nhưng $\dfrac{c-a}{c-b}$ và $\dfrac{d-a}{d-b} \not\in \mathbb{R}$

4. Bốn điểm $A(a), B(b), C(c), D(d)$ không thẳng hàng. Khi đó

$$AB \parallel CD \Longleftrightarrow \frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$$

   và

$$AB \perp CD \Longleftrightarrow \frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \text{ tức là } \operatorname{Re}\left(\frac{b-a}{d-c}\right) = 0$$

5. Tam giác ABC đều, có hướng thuận (định hướng dương) khi và chỉ khi

$$a + b\omega + c\omega^2 = 0$$

   trong đó $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$

(Hay đặc biệt, có thể xảy ra $A \equiv B \equiv C$)

Tam giác ABC đều, có hướng nghịch (định hướng âm) khi và chỉ khi

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0$$

trong đó $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$

6. Hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ đồng dạng cùng hướng khi và chỉ khi

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

Hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ đồng dạng ngược hướng khi và chỉ khi

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{\overline{b_2} - \overline{a_2}}{\overline{c_2} - \overline{a_2}} = \beta \quad (\beta \in \mathbb{C})$$

7. Diện tích của tam giác ABC định hướng, với các đỉnh $A(a), B(b), C(c)$, được tính theo công thức

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$$

Do đó $A(a), B(b), C(c)$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$

8. Phương trình đường thẳng $\alpha \cdot z + \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \beta = 0$ trong đó $\alpha \in \mathbb{C}^\star, \beta \in \mathbb{R}$

9. Khoảng cách từ điểm $M(z_0)$ đến đường thẳng $\Delta : \alpha \cdot z + \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \beta = 0$ bằng

$$\frac{|\alpha \cdot z_0 + \overline{\alpha} \cdot \overline{z_0} + \beta|}{2\sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha}}}$$

10. Phương trình đường tròn $z \cdot \overline{z} + \alpha \cdot z + \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \beta$ trong đó $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$

11. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(a), B(b), C(c)$ phân biệt, không thẳng hàng có dạng

$$\frac{z - a}{b - a} : \frac{z - c}{b - c} = \frac{\overline{z} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}} : \frac{\overline{z} - \overline{c}}{\overline{b} - \overline{c}}$$

12. $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \dfrac{(b-a)(\overline{d}-\overline{c})+(\overline{b}-\overline{a})(d-c)}{2|b-a|\cdot|d-c|}$

    Từ đó $AB \perp CD \iff (b-a)(\overline{d}-\overline{c})+(\overline{b}-\overline{a})(d-c) = 0$

13. $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \dfrac{-(b-a)(\overline{d}-\overline{c})+(\overline{b}-\overline{a})(d-c)}{2i|b-a|\cdot|d-c|}$

14. AB và CD là hai dây cung của đường tròn $z\cdot\overline{z} = R^2$. Khi đó

    $$AB \parallel CD \iff ab = cd \text{ và } AB \perp CD \iff ab+cd = 0 \quad (a\cdot\overline{a} = b\cdot\overline{b} = c\cdot\overline{c} = d\cdot\overline{d} = R^2)$$

15. AB, CD là hai dây cung của đường tròn đơn vị $z\cdot\overline{z} = 1$, $(AB)\cap(CD) = S$. Khi đó

    $$\overline{s} = \frac{a+b-(c+d)}{ab-cd} \quad (a\cdot\overline{a} = b\cdot\overline{b} = c\cdot\overline{c} = d\cdot\overline{d} = 1)$$

16. Nếu C' là chân đường cao, hạ từ đỉnh C của tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đơn vị $z\cdot\overline{z} = 1$, thì

    $$c' = \frac{1}{2}\cdot\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right)$$

    với $a\cdot\overline{a} = b\cdot\overline{b} = c\cdot\overline{c} = d\cdot\overline{d} = 1$

17. AB là dây cung của đường tròn đơn vị $z\cdot\overline{z} = 1$. Khi đó

    $$Z \in [AB] \text{ hay } Z \in (AB) \iff z + ab\overline{z} = a+b$$

18. C là giao điểm các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn đơn vị $z\cdot\overline{z} = 1$. Khi đó

    $$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

19. AB là dây cung của đường tròn đơn vị $z\cdot\overline{z} = 1$. Khi đó với mỗi điểm M không nằm trên đường tròn, hình chiếu (vuông góc) của M trên đường thẳng AB được xác định bởi

    $$h = \frac{1}{2}(m - ab\overline{m} + a + b)$$

20. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đơn vị $z \cdot \overline{z} = 1$, thế thì diện tích S của nó được xác định bởi

$$S = \frac{i}{4} \cdot \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

5.6 Bài tập

Bài 5.1. Cho $ABCD$ là một hình vuông cố định. Xét tất cả các hình vuông $PQRS$ sao cho P, R nằm trên hai cạnh khác nhau và Q nằm trên một đường chéo của hình vuông $ABCD$. Tìm tất cả các vị trí có thể được của điểm S.

Bài 5.2 (Colombia MO 1997)**.** Xét điểm P nằm bên trong hoặc trên biên của hình vuông $ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất có thể được của

$$f(P) = \angle ABP + \angle BCP + \angle CDP + \angle DAP$$

Bài 5.3 (Greece MO 1997)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tâm các hình vuông với các cạnh AB, BC, CD, DA dựng ra phía ngoài tứ giác. Chứng minh rằng

- Trung điểm các đường chéo của hai tứ giác $ABCD, EFGH$ là đỉnh của một hình vuông.

- EF và GH vuông góc với nhau và bằng nhau

Bài 5.4. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC, dựng ra phía ngoài ba tam giác đồng dạng ABC_1, A_1BC, AB_1C. Chứng minh rằng trọng tâm hai tam giác $ABC, A_1B_1C_1$ trùng nhau. Hỏi kết luận của bài toán còn đúng không nếu các tam giác ABC_1, A_1BC, AB_1C dựng vào phía trong của tam giác ABC?

Bài 5.5. Trên đường tròn ω cho trước hai điểm A, B cố định và một điểm M di động trên ω. Trên tia MA lấy điểm P sao cho $MP = MB$. Tìm quỹ tích điểm P.

Bài 5.6. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Lấy các cạnh AB, CD làm đáy, dựng ra ngoài các tam giác vuông cân ABX, CDY. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}XY \leq AC + BD$$

Bài 5.7. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đơn vị. Biết rằng tồn tại $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ sao cho $a + b\sin\alpha + c\cos\alpha = 0$ (ở đây a, b, c là tọa vị của các đỉnh A, B, C), chứng minh rằng $1 < S_{ABC} \leq \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Bài 5.8 (Romanian 2003)**.** Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA của lục giác $ABCDEF$. Chứng minh rằng $RN^2 = MQ^2 + PS^2 \Leftrightarrow MQ \perp PS$

Bài 5.9 (Romanian 1994)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng

$$AB \perp CD \Leftrightarrow BC^2 + DA^2 = 2(EG^2 + FH^2)$$

Bài 5.10. Xét điểm M trên đường trong ngoại tiếp của tam giác ABC, không trùng với các đỉnh của tam giác. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của các tam giác $MBC.MCA, MAB$ là đỉnh của một tam giác đồng dạng với tam giác ABC.

Bài 5.11. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi đường tròn Euler tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp.

Bài 5.12. Cho tam giác ABC. Gọi ω_a, ω_bvà ω_c theo thứ tự là các đường tròn nhận các đường trung tuyến kẻ từ A, B và C làm đường kính. Chứng minh rằng, nếu hai trong ba đường tròn này tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, thì đường tròn thứ ba cũng tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của tam giác.

Bài 5.13 (Romanian 2008)**.**

Bài 5.14. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi E_a, E_b, E_c, E_d theo thứ tự là tâm đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AE_a, BE_b, CE_c, DE_d đồng quy. Hãy xác định vị trí hình học điểm đồng quy.

Bài 5.15. Các cạnh AB, BC và CA của tam giác ABC được chia thành ba đoạn bằng nhau bởi các điểm $M, N; P, Q$ và R, S. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng các tam giác đều MND, PQE, RSF. Chứng minh rằng DEF là tam giác đều.

Bài 5.16. Về phía ngoài của tam giác ABC ta dựng các tam giác hình vuông $ABEF$ và $ADGH$ lần lượt có tâm là O và Q. M là trung điểm của đoạn BD. Chứng minh rằng OMQ là tam giác vuông cân tại M.

Bài 5.17 (IMO 1982 shortlist)**.** Về phía ngoài của tứ giác lồi $ABCD$, ta dựng các tam giác đều ABM, CDP; về phía trong của tứ giác, ta dựng các tam giác đều BCN, ADQ. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài 5.18. Cho ABC là tam giác nhọn. Trên cùng một phía của đường thẳng AC chứa điểm B, ta dựng các tam giác vuông cân DAB, BCE, AFC tại các đỉnh A, C, F. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Bài 5.19. Gọi A, B, C là các điểm đối xứng của A, B, C tương ứng qua các cạnh BC, CA, AB. Tìm điều kiện cần và đủ giữa các góc A, B, C của tam giác ABC sao cho

i) AB, BC, CA đồng quy tại một điểm.

ii) A, B, C thẳng hàng

Bài 5.20. Cho A, B, C là ba đỉnh liên tiếp của một n-giác đều, M là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp n-giác đều sao cho B và M nằm khác phía đối với AC. Chứng minh rằng

$$MA + MC = 2MB\cos\frac{\pi}{n}\cdot$$

Bài 5.21. Cho P là một điểm bất kỳ nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho đại lượng

$$PA^n + PB^n + PC^n + PD^n$$

không phụ thuộc vào vị trí của P.

Bài 5.22. Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. M là một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng

a) $a.MA^2 + b.MB^2 + cMC^2 \geq abc$

b) $a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB \geq abc.$

Bài 5.23 (China TST 1998)**.** Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. P là một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng

$$a.PB.PC + b.PC.PA + c.PA.PB = abc$$

khi và chỉ khi P trùng với trực tâm của tam giác ABC.

Bài 5.24. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R.$$

Chương 6

Khảo sát dãy số và phương trình sai phân

6.1 Một số khái niệm cơ bản và tính chất của sai phân

Định nghĩa 6.1. *Giả sử* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *là một hàm số cho trước và* $h = constant \neq 0$. *Ta gọi sai phân cấp 1 của* f *là đại lượng*

$$\Delta f(x) = f(x+h) + f(x).$$

Giả sử đã định nghĩa được sai phân cấp $n-1$ *của* f. *Khi đó, sai phân cấp* n *của* f *được định nghĩa như sau:*

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)](n \geqslant 1), \Delta^0 f(x) := f(x).$$

Chú ý 6.1. *Mặc dù* h *có thể là một hằng số bất kì nhưng giá trị thường dùng là* $h = 1$. *Một trong những lí do dẫn đến chỉ xét* $h = 1$ *là: việc tính toán sai phân hữu hạn rất cần thiết cho việc tính tổng của chuỗi. Dù ẩn hay hiện, mỗi số hạng của chuỗi là một hàm số biến số nguyên xác định vị trí của số hạng trong chuỗi vì vậy biến độc lập được giả sử là giá trị nguyên sai khác một đơn vị. Với* $h = 1$ *ta có*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Định nghĩa 6.2. *Biểu thức giai thừa: Cho hàm số $f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ta gọi biểu thức*

$$f_x f_{x-1} f_{x-2} \cdots f_{x-n+1}$$

là biểu thức giai thừa.

Xét dạng giai thừa quan trọng sau:

$$(a+bx)^{(n)} = (a+bx)(a+b\overline{x-1})\cdots(a+b\overline{x-n+1}).$$

Đặc biệt, khi $a=0$, $b=1$ ta có

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Định nghĩa 6.3. *Giả sử hàm $y=f(x)$ cho dưới dạng bảng $y_i = f(x_i)$ tại các mốc x_i cách đều: $x_{i+1}-x_i = h = constant (i \geqslant 0)$. Khi đó sai phân của dãy y_i được xác định như sau:*

$$\begin{aligned}
\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\
\Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \cdots \\
\Delta^n y_i &= \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.
\end{aligned}$$

Ví dụ 6.1. $\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$;

$\Delta \lg x = \lg(x+1) - \lg x = \lg\Big(\frac{x+1}{x}\Big) = \lg\Big(1+\frac{1}{x}\Big)$;

$\Delta \sin x = \sin(x+1) - \sin x = 2\sin\frac{1}{2}\cos(x+\frac{1}{2})$.

$\Delta a^x = (a-1)a^x$

$\Delta \sin(a+bx) = 2\sin\frac{b}{2}\cos\big(a+\frac{b}{2}+bx\big)$

$\Delta \cos(a+bx) = -2\sin\frac{b}{2}\sin\big(a+\frac{b}{2}+bx\big)$

$\Delta x! = xx!$

$\Delta(a+bx)^{(n)} = bn(a+bx)^{(n-1)}$, *đặc biệt* $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$.

$\Delta^n \sin(a+bx) = \Big(2\sin\frac{b}{2}\Big)^n \sin\Big(a+bx+\frac{n(b+\pi)}{2}\Big)$

$\Delta^n \cos(a+bx) = \Big(2\sin\frac{b}{2}\Big)^n \cos\Big(a+bx+\frac{n(b+\pi)}{2}\Big)$

Định nghĩa 6.4. *Ta gọi* $Ef_x = f_{x+1}$ *là toán tử dịch chuyển.*

Dễ thấy

$$E^m f_x = E(E^{m-1})f_x = f_{x+m}.$$

Gọi I là toán tử đồng nhất, tức là $If_x = f_x$, ta có $\Delta = E - I$ và với số nguyên dương m ta có

$$\Delta^m f_x = (E-I)^m f_x = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i E^{m-i} f_x, E^0 = I.$$

Định lý 6.1. *a. Sai phân của hằng số bằng* 0.

b. Sai phân mọi cấp là toán tử tuyến tính.

c. $\Delta^n(x^n) = n!h^n; \Delta^m(x^n) - 0 (m > n)$ n, m *nguyên dương.*

Hệ quả 6.1. *a.* $\Delta^n ax^n = a(n!)$

b. $\Delta^{n+1}x^n = 0.$

c. Nếu f_x *là một đa thức bậc* n *của* x *có dạng*

$$f_x = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n$$

thì

$$\Delta^n f_x = A_0(n!).$$

Định lý 6.2. *a. Nếu* $P(x)$ *là đa thức bậc* n *thì theo công thức Taylor*

$$\Delta P := P(x+h) - P(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{h^i}{i!}P^{(i)}(x).$$

b. $f(x+nh) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Delta^i f(x).$

c. $\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i f(x+(n-i)h).$

d. Giả sử $f \in C^n[a,b]$ *và* $(x, x+nh) \subset [a,b]$. *Khi đó*

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x+\theta nh), \quad \theta \in (0,1).$$

Hệ quả 6.2. *Nếu $f \in C^n[a,b]$ thì khi h đủ nhỏ*

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

Định lý 6.3. *a.* $\Delta f_x g_x = f_x \Delta g_x + g_{x+1}\Delta f_x$ *(Công thức sai phân từng phần).*

b. $\sum\limits_{k=m}^{n} \Delta f_x = f_{n+1} - f_m, \quad (m < n).$

Định lý 6.4. *(Newton) Nếu f_x là một đa thức bậc n của x thì nó có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f_x = f_0 + x^{(1.8)}\Delta f_0 + \frac{x^{(1.10)}}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{x^{(3)}}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{x^{(n)}}{n!}\Delta^n f_0.$$

Chứng minh: Theo định nghĩa của biểu thức giai thừa, ta có thể giả sử

$$f_x = a_0 + a_1 x^{(1.8)} + a_2 x^{(1.10)} + \cdots + a_n x^{(n)}.$$

Lần lượt lấy sai phân các cấp của f_x, ta được

$$\begin{aligned}
\Delta f_x &= a_1 + 2a_2 x^{(1.8)} + 3a_3 x^{(1.10)} + \cdots + n a_n x^{(n-1)} \\
\Delta^2 f_x &= 2\cdot 1\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3 x^{(1.8)} + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{(n-2)} \\
\Delta^3 f_x &= 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_n x^{(n-3)} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta^n f_x &= a_n(n!).
\end{aligned}$$

Cho $x = 0$ trong các đồng nhất thức trên ta được

$$a_0 = f_0, a_1 = \Delta f_0, a_2 = \frac{\Delta^2 f_0}{2!}, \cdots, a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n!}.$$

Ví dụ 6.2. *Giả sử f_x là một đa thức. Tìm số hạng thứ chín f_8 của dãy sau:* $f_0 = 1, f_1 = 4, f_2 = 10, f_3 = 20, f_4 = 35, f_5 = 56.$

$$f_8 = f_0 + 8\Delta f_0 + \frac{8\cdot 7}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}\Delta^3 f_0 = 1 + 8\cdot 3 + 28\cdot 3 + 56\cdot 1 = 165.$$

Ví dụ 6.3. *Tìm số hạng tổng quát của f_x biết: $f_0 = 1, f_1 = 4, f_2 = 10, f_3 = 20, f_4 = 35, f_5 = 56$.*

$$f_x = f_0 + x^{(1.8)}\Delta f_0 + \frac{x^{(1.10)}}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{x^{(3)}}{3!}\Delta^3 f_0 = \frac{1}{6}[x^3 + 6x^2 + 11x + 6].$$

Ví dụ 6.4. *Biểu diễn $f_x = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ dưới dạng chuỗi giai thừa.*

$$f_x = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 2x^{(3)} + 3x^{(1.10)} + 2x^{(1.8)} - 10.$$

Chú ý 6.2. *Ta có thể dùng Định lý phép chia có dư để tính các hệ số trong biểu diễn đa thức thành chuỗi giai thừa nhanh hơn cách dùng bảng sai phân như trên. Thật vậy, giả sử $P_n(x)$ là đa thức bậc n dạng*

$$P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n. \tag{1.1}$$

Theo Định lý Newton ta có thể biểu diễn $P_n(x)$ dưới dạng

$$\begin{aligned} P_n(x) &= A_0 + A_1x + A_2x(x-1) + A_3x(x-1)(x-2) \\ &+ \cdots + A_nx(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ta cần xác định các $A_i, i = 0, 1, 2, \cdots n$. Chia $P_n(x)$ trong (1.2) cho x. Phần dư là $A_0 = P_n(0) = b_n$ và thương là

$$P_{n-1}(x) = A_1 + A_2(x-1) + A_3(x-1)(x-2) + \cdots + A_n(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Chia $P_{n-1}(x)$ cho $(x-1)$. Phần dư là $P_{n-1}(1.8) = A_1$, và thương là

$$P_{n-2}(x) = A_2 + A_3(x-2) + \cdots + A_n(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1).$$

Tiếp tục quá trình cuối cùng ta nhận được

$$P_1(x) = A_{n-1} + A_n(x-n+1).$$

Chia $P_1(x)$ cho $(x-n+1)$ ta nhận được phần dư $A_{n-1} = P_1(n-1)$ và thương A_n. Rõ ràng $A_n = b_0$ hệ số của x^n trong $P_n(x)$. Cân bằng hệ số trong hai dạng của $P_n(x)$ ta tìm được các A_n.

Ví dụ 6.5. *Biểu diễn* $f_x = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ *dưới dạng chuỗi giai thừa.*

$$f_x = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = Ax(x-1)(x-2) + Bx(x-1) + Cx + D.$$

Rõ ràng $D = -10$ *và* $A = 2$. *Chia* f_x *cho* x, *thương là* $2x^2 - 3x + 3$, *dư là* $-10 = D$. *Chia* $2x^2 - 3x + 3$ *cho* $(x-1)$, *thương là* $2x - 1$, *dư là* $C = 2$. *Chia* $2x - 1$ *cho* $(x-2)$ *thương là 2, dư là* $B = 3$. *Vậy*

$$f_x = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 2x^{(3)} + 3x^{(1.10)} + 2x^{(1.8)} - 10.$$

Nhận xét 6.1. *Trong nhiều bài toán có sử dụng sai phân, ta thường phải khai triển biểu thức giai thừa* $x^{(n)}$ *thành đa thức của* x *hay khai triển đơn thức* x^n *thành chuỗi các biểu thức giai thừa dạng* $x^{(i)}$. *Các số Stirling loại 1 và loại 2 cho ta các hệ số trong các khai triển trên.*

Các số Stirling

Từ định nghĩa biểu thức giai thừa, ta có các công thức sau

a. $x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$

b. $x^{(n)} = x^{(m)}(x-m)^{(n-m)}, \quad m < n$

c. $x^{(n)} = S_1^n x + S_2^n x^2 + \cdots + S_n^n x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i^n x^i$

d. $x^{(n+1)} = x^{(n)}(x-n) = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i^n x^i (x-n)$

e. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} S_i^{n+1} x^i = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i^n x^i (x-n)$

Do đó ta nhận được

$$S_i^{n+1} = S_{i-1}^n - nS_i^n.$$

Rõ ràng, $S_n^n = 1, \quad S_0^n = 0, \quad S_i^n = 0, i > n$. Ta gọi các số S_i^n xác định theo công thức trên là các số Stirling loại 1. Các số này được dùng để biểu diễn hệ số của x^n trong khai triển $x^{(n)}$ thành đa thức.

n	S_1^n	S_2^n	S_3^n	S_4^n	S_5^n	S_6^n	S_7^n
1	1						
2	-1	1					
3	2	-3	1				
4	-6	11	-6	1			
5	24	-50	35	-10	1		
6	-120	274	-225	85	-15	1	
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

.

Ta có

$$x^{(n)} = S_1^n x + S_2^n x^2 + \cdots + S_n^n x^n = \sum_{i=1}^{n} S_i^n x^i.$$

Cho $x = 1$ ta được

$$\sum_{i=1}^{n} S_i^n = 0.$$

Do đó, tổng các phần tử trên một hàng bằng 0.

Ví dụ 6.6. *Dùng bảng trên viết biểu thức giai thừa $x^{(6)}$ dưới dạng đa thức. Ta có*

$$x^{(6)} = x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x.$$

Số Stirling loại 2:

Các số Stirling loại 2 được dùng để biểu diễn hệ số của $x^{(n)}$ trong khai triển x^n thành chuỗi giai thừa.

$$\begin{aligned}
x &= x^{(1.8)} = S_1^1 x^{(1.8)} \text{ do đó } S_1^1 = 1 \\
x^2 &= x^{(1.8)} + x^{(1.10)} = S_1^2 x^{(1.8)} + S_2^2 x^{(1.10)} \text{ do đó } S_1^2 = 1, S_2^2 = 1 \\
x^3 &= x^{(1.8)} + 3x^{(1.10)} + x^{(3)} = S_1^3 x^{(1.8)} + S_2^3 x^{(1.10)} + S_3^3 x^{(3)} \text{ do đó } S_1^3 = 1, S_2^3 = 3, S_3^3 = 1.
\end{aligned}$$

Tổng quát,

$$x^n = S_1^n x^{(1.8)} + S_2^n x^{(1.10)} + S_3^n x^{(3)} + \cdots + S_{i-1}^n x^{(i-1)} + S_i^n x^{(i)} + \cdots + S_n^n x^{(n)} \quad (1.3)$$

hay

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} S_i^n x^{(i)}.$$

Theo công thức Newton,

$$f_x = \sum_{i=0}^{n} x^{(i)} \frac{\Delta^i f_0}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \Big[\frac{\Delta^i f_x}{i!}\Big]_{x=0}.$$

Thay $f_x = x^n$ ta được

$$x^n = x^{(1.8)}[\Delta x^n]_{x=0} + x^{(1.10)}[\frac{\Delta^2 x^n}{2!}]_{x=0} + \cdots + x^{(n)}\Big[\frac{\Delta^n x^n}{n!}\Big]_{x=0}$$

hay

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} \Big[\frac{\Delta^i x^n}{i!}\Big]_{x=0}.$$

Ta lại có

$$S_i^n = \frac{\Delta^i x^n}{i!}\Big]_{x=0} \tag{1.4}$$

và

$$x^{(i+1)} + ix^{(i)} = x \cdot x^{(i)}. \tag{1.5}$$

Theo định nghĩa

$$x^{n+1} = S_1^{n+1} x^{(1.8)} + S_2^{n+1} x^{(1.10)} + \cdots + S_i^{n+1} x^{(i)} + \cdots + S_{n+1}^{n+1} x^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} S_i^{n+1} x^{(i)}$$
(1.6).

Từ (1.3) ta có

$$x^{n+1} = S_1^n xx^{(1.8)} + S_2^n xx^{(1.10)} + \cdots + S_{i-1}^n xx^{(i-1)} + S_i^n xx^{(i)} + \cdots + S_n^n xx^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} S_i^n xx^{(i)}.$$
(1.7)

Hệ số của $x^{(i)}$ trong (1.6) là S_i^{n+1}, hệ số của $x^{(i)}$ trong (1.7) là $S_{i-1}^n + iS_i^n$. Vậy ta có

$$S_i^{n+1} = S_{i-1}^n + iS_i^n.$$

Ví dụ 6.7.

$$S_3^5 = 3S_3^4 + S_2^4 = 3(6) + 7 = 25; S_4^5 = 4S_4^4 + S_3^4 = 4(1.8) + 6 = 10.$$

n	S_1^n	S_2^n	S_3^n	S_4^n	S_5^n	S_6^n	S_7^n
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

.

Ví dụ 6.8. *Dùng bảng trên khai triển x^6 thành chuỗi các biểu thức giai thừa. Ta có*

$$x^6 = x^{(6)} + 31x^{(5)} + 90x^{(4)} + 65x^{(3)} + 15x^{(1.10)} + x^{(1.8)}.$$

6.2 Tính tổng bằng phương pháp sai phân

Trước tiên ta xét bài toán sau: Xác định g_x sao cho $\Delta g_x = f_x$, với f_x là hàm đã biết. Nhận xét rằng, nếu g_x là một lời giải của bài toán trên thì $g_x + C$ với C là hằng số bất kì cũng là lời giải của nó. Trong tài liệu này ta sẽ kí hiệu

$$g_x + C = \Delta^{-1} f_x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được các tính chất sau đây của Δ^{-1}.

Định lý 6.5. *a.* $\Delta^{-1} 0 = C, \quad C \in \mathbb{R}$,

b. $\Delta^{-1}(f_x \pm g_x) = \Delta^{-1} f_x \pm \Delta^{-1} g_x + C, \quad C \in \mathbb{R}$,

c. $\Delta^{-1} k f_x = k\Delta^{-1} f_x + C, \quad k, C \in \mathbb{R}$,

d. $\Delta^{-1}[f_x \Delta g_x] = f_x g_x - \Delta^{-1}[g_{x+1} \Delta f_x] + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 6.9. *Ta có* $\Delta\left[\frac{x^{(3)}}{3} + C\right] = x^{(1.10)}$. *Do đó*

$$\Delta^{-1} x^{(1.10)} = \frac{x^{(3)}}{3} + C$$

Ví dụ 6.10. *a.* $\Delta^{-1}a^x = \frac{a^x}{a-1} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

b. $\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

c. $\Delta^{-1}(a+bx)^{(n)} = \frac{(a+bx)^{(n+1)}}{b(n+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

d. $\Delta^{-1}\sin(a+bx) = \frac{-1}{2\sin\frac{b}{2}}\cos\big(a - \frac{b}{2} + bx\big) + C, \quad C \in \mathbb{R},$

e. $\Delta^{-1}\cos(a+bx) = \frac{1}{2\sin\frac{b}{2}}\sin\big(a - \frac{b}{2} + bx\big) + C, \quad C \in \mathbb{R},$

f. $\Delta^{-1}(xx!) = x! + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 6.11. *Tính a.* $\Delta^{-1}3^x$, *b.* $\Delta^{-1}(x^3 - 2x^2 + 7x - 12)$, *c.* $\Delta^{-1}[x(x+1)(x+2)]$.

a. $\Delta^{-1}3^x = \frac{3^x}{3-1} + C = \frac{3^x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

b. $x^3 - 2x^2 + 7x - 12 \equiv x^{(3)} + x^{(1.10)} + 6x^{(1.8)} - 12.$

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(x^3 - 2x^2 + 7x - 12) &= \Delta^{-1}(x^{(3)} + x^{(1.10)} + 6x^{(1.8)} - 12) \\
&= \Delta^{-1}x^{(3)} + \Delta^{-1}x^{(1.10)} + 6\Delta^{-1}x^{(1.8)} - 12\Delta^{-1}x^{(0)} \\
&= \frac{x^{(4)}}{4} + \frac{x^{(3)}}{3} + 3x^{(1.10)} - 12x^{(1.8)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}[x(x+1)(x+2)] &= \Delta^{-1}(x+2)^{(3)} \\
&= \frac{(x+2)^{(4)}}{4} + C \\
&= \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-1)}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 6.12. *Tính* $\Delta^{-1}x3^x$.

Sử dụng tính chất d của Định lý 5, ta đặt $f_x = x, \quad \Delta g_x = 3^x$. *Khi đó*

$$\Delta f_x = 1, \quad g_x = \Delta^{-1}3^x = \frac{3^x}{2}, \quad g_{x+1} = \frac{3^{x+1}}{2} = \frac{3}{2}3^x.$$

Do đó ta nhận được

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}x3^x &= x \cdot \frac{3^x}{2} - \Delta^{-1}[\frac{3}{2}3^x \cdot 1] + C \\
&= x \cdot \frac{3^x}{2} - \frac{3}{2}\frac{3^x}{2} + C = 3^x[\frac{x}{2} - \frac{3}{4}] + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 6.13. *Tính* $\Delta^{-1}\frac{2x-1}{2^{x-1}}$.

Ta phải tìm g_x *sao cho*

$$\Delta g_x = f_x = \frac{2x-1}{2^{x-1}}.$$

Sử dụng định nghĩa sai phân ta có thể giả sử

$$g_x = \frac{f(x)}{2^{x-1}},$$

trong đó $f(x)$ *là một đa thức của* x. *Vì*

$$\Delta g_x = f_x = \frac{2x-1}{2^{x-1}}$$

nên

$$\frac{f(x+1)}{2^x} - \frac{f(x)}{2^{x-1}} = \frac{f(x)}{2^{x-1}}$$

hay

$$f(x+1) - 2f(x) = 4x - 2.$$

Vế phải của phương trình này là tuyến tính. Do đó vế trái phải tuyến tính, nên $f(x)$ *phải có dạng* $f(x) = ax + b$, *kéo theo* $f(x+1) = ax + a + b$. *Do đó*

$$(ax + a + b) - 2(ax + b) = 4x - 2.$$

Cân bằng hệ số ta nhận được

$$ax - 2ax = 4x, \quad a + b - 2b = -2.$$

Suy ra $a = -4, b = -2$ *và* $f(x) = -4x - 2$. *Từ đó*

$$g_x = \frac{-4x-2}{2^{x-1}} = -\frac{2x+1}{2^{x-2}}.$$

Vậy

$$\Delta^{-1}\frac{2x-1}{2^{x-1}} = -\frac{2x+1}{2^{x-2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tiếp theo ta đề cập đến việc tính tổng bằng phương pháp sai phân. Giả sử ta phải tính tổng $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ khi đó ta tìm dãy $\{x_k\}$ sao cho $x_{k+1} - x_k = a_k$. Tức là $\Delta x_k = a_k$. Khi đó ta có

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_1 = x_k|_1^n = \Delta^{-1} a_k|_1^n.$$

Ví dụ 6.14. *Tính tổng*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1).$$

Ta có $f_x = x(x+1) = (x+1)^{(1.10)}$.

$$\begin{aligned} \sum_1^n f_x &= \Delta^{-1}(x+1)^{(1.10)}|_1^{n+1} \\ &= \frac{(1+x)^{(3)}}{3}|_1^{n+1} = \frac{(n+2)^{(3)}}{3} - \frac{2^{(3)}}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6.15. *Tính tổng*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Ta có $f_x = x^2 = x(x-1) + x = x^{(1.10)} + x^{(1.8)}$.

$$\begin{aligned} \sum_1^n f_x &= \Delta^{-1}[x^{(1.10)} + x^{(1.8)}]|_1^{n+1} \\ &= [\frac{x^{(3)}}{3} + \frac{x^{(1.10)}}{2}]|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \frac{(n+1)^{(1.10)}}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6.16. *Tính tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi với số hạng tổng quát là*

$$x^3 + 7x.$$

Ta có $f_x = x^3 + 7x = x^{(3)} + 3x^{(1.10)} + 8x^{(1.8)}$.

$$\sum_1^n f_x = \Delta^{-1}[x^{(3)} + 3x^{(1.10)} + 8x^{(1.8)}]|_1^{n+1}$$

$$\begin{aligned} &= [\frac{x^{(4)}}{4} + x^{(3)} + 4x^{(1.10)}]|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{(4)}}{4} + (n+1)^{(3)} + 4(n+1)^{(1.10)} \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+14). \end{aligned}$$

Ví dụ 6.17. *Tính tổng*

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad a_k = \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = -\Delta\frac{1}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Do đó

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} \Delta\frac{1}{\sqrt{k}} = -\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1\Big) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ví dụ 6.18. *Chứng minh rằng tồn tại các số A, B thoả mãn với mọi n nguyên dương, đẳng thức sau đúng*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = Atgn + Bn, \quad a_k = tgk \cdot tg(k-1).$$

Ta có

$$tg1 = tg[k - (k-1)] = \frac{tgk - tg(k-1)}{1 + tgk \cdot tg(k-1)},$$

suy ra

$$tg1 + tg1[tgk \cdot tg(k-1)] = tgk - tg(k-1) = \Delta tg(k-1).$$

Suy ra

$$tgk \cdot tg(k-1) = \frac{\Delta tg(k-1)}{tg1} - 1.$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} tgk \cdot tg(k-1) = \frac{1}{tg1}\sum_{k=1}^{n} \Delta tg(k-1) - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{tg1}(tgn - tg0) - n.$$

Tức $A = \frac{1}{tg1}, \quad B = -1.$

Ví dụ 6.19. *Cho cấp số cộng* $a_1, a_2, \cdots, a_n$*, công sai* d*. Tính tổng*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin a_k \cdot \sin a_{k+1}}.$$

Ta có

$$2\sin a_n \sin\frac{d}{2} = 2\sin[a_1+(n-1)d]\cdot\sin\frac{d}{2} = \cos[a_1+(n-\frac{3}{2})d] - \cos[a_1+(n-\frac{1}{2})d].$$

Đặt $b_n = \cos[a_1 + (n - \frac{3}{2})d]$*, ta có*

$$2\sin a_n \sin\frac{d}{2} = b_n - b_{n+1} = -\Delta b_n.$$

Do đó

$$2S_n \sin\frac{d}{2} = -\sum_{k=1}^{n} \Delta b_n = b_1 - b_{n+1} = \cos(a_1 - \frac{d}{2}) - \cos(a_1 + (n - \frac{1}{2})d).$$

Từ đó ta nhận được

$$S_n = \frac{\sin(a_1 + \frac{n-1}{2}d)\sin(\frac{n}{2}d)}{\sin\frac{d}{2}}.$$

Ta có

$$cotga_n - cotga_{n+1} = \frac{\sin(a_{n+1} - a_n)}{\sin a_n \cdot \sin a_{n+1}} = \frac{\sin d}{\sin a_n \cdot \sin a_{n+1}}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sin a_n \cdot \sin a_{n+1}} = \frac{1}{\sin d}(cotga_n - cotga_{n+1}) = -\Delta cotga_n.$$

Vậy

$$T_n = -\frac{1}{\sin d}(cotga_{n+1} - cotga_1) = \frac{1}{\sin d}\frac{\sin(a_{n+1} - a_1)}{\sin a_1 \cdot \sin a_{n+1}} = \frac{1}{\sin d}\frac{\sin nd}{\sin a_1 \cdot \sin(a_1 + nd)}.$$

Ví dụ 6.20. *Tính tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi với số hạng tổng quát là*

$$\frac{x2^x}{(x+2)!}.$$

Ta phải tìm g_x sao cho

$$\Delta g_x = f_x = \frac{x2^x}{(x+2)!}.$$

Sử dụng định nghĩa sai phân ta có thể giả sử

$$g_x = \frac{f(x)}{(x+1)!}2^x,$$

trong đó $f(x)$ là một đa thức của x. Từ

$$\Delta g_x = g_{x+1} - g_x = f_x,$$

ta có

$$\frac{f(x+1)2^{x+1}}{(x+2)!} - \frac{f(x)2^x}{(x+1)!} = \frac{x2^x}{(x+2)!}$$

hay

$$2f(x+1) - (x+2)f(x) = x.$$

Vế phải của phương trình này là tuyến tính. Do đó vế trái phải tuyến tính, nên $f(x)$ phải là hàm hằng. Giả sử $f(x) \equiv k$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= k \\ f(x+1) &= k \end{aligned}$$

và

$$2k - (x+2)k = x.$$

Từ đó ta có $k = -1 = f(x)$.

Vậy

$$g_x = \frac{-1 \cdot 2^x}{(x+1)!}.$$

$$\sum_1^n f_x = \sum_1^n \frac{x2^x}{(x+2)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta^{-1}\frac{x2^x}{(x+2)!}\Big|_1^{n+1} = \frac{-2^x}{(x+1)!}\Big|_1^{n+1}\\
&= 1 - \frac{2^{n+1}}{(x+2)!}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 6.21. *Tính tích phân hữu hạn:* $\Delta^{-1}\frac{2x-1}{2^{x-1}}$.

Ta phải tìm g_x *sao cho*

$$\Delta g_x = f_x = \frac{2x-1}{2^{x-1}}.$$

Giả sử

$$g_x = \frac{f(x)}{2^{x-1}}.$$

Vì

$$\Delta g_x = f_x = \frac{2x-1}{2^{x-1}}$$

nên

$$\frac{f(x+1)}{2^x} - \frac{f(x)}{2^{x-1}} = \frac{f(x)}{2^{x-1}}$$

hay

$$f(x+1) - 2f(x) = 4x - 2.$$

Vế phải của phương trình này là tuyến tính. Do đó vế trái phải tuyến tính, nên $f(x)$ *phải có dạng* $f(x) = ax + b$, *kéo theo* $f(x+1) = ax + a + b$. *Do đó*

$$(ax + a + b) - 2(ax + b) = 4x - 2.$$

Cân bằng hệ số ta nhận được

$$ax - 2ax = 4x, \quad a + b - 2b = -2.$$

Suy ra $a = -4, b = -2$ *và* $f(x) = -4x - 2$. *Từ đó*

$$g_x = \frac{-4x-2}{2^{x-1}} = -\frac{2x+1}{2^{x-2}}.$$

Vậy

$$\Delta^{-1}\frac{2x-1}{2^{x-1}} = -\frac{2x+1}{2^{x-2}} + C.$$

Đa thức Bernoulli

Trong việc nghiên cứu đa thức ta gặp bài toán: Tìm đa thức bậc n của x, $P_n(x)$ sao cho

$$\Delta P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.8}$$

hay

$$P_n(x) = \Delta^{-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C. \tag{1.9}$$

Giả thiết $P_n(x)$ có dạng

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} = A_0\frac{x^n}{n!} + A_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + A_{n-1}x + A_n. \tag{1.10}$$

Từ (1.8) ta có

$P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$P'_n(x+1) - P'_n(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$

$\Delta P'_n(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$

Mặt khác, cũng từ (1.8) ta có

$\Delta P_{n-1}(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$

Suy ra

$$\Delta P'_n(x) = \Delta P_{n-1}(x)$$

hay

$$P'_n(x) - P_{n-1}(x) = k.$$

Từ (1.10) ta có

$$P'_n(0) = A_{n-1}, \quad P_{n-1}(0) = A_{n-1}.$$

Do đó $k = 0$. Vậy

$$P'_n(x) = DP_n(x) = P_{n-1}(x).$$

$P_n(x)$ được gọi là hàm Bernoulli.

Ta có

$$P_2'(x) = P_1(x) = A_0x + A_1.$$

Từ (1.8) và (1.9) ta nhận được $\Delta P_1(x) = 1$, suy ra $P_1(x) = \Delta^{-1}x^{(0)} = x + C_1$, suy ra $A_0 = 1$. Mặt khác,

$$P_3'(x) = P_2(x) = \frac{A_0}{2!}x^2 + A_1x + A_2.$$

Từ (1.8) và (1.9) ta nhận được $\Delta P_2(x) = x$, suy ra $P_2(x) = \Delta^{-1}x^{(1)} = \frac{x^{(2)}}{2} + C_2 = \frac{x(x-1)}{2} + C_2$, suy ra $A_1 = -\frac{1}{2}$. Tiếp tục như vậy ta xác định được tất cả các hệ số $A_2, A_3, \cdots$. Tuy nhiên ta có nhận xét sau đây:

$$P_n(x) = A_0\frac{x^n}{n!} + A_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + A_{n-1}x + A_n.$$

Suy ra

$$\Delta P_n(x) = A_0\frac{\Delta x^n}{n!} + A_1\frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + A_{n-1}\Delta x.$$

Suy ra

$$\Delta P_n(x)|_{x=0} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_i}{(n-i)!}.$$

Từ (1.8), nếu $n > 1$ thì $\Delta P_n(x)|_{x=0} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}|_{x=0} = 0$, do đó

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_i}{(n-i)!} = 0.$$

Vì vậy,

+ Với $n = 3$: $\frac{A_0}{3!} + \frac{A_1}{2!} + \frac{A_2}{1!} = 0$, suy ra $A_2 = 1/12$.

+ Với $n = 4$: $\frac{A_0}{4!} + \frac{A_1}{3!} + \frac{A_2}{2!} + \frac{A_3}{1!} = 0$, suy ra $A_3 = 0$.

Tương tự,

$$A_4 = -1/120, A_5 = 0, A_6 = 1/30240, A_7 = 0, \cdots$$

Ta thu được các hàm Bernoulli sau đây:

$P_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$
$P_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}$
$P_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}$
$P_5(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720}$.

Tính chất của đa thức Bernoulli:

1. $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$ suy ra $DP_{n+1}(x) = P_n(x)$, suy ra

$$\int\limits_a^b P_n(x)dx = P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a).$$

NX:

$$P_n(0) = A_n, P_n(1.8) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i}{(n-i)!} + A_n = 0 + A_n = A_n.$$

Do đó

$$\int\limits_0^1 P_n(x)dx = P_{n+1}(1.8) - P_{n+1}(0) = A_{n+1} - A_{n+1} = 0.$$

2. $A_{2k-1} = 0$ với $k > 1$.

Chứng minh: Ta có

$$\Delta P_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

,

$$P_{2k+1}(x+1) - P_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Thay x bởi $-x$ ta được

$$P_{2k+1}(1-x) - P_{2k+1}(-x) = \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Đặt $F(x) = -P_{2k+1}(1-x)$, suy ra

$$-P_{2k+1}(-x) = -P_{2k+1}(1-(x+1)) = F(x+1).$$

Do đó

$$F(x+1) - F(x) = \Delta F(x) = \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Suy ra

$$\Delta F(x) = \Delta P_{2k+1}(x)$$

suy ra

$$F(x) - P_{2k+1}(x) = c$$

hay $F'(x) - P'_{2k+1}(x) = 0$ hay $P'_{2k+1}(1-x) - P'_{2k+1}(x)$ hay $P_{2k}(1-x) = P_{2k}(x)$. Đạo hàm hai vế đẳng thức này theo x ta được

$$-P'_{2k}(1-x) = P'_{2k}(x)$$

hay

$$-P_{2k-1}(1-x) = P_{2k-1}(x), \quad k > 1$$

hay

$$P_{2k-1}(x) + P_{2k-1}(1-x) = 0.$$

Do đó

$$P_{2k-1}(0) + P_{2k-1}(1.8) = A_{2k-1} + A_{2k-1} = 2A_{2k-1} = 0, \quad k > 1.$$

Ta gọi $B_n(x) = n!P_n(x)$ là đa thức Bernoulli.

Ví dụ 6.22. $B_0(x) = 1$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$

$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + +x^2 - \frac{1}{30}$

$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6}$

$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}$

$B_7(x) = x^7 - x^5 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{x}{6}.$

Ta có

$$\Delta P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

do đó

$$\Delta n!P_n(x) = nx^{n-1}$$

hay

$$\Delta B_n(x) = nx^{n-1}$$

hay

$$\Delta B_{n+1}(x) = (n+1)x^n.$$

Suy ra

$$\Delta^{-1}x^n = \frac{1}{n+1}B_{n+1}(x) + C.$$

Suy ra

$$\sum_{x=1}^{x-1} x^n = \Delta^{-1}x^n|_1^x = \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(1)}{n+1}.$$

Ví dụ 6.23.

$$\sum_{x=1}^{x-1} x^2 = 1^2+2^2+\cdots+(x-1)^2 = \Delta^{-1}x^2|_1^x = \frac{B_3(x) - B_3(1.8)}{3} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.$$

$$\sum_{x=1}^{x-1} x^3 = 1^3+2^3+\cdots+(x-1)^3 = \Delta^{-1}x^3|_1^x = \frac{B_4(x) - B_4(1.8)}{4} = \left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^2.$$

Hàm Gamma

Hàm Gamma được xác định bởi tích phân

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \qquad (1.11).$$

$\Gamma(n)$ xác định với bất kì giá trị thực của n loại trừ 0 và các số nguyên âm. Với n nguyên dương ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Từ định nghĩa ta có

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^\infty = 0 + 1 = 1 \qquad (1.12).$$

Tích phân từng phần ta được

$$\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx = -t^{n-1}e^{-t} + (n-1)\int_0^t x^{n-2}e^{-x}dx.$$

Dùng Định lý L'Hospital ta có $-t^{n-1}e^{-t}$ tiến đến 0 khi t ra ∞. Vì vậy,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)\int_0^\infty x^{(n-1)-1}e^{-x}dx \qquad (1.13)$$

hay

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \qquad (1.14)$$

và thay n bởi $n+1$ ta được

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}. \qquad (1.15)$$

Từ (1.14) suy ra

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\ &= (n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = (n-1)!\end{aligned}$$

Từ (1.12) ta được $\Gamma(1) = 1$, do đó

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Người ta đã tính được các giá trị của $\Gamma(n)$ với $1 < n < 2$ và nhờ các công thức (1.14) và (1.15) ta có thể tính $\Gamma(n)$ với mọi giá trị dương của n.

Ví dụ 6.24. *a.* $\Gamma(3.2) = (2.2)(1.2)\Gamma(1.2) = (2.2)(1.2)(0.9182) = 2.424.$

b. $\Gamma(0.6) = \frac{\Gamma(1.6)}{0.6} = \frac{0.8935}{0.6} = 1.489.$

c. $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}.$

Với n là số thực âm ta sẽ dùng công thức (1.15) để tính $\Gamma(n)$.

Ví dụ 6.25. $\Gamma(-0.4) = \frac{\Gamma(0.6)}{-0.4} = \frac{\Gamma(1.6)}{(-0.4)(0.6)} = -3.723$

Chú ý 6.3. *Người ta chứng minh được rằng với $n = 0$ và n nguyên âm thì $\Gamma(n)$ không xác định.*

Hàm Beta

Hàm Beta được định nghĩa bởi

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad (1.16).$$

Hàm Beta xác định với mọi $m, n > 0$.

Đặt $y = 1 - x$ ta có

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}dy = \beta(n,m). \qquad (1.17)$$

Tiếp theo ta sẽ tìm mối liên hệ giữa hàm Gamma và hàm Beta.

Trong (1.11) đặt $x = z^2, dx = 2zdz$; ta được

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty z^{2n-1}e^{-z^2}dz.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\Gamma(m) &= 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2m-1}dx \\ \Gamma(n) &= 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}dy\end{aligned}$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) \quad = \quad 4\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}x^{2m-1}y^{2n-1}dydx.$$

Chuyển sang tọa độ cực ta có

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= 4\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2m-1}(\cos\theta)^{2m-1}r^{2n-1}(\sin\theta)^{2n-1}rdrd\theta \\
&= 2\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2(m+n)-1}dr\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta \\
&= \Gamma(m+n)\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta.
\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\beta(m,n) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta.$$

Đặt

$$x = \cos^2\theta, (1-x) = \sin^2\theta, dx = -2\cos\theta\sin\theta d\theta.$$

Ta được

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta &= \int\limits_{\pi} 2^{\frac{0}{(}\cos^2\theta)^{m-1}(\sin^2\theta)^{n-1}(-2\cos\theta\sin\theta d\theta)} \\
&= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta.
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)\beta(m,n)$$

hay

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Ví dụ 6.26. *Tính tích phân* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad n > -1$. *Đặt* $y = \sin x, dy = \cos x dx$. *Suy ra* $dx = \frac{dy}{\cos x} = (1-y^2)^{\frac{-1}{2}} dy$. *Khi đó*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^1 y^n (1-y^2)^{\frac{-1}{2}} dy.$$

Đặt $z = y^2, dz = 2y dy, dy = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$. *Ta có*

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 y^n (1-y^2)^{\frac{-1}{2}} dy &= \int\limits_0^1 z^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{-1}{2}} dz \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 z^{\frac{n+1}{2}-1} (1-z)^{\frac{1}{2}-1} dz \\
&= \frac{1}{2} \beta\Big(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Bài tập

1. Tính các tổng sau:

1. $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$.
2. $S = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.
3. $S = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$
4. $S = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$
5. $S = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$
6. $S = \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \cdots + \sin(a+nx)$

7. $S = \cos(a + x) + \cos(a + 2x) + \cdots + \cos(a + nx)$

8. $S = 1 \cdot q + 2 \cdot q^2 + \cdots + n \cdot q^n$

9. $S = \frac{1^2}{1} + \frac{1^2+2^2}{2} + \frac{1^2+2^2+3^2}{3} + \cdots + \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}$.

10. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n + 2)$.

11. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + n(n + 1)^2$.

12. $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

13. $S = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} + \frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}$.

14. $S = \sin \pi x + \sin \frac{\pi}{2} x + \cdots + \sin \frac{\pi}{n-1} x$.

15. $S = \left(2^1 \sin^2 \frac{\theta}{2^1}\right)^2 + \left(2^2 \sin^2 \frac{\theta}{2^2}\right)^2 + \cdots + \left(2^n \sin^2 \frac{\theta}{2^n}\right)^2$.

16. $6 \cdot 9 + 12 \cdot 21 + 20 \cdot 37 + 30 \cdot 57 + 42 \cdot 81 \cdots +$ (n số hạng).

17. $S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots$ (n số hạng).

2. Tính các tổng sau:

1. $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + n^2 2^n$.

2. $2 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2^3 + 20 \cdot 2^4 + 30 \cdot 2^5 + \cdots$ (n số hạng).

3. $\sum\limits_1^n x \sin x$.

4. Giả sử f_x là một hàm khả tích hữu tỷ bậc n. Chứng minh rằng, tích phân từng phần liên tiếp cho ta công thức

$$\Delta^{-1} a^x f_x = \frac{a^x}{a-1}\left[f_x - \frac{a}{a-1}\Delta f_x + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 f_x + \cdots + (-1)^n \left(\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n f_x\right].$$

5. Sử dụng kết quả câu 4 tính

$$\sum_1^n 3^x x^{(2)}, \sum_1^n 2^x (x^3 - 3x + 2).$$

6. $S = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}$.

7. $\sum\limits_1^n \frac{1}{(5x-2)(5x+3)}$

8. $\sum\limits_1^n \frac{1}{(2x-1)(2x+1)(2x+5)}$.

9. $S = \frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + \frac{4\cdot 5}{3^4} + \cdots$ (n số hạng).

3. Tính các tổng sau:

1. $\sum\limits_{1}^{n} f_x, f_x = \frac{x}{(x+1)(x+2)} 2^x$.
2. $\sum\limits_{1}^{n} f_x, f_x = \frac{2x-1}{2^{x-1}}$.
3. $\sum\limits_{1}^{n} f_x, f_x = \frac{x^2+x-1}{(x+2)!}$.
4. $\sum\limits_{1}^{n} f_x, f_x = 2^x \cdot x \cdot \frac{x!}{(2x+1)}!$.
5. $\sum\limits_{0}^{n} f_x, f_x = \frac{(a+x)^2}{3^{a+x}}$.

4 Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $\int\limits_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1\right)}$.
2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}$.
3. $\int\limits_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$.
4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$.
5. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6.3 Phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng

Đối với phương trình sai phân tuyến tính thì bằng phép đổi biến ta đưa về hệ phương trình tuyến tính cấp 1. Trong mục này, hệ thống lại một số kết quả về công thức nghiệm phương trình cấp cao được suy ra một cách tương tự từ phương trình cấp 1.

Định lý 6.6. *Nghiệm tổng quát* x_n *của* (2.2) *bằng tổng* $\hat{x_n}$ *và* x_n^*, *với* x_n^* *là một nghiệm riêng bất kì của* (2.2).

Định nghĩa 6.5. $x_{n1}, \cdots, x_{nk}$ *được gọi là* k *nghiệm độc lập tuyến tính của*

(2.3) *nếu từ hệ thức*

$$C_1x_{n1} + \cdots + C_kx_{nk} = 0$$

suy ra $C_1 = \cdots = C_k = 0$.

Định lý 6.7. *Nếu* $x_{n1} \cdots , x_{nk}$ *là k nghiệm độc lập tuyến tính của* (2.3), *thì nghiệm tổng quát* $\hat{x_n}$ *của* (2.3) *có dạng*

$$\hat{x_n} = C_1x_{n1} + \cdots + C_kx_{nk},$$

trong đó $C_1, C_2, \cdots , C_k$ *là các hằng số tuỳ ý.*

Định lý 6.8. *Nếu* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots , \lambda_k$ *là k nghiệm thực khác nhau của* (2.4) *và* c_1, c_2, $\cdots$, c_k *là k hằng số tuỳ ý thì*

$$\hat{x_n} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$$

là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (2.3).

Chú ý 6.4. *Nếu phương trình đặc trưng* (2.4) *có nghiệm thực* λ_j *bội s, thì ngoài nghiệm* λ_j^n, *ta có* $n\lambda_j^n, n^2\lambda_j^n, \cdots , n^s\lambda_j^n$ *cũng là các nghiệm độc lập tuyến tính của* (2.3) *và do đó*

$$\hat{x_n} = \sum_{i=0}^{s-1} C_j^i n^i \lambda_j^n + \sum_{j\neq i=1}^{k} C_i\lambda_i^n.$$

Ví dụ 6.27. *Tìm các hàm* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện*

$$f(x + y) + f(x - y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}, f(0) \neq 0, f(1) = \frac{5}{2}.$$

Cho $x = n \in \mathbb{Z}, y = 1$ *ta được*

$$f(n + 1) + f(n - 1) = f(n)f(1).$$

Đặt $f(n) = u_n$ *ta thu được phương trình sai phân*

$$u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n - u_{n-1}, u_0 = f(0) \neq 0, u_1 = \frac{5}{2}.$$

Cho $x = 1, y = 0$ *ta được* $f(1)f(0) = 2f(1)$, *suy ra* $f(0) = 2 = u_0$. *Ta dễ dàng tìm được nghiệm*

$$f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Định lý 6.9. *Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức* $\lambda_j = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *thì*

$$\hat{x_n} = \sum_{j \neq i = 1}^{k} C_i \lambda_i^n + r^n(C_j^1 \cos n\varphi + C_j^2 \sin n\varphi).$$

Ví dụ 6.28. *Cho* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện*

$$f(n+2) = f(n+1) - f(n), f(1) = 1, f(2) = 0.$$

Chứng minh rằng

$$|f(n)| \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $f(n) = u_n$ *ta được bài toán giá trị ban đầu*

$$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, u_1 = f(1) = 1, u_2 = f(2) = 0.$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm phức

$$\lambda_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $\lambda = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. *Ta dễ dàng tìm được nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là*

$$u_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Do đó

$$|f(n)| \leqslant \sqrt{1^2 + \frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Định lý 6.10. *Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức* λ_j *bội s thì*

$$\hat{x_n} = \sum_{j \neq i = 1}^{k} C_i \lambda_i^n + r^n[(A_1 + A_2 n + \cdots + A_s n^{s-1})\cos n\varphi + (B_1 + B_2 n + \cdots + B_s n^{s-1})\sin n\varphi].$$

Một số trường hợp có thể tìm nghiệm riêng một cách đơn giản.

• Trường hợp $f_n = P_m(n), \quad m \in \mathbb{N}$

1. Nếu $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ là các nghiệm thực khác 1 của phương trình (2.4) thì $y_n^* = Q_m(n), \quad m \in \mathbb{N}$, với $Q_m(n)$ là đa thức cùng bậc m với f_n.

2. Nếu (2.4) có nghiệm $\lambda = 1$ bội s thì $y_n^* = n^s Q_m(n), \quad m \in \mathbb{N}$, với $Q_m(n)$ là đa thức cùng bậc m với f_n.

Ví dụ 6.29. *Cho $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện*

$$f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = n+1, f(1) = 1, f(2) = 0.$$

Chứng minh rằng $(6f(n) - 24)$ là bội của n với $n \geqslant 6$. Đặt $f(n) = u_n$ ta được bài toán giá trị ban đầu

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = n+1, u_1 = f(1) = 1, u_2 = f(2) = 0.$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $\lambda = 1$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $A + nB$. Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $n^2(an + b)$. Dễ dàng tìm được $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}$. Do đó

$$u_n = A + Bn + n^2\Big(\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}\Big)$$

và nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$u_n = f(n) = 4 - \frac{11}{3}n + \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2}.$$

Do đó

$$(6f(n) - 24) = (n^3 + 3n^2 - 22n)$$

chia hết cho n.

Ví dụ 6.30. *(Đề dự tuyển IMO - 1992) Giả sử a, b là 2 số thực dương. Tìm tất cả các hàm $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x.$$

Vì phương trình hàm trên đúng với mọi $x \in [0, \infty)$ nên

$$f(f(f(x))) + af(f(x)) = b(a+b)f(x), x = f(x).$$

Tương tự như vậy ta thu được

$$f^{n+2}(x) + af^{n+1}(x) = b(a+b)f^n(x).$$

Cố định x ta thu được phương trình sai phân

$$u_{n+2} + au_{n+1} = b(a+b)u_n.$$

Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm $\lambda = b, \lambda = -a-b$. Khi đó

$$f^n(x) = u_n = K \cdot b^n + L \cdot (-a-b)^n.$$

Ta có

$$u_0 = x = K + l, u_1 = f(x) = Kb - L(a+b).$$

Vì $f^n : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ nên

$$0 \leqslant \frac{f^n(x)}{(a+b)^n} = K\Big(\frac{b}{a+b}\Big)^n + (-1)^n L.$$

Mặt khác, do $\left(\frac{b}{a+b}\right)^n \to 0$ khi $n \to \infty$ nên ta phải có $L = 0$. Vậy

$$f(x) = Kb = bx.$$

• Trường hợp $f_n = P_m(n)\beta^n$

1. Nếu các nghiệm của (2.4) đều là các nghiệm thực khác β thì $y_n^* = Q_m(n)\beta^n$, với $Q_m(n)$ là đa thức bậc m.

2. Nếu (2.4) có nghiệm $\lambda = \beta$ bội s thì $y_n^* = n^s Q_m(n)\beta^n$, với $Q_m(n)$ là đa thức bậc m.

Ví dụ 6.31. *Xét phương trình sai phân*

$$x_{n+4} - 10x_{n+3} + 35x_{n+2} - 50x_{n+1} + 24x_n = 48 \cdot 5^n.$$

Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4$ *đều khác 5. Từ đó ta nhận được*

$$x_n^* = 2 \cdot 5^n.$$

• Trường hợp $f_n = \alpha \cos nx + \beta \sin nx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y_n^* = a \cos nx + b \sin nx.$$

Ví dụ 6.32. *Tìm nghiệm riêng* x_n^* *phương trình sai phân*

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n = (2 - \sqrt{2}) \cos \frac{n\pi}{4} + 2 \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Sử dụng phương pháp vừa trình bày ta dễ dàng tìm được

$$x_n^* = \cos \frac{n\pi}{4}.$$

• Trường hợp $f_n = g_{n1} + \cdots + g_{ns}$

Tìm nghiệm riêng y_{ni}^* ứng với hàm $g_{ni}, \quad i = 1, \cdots, s$. Nghiệm riêng y_n^* ứng với f_n sẽ là

$$y_n^* = \sum_{i=1}^{s} y_{ni}^*.$$

Ví dụ 6.33. *Tìm nghiệm riêng* x_n^* *phương trình sai phân*

$$x_{n+4} - 3x_{n+3} + 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = \frac{3}{2} \sin \frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{n\pi}{3} + 10 \cdot 2^n + 2.$$

Dùng nguyên lý chồng nghiệm và áp dụng phương pháp trong 3 trường hợp đã nêu ta được

$$x_n^* = \sin \frac{n\pi}{3} + n \cdot 2^n - n.$$

Bài tập

1. Xác định số hạng tổng quát u_n của dãy số nếu biết

a. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n, \\ u_1 = 2. \end{cases}$ Đáp số: $u_n = n^2 - n + 2$.

b. $\begin{cases} u_{n+1} = 15u_n - 14n + 1, \\ u_0 = 7. \end{cases}$ Đáp số: $u_n = 99 - n^2$.

c. $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3^n, \\ u_0 = 8. \end{cases}$ Đáp số: $u_n = 7 \cdot 2^n + 3^n$.

d. $\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 7^{n+1}, \\ u_0 = 101. \end{cases}$ Đáp số: $u_n = (101 + n)7^n$.

e. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{n\pi}{4}, \\ u_0 = 1. \end{cases}$ Đáp số: $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$.

2. Dùng phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng u_n^* của các phương trình sai phân sau

a. $u_{n+1} = u_n + n \cdot n!$. Đáp số: $u_n^* = n!$.

b. $u_{n+1} = 2u_n + 6 \cdot 2^n$. Đáp số: $u_n^* = 3n \cdot 2^n$.

c. $u_{n+1} = u_n + \cos nx$. Đáp số: $u_n^* = \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $\quad \sin\frac{x}{2} \neq 0$.

d. $u_{n+1} = u_n + \frac{1-n}{2^{n+1}}$. Đáp số: $u_n^* = \frac{n}{2^n}$.

e. $u_{n+1} = 5u_n + \frac{1}{5}(n^2 - 3n + 1)n!$. Đáp số: $u_n^* = \frac{n \cdot n!}{5}$.

3. Dùng phương pháp phương pháp hàm Green tìm nghiệm riêng x_n^* của các phương trình sai phân sau

1. $x_{n+1} = 2x_n + n^2 - n + 1$. ĐS: $x_n^* = -n^2 - n - 3$
2. $x_{n+1} = 5x_n + n^2 + 3n + 2$. ĐS: $x_n^* = -\frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{8}k - \frac{25}{32}$
3. $x_{n+1} = 3x_n + (2 - n)2^n$. ĐS: $x_n^* = n2^n$
4. $x_{n+1} = 2x_n + \cos\frac{n\pi}{2} - 2\sin\frac{n\pi}{2}$. ĐS: $x_n^* = \sin\frac{n\pi}{2}$.

4. Xác định số hạng tổng quát u_n của dãy số nếu biết

a. $\begin{cases} u_{n+1} = (n + 1)u_n + 2^n(n - 1), \\ u_1 = 0. \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(u_n + 1), \\ u_1 = 0. \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(u_n + 1), \\ u_1 = 0. \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(n+k+1)\cdots(n+2k+1)}(u_n + 1), \\ u_1 = 0. \end{cases}$

5. Giải các phương trình sai phân sau

a. $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = 0$. Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 2$ (kép), $\lambda_2 = 3$.

b. $x_{n+3} - 5x_{n+2} + 8x_{n+1} - 6x_n = 0$. Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 + i, \overline{\lambda_2} = 1 - i$.

c. $x_{n+6} - 3x_{n+5} + 4x_{n+4} - 6x_{n+3} + 5x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$. Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 =,$ $\lambda_3 = i$ (kép), $\overline{\lambda_3} = -i$ (kép).

d. $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = n + 1$. Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 2$ (kép), $\lambda_2 = 3$ đều khác 1.

e. $x_{n+4} - x_{n+3} - 3x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 1$. Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 1$ (bội 3), $\lambda_2 = -2$.

f. $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = 2^n(24 - 24n)$. Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 2$ (kép), $\lambda_2 = 3$.

6. Tìm tất cả các hàm số f thoả mãn điều kiện

a.
$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(f(x)) = 3f(x) - 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hướng dẫn: Vì phương trình hàm trên đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$f(f(x)) = 3f(x) - 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tương tự như vậy ta thu được

$$f^{n+2}(x) = 3f^{n+1}(x) - 2f^n(x).$$

Cố định x ta thu được phương trình sai phân

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n, u_0 = x, u_1 = f(x).$$

b.
$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(1) = 1, \\ 2f(n)f(k+n) - 2f(k-n) = 3f(n)f(k), \quad \forall k \geqslant n. \end{cases}$$

Hướng dẫn: Cho $k = n = 0$ ta được $f^2(0) = -2f(0)$ suy ra $f(0) \in \{0, -2\}$. Giả sử $f(0) = 0$. Thay $n = 0$ vào phương trình hàm trên ta được $-f(k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ nên $f(1) = 0$ (vô lý). Vậy $f(0) = -2$. Thay $n = 1$ vào phương trình hàm ta thu được bài toán giá trị ban đầu thuần nhất bậc 2.

c.

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(1) = 1, \\ f(k+n) - 2f(n)f(k) + f(k-n) = 3n \cdot 2^k. \end{cases}$$

Hướng dẫn: Cho $k = n = 0$ ta được $-2f^2(0) + 2f(0) = 0$ suy ra $f(0) \in \{0, 1\}$. Giả sử $f(0) = 0$. Thay $n = 0$ vào phương trình hàm trên ta được $2f(k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ nên $f(1) = 0$ (vô lý). Vậy $f(0) = -2$. Thay $n = 1$ vào phương trình hàm ta thu được bài toán giá trị ban đầu không thuần nhất bậc 2.

7. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{m+n} = x_m + x_n + mn, \quad \forall m, n. \end{cases}$$

Đáp số: $x_n = n\Big(\frac{1}{2}(n-1) + a\Big)$. Thử lại thấy kết quả này thỏa mãn đề bài.

8. Tồn tại hay không một dãy số $\{x_n\}$ mà $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ta có

$$x_{m+n} = x_m + x_n + mn.$$

Hướng dẫn: Giả sử $x_1 = a$. Giải tương tự ví dụ trên ta được

$$x_n = n[\frac{1}{2}(n+1) + a] - 1.$$

Thử lại thấy kết quả này không thỏa mãn đề bài với mọi m, n.

9. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, x_2 = \beta, \\ x_{\frac{m+n}{2}} = \frac{x_m + x_n}{2} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hướng dẫn: Dễ thấy

$$x_n = x_{\frac{(n+1)+(n-1)}{2}}.$$

Giải phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất với điều kiện ban đầu $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$ ta được

$$x_n = 2\alpha - \beta + (\beta - \alpha)n.$$

10. Xác định dãy số $\{x_n\}$ nếu biết

$$x_{mn} = x_m x_n.$$

Hướng dẫn: Ta có

$$x_m = x_{m\cdot 1} = x_m x_1$$

suy ra $x_1 = 1$.

$$x_n = x_{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_\ell^{k_\ell}} = \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_\ell^{k_\ell}.$$

11. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_{n+1} = a x_n + \sqrt{b x_n^2 + c}, \quad a^2 - b = 1, \alpha > 0, a > 1. \end{cases}$$

Hướng dẫn: Giải phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất với $x_1 = \alpha, x_2 = a\alpha + \sqrt{b\alpha^2 + c} = \beta$ ta được $x_n = \frac{\alpha\lambda_2 - \beta}{1 - \lambda_1^2}\lambda_1^n + \frac{\alpha\lambda_1 - \beta}{1 - \lambda_2^2}\lambda_2^n, \lambda_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}, \lambda_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}$.

12. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, x_2 = \beta \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{x_{n-1}}. \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đưa về phương trình

$$x_n = t(x_{n+1} + x_{n-1}), t = \frac{x_2}{x_3 + x_2}.$$

13. Hãy tìm tất cả các giá trị của $a \in \mathbb{R}$ để

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

xác định một dãy, hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Hướng dẫn: Đặt dãy số phụ $y_n = \frac{1}{x_n}$, khi đó ta có

$$y_{n+1} - 2y_n = 1.$$

Giải phương trình này ta nhận được

$$y_n = \frac{(a+1)2^{n-1} - a}{a},$$

suy ra

$$x_n = \frac{a}{(a+1)2^{n-1} - a}.$$

Ta phải tìm giá trị của a sao cho $x_n \neq -2, \forall n$.

14. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, x_2 = \beta \\ x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2bx_{n-1} - bx_{n-2} + c}{x_{n-2} + b}. \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt $y_n = x_n + b$. Khi đó ta có

$$y_n = \frac{y_{n-1}^2 + c}{y_{n-2}}.$$

Phương trình dạng này đã biết cách giải.

15. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{a + \sqrt{b + x_n^2}}, \quad \alpha > 0, a > 1, a^2 - b = 1. \end{cases}$$

Đặt $y_n = \frac{1}{x_n}$, ta được

$$y_{n+1} = ay_n + \sqrt{by_n^2 + c}.$$

Đây là phương trình sai phân đã biết cách giải.

16. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_{n+1} = a_n x_n + f_n, \quad a_n \neq 0. \end{cases}$$

Đặt dãy số phụ $x_n = y_n \prod_{k=0}^{n-1} a_k$.

$$x_n = [\frac{\alpha}{a_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k}{\prod_{i=0}^{k} a_i}] \prod_{k=0}^{n} a_k.$$

Trường hợp $a_n = c = constan$, ta có

$$x_n = [\frac{\alpha}{c} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k}{c^{k-1}}]c^n, \quad c > 1.$$

17. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha > 0, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = a_n x_n^k. \end{cases}$$

Logarit hoá hai vế của phương trình theo cơ số e ta được

$$\ln x_{n+1} = \ln a_n + k \ln x_n.$$

Đặt dãy số phụ $\ln x_n = y_n$ đưa về phương trình dạng

$$y_{n+1} - k y_n = \ln a_n.$$

Đặt dãy số phụ $y_n = k^{n-1} u_n$.

$$x_n = e^{k^{n-1} u_n} = x_n = e^{k^{n-1}[\ln \alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln a_i}{k^i}]}$$

18. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_1 = \alpha > 0, \\ x_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{f_n^k} x_n^k, \quad f_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chuyển về dạng

$$\frac{x_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{x_n^k}{f_n^k},$$

đặt dãy số phụ $v_n = \frac{x_n}{f_n}$. Ta có

$$v_{n+1} = v_n^k.$$

Logarit cơ số e hai vế, ta được

$$\ln v_{n+1} = k \ln v_n.$$

Đặt dãy số phụ $u_n = \ln v_n$.

$$x_n = f_n[\frac{\alpha}{f_1}]^{k^{n-1}}.$$

19. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_0 = \gamma, \\ x_{n+1} = ax_n^2 - b, \quad ab = 2, a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Đặt dãy số phụ $x_n = by_n$ suy ra $y_0 = \frac{\gamma}{b} = \alpha$. Ta có

$$by_{n+1} = ab^2y_n^2 - b$$

hay

$$y_{n+1} = 2y_n^2 - 1.$$

Xét trường hợp $|\alpha| < 1$ và $|\alpha| \geqslant 1$, $x_n = b\cos 2^n\varphi$ hay$x_n = b\mathrm{ch}2^n\varphi$.

20. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, \\ x_{n+1} = ax_n^3 - 3x_n, \quad a > 0. \end{cases}$$

Đặt $x_n = \frac{2}{\sqrt{a}}y_n$. Ta có

$$y_0 = \frac{x_0\sqrt{a}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2} = \gamma$$

và

$$y_{n+1} = 4y_n^3 - 3y_n.$$

Xét trường hợp $|\gamma| < 1$ và $|\gamma| < 1$.

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{a}}\sin 3^n\varphi = \frac{1}{2\sqrt{a}}[(\alpha\sqrt{a} + \sqrt{a\alpha^2 - 4})^{3^n} + (\alpha\sqrt{a} - \sqrt{a\alpha^2 - 4})^{3^n}],$$

và

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{a}}[(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})^{3^n} + (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})^{3^n}].$$

21. Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ nếu biết

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, \\ x_{n+1} = ax_n^3 + 3x_n, \quad a > 0. \end{cases}$$

Đặt $x_n = \frac{2}{\sqrt{a}} y_n$. Ta có

$$y_0 = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2} = \gamma$$

và

$$y_{n+1} = 4y_n^3 + 3y_n.$$

Do $y_0 = \gamma$ nên tồn tại φ sao cho ch$\varphi = \gamma$. Chứng minh bằng quy nạp ta được

$$y_n = \mathrm{sh} 3^n \varphi.$$

Do đó

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{a}} \mathrm{sh} 3^n \varphi.$$

22. Xét phương trình $x_{n+1} = \frac{ax_n+b}{cx_n+d}$, x_0 cho trước, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: Nếu (y_n, z_n) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y_{n+1} = ay_n + bz_n \\ z_{n+1} = cy_n + dz_n, \end{cases}$$

với $n = 0, 1, 2 \cdots$ và $y_0 = \alpha, z_0 = 1$ thì $x_n = \frac{y_n}{z_n}$ là nghiệm của phương trình sai phân hữu tỉ

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d},$$

với $n = 0, 1, 2 \cdots$ và $x_0 = \alpha$.

Hướng dẫn: Khi $n = 0$ thì mệnh đề trên đúng do $x_0 = \frac{y_0}{z_0} = \alpha$. Giả sử mệnh đề trên đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n + 1$. Ta có

$$x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{ay_n + bz_n}{cy_n + dz_n} = \frac{a\frac{y_n}{z_n} + b}{c\frac{y_n}{z_n} + d} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}.$$

Để ý rằng hệ

$$\begin{cases} y_{n+1} = ay_n + bz_n \\ z_{n+1} = cy_n + dz_n, \end{cases}$$

với $n = 0, 1, 2 \cdots$ và $y_0 = \alpha, z_0 = 1$ là hệ phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp 2 đã biết cách giải.

6.4 Hệ phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Xét hệ phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất k ẩn dạng

$$\underline{U}_{n+1} = A\underline{U}_n, \tag{3.1}$$

trong đó A là ma trận vuông cấp k và U_0 là véc tơ cho trước.

Giả sử $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_k$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ của A. Khi đó tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ sao cho

$$\underline{U}_0 = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\underline{v}_k.$$

Ta có

$$\underline{U}_{n+1} = A\underline{U}_n = A^2\underline{U}_{n-1} = \cdots = A^{n+1}\underline{U}_0$$

và

$$\begin{aligned}
\underline{U}_n &= A^n\underline{U}_0 = A^n(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\underline{v}_k)\\
&= \alpha_1A^n\underline{v}_1 + \alpha_2A^n\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_kA^n\underline{v}_k\\
&= \alpha_1\lambda_1^n\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k^n\underline{v}_k.
\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng tỏ

$$\underline{U}_n = \alpha_1\lambda_1^n\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k^n\underline{v}_k$$

thỏa mãn (3.1). Thật vậy,

$$\begin{aligned}
A\underline{U}_n &= \alpha_1\lambda_1^nA\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^nA\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k^nA\underline{v}_k\\
&= \alpha_1\lambda_1^{n+1}\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^{n+1}\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k^{n+1}\underline{v}_k\\
&= \underline{U}_{n+1}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\underline{U}_n = \alpha_1\lambda_1^n\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k^n\underline{v}_k$$

là nghiệm tổng quát của hệ phương trình sai phân tuyến tính (3.1).

Tổng hợp lại vấn đề vừa nêu ta có định lý sau:

Định lý 6.11. *Nếu $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_k$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ của A thì nghiệm tổng quát của hệ (3.1) có dạng*

$$\underline{U}_n = \alpha_1\lambda_1^n\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k^n\underline{v}_k,$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ là các số thuộc trường K.

Để minh họa định nghĩa, ta tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình sai phân tuyến tính

$$\underline{U}_{n+1} = A\underline{U}_n$$

trong đó ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: với

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Trường hợp 2: với

$$A = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Đối với trường hợp 1, ta có

Giá trị riêng của A là $\lambda_{1,2} = e^{\pm it}$.

Gọi $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ là véc tơ riêng của A tương ứng giá trị riêng λ. Ta có

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin t \\ i\sin t \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ -i\sin t \end{pmatrix} (t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

Nghiệm tổng quát của hệ có dạng

$$\begin{aligned} \underline{U}_n &= \alpha_1\lambda_1^n\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\underline{v}_2 \\ &= \alpha_1 e^{itn}\begin{pmatrix} \sin t \\ i\sin t \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-itn}\begin{pmatrix} \sin t \\ -i\sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin t(\alpha_1 e^{itn} + \alpha_2 e^{-itn}) \\ i\sin t(\alpha_1 e^{itn} - \alpha_2 e^{-itn}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Đối với trường hợp 2, bằng phương pháp tương tự ta tính được nghiệm tổng quát của hệ là

$$\underline{U}_n = \sinh t \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{nt} + \alpha_2 e^{-nt}) \\ \alpha_1 e^{nt} - \alpha_2 e^{-nt}) \end{pmatrix}.$$

Đối với một số tích phân suy rộng, nếu chỉ sử dụng phương pháp tích phân quen thuộc thì bài toán có thể rất phức tạp. Bằng việc áp dụng hệ phương trình sai phân tuyến tính, ta có thể dễ dàng tính được các tích phân đó.

Ví dụ 6.34. *Tính các tích phân sau*

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} \sin x dx, \qquad K_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} \cos x dx.$$

Tích phân từng phần : Đặt

$$u = x^n e^{-x}, \quad dv = \sin x dx,$$

ta có

$$\begin{aligned} I_n &= nK_{n-1} - K_n, \\ K_n &= -nI_{n-1} + I_n. \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} I_n + K_n &= nK_{n-1}, \\ I_n - K_n &= nI_{n-1} \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n}{2}(I_{n-1} + K_{n-1}), \quad I_0 = \frac{n}{2} \\ K_n &= \frac{n}{2}(-I_{n-1} + K_{n-1}), \quad K_0 = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Đổi biến

$$I_n = \frac{n!x_n}{2}, \quad K_n = \frac{n!y_n}{2},$$

ta được hệ

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \quad x_0 = \frac{n}{2} \\ y_n &= -x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_0 = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Hệ này tương đương với hệ

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n, \quad x_0 = \frac{n}{2} \\ y_{n+1} &= -x_n + y_n, \quad y_0 = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Ta viết hệ trên dưới dạng

$$\underline{U}_{n+1} = A\underline{U}_n,$$

với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{U}_0 = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix}.$$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A tương ứng với các giá trị riêng λ_1, λ_2 là

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{aligned} \underline{U}_n &= \begin{pmatrix} \alpha_1(1+i)^n + \alpha_2(1-i)^n \\ \alpha_1 i(1+i)^n - \alpha_2 i(1-i)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sqrt{2})^n((\alpha_1+\alpha_2)\cos\frac{n\pi}{4} + i(\alpha_1-\alpha_2)\sin\frac{n\pi}{4}) \\ (\sqrt{2})^n((\alpha_1-\alpha_2)i\cos\frac{n\pi}{4} - (\alpha_1+\alpha_2)\sin\frac{n\pi}{4}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sqrt{2})^n(\alpha\cos\frac{n\pi}{4} + i\beta\sin\frac{n\pi}{4}) \\ (\sqrt{2})^n(\beta i\cos\frac{n\pi}{4} - \alpha\sin\frac{n\pi}{4}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} x_n &= (\sqrt{2})^n(\alpha\cos\frac{n\pi}{4} + i\beta\sin\frac{n\pi}{4}) \\ y_n &= (\sqrt{2})^n(\beta i\cos\frac{n\pi}{4} - \alpha\sin\frac{n\pi}{4}) \end{aligned}$$

Cho $n = 0$ *ta được* $\alpha = \frac{1}{2}, \beta i = \frac{1}{2}$, *do đó*

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}) \\ y_n &= \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}). \end{aligned}$$

Vậy,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n!(\sqrt{2})^n}{2^{n+1}}(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}) \\ K_n &= \frac{n!(\sqrt{2})^n}{2^{n+1}}(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}). \end{aligned}$$

Đối với một số bài toán khó của số học, ta cũng có thể giải quyết bằng cách áp dụng hệ phương trình sai phân tuyến tính. Để minh học điều này, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 6.35. *Cho* $n, k \in Z^+$. *Chứng minh rằng với* $(x_0, y_0), x_0, y_0 \in Z^+$, *tồn tại duy nhất* $(x_n, y_n), x_n, y_n \in Z^+$ *thỏa mãn*

$$(x_0 + y_0\sqrt{k})^n = x_n + y_n\sqrt{k} \tag{3.2}$$

$$(x_0 - y_0\sqrt{k})^n = x_n - y_n\sqrt{k}. \tag{3.3}$$

Từ đó suy ra rằng: Nếu phương trình $x^2 - ky^2 = 1, k \in Z^+$ *có nghiệm nguyên dương với k nào đó thì nó có vô số nghiệm nguyên dương.*

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Ta chỉ cần chứng minh (3.2) còn (3.3) chứng minh tương tự.

Thật vậy, với $n = 1$ *thì* (3.2) *đúng.*

Giả sử (3.2) *đúng với* n *tức là*

$$(x_0 + y_0\sqrt{k})^n = x_n + y_n\sqrt{k},$$

ta chứng minh (3.2) đúng với $n + 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}(x_0+y_0\sqrt{k})^{n+1} &= (x_0+y_0\sqrt{k})^n(x_0+y_0\sqrt{k})\\ &= x_nx_0+ky_ny_0+(y_nx_0+x_ny_0)\sqrt{k}\\ &= x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{k},\end{aligned}$$

từ đó ta có

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_0x_n+ky_0y_n \in Z^+\\ y_{n+1} &= y_0x_n+x_0y_n \in Z^+.\end{aligned}$$

Chứng minh tính duy nhất:

Giả sử tồn tại $(x_n^{'}, y_n^{'})$, $x_n^{'}, y_n^{'} \in Z^+$ *thỏa* (3.1). *Khi đó ta có*

$$x_n+y_n\sqrt{k} = x_n^{'}+y_n^{'}\sqrt{k} \Leftrightarrow x_n-x_n^{'} = (y_n^{'}-y_n)\sqrt{k}.$$

Giả sử $y_n \neq y_n^{'}$ *suy ra* $\frac{x_n-x_n^{'}}{y_n^{'}-y_n} = \sqrt{k}$, *nhưng do* k *không chính phương nên ta có điều mâu thuẫn. Vậy,* $y_n^{'} = y_n$ *và do đó* $x_n^{'} = x_n$.

Ta giả thiết k *không chính phương vì nếu* k *chính phương thì* $k=\ell^2$ *suy ra*

$$x^2-ky^2=1 \Leftrightarrow x^2-\ell^2y^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}x-\ell y &= \pm 1\\ x+\ell y &= \pm 1\end{aligned}$$

từ đây ta có

$$\begin{aligned}x &= \pm 1\\ y &= 0\end{aligned}$$

do đó k *không thỏa giả thiết của bài toán.*

Bây giờ giả sử phương trình

$$x^2-ky^2=1, k\in Z^+$$

có nghiệm nguyên dương $(x_0, y_0), x_0, y_0 \in Z^+$. *Khi đó*

$$x_0^2 - ky_0^2 = 1 \Leftrightarrow (x_0 + \sqrt{k}y_0)(x_0 - \sqrt{k}y_0) = 1.$$

Với mọi $n \in Z^+$ *ta có*

$$\begin{aligned} & (x_0 + \sqrt{k}y_0)^n (x_0 - \sqrt{k}y_0)^n = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & (x_n + y_n\sqrt{k})(x_n - y_n\sqrt{k}) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_n^2 - ky_n^2 = 1. \end{aligned}$$

Rõ ràng, (x_n, y_n) *là nghiệm của phương trình* $x^2 - ky^2 = 1, k \in Z^+$.

Ví dụ 6.36. *Đa thức Chebyshev được định nghĩa như sau:*

Với $x = \cos\theta$ *ta đặt* $T_n(x) = \cos n\theta$ *và* $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ *là các đa thức Chebyshev loại I và loại II. Chúng là nghiệm của các phương trình sai phân sau:*

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}, T_0 = 1, T_1 = x \tag{3.4}$$

và

$$U_{n+1} = 2xU_n - U_{n-1}, U_0 = 1, U_1 = 2x. \tag{3.5}$$

Phương trình (3.4) tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2xT_n - S_n \\ S_{n+1} &= T_n. \end{aligned}$$

Ta viết lại hệ này dưới dạng

$$\underline{U}_{n+1} = A\underline{U}_n,$$

trong đó

$$\underline{U}_n = \begin{pmatrix} T_n \\ S_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giá trị riêng của A *là* $\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

Gọi $\underline{v}$ *là véc tơ riêng của* A *tương ứng với các giá trị riêng* λ_1, λ_2, *ta có*

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x - \sqrt{x^2-1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x + \sqrt{x^2-1} \end{pmatrix}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình sai phân tuyến tính có dạng

$$\underline{U}_n = \alpha_1\lambda_1^n\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\underline{v}_2$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1(x+\sqrt{x^2-1})^n + \alpha_2(x-\sqrt{x^2-1})^n \\ \alpha_1(x+\sqrt{x^2-1})^n(x-\sqrt{x^2-1}) + \alpha_2(x-\sqrt{x^2-1})^n(x+\sqrt{x^2-1}) \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta có

$$T_n = \alpha_1(x+\sqrt{x^2-1})^n + \alpha_2(x-\sqrt{x^2-1})^n.$$

Cho n *bằng* 0 *và bằng* 1 *ta thu được*

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1(x+\sqrt{x^2-1}) + \alpha_2(x-\sqrt{x^2-1}) &= x, \end{aligned}$$

từ đó ta tìm được $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy,

$$T_n = \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-1})^n + \frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-1})^n.$$

Phương trình (3.5) tương đương với hệ

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2xU_n - R_n \\ R_{n+1} &= U_n, \end{aligned}$$

từ đó ta có ngay

$$U_n = \beta_1(x+\sqrt{x^2-1})^n + \beta_2(x-\sqrt{x^2-1})^n.$$

Cho n *bằng* 0 *và bằng* 1 *ta thu được*

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$\beta_1(x+\sqrt{x^2-1})+\beta_2(x-\sqrt{x^2-1}) \;=\; 2x,$$

từ đó ta tìm được

$$\beta_1 = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}, \qquad \beta_2 = -\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

Do đó

$$U_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

6.5 Hệ phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng

Xét hệ phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

$$\underline{u}_{n+1} = A\underline{u}_n + \underline{b}_n, \tag{3.6}$$

trong đó A là ma trận vuông cỡ $k\times k$, $\underline{u}_0$ là véc tơ cho trước, $\underline{b}_n$ là vế phải của hệ.

Dễ thấy nghiệm của (3.6) có dạng

$$\underline{u}_n = A^n\underline{u}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} A^{n-j-1}\underline{b}_j.$$

Vấn đề là ta cần tính A^n. Để giải quyết vấn đề này, chúng tôi xin giới thiệu một số phương pháp như sau:

Sử dụng định lý Caley-Hamilton

Gọi

$$\begin{aligned} c(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \\ &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_2) \end{aligned}$$

là đa thức đặc trưng của A.

Theo định lý Caley-Hamilton thì $c(A)=0$, hay

$$A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \cdots + c_1A + c_0I = (A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)\cdots(A-\lambda_kI) = 0.$$

Ta có các định lý sau dùng để tính A^n.

Định lý 6.12. *Cho* $(A)_{k\times k}$ *là ma trận không suy biến;* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ *là các giá trị riêng của* A*. Đặt* $M(0) = I,\ M(j) = \prod\limits_{i=1}^{j}(A-\lambda_i I),\ j \geq 1$*. Nếu* $x_j(n),\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$ *thỏa mãn*

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= \lambda_1 x_1(n),\ x_1(0) = 1;\\ x_{j+1}(n+1) &= \lambda_{j+1}u_{j+1}(n) + x_j(n),\ x_{j+1}(0) = 0,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1, \end{aligned}$$

thì $A^n = \sum\limits_{j=0}^{k-1} x_{j+1}(n)M(j)$*.*

Chứng minh: Ta có

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \lambda^n;\\ x_{j+1}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{j+1}^{n-i-1}x_j(i),\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1;\ M(k) = 0. \end{aligned}$$

Đặt

$$\Phi(n) = \sum_{j=0}^{k-1} x_{j+1}(n)M(j).$$

Ta cần chứng minh

$$\Phi(I) = 0,\ \Phi(n+1) = A\Phi(n).$$

Rõ ràng

$$\Phi(0) = \sum_{j=0}^{k-1} x_{j+1}(0)M(j) = x_1(0)M(0) = I.$$

Ta có

$$\Phi(n+1) - A\Phi(n) = \sum_{j=0}^{k-1} x_{j+1}(n+1)M(j) - \sum_{j=0}^{k-1} x_{j+1}(n)AM(j).$$

Vì

$$AM(j) = (A - \lambda_{j+1}I + \lambda_{j+1}I)\,M_j = M(j+1) + \lambda_{j+1}M_j,$$

nên

$$\Phi(n+1) - A\Phi(n) = \sum_{j=0}^{k-1}(x_{j+1}(n) - \lambda_{j+1}x_{j+1}(n))M(j) - \sum_{j=0}^{k-1} x_{j+1}(n)M(j+1).$$

Mặt khác, ta có

$$\sum_{j=0}^{k-1} x_{j+1}(n)M(j+1) = \sum_{i=1}^{k} x_i(n)M(i) = \sum_{j=1}^{k-1} x_j(n)M(j),$$

do đó

$$\begin{aligned}\Phi(n+1) - A\Phi(n) &= (x_1(n+1) - \lambda_1 u_1(n)) \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} (x_{j+1}(n) - \lambda_{j+1}(n) - x_j(n))M(j) = 0.\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 6.37. *Xét*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$c(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3),\ u_1(n) = \lambda_1^n,\ u_{j+1}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{j+1}^{n-j-1} u_j(i).$$

Do đó

$$\begin{aligned} u_1(n) &= 2^n, \\ u_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1}2^i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1} = n2^{n-1}, \\ u_3(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-i-1} i 2^{i-1} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} i \left(\frac{2}{3}\right)^1 = -2^n + 3^n - n2^{n-1}. \end{aligned}$$

Vậy

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} - 3^n - n2^{n-1} & n2^{-1} & -2^n + 3^n \\ 2^n - 3^n - n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 23^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n + 23^n \end{pmatrix}.$$

Định lý 6.13. *Cho* $(A)_{k\times k}$ *là ma trận không suy biến,*

$$c(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

là đa thức đặc trưng của $A, z(n)$ *là nghiệm của phương trình sai phân*

$$z(n+k) + c_{k-1}z(n+k-1) + \cdots + c_1 z(n+1) + c_0 z(n) = 0,$$

với $z(0) = z(1) = \cdots = z(k-2) = 0,\ z(k-1) = 1;\ q_1(n),\ q_2(n), \cdots, q_k(n)$ *thỏa*

$$\begin{pmatrix} q_1(n) \\ . \\ . \\ . \\ q_k(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & . & . & . & c_{k-1} & 1 \\ c_2 & . & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & & & & & . & . \\ . & & & & & & . \\ c_{k-1} & 1 & . & & & & . \\ 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(n) \\ . \\ . \\ . \\ z(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$A^n = \sum_{j=0}^{k-1} q_{j+1}(n)A^j.$$

Chứng minh: Đặt

$$\psi(n) = \sum_{i=0}^{k-1} q_{j+1}(n)A^j.$$

Ta cần chứng minh

$$\psi(0) = I,\ \psi(n+1) = A\psi(n).$$

Ta có

$$\psi(0) = \sum_{j=0}^{k-1} q_{j+1}(0)A^j = q_1(0)A^0 = I.$$

Từ giả thiết ta có

$$q_1(n+1) = c_1 z(n+1) + c_2 z(n+2) + \cdots + c_(k-1)z(n+k-1) + z(n+k) = -c_0 z(n),$$

suy ra

$$q_1(n+1) + c_0 z(n) = 0.$$

Tương tự

$$q_2(n+2) + c_1 z(n+1) = q_1(n+1)$$

$$\begin{array}{c}.\\.\\.\end{array}$$

$$q_k(n+k) + c_{k-1} z(n+k-1) = q_k(n+k-1).$$

Vì $q_k(n) = z(n)$ nên

$$q_1(n+1) + c_0 q_k(n) = 0$$

$$q_2(n+1) + c_1 q_k(n) = q_1(n)$$

$$\begin{array}{c}.\\.\\.\end{array}$$

$$q_k(n+1) + c_{k-1} q_k(n) = q_{k-1}(n).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \psi(n+1) - A\psi(n) = \\ = \;& q_1(n+1)I + \left(-c_1 q_k(n) A^1 - \cdots - c_{k-1} q_k(n) A^{k-1}\right) - q_k(n) A^k \\ = \;& q_1(n+1)I - q_k(n)\left(c_1 A^1 + \cdots + c^{k-1} A^{k-1}\right) - q_k(n) A^n \\ = \;& q_1(n+1)I + c_0 q^k I = 0. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 6.38. *Xét*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$c(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12.$$

Phương trình

$$z(n+3) - 7z(n+2) + 16z(n+1) - 12z(n) = 0,\ z(0) = z(1) = 0,\ z(2) = 1$$

có nghiệm là $z(n) = -(2+n)2^{n-1} + 3^n$. *Khi đó*

$$q_1(n) = -3(1+n)2^n + 43^n$$

$$q_2(n) = (8+5n)2^{n-1} - 4.3^n$$

$$q_3(n) = -(2+n)2^{n-1} + 3^n.$$

Ta tính được

$$A^0 = I,\ A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -9 & 8 & 5 \\ -14 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$A^n = \sum_{j=0}^{2} q_{j+1}(n)A^j = \begin{pmatrix} 2^{n-1} - 3^n - n2^{n-1} & n2^{-1} & -2^n + 3^n \\ 2^n - 3^n - n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 23^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n + 23^n \end{pmatrix}.$$

Định lý 6.14. *Cho* $(A)_{k\times k}$ *là ma trận không suy biến,*

$$c(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

là đa thức đặc trưng của A. *Giả sử* $y_1(n),\ y_2(n),\ \cdots,\ y_k(n)$ *là các nghiệm của phương trình* $c(E)y(n) = 0$. *Nếu* $\{(y_1(n),\ y_2(n),\ \cdots,\ y_k(n))\}$ *là tập độc lập tuyến tính thì tồn tại các ma trận* $E_1,\ E_2,\ E_k$ *sao cho*

$$A^n = y_1(n)E_1 + \cdots + y_k(n)E_k.$$

Chứng minh: Xét hệ

$$\begin{cases} I & = & y_1(0)E_1 & + & . & . & . & + & y_k(0)E_k \\ A & = & y_1(1)E_1 & + & . & . & . & + & y_k(1)E_k \\ . \\ . \\ . \\ A^{k-1} & = & y_1(k-1)E_1 & + & . & . & . & + & y_{k-1}E_k. \end{cases}$$

Vì

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & . \ . \ . & y_k(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & . \ . \ . & y_k(1) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ y_1(k-1) & y_2(k-1) & . \ . \ . & y_k(k-1) \end{vmatrix} \neq 0$$

nên hệ trên có nghiệm duy nhất $(E_1, E_2, \cdots, E_k)$ thỏa

$$A^n = y_1(n)E_1 + \cdots + y_k(n)E_k.$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 6.39. *Xét*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = \sum_{j=1}^{3} y_j(n)E_j,$$

trong đó

$$y_1(n) = 2^n,\ y_2(n) = n2^{n-1},\ y_3(n) = 3^n,$$

E_1, E_2, E_3 *là nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} I &= y_1(0)E_1 + y_2(0)E_2 + y_3(0)E_3 \\ A &= y_1(1)E_1 + y_2(1)E_2 + y_3(1)E_3 \\ A^2 &= y_1(2)E_1 + y_2(2)E_2 + y_3(2)E_3, \end{cases}$$

suy ra

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} - 3^n - n2^{n-1} & n2^{-1} & -2^n + 3^n \\ 2^n - 3^n - n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 23^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n + 23^n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 6.40. *Xét*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -19 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = \sum_{j=1}^{3} y_j(n) E_j,$$

trong đó

$$y_1(n) = 1^n,\ y_2(n) = 3^n,\ y_3(n) = 4^n,$$

E_1, E_2, E_3 *là nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} I &= E_1 + E_2 + E_3 \\ A &= E_1 + 3E_2 + 4E_3 \\ A^2 &= E_1 + 9E_2 + 16E_3, \end{cases}$$

Dễ kiểm tra được

$$D = 6; D_{E_1} = A^2 - 7A + 12I; D_{E_2} = -3A^2 + 15A - 12I; D_{E_3} = 2A^2 - 8A + 6I;$$

trong đó

$$A^2 = \begin{pmatrix} 45 & -140 & 96 \\ 8 & -19 & 12 \\ 1 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Do đó

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{7}{6} & 2 \\ \frac{1}{6} & -\frac{7}{6} & 2 \\ \frac{1}{6} & -\frac{7}{6} & 2 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -18 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{64}{3} & 16 \\ \frac{4}{3} & -\frac{16}{3} & 4 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{9\cdot 3^n}{2} + \frac{16\cdot 4^n}{3} & -\frac{7}{6} + \frac{45\cdot 3^n}{2} - \frac{64\cdot 4^n}{3} & 2 - 18\cdot 3^n + 16\cdot 4^n \\ \frac{1}{6} - \frac{3\cdot 3^n}{2} + \frac{4\cdot 4^n}{3} & -\frac{7}{6} + \frac{15\cdot 3^n}{2} - \frac{16\cdot 4^n}{3} & 2 - 6\cdot 3^n + 4\cdot 4^n \\ \frac{1}{6} - \frac{3^n}{2} + \frac{4^n}{3} & -\frac{7}{6} + \frac{5\cdot 3^n}{2} - \frac{4\cdot 4^n}{3} & 2 - 2\cdot 3^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

Định lý 6.15. *Cho* $(A)_{k\times k}$ *là ma trận không suy biến, khi đó ma trận* A *được phân tích duy nhất dưới dạng* $A = S + N$, *(trong đó* $SN = NS$, S *nửa đơn,* N *lũy linh) và*

$$A^n = (S+N)^n = S^n + \binom{n}{1} S^{n-1}N + \binom{2}{2} S^{n-2}N^2 + \cdots + \\ + \binom{n}{k-1} S^{n-k+1}N^{k-1}.$$

Chứng minh: Ta viết $c(\lambda)$dưới dạng

$$c(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \mu_i)^{n_i},\ n_i \geq 1,\ n_1 + n_2 + \cdots + n_s = k.$$

Khi đó ta có thể phân tích $c(\lambda)^{-1}$ như sau

$$\frac{1}{c(\lambda)} = \frac{c_1(\lambda)}{(\lambda - \mu_1)^{n_1}} + \frac{c_2(\lambda)}{(\lambda - \mu_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{c_s(\lambda)}{(\lambda - \mu_s)^{n_s}}.$$

Xét đa thức

$$f_i(\lambda) = c_i(\lambda) \prod_{j \neq i} (\lambda - \mu_j)^{n_j},$$

khi đó

$$1 = f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + \cdots + f_s(\lambda).$$

Và với $F_i = f_i(A)$ ta có các hệ thức sau

$$F_1 + F_2 + \cdots Fs = I,\ F_iF_j = F_jF_i = 0,\ F_i^2 = F_i.$$

Đặt

$$S = \sum_{i=1}^{s} \mu_i F_i,\ N = A - S.$$

Ta có

$$A = S + N,\ SN = NS,\ N^k = 0,\ S \text{ nửa đơn}.$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 6.41. *Xét*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$\frac{1}{c(\lambda)} = \frac{1-\lambda}{(\lambda-2)^2} + \frac{1}{\lambda - 3}.$$

$$1 = (1-\lambda)(\lambda-3) + (\lambda-2)^2 = f_1(\lambda) + f_2(\lambda),\ F_i = f_1(A).$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$S = 2F_1 + 3F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ N = A - S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N^2 = 0,\ SN = NS = 2N,\ A^n = S^n + n2^{n-1}N.$$

Tính luỹ thừa của ma trận Jordan

Ta biết rằng, với ma trận A đã cho luôn tồn tại ma trận Q không suy biến sao cho $\Lambda = QAQ^{-1}$ là ma trận Jordan. Viết phương trình (3.6) dưới dạng

$$Q\underline{u}_{n+1} = QAQ^{-1}Q\underline{u}_n + Q\underline{b}_n, \tag{3.7}$$

Đặt $\underline{v}_n = Q\underline{u}_n$ ta được

$$\underline{v}_{n+1} = \Lambda^n \underline{v}_0 + Q\sum_{j=0}^{\infty} A^{n-j-1}\underline{b}_j.$$

Trước hết ta nhắc lại cách đưa một ma trận về ma trận Jordan.

Tìm đa thức đặc trưng $A - \lambda I$ và số đặc trưng của ma trận A cấp n đã cho. Giả sử λ_i là nghiệm đặc trưng bội m_i.

Đối với mỗi nghiệm đặc trưng λ_i bội m_i ta tìm các ô Jordan tương ứng với nó (số lượng và cỡ của chúng). Số các ô Jordan tương ứng với giá trị riêng λ_i bằng $n - r_i$, với r_i là hạng của ma trận $A - \lambda_i I$. Như vậy, nếu $n - r_i = m_i$ thì λ_i tương ứng với m_i ô dạng $J_i(\lambda_i)$. Nếu $n - r_i < m_i$ thì λ_i tương ứng với g_h ô dạng $J_h(\lambda_i)$, với

$$g_h = r_{(A-\lambda_i I)^{h-1}} - 2r_{(A-\lambda_i I)^h} + r_{(A-\lambda_i I)^{h+1}}, h = 1, 2, \cdots, \ell; \quad \sum_{h=1}^{\ell} = m_i.$$

Đặc biệt, nếu λ_i là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì có một ô Jordan $J_i(\lambda_i)$ tương ứng với nghiệm đó.

Tiếp theo ta nhắc lại cách tìm ma trận Q đưa một ma trận đã cho về dạng Jordan.

Nếu ma trận A cấp n được dẫn đến dạng chéo $\Lambda = Q^{-1}AQ$ thì các toạ độ của n véc tơ riêng độc lập tuyến tính của ma trận A là các cột của ma trận Q.

Nếu dạng Jordan của ma trận A không là dạng chéo thì ta căn cứ vào nguyên tắc sau: Nếu f là ánh xạ tuyến tính mà ma trận của nó trong cơ sở $\{e_1, \cdots, e_n\}$ là A, còn $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ là cơ sở mà trong đó ánh xạ f có ma trận Jordan Λ, thì ma trận Q là ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, \cdots, e_n\}$ đến cơ sở $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$.

Từ nhận xét trên, ta rút ra các bước như tìm Q như sau:

- Tìm dạng Jordan của ma trận đã cho;
- Tìm toạ độ của các véc tơ cơ sở $e'_1, \cdots, e'_n$ trong cơ sở $\{e_1, \cdots, e_n\}$;
- Tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, \cdots, e_n\}$ đến cơ sở $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$.

Ví dụ 6.42. *Tìm ma trận Q đưa ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

về dạng Jordan.

- Dễ thấy đa thức đặc trưng của A có 2 nghiệm là $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$. Do đó dạng Jordan của A là

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Hai véc tơ riêng u, v của A tương ứng với $\lambda = 2, \lambda = 3$ là $u = (2b, b), v = (3a, a), a, b \in \mathbb{R}$.

Do đó ta có

$$Q = \begin{pmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 6.43. *Tìm ma trận Q đưa ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

về dạng Jordan.

- Dạng Jordan của A là

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Từ ma trận Λ *ta có*

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= 2e'_1 \\ f(e'_2) &= -2e'_1 \\ f(e'_3) &= e'_2 - 2e'_3 \end{aligned}$$

Do đó e'_1 *là véc tơ riêng của* A *tương ứng với giá trị riêng* 2*. Toạ độ* x_1, x_2, x_3 *của* e'_1 *trong cơ sở* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *là nghiệm của hệ* $\begin{cases} -3x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$ *Ta nhận được* $e'_1 = 0e_1 + ke_2 + 0e_3$*. Dễ thấy* e'_2 *là véc tơ riêng của* A *tương ứng với giá trị riêng* -2*. Tương tự, ta tìm được* $e'_2 = -te_1 + 0e_2 + te_3$*. Giả sử* $z = (z_1, z_2, z_3)$ *là toạ độ của* e'_3*. Khi đó*

$$Az = (-t, 0, t) - 2(z_1, z_2, z_3),$$

từ đó suy ra

$$e'_3 = (-t - s)e_1 + 0e_2 + se_3; s, t \in \mathbb{R}, |s| + |t| \neq 0.$$

Vậy

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -t & -s-t \\ k & 0 & 0 \\ 0 & t & s \end{pmatrix}.$$

Bài tập

1. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình sai phân thuần nhất

$$\underline{u}_{n+1} = A\underline{u}_n$$

với ma trận A được cho bởi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình sai phân không thuần nhất

$$\underline{u}_{n+1} = A\underline{u}_n + \underline{b}_n,$$

với ma trận A và véc tơ $\underline{b}_n$ cho bởi

a. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2k \\ 4^k \end{pmatrix}.$

b. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5^{k+1} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}.$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2^k \end{pmatrix}.$

6.6 Một số lớp phương trình sai phân phi tuyến có chậm

Xét phương trình sai phân phi tuyến dạng

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.5}$$

trong đó $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0$ là các số cho trước, $F \in C\left[I^{k+1}, I\right]$, với I là khoảng số thực và k là số nguyên dương cho trước.

Định nghĩa 6.6. *Một dãy số thực $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ được gọi là nghiệm của phương trình (4.5) nếu nó thỏa mãn (4.5) với mọi $n = 0, 1, \cdots$.*

Cho trước $(k+1)$ số thực a_i, $i = -k, -k+1, \cdots, 0$ thì phương trình (4.5) có nghiệm duy nhất $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $x_i = a_i$, $i = -k, -k+1, \cdots, 0$.

Định nghĩa 6.7. *Một nghiệm $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ của phương trình (4.5) được gọi là nghiệm dương nếu $x_n > 0$, $\forall n$.*

Định nghĩa 6.8. *Một nghiệm dương* $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ *của phương trình* (4.5) *được gọi là giới nội ngặt nếu*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \inf x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup x_n < \infty.$$

Định nghĩa 6.9. *Một dãy* (x_n) *được gọi là dao động xung quanh điểm 0 hay đơn giản là dao động nếu các số hạng không đồng thời dương hoặc không đồng thời âm. Ngược lại, ta nói dãy* (x_n) *không dao động.*

Một dãy (x_n) *được gọi là dao động ngặt nếu* $\forall n_0 \geq 0$, $\exists n_1, n_2 \geq n_0$ *sao cho* $x_{n_1}.x_{n_2} < 0$.

Một dãy (x_n) *được gọi là dao động xung quanh* $\bar{x}$ *nếu dãy* $(x_n - \bar{x})$ *dao động.*

Một dãy (x_n) *được gọi là dao động ngặt xung quanh* $\bar{x}$ *nếu dãy* $(x_n - \bar{x})$ *dao động ngặt.*

Định nghĩa 6.10. *Cho* I *là khoảng số thực,* $\bar{x} \in I$ *được gọi là điểm cân bằng của phương trình* (4.5) *nếu* $\bar{x} = F(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})$.

i) Điểm cân bằng $\bar{x}$ *của phương trình* (4.5) *được gọi là ổn định địa phương nếu* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *sao cho mỗi nghiệm với điều kiện ban đầu* $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in (\bar{x} - \delta; \bar{x} + \delta)$ *thì* $x_n \in (\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Điểm cân bằng $\bar{x}$ *của phương trình* (4.5) *được gọi là ổn định tiệm cận địa phương nếu nó ổn định địa phương và nếu* $\exists \gamma > 0$ *sao cho với* $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in I$ *mà* $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in (\bar{x} - \gamma; \bar{x} + \gamma)$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

iii) Điểm cân bằng $\bar{x}$ *của phương trình* (4.5) *được gọi là hút toàn cục nếu mọi nghiệm* $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ *của phương trình* (4.5) *đều hội tụ đến* $\bar{x}$ *khi* $n \to \infty$.

iv) Điểm cân bằng $\bar{x}$ *của phương trình* (4.5) *được gọi là ổn định tiệm cận toàn cục nếu nó ổn định địa phương và hút toàn cục.*

v) Phương trình

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_{n-i}} (\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})\, y_{n-i}, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

được gọi là phương trình tuyến tính liên kết với phương trình (4.5) *xung quanh điểm cân bằng* $\bar{x}$*.*

vi) Phương trình

$$\lambda^{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_{n-i}} (\bar{x},\, \bar{x},\, \cdots,\, ,\, \bar{x})\, \lambda^{n-i}, \qquad n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

được gọi là phương trình đặc trưng liên kết với phương trình (4.5)*.*

Định nghĩa 6.11. *Giả sử* $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ *là một nghiệm dương của phương trình* (4.5)*. Khi đó ta gọi:*

i) Một nửa chu trình dương của một nghiệm $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ *của phương trình* (4.5) *xung quanh điểm cân bằng* $\bar{x}$ *là một dãy* $(x_l,\, x_{l+1},\, \cdots,\, x_m)$ *sao cho tất cả* $x_i \geq \bar{x}$, $i = l,\, l+1,\, \cdots,\, m$ *và sao cho hoặc là*

$$\ell = -k \text{ hay } \ell > -k \text{ và } x_{\ell-1} < \overline{x},$$

và hoặc là

$$m = \infty \text{ hay } m < \infty \text{ và } x_{m+1} < \overline{x}.$$

ii) Một nửa chu trình âm của một nghiệm $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ *của phương trình* (4.5) *xung quanh điểm cân bằng* $\bar{x}$ *là một dãy* $(x_l,\, x_{l+1},\, \cdots,\, x_m)$ *sao cho tất cả* $x_i < \bar{x}$, $i = l,\, l+1,\, \cdots,\, m$ *với*

$$\ell = -k \text{ hay } \ell > -k \text{ và } x_{\ell-1} \geqslant \overline{x},$$

và hoặc là

$$m = \infty \text{ hay } m < \infty \text{ và } x_{m+1} \geqslant \overline{x}.$$

Định nghĩa 6.12. *Nửa chu trình đầu tiên của một nghiệm là nửa chu trình bắt đầu với số hạng* x_{-k} *và nó dương nếu* $x_{-k} \geq \bar{x}$*, nó âm nếu* $x_{-k} < \bar{x}$*.*

Mệnh đề 6.1. *Cho $F \in C\left[I^{k+1}, I\right]$ (I là khoảng số thực tùy ý), $k \in \mathbb{N}^*$. Gọi $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là một nghiệm bị chặn của phương trình (4.5). Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = J \in I$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = S \in I$. Khi đó tồn tại hai dãy $(J_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ và $(S_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ thỏa mãn phương trình sai phân (4.5) với mọi $n \in \mathbb{Z}$ mà $J_0 = J$, $S_0 = S$; $J_n, S_n \in [J; S]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ và với mỗi $N \in \mathbb{Z}$ thì J_N, S_N là hai điểm giới hạn của dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$.*

Hơn nữa, với mỗi $m \leqslant -k$, tồn tại hai dãy con (x_{r_n}) và (x_{l_n}) của nghiệm $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ thỏa $\lim\limits_{n\to\infty} x_{r_n+N} = J_N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{l_n+N} = S_N$, với mọi $N \geq m$.

Ví dụ 6.44. *Xét phương trình sai phân*

$$x_{n+1} = x_n, \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.6}$$

với điều kiện ban đầu x_0. Khi đó điểm cân bằng $\bar{x} = 0$ là ổn định địa phương, nhưng không ổn định tiệm cận địa phương.

Thật vậy, nghiệm của phương trình (4.6) có dạng $x_n = c$, $c \in \mathbb{R}$. Do đó $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ sao cho bất kỳ nghiệm $x_n = c$ thỏa $|x_0 - 0| = |c| < \delta$, ta có $|x_n - 0| = |c| < \delta = \varepsilon$.

Điểm cân bằng $\bar{x} = 0$ không ổn định tiệm cận địa phương vì có số $\delta > 0$ (không phụ thuộc ε) và nghiệm $x_n = c$ sao cho $|x_0| < \delta$ nhưng x_n không hội tụ về 0.

Ví dụ 6.45. *Xét phương trình sai phân*

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n, \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.7}$$

với điều kiện ban đầu x_0. Khi đó điểm cân bằng $\bar{x} = 0$ là ổn định tiệm cận toàn cục.

Thật vậy, nghiệm của phương trình (4.7) có dạng $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0 = 0$.

Và điểm cân bằng $\bar{x} = 0$ là ổn định địa phương. Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, sao cho với nghiệm $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0$ thỏa mãn $|x_0 - 0| = |x_0| < \varepsilon$ thì $|x_n - 0| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n x_0\right| \leqslant |x_0| < \delta = \varepsilon$.

Mệnh đề sau thường được sử dụng để khảo sát tính ổn định địa phương của nghiệm phương trình (4.5) trong trường hợp $k = 1$.

Mệnh đề 6.2. *Xét phương trình*

$$x_{n+1} = F\left(x_n, x_{n-1}\right), \quad n = 0, 1, \cdots. \tag{4.8}$$

Giả sử $\bar{x}$ là điểm cân bằng của phương trình (4.8) và phương trình đặc trưng liên kết với phương trình (4.8) có dạng

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0. \tag{4.9}$$

Khi đó

i) Nếu hai nghiệm của phương trình (4.9) nằm trong hình tròn đơn vị $|\lambda| < 1$ thì điểm cân bằng $\bar{x}$ là ổn định tiệm cận địa phương.

ii) Nếu có ít nhất một nghiệm của phương trình (4.9) có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1 thì $\bar{x}$ không ổn định.

iii) Điều kiện cần và đủ để hai nghiệm của phương trình (4.9) nằm trong hình tròn đơn vị $|\lambda| < 1$ là $|r| < 1 - s < 2$.

iv) Điều kiện cần và đủ để một nghiệm của phương trình (4.9) có giá trị tuyệt đối bé hơn 1 và nghiệm còn lại có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1 là $r^2 > -4s$ và $|r| > |1 - s|$.

v) Điều kiện đủ để hai nghiệm của phương trình (4.9) nằm trong hình tròn đơn vị là $|\lambda| < 1$ là $|r| + |s| < 1$.

Ví dụ 6.46. *Xét phương trình sai phân*

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.10}$$

với điều kiện ban đầu x_{-1}, x_0. Khi đó, điểm cân bằng $\bar{x} = \alpha + 1$ của phương trình là ổn định tiệm cận địa phương nếu $\alpha > 1$, không ổn định tiệm cận nếu $0 < \alpha < 1$.

Thật vậy, ta có phương trình đặc trưng liên kết với phương trình (4.10) xung quanh điểm cân bằng $\bar{x} = \alpha + 1$ là

$$\lambda^2 + \frac{1}{\alpha+1}\lambda - \frac{1}{\alpha+1} = 0. \tag{4.11}$$

Ta có

$$|r| + |s| = \frac{2}{\alpha+1}.$$

Nếu $\alpha > 1$ thì $|r|+|s| < 1$. Do đó, hai nghiệm của phương trình (4.11) nằm trong hình tròn đơn vị $|\lambda| < 1$. Theo Mệnh đề 4.5 thì điểm cân bằng $\bar{x} = \alpha+1$ là ổn định tiệm cận địa phương.

Nếu $\alpha < 1$ thì $|r| + |s| > 1$. Do đó, phương trình (4.11) có ít nhất một nghiệm có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1. Theo Mệnh đề 4.5 thì điểm cân bằng $\bar{x} = \alpha + 1$ là không ổn định tiệm cận.

Ví dụ 6.47. *Xét phương trình sai phân*

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\eta - x_{n-1}}, \;\; n = 0, 1, \cdots, \tag{4.12}$$

trong đó điều kiện ban đầu x_{-1}, x_0; α, β, η là các số thực dương sao cho $\alpha = \frac{(\beta+\eta)^2}{4}$ và $\eta > \beta$. Khi đó, điểm cân bằng của phương trình này là không ổn định.

Thật vậy, xét phương trình xác định điểm cân bằng

$$\bar{x} = \frac{\alpha - \beta\bar{x}}{\eta - \bar{x}},$$

hay

$$(\bar{x})^2 - (\beta + \eta)\,\bar{x} + \alpha = 0,$$

nên
$$\left(\bar{x} - \frac{\beta+\eta}{2}\right)^2 = 0.$$
Do đó
$$\bar{x} = \frac{\beta+\eta}{2}.$$

Phương trình đặc trưng liên kết với phương trình (4.12) xung quanh điểm cân bằng $\bar{x} = \frac{\beta+\eta}{2}$ là
$$\lambda^2 + \frac{2\beta}{\eta-\beta}\lambda - \frac{\eta+\beta}{\eta-\beta} = 0.$$
Đặt $r = -\frac{2\beta}{\eta-\beta}$, $s = \frac{\eta+\beta}{\eta-\beta}$, khi đó $|r| + |s| = \frac{2\beta}{\eta-\beta} + \frac{\eta+\beta}{\eta-\beta} > 1 + \frac{2\beta}{\eta-\beta} > 1$. Theo Mệnh đề 4.5 thì điểm cân bằng $\bar{x} = \frac{\beta+\eta}{2}$ không ổn định.

Về một lớp phương trình sai phân hữu tỷ bậc 1

Trong mục này ta nghiên cứu sự hội tụ của nghiệm phương trình sai phân hữu tỷ bậc một
$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{A + Bx_n}, \tag{4.13}$$
trong đó $n \in \mathbb{N}_0$ và x_0 là số thực không âm cho trước. Trước hết ta xét ví dụ sau:

Xét phương trình
$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}, \quad x_0 = 1.$$

Ta sẽ chứng tỏ $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. Từ đó ta sẽ phát biểu định lý tổng quát về sự hội tụ của những dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn phương trình
$$x_{n+1} = f(x_n)$$
với $x_0 > 0$ cho trước, f là hàm dương, liên tục, nghịch biến trên $[0, \infty)$.

Xét hàm
$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x},$$

ta có $1 < f(x) \leqslant 2$, $f(x)$ là hàm dương, liên tục, nghịch biến trên $[0, \infty)$.

Từ

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n} = f(x_n)$$

ta suy ra

$$1 < x_{n+1} \leqslant 2, \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x_0 < x_2$ suy ra $f(x_0) > f(x_2)$ hay $x_1 > x_3$ suy ra $f(x_1) < f(x_3)$ hay $x_2 < x_4$ suy ra $f(x_2) > f(x_4)$ hay $x_3 > x_5, \cdots$

Quy nạp : $x_{2n} < x_{2n+2}$. Thật vậy, giả sử $x_{2k} < x_{2k+2}$ suy ra $f(x_{2k}) > f(x_{2k+2})$ hay $x_{2k+1} > x_{2k+3}$ suy ra $f(x_{2k+1}) < f(x_{2k+3})$ hay $x_{2k+2} < x_{2k+4}$ suy ra $\{x_{2n}\}$ là dãy tăng. Chứng minh tương tự ta được $\{x_{2n+1}\}$ là dãy giảm.

Ta có:

- Dãy $\{x_{2n}\}$ tăng và bị chặn trên nên $\{x_{2n}\}$ hội tụ. Giả sử $x_{2n} \to \alpha$ khi $n \to \infty$.

- Dãy $\{x_{2n+1}\}$ giảm và bị chặn dưới nên $\{x_{2n+1}\}$ hội tụ. Giả sử $x_{2n+1} \to \beta$ khi $n \to \infty$.

Do hàm f liên tục nên ta có hệ

$$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha), \\ \alpha &= f(\beta), \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + \frac{1}{1 + \alpha}, \\ \alpha &= 1 + \frac{1}{1 + \beta}. \end{aligned}$$

Từ đó ta nhận được

$$\alpha = \beta = \sqrt{2}.$$

Trường hợp 2: $x_0 \geq x_2$.

Lấy $x_0 = 2$ suy ra

$$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{10}{7}, x_3 = \frac{24}{17}, x_4 = 1 + \frac{17}{41}.$$

Ta có:

- Dãy $\{x_{2n}\}$ giảm và bị chặn dưới nên $\{x_{2n}\}$ hội tụ. Giả sử $x_{2n} \to \alpha$ khi $n \to \infty$.

- Dãy $\{x_{2n+1}\}$ tăng và bị chặn trên nên $\{x_{2n+1}\}$ hội tụ. Giả sử $x_{2n+1} \to \beta$ khi $n \to \infty$.

Tương tự trường hợp 1 ta cũng thu được $\alpha = \beta = \sqrt{2}$. Vậy,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}. \qquad \square$$

Định lý sau cho ta một điều kiện đủ để mọi nghiệm của một lớp phương trình sai phân phi tuyến bậc một hội tụ.

Định lý 6.16. *Giả sử $f : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ là hàm số liên tục, nghịch biến trên $[0, \infty)$ và hệ phương trình*

$$\begin{aligned} x &= f(y), \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

có nghiệm duy nhất $x = y = \ell$. Khi đó mọi nghiệm của phương trình sai phân phi tuyến bậc một

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (x_0 > 0 \text{ cho trước})$$

hội tụ tới ℓ.

Chứng minh: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x_0 < x_2$. Ta có $f(x_0) > f(x_2)$ hay $x_1 > x_3$ suy ra $f(x_1) < f(x_3)$ hay $x_2 < x_4$ suy ra $f(x_2) > f(x_4)$ hay $x_3 > x_5, \cdots$.

Ta sẽ chứng minh quy nạp rằng $x_{2n} < x_{2n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Thật vậy, giả sử $x_{2k} < x_{2k+2}$ suy ra $f(x_{2k}) > f(x_{2k+2})$ hay $x_{2k+1} > x_{2k+3}$ suy ra $f(x_{2k+1}) < f(x_{2k+3})$ hay $x_{2k+2} < x_{2k+4}$ suy ra $\{x_{2n}\}$ là dãy tăng. Chứng minh tương tự ta được $\{x_{2n+1}\}$ là dãy giảm. Dãy $\{x_{2n}\}$ tăng và bị chặn trên, dãy $\{x_{2n+1}\}$ giảm và bị chặn dưới nên chúng hội tụ. Giả sử $x_{2n} \to u$, $x_{2n+1} \to v$ khi $n \to \infty$. Do f là hàm liên tục nên ta có $f(u) = v$. Lý luận tương tự ta cũng có $f(v) = u$. Vậy ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{aligned} v &= f(u), \\ u &= f(v). \end{aligned}$$

Theo giả thiết hệ này có nghiệm duy nhất $u = v = \ell$.

Trường hợp 2: $x_0 \geq x_2$. Trong trường hợp này, dãy $\{x_{2n}\}$ giảm và bị chặn dưới, dãy $\{x_{2n+1}\}$ tăng và bị chặn trên. Giả sử $x_{2n} \to u$, $x_{2n+1} \to v$ khi $n \to \infty$. Tương tự trường hợp 1 ta thu được $u = v = \ell$.

Vậy ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell.$$

Định lý được chứng minh.

Bây giờ ta áp dụng định lí 6.16 để khảo sát sự hội tụ của nghiệm phương trình (4.13). Xét hàm số $f(x) = \frac{\beta x+\alpha}{Bx+A}, \quad x \geqslant 0$. Ta có f là hàm liên tục và nghịch biến trên $[0, +\infty)$ nếu $\beta A < B\alpha$. Mặt khác, dễ kiểm tra được hệ phương trình

$$\begin{aligned} x &= f(y), \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

có nghiệm dương duy nhất

$$x = y = \frac{\beta - A + \sqrt{(A-\beta)^2 + 4B\alpha}}{2B}.$$

Do đó, theo định lý 6.16, mọi nghiệm của (4.13) hội tụ tới số dương

$$\ell = \frac{\beta - A + \sqrt{(A-\beta)^2 + 4B\alpha}}{2B}.$$

Ví dụ 6.48. *Tính căn bậc hai dương của một số dương a.*

Xét phương trình sai phân hữu tỷ

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{x_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (x_0 > 0 \text{ cho trước}).$$

Dễ thấy, mọi nghiệm của phương trình này hội tụ tới $\sqrt{a}$.

Nhận xét 6.2. *Ta có thể sử dụng định lý 6.16 để khảo sát sự hội tụ của nghiệm nhiều phương trình sai phi tuyến khác phương trình (4.13). Chẳng hạn, ta có ví dụ sau:*

Ví dụ 6.49. *Khảo sát sự hội tụ của nghiệm phương trình*

$$x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (x_0 \geqslant \sqrt{3} \text{ cho trước}).$$

Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \forall x \in [\sqrt{3}, +\infty).$$

Rõ ràng f liên tục trên $[\sqrt{3}, +\infty)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} < 0, \quad \forall x \in [\sqrt{3}, +\infty).$$

Do đó f nghịch biến trên $[\sqrt{3}, +\infty)$.

Xét hệ phương trình

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{3} + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}}, \\ u &= \sqrt{3} + \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}}, \quad \forall u, v \in [\sqrt{3}, +\infty). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh hệ này có nghiệm duy nhất $u = v$. Thật vậy,

$$v\sqrt{u^2 - 1} = \sqrt{3}\sqrt{u^2 - 1} + u,$$

$$u\sqrt{v^2-1} \;=\; \sqrt{3}\sqrt{v^2-1}+v, \quad \forall u,v \in [\sqrt{3},+\infty).$$

Lấy phương trình thứ hai trừ vế theo vế cho phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$u\sqrt{v^2-1}-v\sqrt{u^2-1}=\sqrt{3}\sqrt{v^2-1}-\sqrt{3}\sqrt{u^2-1}+v-u.$$

Viết lại phương trình này dưới dạng

$$\sqrt{v^2-1}\Big(u-\sqrt{3}\Big)-\sqrt{u^2-1}\Big(v-\sqrt{3}\Big)=v-u.$$

Ta chứng minh $u=v$. *Giả sử trái lại,* $u>v$, *khi đó vế phải âm. Ta chứng minh vế trái dương. Thật vậy, xét hàm số* $f(t)=\frac{t-\sqrt{3}}{\sqrt{t^2-1}}, \quad t\geqslant\sqrt{3}$. *Dễ thấy,* f *là hàm đơn điệu tăng. Do đó ta có*

$$\begin{aligned}
&f(u)>f(v)\\
&\frac{u-\sqrt{3}}{\sqrt{u^2-1}}>\frac{v-\sqrt{3}}{\sqrt{v^2-1}}\\
&\sqrt{v^2-1}\Big(u-\sqrt{3}\Big)>\sqrt{u^2-1}\Big(v-\sqrt{3}\Big)\\
&\sqrt{v^2-1}\Big(u-\sqrt{3}\Big)-\sqrt{u^2-1}\Big(v-\sqrt{3}\Big)>0.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ vế trái dương. Ta có điều vô lý. Do đó $u=v$.

Xét phương trình

$$\ell=\sqrt{3}+\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-1}}, \quad \ell\in[\sqrt{3},+\infty). \tag{$*$}$$

Vì $\ell\in[\sqrt{3},+\infty)$ *nên* $0<\frac{1}{\ell}<1$. *Do đó tồn tại* $\theta\in(0,\pi/2)$ *sao cho* $\frac{1}{\ell}=\sin\theta$. *Khi đó phương trình có dạng*

$$\ell=\frac{1}{\sin\theta}=\sqrt{3}+\frac{1}{\cos\theta}\Leftrightarrow(\sin\theta-\cos\theta)+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=0.$$

Giải phương trình $(*)$ *với điều kiện* $\ell\in[\sqrt{3},+\infty)$ *ta được nghiệm duy nhất*

$$\ell=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Vậy, mọi nghiệm của phương trình sai phân trên với điều kiện ban đầu thuộc $[\sqrt{3}, +\infty)$ *hội tụ đến số dương*

$$\ell = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Nhận xét 6.3. *Dễ thấy rằng, nếu* (y_n, z_n) *là nghiệm của hệ phương trình sai phân*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \beta y_n + \alpha z_n, \quad y_0 = x_0, \\ z_{n+1} &= B y_n + A z_n, \quad z_0 = 1 \end{aligned}$$

thì $x_n = \frac{y_n}{z_n}$ *là nghiệm của phương trình (4.13). Do đó, việc khảo sát sự hội tụ của nghiệm phương trình (4.13) có thể chuyển về việc tìm nghiệm* (y_n, z_n) *của hệ phương trình sai phân trên, sau đó tính giới hạn* $\frac{y_n}{z_n}$ *khi* n *tiến ra vô cùng. Tuy nhiên, cách này không gọn bằng cách sử dụng định lý 6.16.*

Về một số phương trình sai phân hữu tỷ bậc hai

Trong mục này ta khảo sát sự hội tụ của nghiệm phương trình sai phân sau

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n + \alpha}{A + x_n + C x_{n-1}}, \tag{4.14}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$ và x_0, x_1 là 2 số thực không âm cho trước. Ta giả thiết các tham số trong phương trình (4.14) là các số thực dương.

Trong mục này ta luôn giả thiết $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là hàm liên tục. Các bổ đề sau rất cần thiết để khảo sát sự hội tụ của nghiệm phương trình (4.14).

Bổ đề 6.1. *Nếu mọi nghiệm của phương trình*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (x_0, x_1 > 0 \text{ cho trước}) \tag{4.15}$$

hội tụ đến một số dương ℓ*, thì hệ phương trình*

$$x = f(y, x),$$

$$y = f(x, y)$$

có nghiệm dương duy nhất $x = y = \ell$.

Chứng minh: Gọi (x, y) là một nghiệm dương của hệ phương trình trên. Xét phương trình (4.15) với $x_1 = x$ và $x_0 = y$. Thế thì $x_2 = f(x_1, x_0) = f(x, y) = y$ và $x_3 = f(x_2, x_1) = f(y, x) = x$. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_{2k} = y$ và $x_{2k+1} = x$ với mọi k. Giả sử $x_{2k} = y, x_{2k+1} = x$ với một số tự nhiên k nào đó, ta sẽ chứng minh $x_{2(k+1)} = y, x_{2(k+1)+1} = x$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} x_{2(k+1)} &= f(x_{2k+1}, x_{2k}) = f(x, y) = y, \\ x_{2(k+1)+1} &= f(x_{2k+2}, x_{2k+1}) = f(y, x) = x. \end{aligned}$$

Như vậy $x_{2k} = y, x_{2k+1} = x$ với $k \in \mathbb{N}_0$. Theo giả thiết $\{x_n\}_n$ hội tụ đến số dương ℓ, nên ta được các dãy con $\{x_{2k}\}_{k=0}^{\infty}, \{x_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ hội tụ đến ℓ, tức là $x = y = \ell$. Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề sau sẽ chỉ ra rằng điều kiện của bổ đề 6.1 là đủ nếu hàm f bị chặn và đơn điệu giảm theo biến x, đơn điệu tăng theo biến y. Trước hết ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 6.50. *Xét phương trình sai phân*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + x_{n-1} + 1}, \quad x_0, x_1 \text{ cho trước }.$$

Chọn $x_0, x_1 \in (0, 1)$. *Xét hàm số*

$$f(x, y) = \frac{x + 1}{x + y + 1}.$$

Dễ thấy f *đồng biến theo* x, *nghịch biến theo* y. *Mặt khác,*

$$inf_{x,y\geqslant 0} f(x, y) = 0 := \alpha_0, \quad sup_{x,y\geqslant 0} f(x, y) = 1 := \beta_0$$

và

$$x_n \in (\alpha_0, \beta_0), \quad \forall n \geqslant 2.$$

Đặt

$$\alpha_1 = inf_{x,y\in(\alpha_0,\beta_0)} f(x,y), \quad \beta_1 = sup_{x,y\in(\alpha_0,\beta_0)} f(x,y).$$

Ta có

$$\alpha_1 = f(\alpha_0,\beta_0) = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = f(\beta_0,\alpha_0) = 1.$$

Tương tự

$$\alpha_{n+1} = inf_{x,y\in(\alpha_n,\beta_n)} f(x,y) = f(\alpha_n,\beta_n), \quad \beta_{n+1} = sup_{x,y\in(\alpha_n,\beta_n)} f(x,y) = f(\beta_n,\alpha_n),$$

với $n = 0, 1, 2, \cdots$. *Ta được* $\{\alpha_n\}_n$ *là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi* 1, $\{\beta_n\}_n$ *là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi* 0, *do đó chúng hội tụ. Giả sử*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \alpha,\\ \lim_{n\to\infty} \beta_n &= \beta.\end{aligned}$$

Ta thu được hệ sau

$$\begin{aligned}\alpha &= f(\alpha,\beta)\\ \beta &= f(\beta,\alpha).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mặt khác, ta chứng minh bằng quy nạp được

$$x_{n+2k} \in (\alpha_k,\beta_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Do đó

$$\lim x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bổ đề 6.2. *Giả sử hàm* f *đơn điệu giảm theo biến* x *với mỗi* $y > 0$ *và đơn điệu tăng theo biến* y *với mỗi* $x > 0$. *Giả thiết thêm rằng,* $M := \sup_{x,y\geqslant 0} f(x,y) < \infty$ *và hệ phương trình*

$$u = f(v,u),$$

$$v \;=\; f(u,v)$$

có nghiệm duy nhất $u = v = \ell$. Khi đó mọi nghiệm của (4.15) hội tụ đến ℓ.

Chứng minh: Theo giả thiết ta có $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) < M$ với mọi $n \in \mathbb{N}_2$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_n < M$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$. Ta xét hệ phương trình sai phân sau

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(v_n, u_n), \\ v_{n+1} &= f(u_n, v_n) \end{aligned}$$

với $n \in \mathbb{N}_0$. ở đây ta đặt $u_0 = 0, v_0 = M$. Rõ ràng,

$$u_0 < x_n < v_0 \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}_0.$$

Do hàm f đơn điệu giảm theo biến x và đơn điệu tăng theo biến y, nên

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n) < f(u_0, v_0) = v_1$$

và tương tự,

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n) > f(v_0, u_0) = u_1 \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp, ta có thể thấy rằng

$$u_k < x_{n+2k} < v_k \quad \text{với mọi } k, n \in \mathbb{N}_0.$$

Mặt khác $u_0 < u_1$ và $v_0 > v_1$. Cũng do hàm f đơn điệu giảm theo biến x và đơn điệu tăng theo biến y nên ta có

$$u_2 = f(v_1, u_1) > f(v_0, u_0) = u_1$$

và tương tự $v_2 < v_1$. Bằng chứng minh quy nạp ta có dãy $\{u_k\}_k$ đơn điệu tăng và dãy $\{v_k\}_k$ đơn điệu giảm. Gọi u, v lần lượt là giới hạn của các dãy $\{u_k\}_k$ và $\{v_k\}_k$. Ta có u và v thỏa mãn hệ phương trình

$$u \;=\; f(v,u),$$

$$v \;=\; f(u,v).$$

Theo giả thiết $u = v = \ell$. Như vậy các dãy $\{u_k\}_k$ và $\{v_k\}_k$ là hội tụ và giới hạn của hai dãy này là ℓ. Theo trên ta có $u_k < x_{n+2k} < v_k, \quad k, n \in \mathbb{N}_0$ nên ta được dãy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. Bổ đề được chứng minh.

Chú ý 6.5. *Nếu hàm f bị chặn thì với mỗi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.15), tồn tại hai dãy giới hạn đầy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ thoả mãn (4.15) với mọi $n \in \mathbb{Z}$ sao cho*

$$u_0 = \limsup_{n\to\infty} x_n, \quad v_0 = \liminf_{n\to\infty} x_n, \quad u_n, v_n \in [v_0, u_0] \text{ với mọi } n \in \mathbb{Z}.$$

Hai dãy giới hạn đầy này được chọn từ tập giới hạn ω của nghiệm $\{x_n\}_n$.

Bổ đề 6.3. *Giả sử hàm f đơn điệu giảm theo biến y với mỗi $x > 0$ và*

$$M := \sup_{x,y\geqslant 0} f(x,y) < \infty.$$

Thế thì với mỗi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.15) ta có

$$\max_{0\leqslant x\leqslant M} f(x,0) \geqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \geqslant \ell \geqslant \liminf_{n\to\infty} x_n \geqslant \min_{0\leqslant x\leqslant M} f(x,M).$$

Chứng minh: Chọn hai dãy giới hạn đầy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ từ tập giới hạn ω của $\{x_n\}_n$ sao cho

$$u_0 = \limsup_{n\to\infty} x_n, \quad v_0 = \liminf_{n\to\infty} x_n, \quad u_n, v_n \in [v_0, u_0] \text{ với mọi } n \in \mathbb{Z}.$$

Ta có

$$u_0 \geqslant u_1 = f(u_0, u_{-1}) \geqslant f(u_0, u_0).$$

Tương tự, ta nhận được

$$v_0 \leqslant f(v_0, v_0).$$

Từ đây suy ra nghiệm dương duy nhất của phương trình $x = f(x,x)$ phải nằm trong $[v_0, u_0]$. Mặt khác,

$$u_0 = f(u_{-1}, u_{-2}) \leqslant f(u_{-1}, 0) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant M} f(x,0).$$

Tương tự, ta có

$$v_0 \geqslant \min_{0\leqslant x\leqslant M} f(x, M).$$

Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta khảo sát tính chất của nghiệm phương trình (4.14). Để tiện theo dõi ta nhắc lại kết qủa sau của Đ.V. Giang.

Định lý 6.17. *Giả sử $\beta \geqslant \alpha/A$. Nếu một trong các điều kiện sau thoả mãn thì dự đoán của G. Ladas là đúng.*

(i) $\beta \leqslant A$;

(ii) $\beta > A$ và $C \leqslant 1$;

(iii) $\beta > A, C > 1$ và $(\beta - A)^2 \leqslant 4\alpha/(C-1)$.

Nhận xét 6.4. *Kết hợp định lý 6.17 và bổ đề 6.3 ta thấy rằng, nếu các điều kiện (i)-(iii) của định lý 6.17 không xảy ra thì với mỗi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.14) ta có*

$$a \leqslant \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \ell \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant b,$$

trong đó

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(\beta - A - \sqrt{(\beta-A)^2 - \frac{4\alpha}{C-1}}\right), \\ b &= \frac{1}{2}\left(\beta - A + \sqrt{(\beta-A)^2 - \frac{4\alpha}{C-1}}\right). \end{aligned}$$

Tiếp theo ta nghiên cứu dự đoán của Ladas trong trường hợp $\beta = A$. Đáng tiếc trong trường hợp này ta vẫn phải hạn chế trên các tham số β, α và C.

Định lý 6.18. *Giả sử $\beta = A$ và $C < 1$. Nếu $\alpha < 4\beta^2/(C+1)$ thì dự đoán của G. Ladas là đúng.*

Chứng minh: Trước hết để ý rằng nếu $\alpha \leqslant \beta^2$, ta có thể áp dụng trường hợp (i) của định lý 6.17. Vì vậy, không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $\alpha > \beta^2$. Mặt khác ta có

$$\ell = \sqrt{\frac{\alpha}{C+1}} \tag{4.16}$$

và

$$|x_{n+1} - \ell| = \frac{|(\beta-\ell)(x_n-\ell) - C\ell(x_{n-1}-\ell)|}{x_n + Cx_{n-1} + \beta}. \tag{4.17}$$

Đặt $\delta_n = |x_n - \ell|$. Ta nhận được

$$\delta_{n+1} \leqslant \frac{|\beta-\ell|\delta_n + C\ell\delta_{n-1}}{\beta}.$$

Xét phương trình sai phân tuyến tính

$$y_{n+1} = \frac{|\beta-\ell|y_n + C\ell y_{n-1}}{\beta} \qquad \text{với } n \in \mathbb{N}, \quad (y_0 = \delta_0, \quad y_1 = \delta_1).$$

Dễ thấy $\delta_n \leqslant y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$ và y_n có dạng

$$y_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n,$$

trong đó $\lambda_{1,2}$ là các nghiệm của phương trình

$$\beta\lambda^2 = |\ \beta - \ell\ |\ \lambda + C\ell. \tag{4.18}$$

Ta chứng minh rằng các nghiệm của phương trình (4.14) có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 (và hệ quả là $y_n \to 0$ khi $n \to \infty$). Điều này tương đương với việc chứng minh

$$\beta > |\beta - \ell| + C\ell. \tag{4.19}$$

Cuối cùng ta hãy xét hai trường hợp có thể xảy ra: Nếu $\alpha < \beta^2(C+1)$, ta có $\beta > \ell$ và hệ quả là $|\beta-\ell| + C\ell = \beta + (C-1)\ell < \beta$ (vì $C < 1$). Trường hợp thứ hai là $\alpha \geq \beta^2(C+1)$. Ta có $\beta \leqslant \ell$ và $|\beta - \ell| + C\ell = (C+1)\ell - \beta = \sqrt{\alpha(C+1)} - \beta < 2\beta - \beta = \beta$ (vì $\alpha < 4\beta^2/(C+1)$). Định lí được chứng minh.

Định lý 6.19. *Giả sử* $\beta = A$ *và* $1 \leqslant C \leqslant 2$. *Nếu* $\alpha < 9\beta^2/(C+1)$ *thì dự đoán của Ladas là đúng.*

Chứng minh: Trước hết chú ý rằng nếu $\alpha \leqslant \beta^2$, ta có thể áp dụng trường hợp (i) định lý 6.17. Vì vậy không mất tính tổng quát, ta giả sử $\alpha > \beta^2$. Xét hàm

$$f(x,y) = \frac{\beta x + \alpha}{x + Cy + \beta}.$$

Ta sẽ chứng tỏ $\sup_{x,y\geqslant 0} f(x,y) = \frac{\alpha}{\beta}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\beta x + \alpha}{x + Cy + \beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha x + \alpha Cy - \beta^2 x}{x + Cy + \beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha Cy + \beta x(\frac{\alpha}{\beta} - \beta)}{x + Cy + \beta} \leqslant \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

với mọi $x, y \geq 0$.

Lấy $\epsilon > 0$ nhỏ tùy ý, ta chứng minh tồn tại $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ sao cho $f(x,y) > \frac{\alpha}{\beta} - \epsilon$, tức là

$$\frac{\alpha x + \alpha Cy - \beta^2 x}{x + Cy + \beta} < \epsilon$$

hay

$$\frac{(x + Cy)(\epsilon - \alpha) + \epsilon\beta + \beta^2 x}{x + Cy + \beta} > 0.$$

Nếu $\epsilon \geq \alpha$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng với mọi $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$. Còn nếu $\epsilon < \alpha$ thì ta chọn $x = \frac{1}{\beta^2}(x + Cy)(\alpha - \epsilon)$ và y tùy ý thuộc $[0,\infty)$, khi đó bất đẳng thức trên thỏa mãn. Vậy $\sup_{x,y\geq 0} f(x,y) = \frac{\alpha}{\beta}$.

Mặt khác, ta có $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-C}{(x+Cy+\beta)^2} < 0, \quad \forall x, y \geqslant 0$ nên hàm $f(x,y)$ đơn điệu giảm theo biến y trên $[0,\infty)$, do đó

$$f(x,y) \geqslant f(x,\alpha/\beta), \quad \forall y \in [0,\alpha/\beta].$$

Hơn nữa, ta có $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{C\beta y + (\beta^2 - \alpha)}{(x+Cy+\beta)^2}$ và do $C \geq 1$ nên

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,\alpha/\beta) > 0.$$

Suy ra
$$f(x,y) \geqslant f(x,\alpha/\beta) \geqslant f(0,\alpha/\beta), \quad \forall x,y \in [0,\alpha/\beta].$$
Từ đó ta thu được
$$\inf_{x,y\in(0,\alpha/\beta)} f(x,y) = f(0,\alpha/\beta) = \frac{\beta\alpha}{\beta^2+C\alpha} > \frac{\beta\alpha}{(C+1)\alpha} = \frac{\beta}{C+1}.$$

Để ý rằng $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ nên
$$x_n > \frac{\beta}{C+1} \qquad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}_4.$$
Mặt khác, đặt $\delta_n = |x_n - \ell|$, từ (4.17) ta có
$$\delta_{n+1} \leqslant \frac{|\beta-\ell|\delta_n + C\ell\delta_{n-1}}{2\beta}.$$
Xét phương trình sai phân tuyến tính
$$y_{n+1} = \frac{|\beta-\ell|y_n + C\ell y_{n-1}}{2\beta} \qquad \text{với } n\in\mathbb{N}_5, \quad (y_4=\delta_4, \quad y_5=\delta_5).$$
Dễ thấy $\delta_n \leqslant y_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}_4$ và y_n có dạng
$$y_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n,$$
trong đó $\lambda_{1,2}$ là 2 nghiệm phân biệt của phương trình
$$2\beta\lambda^2 = |\beta-\ell|\lambda + C\ell. \tag{4.20}$$
Ta chứng minh rằng các nghiệm của phương trình (4.20) có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 (và hệ quả là $y_n \to 0$ khi $n\to\infty$). Điều này tương đương với việc chứng minh
$$2\beta > |\beta-\ell| + C\ell. \tag{4.21}$$
Xét hai trường hợp sau có thể xảy ra: Nếu $\alpha < (C+1)\beta^2$, ta có $\beta > \ell = \sqrt{\alpha/(C+1)}$ và hệ quả là $|\beta-\ell| + a\ell = \beta + (C-1)\ell \leqslant \beta+\ell < 2\beta$ (vì $a \leqslant 2$). Trường hợp thứ hai là $\alpha \geq (C+1)\beta^2$. Ta nhận được $\beta \leqslant \ell$ và

$|\beta-\ell|+C\ell = (C+1)\ell-\beta = \sqrt{\alpha(C+1)}-\beta < 3\beta-\beta = 2\beta$ (vì $\alpha < 9\beta^2/(C+1)$). Định lý được chứng minh

Định lý sau cho một điều kiện đủ để mọi nghiệm của (4.14) hội tụ.

Định lý 6.20. *Nếu $\gamma < A$ thì mọi nghiệm của (4.14) hội tụ tới ℓ.*

Chứng minh: Xét hàm số

$$H(x,y,u,v) = \frac{\gamma y+\alpha}{v+Bu+A}.$$

Để ý rằng $H(x,y,x,y) = f(x,y)$. Hơn nữa, $H(x,y,u,v)$ là hàm đơn điệu tăng theo các biến x,y và đơn điệu giảm theo các biến u,v. Xét hệ phương trình sai phân sau

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= H(u_n,u_{n-1},\lambda_n,\lambda_{n-1}),\\ \lambda_{n+1} &= H(\lambda_n,\lambda_{n-1},u_n,u_{n-1}) \quad \text{với } n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Trong đó,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_1 = 0,\\ u_0 &= u_1 = M+\frac{\alpha}{A-\gamma}. \end{aligned}$$

Rõ ràng, $x_{n+1} = f(x_n,x_{n-1}) \leqslant M = \sup_{x,y\geqslant 0} f(x,y)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Vì vậy không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0, x_1 \leqslant M$. Ta có

$$\begin{aligned} u_0 &\geqslant u_1 \geqslant u_2,\\ \lambda_0 &\leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2,\\ \lambda_0 &\leqslant x_0 \leqslant u_0,\\ \lambda_1 &\leqslant x_1 \leqslant u_1. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp, ta có thể chứng minh rằng $\{\lambda_n\}_n$ là dãy đơn điệu không giảm, $\{u_n\}_n$ là dãy đơn điệu không tăng và $\lambda_n \leqslant x_n \leqslant u_n$ với $n\in\mathbb{N}$. Gọi λ là giới hạn của dãy $\{\lambda_n\}_n$ và u là giới hạn của $\{u_n\}_n$. Thế thì

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{\gamma u+\alpha}{(B+1)\lambda+A}, \\ \lambda &= \tfrac{\gamma\lambda+\alpha}{(B+1)u+A}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $\gamma < A$, do đó từ hệ phương trình này ta thu được $u = \lambda = \ell$. Định lí được chứng minh.

Về lớp phương trình sai phân hữu tỷ bậc k trên bậc $(k-1)$

Xét phương trình sai phân hữu tỷ bậc k trên bậc $(k-1)$

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{f\left(x_n,\, x_{n-1},\, \cdots,\, x_{n-k+1}\right)}, \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.22}$$

trong đó $\alpha \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, điều kiện ban đầu $x_{-k},\, x_{-k+1},\, \cdots,\, x_0$ là các số thực dương cho trước.

Giả sử f là hàm thỏa giả thiết (H) sau đây: $f : [0; \infty)^k \to (0; \infty)$ là hàm liên tục.

Vì điều kiện ban đầu là các số thực dương và do giả thiết (H) nên nghiệm của phương trình (4.22) là dương.

Đặt

$$g(u) := f\left(u,\, u,\, \cdots,\, u\right),\ u \geq 0.$$

Do giả thiết (H) nên g là hàm tăng và luôn nhận giá trị trong khoảng $(0; \infty)$.

Karakostas và Stevic đã nghiên cứu tính bị chặn, tính hút toàn cục, tính dao động và tính tuần hoàn của nghiệm của phương trình (4.22) với các điều kiện trên.

Định lý sau cho phép ta xác định được độ dài tối đa của mỗi nửa chu trình của nghiệm.

Định lý 6.21. *Giả sử hàm H đi từ tập $[0; \infty)^{k+1}$ vào tập $[0; \infty)$ có các tính chất: $\exists\ i_0 \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, k\}$ sao cho $H\left(z_1,\, z_2,\, \cdots,\, z_k,\, y\right)$ là hàm không tăng theo* *mỗi biến* z_i, $i \in \{1, 2, \cdots, k\} \setminus \{i_0\}$, *giảm theo* z_{i_0} *và tăng theo* y. *Gọi* $\bar{x}$ *là điểm cân bằng của phương trình sai phân*

$$x_{n+1} = H\left(x_n, \cdots, x_{n-k+1}, x_{n-k}\right), \ n = 0, 1, \cdots. \tag{4.23}$$

Khi đó, trừ nửa chu trình đầu tiên, mỗi nghiệm dao động của phương trình sai phân (4.23) với điều kiện ban đầu dương đều có các nửa chu trình có độ dài tối đa là k.

Chứng minh: Gọi $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm dao động của phương trình (4.23) mà nghiệm này có ít nhất hai nửa chu trình. Giả sử tồn tại một nửa chu trình có độ dài lớn hơn k, khi đó tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$x_{N-k} < \bar{x} < x_{N-k+1}, \cdots, x_N, x_{N+1},$$

hoặc

$$x_{N-k} \geq \bar{x} > x_{N-k+1}, \cdots, x_N, x_{N+1}.$$

Trường hợp $x_{N-k} < \bar{x} < x_{N-k+1}, \cdots, x_N, x_{N+1}$.

Ta có

$$x_{N+1} = H\left(x_N, \cdots, x_{N-k+1}, x_{N-k}\right) < H\left(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}\right) = \bar{x},$$

suy ra

$$x_{N+1} < \bar{x} \qquad \text{(vô lý)}.$$

Trường hợp $x_{N-k} \geq \bar{x} > x_{N-k+1}, \cdots, x_N, x_{N+1}$.

Ta có

$$x_{N+1} = H\left(x_N, \cdots, x_{N-k+1}, x_{N-k}\right) > H\left(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}\right) = \bar{x},$$

suy ra

$$x_{N+1} > \bar{x} \qquad \text{(vô lý)}.$$

Như vậy, cả hai trường hợp ta đều đưa ra điều vô lý. Do đó mọi nghiệm dao động với điều kiện ban đầu dương đều có các nửa chu trình với độ dài không vượt quá k (trừ nửa chu trình đầu tiên).

Hệ quả 6.3. *Giả sử hàm f thỏa mãn giả thiết (H) và $\bar{x}$ là một điểm cân bằng dương của phương trình* (4.22). *Khi đó, trừ nửa chu trình đầu tiên, mọi nghiệm dao động với giá trị ban đầu dương có các nửa chu trình với độ dài không vượt quá k.*

Chứng minh: Đặt

$$H\left(z_1,\, z_2,\, \cdots,\, z_k,\, y\right) = \alpha + \frac{y}{f\left(z_1,\, z_2,\, \cdots,\, z_k\right)}.$$

Do $f : [0;\, \infty)^k \to (0;\, \infty)$ là hàm liên tục và luôn nhận giá trị dương nên $H\left(z_1,\, z_2,\, \cdots,\, z_k,\, y\right)$ là hàm liên tục. Mặt khác, f là hàm không giảm với mỗi biến và tăng với ít nhất một biến nên với cách đặt như trên thì hàm H không tăng với mỗi biến z_i, $i \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, k\} \setminus \{i_0\}$; giảm theo biến z_{i_0} và tăng theo y. Khi đó hàm H thỏa mãn giả thiết của Định lý 6.21.

Vì vậy, trừ nửa chu trình đầu tiên, mỗi nghiệm dao động của phương trình sai phân

$$x_{n+1} = H\left(x_n,\, \cdots,\, x_{n-k+1},\, x_{n-k}\right),\ n = 0, 1, \cdots,$$

với điều kiện ban đầu dương đều có các nửa chu trình với độ dài không vượt quá k. Hay, trừ nửa chu trình đầu tiên, mọi nghiệm dao động của phương trình

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{f\left(x_n,\, x_{n-1},\, \cdots,\, x_{n-k+1}\right)},\ n = 0, 1, \cdots,$$

với điều kiện ban đầu dương có các nửa chu trình với độ dài không vượt quá k.

Tiếp theo ta nghiên cứu tính bị chặn, hội tụ và tuần hoàn của nghiệm phương trình (4.22).

- Trường hợp $g\left(\alpha\right) > 1$.

Ta có g là hàm tăng trên $[0;\, \infty)$, nên với mọi $u > \alpha$ thì $g\left(u\right) > g\left(\alpha\right) > 1$.

Nếu $\alpha = 0$ thì 0 là điểm cân bằng duy nhất của phương trình

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{f\left(x_n, \cdots, x_{n-k+1}\right)}. \tag{4.24}$$

Thật vậy, giả sử $\bar{x}$ là điểm cân bằng của phương trình (4.24), tức là

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{f\left(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}\right)},$$

hay

$$\bar{x}\left(1 - \frac{1}{g\left(\bar{x}\right)}\right) = 0.$$

Do đó

$$\bar{x} = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_{n-k}}{f\left(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k+1}\right)} \\ &< \frac{x_{n-k}}{f\left(0, 0, \cdots, 0\right)} = \frac{x_{n-k}}{g\left(0\right)}, \end{aligned}$$

suy ra điểm cân bằng $\bar{x} = 0$ là hút toàn cục.

Giả sử $\alpha > 0$. Hai định lý sau đây cho ta dấu hiệu nhận biết phương trình (4.22) có duy nhất điểm cân bằng dương và mọi nghiệm dương của phương trình này bị chặn.

Định lý 6.22. *Giả sử $g\left(\alpha\right) > 1$ và hàm f thỏa mãn giả thiết (H). Khi đó phương trình sai phân* (4.22) *có duy nhất điểm cân bằng dương $\bar{x}$.*

Chứng minh: Giả sử $\bar{x}$ là điểm cân bằng của phương trình (4.22). Ta có

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\bar{x}}{g\left(\bar{x}\right)}.$$

Xét hàm số

$$\begin{aligned} F : [\alpha, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \alpha - \frac{x}{g(x)}. \end{aligned}$$

Rõ ràng F liên tục trên $[0; \infty)$, thỏa $F(0) = -\alpha < 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. Do đó tồn tại $\bar{x} \in (0; \infty)$ sao cho $F(\bar{x}) = 0$, hay

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\bar{x}}{g(\bar{x})}.$$

Ta chứng minh $\bar{x}$ là duy nhất. Thật vậy, $\forall x, y \in [0; \infty) : x > y$, ta có

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= \left(x - \alpha - \frac{x}{g(x)}\right) - \left(y - \alpha - \frac{y}{g(y)}\right) \\ &= (x - y) - \frac{xg(y) - yg(x)}{g(x) g(y)} \\ &= \frac{(x-y) g(x) g(y) - (x-y) g(x) + x[g(x) - g(y)]}{g(x) g(y)} \\ &= \frac{(x-y) g(x) [g(y) - 1] + y[g(x) - g(y)]}{g(x) g(y)}. \end{aligned}$$

Do $g(x) > g(y) > g(\alpha) > 1$ nên $F(x) - F(y) > 0$, suy ra F là hàm tăng trên $[0; \infty)$. Vậy $\bar{x}$ là điểm cân bằng dương duy nhất của phương trình (4.22).

Định lý 6.23. *Giả sử $g(\alpha) > 1$ và hàm f thỏa mãn giả thiết (H). Khi đó mọi nghiệm với điều kiện ban đầu $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0$ là các số thực dương sẽ bị chặn bởi số*

$$M_0 := \max\{x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0\} + \frac{\alpha g(\alpha)}{g(\alpha) - 1}.$$

Chứng minh: Thật vậy, giả sử $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là một nghiệm tuỳ ý của phương trình (4.22). Vì $x_n > \alpha, \forall n \geq 1$ nên

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{f(x_n, \cdots, x_{n-k+1})} < \alpha + \frac{x_{n-k}}{g(\alpha)}, \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

Với bất kỳ $m \in \mathbb{N}$ và $r \in \{0, 1, \cdots, k\}$, ta có

$$x_{(k+1)m+r+1} < \alpha + \frac{x_{(k+1)m+r-k}}{g(\alpha)}.$$

Mặt khác

$$x_{(k+1)m+r-k} = x_{(k+1)m+r-k-1+1} = x_{(k+1)(m-1)+r+1}$$

$$< \alpha + \frac{x_{(k+1)(m-1)+r-k}}{g(\alpha)}.$$

Mà

$$x_{(k+1)(m-1)+r-k} < \alpha + \frac{x_{(k+1)(m-2)+r-k}}{g(\alpha)},$$

nên

$$x_{(k+1)m+r+1} < \alpha + \frac{1}{g(\alpha)}\left(\alpha + \frac{1}{g(\alpha)} x_{(k+1)(m-2)+r-k}\right)$$

$$< \alpha + \frac{\alpha}{g(\alpha)} + \frac{1}{g^2(\alpha)}\left(\alpha + \frac{x_{(k+1)(m-3)+r-k}}{g(\alpha)}\right)$$

$$= \alpha + \frac{\alpha}{g(\alpha)} + \frac{\alpha}{g^2(\alpha)} + \frac{1}{g^3(\alpha)} x_{(k+1)(m-3)+r-k}$$

$$\vdots$$

$$< \alpha + \frac{\alpha}{g(\alpha)} + \frac{\alpha}{g^2(\alpha)} + \cdots + \frac{\alpha}{g^m(\alpha)} + \frac{1}{g^{m+1}(\alpha)} x_{r-k}$$

$$< \alpha\left(1 + \frac{1}{g(\alpha)} + \frac{1}{g^2(\alpha)} + \cdots + \frac{1}{g^m(\alpha)}\right) + \frac{1}{g^{m+1}(\alpha)} x_{r-k}$$

$$= \alpha\left(1 + \frac{1}{g(\alpha)} + \frac{1}{g^2(\alpha)} + \cdots + \frac{1}{g^m(\alpha)}\right) + \frac{1}{g^{m+1}(\alpha)} x_{r-k}.$$

Đặt $q = \frac{1}{g(\alpha)} < 1$ (do $g(\alpha) > 1$). Ta có

$$x_{(k+1)m+r+1} < \alpha \sum_{j=1}^{m} q^j + x_{r-k} q^{m+1} < \frac{\alpha}{1-q} + x_{r-k},$$

suy ra

$$x_n \leqslant \max\{x_{-k}, \cdots, x_0\} + \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{g(\alpha)}}.$$

Hay

$$x_n \leqslant \max\{x_{-k}, \cdots, x_0\} + \frac{\alpha g(\alpha)}{g(\alpha) - 1} := M_0.$$

Các định lý sau đề cập đến tính hút toàn cục của nghiệm dương phương trình (4.22).

Định lý 6.24. *Giả sử $\alpha > 0$, $g(\alpha) > 1$ và hàm f thỏa mãn giả thiết (H). Khi đó, nếu hàm $x \mapsto \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$ giảm trên $(\alpha; \infty)$ thì mọi nghiệm dương của phương trình* (4.22) *hội tụ.*

Chứng minh: Giả sử $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm dương của phương trình (4.22), theo Định lý 6.23 thì $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ bị chặn. Do đó tồn tại

$\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n := l \ (\alpha \leqslant l < \infty)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n := L \ (l \leqslant L < \infty)$. Hiển nhiên $g(L)$ là một số thực xác định. Lấy giới hạn trên và giới hạn dưới hai vế của (4.22), ta được

$$l \geq \alpha + \tfrac{l}{g(L)} \text{ và } L \leqslant \alpha + \tfrac{L}{g(l)}.$$

Ta có

$$l \geq \alpha + \frac{l}{g(L)},$$

suy ra

$$(l - \alpha)\, g(L) \geq l.$$

Hay

$$(l - \alpha)\,[g(L) - g(\alpha)] \geq \alpha g(\alpha) + [1 - g(\alpha)]\, l. \tag{4.25}$$

Tương tự

$$L \leqslant \alpha + \frac{L}{g(l)}$$

$$\Leftrightarrow\ (L-\alpha)\left[g(l)-g(\alpha)\right] \geq \alpha g(\alpha)+\left[1-g(\alpha)\right]L. \qquad (4.26)$$

Nếu $l=\alpha$ thì $\alpha \geq \alpha+\frac{\alpha}{g(L)}$, suy ra $\alpha \leqslant 0$ (vô lý). Do đó $l>\alpha$, nên $g(l)>g(\alpha)$.

Giả sử rằng $l<L$. Từ (4.25) và (4.26), ta có

$$(l-\alpha)\left[g(L)-g(\alpha)\right] \geq \alpha g(\alpha)+\left[1-g(\alpha)\right]l$$

$$\geq \alpha g(\alpha)+\left[1-g(\alpha)\right]L$$

$$\geq (L-\alpha)\left[g(l)-g(\alpha)\right],$$

suy ra

$$(l-\alpha)\left[g(L)-g(\alpha)\right] \geq (L-\alpha)\left[g(l)-g(\alpha)\right].$$

Nên

$$\frac{g(L)-g(\alpha)}{L-\alpha} \geq \frac{g(l)-g(\alpha)}{l-\alpha}.$$

Mặt khác, hàm $\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$ giảm trên $(\alpha;\infty)$, nên với $\alpha<l<L$ ta có

$$\frac{g(l)-g(\alpha)}{l-\alpha} > \frac{g(L)-g(\alpha)}{L-\alpha}.$$

Khi đó

$$\frac{g(l)-g(\alpha)}{l-\alpha} > \frac{g(l)-g(\alpha)}{l-\alpha}.$$

(Ta có điều vô lý).

Vậy $L=l$, tức là mọi nghiệm dương của phương trình (4.22) hội tụ.

Hệ quả 6.4. *Giả sử $\alpha>0$, $g(\alpha)>1$ và hàm f thỏa mãn giả thiết (H). Khi đó, nếu hàm g lõm chặt trên $(\alpha;\infty)$ thì mọi nghiệm dương của phương trình (4.22) hội tụ.*

Chứng minh: Đặt

$$\begin{aligned} G:\ &(\alpha;\infty)\to R\\ &\text{x}\ \mapsto G(x)=\tfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}. \end{aligned}$$

Theo Định lý 6.24, ta chỉ cần chứng minh hàm $G(x)$ giảm trên $(\alpha;\, \infty)$. Tức là chứng minh $G'(x) < 0,\ \forall x \in (\alpha;\, \infty)$.

Ta có

$$G'(x) = \frac{(x-\alpha)\, g'(x) - [g(x) - g(\alpha)]}{(x-\alpha)^2}.$$

Vì g khả vi trên $(\alpha;\, \infty)$, nên theo Định lý Langrange tồn tại $c \in (\alpha;\, x)$ sao cho

$$\frac{g(x) - g(\alpha)}{x-\alpha} = g'(c),$$

hay

$$g(x) - g(\alpha) = (x-\alpha)\, g'(c).$$

Mặt khác, g lõm chặt trên $(\alpha;\, \infty)$ nên $g''(x) < 0,\, \forall x \in (\alpha;\, \infty)$, tức là $g'(x)$ giảm trên $(\alpha;\, \infty)$, suy ra

$$g'(c) > g'(x).$$

Vậy

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{(x-\alpha)\, g'(x) - (x-\alpha)\, g'(c)}{(x-\alpha)^2} \\ &= \frac{(x-\alpha)\, [g'(x) - g'(c)]}{(x-\alpha)^2} < 0, \quad \forall x \in (\alpha;\, \infty). \end{aligned}$$

Ta kí hiệu $M_1 := \frac{\alpha g(\alpha)}{g(\alpha)-1}$.

Định lý 6.25. *Giả sử $\alpha > 0$, $g(\alpha) > 1$ và hàm f thỏa mãn giả thiết (H). Nếu hàm g thỏa mãn bất đẳng thức*

$$|ug(u) - vg(v)| \leqslant g^2(\alpha)\, |u-v|, \quad u, v \in [\alpha;\, M_1],$$

thì mọi nghiệm dương của phương trình (4.22) *hội tụ về điểm cân bằng $\bar{x}$.*

Chứng minh: Giả sử $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm dương của phương trình (4.22). Theo Định lý 6.23 thì $x_n \in (\alpha;\, M_0]$, $\forall n \geq 1$, với $M_0 := M_1 + \max\{x_{-k}, \cdots, x_0\}$. Sử dụng Mệnh đề 1.2, ta có hai dãy giới hạn đầy (y_m) và (z_m) thỏa mãn phương trình sai phân (4.22) với mọi $m \in \mathbb{Z}$ và

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = z_0 \leqslant z_m,\ y_m \leqslant y_0 = \limsup_{n\to\infty} x_n,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{4.27}$$

Dễ nhận thấy tất cả số hạng của hai dãy $(y_m)\,,\,(z_m)$ đều thuộc $[\alpha;\, M_1]$.

Giả sử rằng $z_0 < y_0$. Từ công thức (4.22), ta có

$$y_0 \leqslant \alpha + \frac{y_0}{g\,(z_0)}, \tag{4.28}$$

và

$$z_0 \geq \alpha + \frac{z_0}{g\,(y_0)}. \tag{4.29}$$

Từ (4.28) ta có

$$y_0 \leqslant \alpha + \frac{y_0}{g\,(z_0)} \leqslant \alpha + \frac{y_0}{g\,(\alpha)},$$

suy ra

$$y_0\left(1 - \frac{1}{g\,(\alpha)}\right) \leqslant \alpha.$$

Nên

$$y_0 \leqslant \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{g(\alpha)}} = \frac{\alpha g\,(\alpha)}{g\,(\alpha) - 1} := M_1 \leqslant M_0.$$

Do đó, tất cả các số hạng của hai dãy giới hạn đầy thuộc $[\alpha;\, M_1]$.

Từ bất đẳng thức (4.29) và tính đơn điệu của hàm g, ta có

$$y_0 - z_0 \leqslant \frac{y_0}{g\,(z_0)} - \frac{z_0}{g\,(y_0)} < \frac{y_0 g\,(y_0) - z_0 g\,(z_0)}{g^2\,(\alpha)} \leqslant y_0 - z_0.$$

(Ta có điều vô lý).

Vậy

$$y_0 = z_0.$$

Định lý 6.26. *Giả sử $\alpha > 0$, $g\,(\alpha) > 1$ và f là hàm thỏa mãn giả thiết (H). Nếu hàm g khả vi và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

$$g'\,(v) < \frac{1}{\alpha}\left[g\,(v) - 1\right]^2, \quad v \in [\alpha;\, M_1]\,, \tag{4.30}$$

$$\frac{g'(v)}{g^2(v)} < \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{g(\alpha)}\right)^2, \quad v \in [\alpha;\, M_1], \tag{4.31}$$

$$\frac{g'(v)}{g(v)\,[g(v)-1]} < \frac{g(\alpha)-1}{\alpha g(\alpha)}, \quad v \in [\alpha;\, M_1], \tag{4.32}$$

thì mọi nghiệm dương của phương trình (4.22) *hội tụ về điểm cân bằng* $\bar{x}$.

Chứng minh: Gọi $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm dương của phương trình (4.22). Khi đó, như Định lý 6.25 có hai dãy giới hạn đầy (y_m), (z_m) thỏa (4.27), (4.28), (4.29) và thỏa mãn phương trình sai phân (4.22) với mọi $m \in \mathbb{Z}$.

• Hàm g thỏa điều kiện (4.30), ta cần chứng minh $y_0 = z_0$. Giả sử $y_0 > z_0$. Định nghĩa hàm

$$\Phi(u, v) := \frac{u}{\alpha} - \frac{g(v)}{g(v) - 1},$$

và đặt

$$\phi(r) := \Phi\left[(1-r)\, z_0 + r y_0,\, (1-r)\, y_0 + r z_0\right].$$

Ta có

$$\phi(0) = \Phi(z_0,\, y_0) = \frac{z_0}{\alpha} - \frac{g(y_0)}{g(y_0) - 1} \geq 0,$$

và

$$\phi(1) = \Phi(y_0,\, z_0) = \frac{y_0}{\alpha} - \frac{g(z_0)}{g(z_0) - 1} \leqslant 0.$$

Như vậy

$$\phi(1) \leqslant 0 \leqslant \phi(0).$$

Mặt khác

$$\exists r_0 \in (0;\, 1) \text{ thỏa mãn } \phi(1) - \phi(0) = \phi'(r_0),$$

suy ra

$$\phi'(r_0) \leqslant 0.$$

Nhận xét rằng

$$\phi(r) = \frac{(1-r)\, z_0 + r y_0}{\alpha} - \frac{g\left[(1-r)\, y_0 + r z_0\right]}{g\left[(1-r)\, y_0 + r z_0\right] - 1},$$

suy ra

$$\phi'(r) = \frac{1}{\alpha}(y_0 - z_0) - \frac{(y_0 - z_0)\, g'\left[(1-r)\, y_0 + r z_0\right]}{\left(g\left[(1-r)\, y_0 + r z_0\right] - 1\right)^2}.$$

Do $\phi'(r_0) \leqslant 0$ nên

$$\frac{1}{\alpha}(y_0 - z_0) - \frac{(y_0 - z_0)\, g'(v_0)}{\left[g(v_0) - 1\right]^2} \leqslant 0, \quad \left(v_0 = (1-r)\, y_0 + r z_0 \in [\alpha;\, M_1]\right),$$

suy ra

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{g'(v_0)}{\left[g(v_0) - 1\right]^2} \leqslant 0.$$

Hay

$$g'(v_0) \geq \tfrac{1}{\alpha}\left[g(v_0) - 1\right]^2 \quad \text{(trái giả thiết)}.$$

Vậy

$$y_0 = z_0 = \bar{x}.$$

• Hàm g thỏa điều kiện (4.31), ta cần chứng minh $y_0 = z_0$. Giả sử $y_0 > z_0$. Định nghĩa hàm

$$\Psi(u,\, v) := 1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{1}{g(v)},$$

và đặt

$$\psi(r) := \Psi\left[(1-r)\, z_0 + r y_0,\, (1-r)\, y_0 + r z_0\right].$$

Ta có

$$\psi(0) = \Psi(z_0,\, y_0) = 1 - \frac{\alpha}{z_0} - \frac{1}{g(y_0)} \geq 0,$$

và

$$\psi(1) = \Psi(y_0,\, z_0) = 1 - \frac{\alpha}{y_0} - \frac{1}{g(z_0)} \leqslant 0.$$

Như vậy

$$\psi(1) \leqslant 0 \leqslant \psi(0).$$

Mặt khác,

$$\exists r_0 \in (0;\, 1) \text{ thỏa mãn } \psi(1) - \psi(0) = \psi'(r_0),$$

suy ra

$$\psi'(r_0) \leqslant 0.$$

Khi đó

$$\frac{\alpha}{u_0^2} \leqslant \frac{g'(v_0)}{g^2(v_0)}, \quad u_0 = (1-r)\,z_0 + ry_0,\; v_0 = (1-r)\,y_0 + rz_0.$$

Nhận xét rằng

$$u_0 \in [\alpha;\, M_1]\,,$$

nên

$$\frac{\alpha}{u_0^2} \geq \frac{\alpha}{M_1^2} = \frac{\alpha}{\left[\frac{\alpha g(\alpha)}{g(\alpha)-1}\right]^2} = \frac{[g(\alpha)-1]^2}{\alpha g^2(\alpha)}.$$

Do đó

$$\frac{g'(v_0)}{g^2(v_0)} \geq \frac{\alpha}{u_0^2} \geq \frac{[g(\alpha)-1]^2}{\alpha g^2(\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{g(\alpha)}\right)^2.$$

(Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy

$$y_0 = z_0 = \bar{x}.$$

• Hàm g thỏa điều kiện (4.32), ta cần chứng minh $y_0 = z_0$. Giả sử $y_0 > z_0$. Định nghĩa hàm hai biến

$$\mathrm{Z}(u,\, v) := u - \alpha - \frac{u}{g(v)},$$

và đặt

$$\zeta(r) := \mathrm{Z}\left[(1-r)\,z_0 + ry_0,\; (1-r)\,y_0 + rz_0\right].$$

Ta có

$$\zeta(0) = \mathrm{Z}(z_0,\, y_0) = z_0 - \alpha - \frac{z_0}{g(y_0)} \geq 0,$$

và

$$\zeta(1) = \mathrm{Z}(y_0,\, z_0) = y_0 - \alpha - \frac{y_0}{g(z_0)} \leqslant 0.$$

Như vậy

$$\zeta(1) \leqslant 0 \leqslant \zeta(0).$$

Theo Định lý Langrange

$$\exists r_0 \in (0;\, 1) \text{ thỏa mãn } \zeta(1) - \zeta(0) = \zeta'(r_0),$$

suy ra

$$\zeta'(r_0) \leqslant 0.$$

Khi đó

$$1 - \frac{1}{g(v_0)} \leqslant \frac{u_0 g'(v_0)}{g^2(v_0)}, \quad u_0 = (1-r)\, z_0 + r y_0,\, v_0 = (1-r)\, y_0 + r z_0,$$

suy ra

$$g(v_o)\,[g(v_o) - 1] \leqslant u_0 g'(v_0).$$

Hay

$$\frac{g'(v_0)}{g(v_o)\,[g(v_o)-1]} \geq \frac{1}{u_0}.$$

Do

$$u_0 \in [\alpha;\, M_1],$$

nên

$$\frac{1}{u_0} \geq \frac{1}{M_1} = \frac{g(\alpha) - 1}{\alpha g(\alpha)}.$$

Khi đó

$$\frac{g'(v_0)}{g(v_o)\,[g(v_o)-1]} \geq \frac{1}{u_0} \geq \frac{g(\alpha) - 1}{\alpha g(\alpha)}.$$

(Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy

$$y_0 = z_0 = \bar{x}.$$

Định lý 6.27. *Giả sử $\alpha > 0$, $g(\alpha) > 1$, hàm f thỏa mãn giả thiết (H) và h là hàm cho bởi công thức $h(u) := \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{g(u)}}$. Nếu hàm hợp $h \circ h$ lõm trên $[\alpha;\, M_1]$ thì mọi nghiệm dương của phương trình (4.22) hội tụ.*

Chứng minh: Giả sử $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là một nghiệm của phương trình (4.22). Khi đó tồn tại hai dãy giới hạn đầy (y_m), (z_m) thỏa mãn phương trình (4.22) với mọi m $\in \mathbb{Z}$, mà tất cả số hạng của hai dãy này đều thuộc $[\alpha;\, M_1]$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = z_0 \leqslant z_m,\, y_m \leqslant y_0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup x_n$$

và z_0, y_0 thỏa

$$z_0 \geq \alpha + \frac{z_0}{g\left(y_0\right)}, \quad y_0 \leqslant \alpha + \frac{y_0}{g\left(z_0\right)}.$$

Ta có

$$z_0 \geq \alpha + \frac{z_0}{g\left(y_0\right)} \geq \alpha + \frac{z_0}{g\left(M_1\right)},$$

suy ra

$$z_0\left(1 - \frac{1}{g\left(M_1\right)}\right) \geq \alpha.$$

Hay

$$z_0 \geq \frac{\alpha g\left(M_1\right)}{g\left(M_1\right) - 1} := N_1.$$

Khi đó

$$y_0 \leqslant \alpha + \frac{y_0}{g\left(z_0\right)} \leqslant \alpha + \frac{y_0}{g\left(N_1\right)},$$

suy ra

$$y_0\left(1 - \frac{1}{g\left(N_1\right)}\right) \leqslant \alpha,$$

hay

$$y_0 \leqslant \frac{\alpha g\left(N_1\right)}{g\left(N_1\right) - 1} := M_2.$$

Mặt khác, ta có

$$z_0 \geq \alpha + \frac{z_0}{g\left(y_0\right)} \geq \alpha + \frac{z_0}{g\left(M_2\right)},$$

suy ra

$$z_0 \geq \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{g(M_2)}} \geq \frac{\alpha g\left(M_2\right)}{g\left(M_2\right) - 1} := N_2.$$

Cứ như vậy, ta nhận được hai dãy (M_n) và (N_n) mà các số hạng của hai dãy này thuộc $[\alpha,\, M_1]$, được định nghĩa như sau:

$$N_n := \frac{\alpha g\left(M_n\right)}{g\left(M_n\right)-1},\ M_n := \frac{\alpha g\left(N_{n-1}\right)}{g\left(N_{n-1}\right)-1}.$$

Dễ dàng chứng minh được dãy (N_n) không giảm và dãy (M_n) không tăng (do hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ giảm trên $(1;\, \infty)$). Vì vậy giới hạn của hai dãy này tồn tại và thỏa điều kiện

$$N_0 \leqslant z_0 \leqslant y_0 \leqslant M_0,$$

với $N := \lim\limits_{n\to\infty} N_n$, $M := \lim\limits_{n\to\infty} M_n$, $M = h\left(N\right),\ N = h\left(M\right)$.
Khi đó

$$h \circ h\left(M\right) = h\left(N\right) = M,\ h \circ h\left(N\right) = h\left(M\right) = N. \tag{4.33}$$

Giả sử rằng $N < M$, ta có

$$h\left[h\left(\alpha\right)\right] = h\left(\frac{\alpha g\left(\alpha\right)}{g\left(\alpha\right)-1}\right) = h\left(M_1\right) = \frac{\alpha}{1-\frac{1}{g(M_1)}} = N_1 > \alpha.$$

Vì $h \circ h$ lõm trên $[\alpha;\, M_1]$ và $h\left[h\left(\alpha\right)\right] > \alpha$ nên đồ thị hàm số $h \circ h\left(x\right)$ cắt đường phân giác thứ nhất tại nhiều nhất là một điểm (mâu thuẫn với (4.33)). Vậy

$$M = N,$$

dẫn đến

$$N_0 = z_0 = y_0 = M_0.$$

- Trường hợp $g\left(\alpha\right) < 1$.

Trong phần này, ta xét trường hợp $g\left(\alpha\right) < 1$, $k = 2m+1$ và các số hạng lẻ của nghiệm không ảnh hưởng đến mẫu của phương trình (4.22), tức là nghiên cứu trường hợp

$$f\left(u_1,\, u_2,\, u_3,\, \cdots,\, u_{2m-1},\, u_{2m},\, u_{2m+1}\right) := F\left(u_1,\, u_3,\, \cdots,\, u_{2m-1},\, u_{2m+1}\right)$$

và phương trình (4.22) có dạng

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-2m-1}}{F(x_n,\, x_{n-2},\, \cdots,\, x_{n-2m})}. \tag{4.34}$$

Khi đó giả thiết (H) đối với hàm F được phát biểu lại như sau:

(H') : $F : [0;\infty)^{m+1} \to (0;\infty)$ là một hàm liên tục, không giảm với mỗi biến và tăng với ít nhất một biến.

Vì hàm $g(u) := F(u,\, u,\, \cdots, u)$ là hàm tăng nên có hàm ngược g^{-1}. Ta có định lý sau:

Định lý 6.28. *Giả sử $\alpha \geq 0$, $g(\alpha) < 1$ và hàm F thỏa mãn giả thiết (H'). Hơn nữa $\left\{x > \alpha : g(x) > \frac{b}{b-\alpha}\right\} \neq \emptyset$, trong đó b cố định thuộc khoảng mở $(\alpha;\, g^{-1}(\alpha))$. Xét nghiệm $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$, $n = -k, -k+1, \cdots$ của phương trình (4.34) sao cho với mọi $j = m,\, m-1,\, \cdots,\, 1,\, 0$ ta có*

$$\alpha \leqslant x_{-2j-1} < b,$$

và

$$x_{-2j} > g^{-1}\left(\frac{b}{b-\alpha}\right) := P.$$

Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \infty,$$

và

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{\alpha}{1-\frac{1}{L}},$$

trong đó $L =: \lim\limits_{u\to\infty} g(u)$.
Trong trường hợp g không bị chặn, ta đặt $\frac{1}{L} = 0$.

Chứng minh: Từ tính đơn điệu tăng của hàm g, ta có

$$L \geq g(P) = g\left(g^{-1}\left(\frac{b}{b-\alpha}\right)\right) = \frac{b}{b-\alpha} > 1.$$

Ta có
$$\alpha < x_1 = \alpha + \frac{x_{-2m-1}}{F\left(x_0,\, x_{-2},\, \cdots,\, x_{-2m}\right)} < \alpha + \frac{b}{g\left(P\right)},$$
suy ra
$$\alpha < x_1 < \alpha + \frac{b}{\frac{b}{b-\alpha}} = b < g^{-1}\left(1\right).$$
Lại có
$$x_2 = \alpha + \frac{x_{-2m}}{F\left(x_1,\, x_{-1},\, \cdots,\, x_{-2m+1}\right)}.$$
Vì $x_{-2i+1} < b$, $i = \overline{0,\, m}$ và F là hàm liên tục, không giảm với mỗi biến, tăng với ít nhất một biến, nên ta có
$$F\left(x_1,\, x_{-1},\, \cdots,\, x_{-2m+1}\right) < g\left(b\right).$$
Do đó
$$x_2 > \alpha + \frac{1}{g\left(b\right)} x_{-2m} > x_{-2m} > P.$$
Tương tự
$$\alpha < x_3 = \alpha + \frac{x_{-2m+1}}{F\left(x_2,\, x_0,\, \cdots,\, x_{-2m+2}\right)} < \alpha + \frac{b}{g\left(P\right)} = b < g^{-1}\left(1\right),$$
và
$$x_4 = \alpha + \frac{x_{-2m+2}}{F\left(x_3,\, x_2,\, \cdots,\, x_{-2m+3}\right)} > \alpha + \frac{1}{g\left(b\right)} x_{-2m+2} > P.$$
$$\vdots$$
$$x_{2r+1} = \alpha + \frac{x_{2r-2m-1}}{F\left(x_{2r},\, x_{2r-2},\, \cdots,\, x_{2r-2m}\right)} < \alpha + \frac{b}{g\left(P\right)} = b < g^{-1}\left(1\right),$$
$$x_{2r+2} = \alpha + \frac{x_{2r-2m}}{F(x_{2r+1}, x_{2r-1}, \cdots, x_{2r-2m+1})} > \alpha + \frac{1}{g(b)} x_{2r-2m} > x_{2r-2m} > P.$$
Như vậy
$$x_{2r+1} \in \left(\alpha;\, b\right),\; x_{2(r+1)} > \alpha + \frac{1}{g\left(b\right)} x_{2r-2m} = \alpha + \frac{1}{g\left(b\right)} x_{2([r-(m+1)+1])}.$$

Quy nạp, ta có

$$x_{2[(m+1)r+j]} > \alpha + \frac{1}{g(b)} x_{2[(m+1)r-(m+1)+j]}$$

$$= \alpha + \frac{1}{g(b)} x_{2[(m+1)(r-1)+j]}$$

$$> \alpha + \frac{1}{g(b)} \left[\alpha + x_{2[(m+1)(r-2)+j]}\right]$$

$$= \alpha + \frac{\alpha}{g(b)} + \frac{1}{g^2(b)} x_{2[(m+1)(r-2)+j]}$$

$$\vdots$$

$$> \alpha + \frac{\alpha}{g(b)} + \frac{\alpha}{g^2(b)} + \cdots + \frac{\alpha}{g^{r-1}(b)} + \frac{x_{2j}}{g^r(b)}$$

$$> r\alpha + \frac{1}{g^r(b)} x_{2j},\ \forall j \in \{-m, -m+1, \cdots, -1, 0\}.$$

Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \infty.$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{\alpha}{1-\frac{1}{L}}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \infty$ và $L = \lim\limits_{u\to\infty} g(u)$ nên

$$\lim_{n\to\infty} F(x_{2n}, x_{2n-2}, \cdots, x_{2n-2m}) = L.$$

Từ điều này và từ $x_{2r+1} \in (\alpha; b)$, suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $l_i := \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_{2n+1}$, $l_s := \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_{2n+1}$ thỏa mãn

$$l_i \geq \alpha + \frac{l_i}{L},$$

và

$$l_s \leqslant \alpha + \frac{l_s}{L}.$$

Khi đó

$$l_i\left(1 - \tfrac{1}{L}\right) \geq \alpha \ \text{ và } \ l_s\left(1 - \tfrac{1}{L}\right) \leqslant \alpha,$$

suy ra

$$\frac{\alpha}{l_s} \geq 1 - \frac{1}{L} \geq \frac{\alpha}{l_i},$$

nên

$$l_i \geq l_s.$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l_i = l_s = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{L}}.$$

• ***Trường hợp*** $g(\alpha) = 1$

Xét phương trình (4.22) trong trường hợp $g(\alpha) = 1$. Nếu $\alpha > 0$ thì chứng minh tương tự như Định lý 6.22, ta có phương trình (4.22) có điểm cân bằng dương duy nhất $\bar{x}$.

Định lý sau là kết quả chính của mục này:

Định lý 6.29. *Giả sử $\alpha > 0$ và hàm liên tục $f(z_1, \cdots, z_k)$ không giảm với mỗi biến thỏa $g(\alpha) = 1$. Khi đó mỗi nghiệm không dao động $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ của phương trình* (4.22) *hội tụ đến nghiệm (ω_n) có chu kỳ $(k+1)$. Hơn nữa, nếu có một chỉ số $i_0 \in \{1, 2, \cdots, k\}$ mà hàm $f(z_1, \cdots, z_k)$ tăng tại z_{i_0} trong một lân cận phải của α thì mọi nghiệm không dao động của phương trình* (4.22) *hội tụ đến điểm cân bằng $\bar{x}$.*

Chứng minh: Giả sử $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm không dao động của phương trình (4.22). Khi đó ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x_n \geq \bar{x}, \forall n \geq -k$. Ta có

$$x_{n+1} - \bar{x} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{f(x_n, \cdots, x_{n-k+1})} - \left(\alpha + \frac{\bar{x}}{g(\bar{x})}\right)$$

$$= \frac{x_{n-k}}{f\left(x_n, \cdots, x_{n-k+1}\right)} - \frac{\bar{x}}{g\left(\bar{x}\right)}$$

$$= \frac{x_{n-k} - \bar{x}}{f\left(x_n, \ \cdots, x_{n-k+1}\right)} - \frac{\bar{x}\left[f\left(x_n, \ \cdots, x_{n-k+1}\right) - g\left(\bar{x}\right)\right]}{g\left(\bar{x}\right) f\left(x_n, \cdots, x_{n-k+1}\right)}.$$

Vì

$$x_n \geq \bar{x} > \alpha, \ \ \forall n \geq -k,$$

nên

$$f\left(x_n, \cdots, x_{n-k+1}\right) > f\left(\alpha, \cdots, \alpha\right) = g\left(\alpha\right) = 1.$$

Do đó

$$x_{n+1} - \bar{x} \leqslant x_{n-k} - \bar{x},$$

suy ra

$$x_{n+1} \leqslant x_{n-k}.$$

Từ điều này và bằng quy nạp, ta nhận được

$$x_{r(k+1)+n} \leqslant x_{r(k+1)+n-k-1} = x_{(r-1)(k+1)+n}, \quad \forall r \geq 0, \, n \geq 0.$$

Vì vậy tồn tại giới hạn

$$\omega_n := \lim_{r\to\infty} x_{r(k+1)+n}, \, \forall n.$$

Mặt khác

$$\omega_n = \lim_{r\to\infty} x_{r(k+1)+n} = \lim_{r\to\infty} x_{(r-1)(k+1)+n+k+1} = \omega_{n+(k+1)}.$$

Vậy, mọi nghiệm không dao động $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ của phương trình (4.22) hội tụ đến nghiệm (ω_n) có chu kỳ $(k+1)$.

Trường hợp 2: $x_n < \bar{x}, \, \forall n \geq -k$

Chứng minh tương tự như trường hợp 1, ta được điều cần chứng minh.

Tiếp theo, giả sử có $i_0 \in (1, 2, \cdots, k)$ mà $f(z_1, z_2, \cdots, z_k)$ tăng tại z_{i_0} trong một lân cận phải của α, ta chứng minh mọi nghiệm không dao động của phương trình (4.22) hội tụ đến điểm cân bằng $\bar{x}$.

Vì mỗi nghiệm không dao động của phương trình (4.22) hội tụ đến nghiệm ω_n có chu kỳ $(k+1)$ nên ta chỉ cần chứng minh $\omega_n = \bar{x}$, $\forall n \geq -k$. Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_n \geq \bar{x}$, $\forall n \geq -k$.

Nếu $\exists n_0 \geq -k : \omega_{n_0} > \bar{x}$ thì

$$\omega_{n_0} - \bar{x} \leqslant \frac{\omega_{n_0-(k+1)} - \bar{x}}{f(\omega_{n_0-1}, \cdots, \omega_{n_0-k})},$$

suy ra

$$f(\omega_{n_0-1}, \cdots, \omega_{n_0-k}) \leqslant 1.$$

Lại có

$$1 = g(\alpha) \leqslant f(\omega_{n_0-1}, \cdots, \omega_{n_0-k}),$$

nên

$$f(\omega_{n_0-1}, \cdots, \omega_{n_0-k}) = 1 = g(\alpha) = f(\alpha, \cdots, \alpha).$$

Như vậy

$$\omega_{n_0-i_0} = \alpha < \bar{x} \quad \text{(vô lý)}.$$

Vậy

$$\forall n \geq -k : \omega_n = \bar{x}.$$

Định lý 6.30. *Giả sử $\alpha = 0$, $f(u_1, \cdots, u_k)$ là hàm liên tục và tăng với mỗi biến trong lân cận phải của 0. Nếu $g(0) = 1$ thì mọi nghiệm dương của phương trình*

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k+1})}, \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.35}$$

hội tụ đến nghiệm có chu kỳ $(k+1)$ dạng $p, 0, 0, \cdots, 0, p, 0, 0, \cdots, 0, p, \cdots,$ với $p \in [0, \infty)$.

Chứng minh: Trước tiên ta chứng minh phương trình (4.35) có duy nhất điểm cân bằng $\bar{x} = 0$. Thật vậy, $\bar{x}$ là nghiệm của phương trình

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{g(\bar{x})}$$

$$\Leftrightarrow \ \bar{x}\left(1 - \frac{1}{g(\bar{x})}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = 0 \text{ hoặc } 1 - \frac{1}{g(\bar{x})} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = 0 \text{ hoặc } g(x) = 1 = g(0)$$

$$\Leftrightarrow \ \bar{x} = 0.$$

Gọi $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm dương của phương trình (4.35) với điều kiện ban đầu dương. Khi đó $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ không dao động và hội tụ đến nghiệm có chu kỳ $(k+1)$, kí hiệu là (ω_n). Giả sử $\exists n_0 : \omega_{n_0} > 0$.

Từ phương trình (4.35) ta có

$$\omega_{n_0} = \frac{\omega_{n_0-(k+1)}}{f(\omega_{n_0-1}, \omega_{n_0-2}, \cdots, \omega_{n_0-k})} = \frac{\omega_{n_0}}{f(\omega_{n_0-1}, \omega_{n_0-2}, \cdots, \omega_{n_0-k})},$$

suy ra

$$1 = g(0) \leqslant f(\omega_{n_0-1}, \omega_{n_0-2}, \cdots, \omega_{n_0-k}) = 1.$$

Nên

$$\omega_{n_0-j} = 0, \forall j = \overline{1, k}.$$

Tức là, $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ hội tụ đến nghiệm (ω_n) có chu kỳ $(k+1)$ dạng

$$\omega_{n_0}, 0, 0, \cdots, 0, \omega_{n_0}, 0, 0, \cdots, 0, \omega_{n_0}, \cdots.$$

Về lớp phương trình sai phân hữu tỷ bậc $(k-1)$ trên bậc k

Xét phương trình sai phân hữu tỷ bậc $(k-1)$ trên bậc k

$$x_{n+1} = A + \frac{f(x_n, \cdots, x_{n-k+1})}{x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.36}$$

trong đó k là số tự nhiên dương, $A \in (0;\infty)$ và $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ là hàm liên tục, không giảm với mỗi biến.

Ta sẽ nghiên cứu tính bị chặn, hội tụ của nghiệm phương trình (4.36) với các giả thiết trên.

Trong mục này, ta nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của điểm cân bằng dương $\bar{x}$ của phương trình (4.36).

Định lý sau cho ta dấu hiệu nhận biết sự tồn tại và tính duy nhất của điểm cân bằng dương $\bar{x}$.

Định lý 6.31. *Xét phương trình sai phân* (4.36), *với* $A > 0$ *và* $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ *là hàm liên tục. Giả sử rằng hàm* $g(u) = f(u, u, \cdots, u)$ *thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:*

$$\lim_{u\to+\infty} \inf \frac{\mathrm{g(u)}}{\mathrm{u}^2} < 1, \tag{4.37}$$

$$u > v \geq A \Rightarrow g(u) - g(v) \leqslant A(u - v), \tag{4.38}$$

$$u > v \geq A \Rightarrow \frac{g(u)}{u} \leqslant \frac{g(v)}{v}. \tag{4.39}$$

Khi đó tập S gồm tất cả các điểm cân bằng của phương trình (4.36) *là tập con khác rỗng của* $(A;\infty)$. *Hơn nữa, nếu điều kiện* (4.38) *hoặc điều kiện* (4.39) *được thỏa mãn thì tập S chỉ có một phần tử, tức là phương trình* (4.36) *có duy nhất điểm cân bằng.*

Chứng minh: Ta cần chứng minh phương trình $g(u) = u(u - A)$ có nghiệm lớn hơn A.

Thật vậy, giả sử phương trình $g(u) = u(u - A)$ không có nghiệm lớn hơn A, tức là đồ thị hai hàm số $g(u)$ và $u(u - A)$ không có giao điểm có hoành độ thuộc $(A;\infty)$. Nhận xét rằng hàm số $g(u)$ tăng trên $(0;\infty)$ và nhận giá trị trong $(0;\infty)$ nên từ điều giả sử trên ta có

$$g(u) > u(u - A),\ \forall u > A.$$

• Giả sử điều kiện (4.37) được thỏa mãn, ta có

$$\lim_{u\to+\infty}\inf\tfrac{g(u)}{u^2} \geq \lim_{u\to+\infty}\inf\left(1-\tfrac{A}{u}\right) = 1 \quad (\text{vô lý}).$$

Như vậy phương trình $g(u) = u(u-A)$ luôn có nghiệm lớn hơn A, giả sử là $\bar{x}$. Khi đó

$$g(\bar{x}) = \bar{x}(\bar{x}-A),$$

suy ra

$$\bar{x} - A = \frac{g(\bar{x})}{\bar{x}}.$$

Do đó

$$S \neq \emptyset.$$

• Giả sử điều kiện (4.38) được thỏa mãn. Khi đó với bất kỳ $u > A$, ta có

$$g(u) - g(A) \leqslant A(u-A),$$

suy ra

$$g(A) + A(u-A) \geq g(u) > u(u-A).$$

Nên

$$g(A) > u(u-A) - A(u-A) = (u-A)^2, \ \forall u > A. \tag{4.40}$$

Vì $\lim\limits_{u\to+\infty}(u-A)^2 = +\infty$ và $g(A)$ là một số thực xác định nên từ (4.40), ta có điều vô lý.

Vậy phương trình $g(u) = u(u-A)$ có nghiệm $\bar{x} > A$. Ta chứng minh $\bar{x}$ là duy nhất. Thật vậy, giả sử $\bar{x}$, $\bar{y}$ là hai nghiệm của phương trình $g(u) = u(u-A)$ thỏa $A < \bar{x} < \bar{y}$. Khi đó

$$\begin{aligned} 0 < g(y^*) - g(\bar{x}) &= \bar{y}(\bar{y}-A) - \bar{x}(\bar{x}-A) \\ &= (\bar{y}-\bar{x})(\bar{y}+\bar{x}-A) \leqslant A(\bar{y}-\bar{x}), \end{aligned}$$

suy ra

$$\bar{y} + \bar{x} \leqslant 2A \quad (\text{vô lý}).$$

Vậy $\bar{x} = \bar{y}$.

- Giả sử điều kiện (4.39) được thỏa mãn. Đặt

$$h(u) = \frac{g(u)}{u} - (u - A).$$

Khi đó

$$h(A) = \frac{g(A)}{A} > 0.$$

Với $u > \frac{g(A)}{A} + A$ thì $h(u) = \frac{g(u)}{u} - u + A \leqslant \frac{g(A)}{A} - u + A < 0$, nghĩa là

$$\frac{g(u)}{u} - (u - A) < 0,\ \forall u > \frac{g(A)}{A} + A.$$

Hay

$$g(u) < u(u - A),\ \forall u > \tfrac{g(A)}{A} + A \quad \text{(vô lý)}.$$

Vậy phương trình $g(u) = u(u - A)$ luôn có nghiệm $\bar{x} > A$. Ta chứng minh $\bar{x}$ là duy nhất. Thật vậy, giả sử $\bar{x}$, $\bar{y}$ là hai nghiệm của phương trình $g(u) = u(u - A)$ thỏa $A < \bar{x} < \bar{y}$. Khi đó

$$\frac{g(\bar{y})}{\bar{y}} \leqslant \frac{g(\bar{x})}{\bar{x}},$$

suy ra

$$\bar{y} - A \leqslant \bar{x} - A.$$

Hay

$$\bar{y} \leqslant \bar{x} \quad \text{(vô lý)}.$$

Vậy

$$\bar{x} = \bar{y}.$$

Định lý 6.32. *Xét phương trình sai phân (4.36), với $A > 0$ và $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ là hàm liên tục. Giả sử rằng hàm $g(u) = f(u, u, \cdots, u)$ thỏa mãn điều kiện*

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{g(u)}{u^2} < 1.$$

Khi đó S là tập compact.

Chứng minh: Giả sử $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{g(u)}{u^2} < 1$, ta chứng minh S compact. Thật vậy, nếu tồn tại một dãy (u_k) trong S dần tới $+\infty$ thì $\frac{g(u_k)}{u_k^2} = 1 - \frac{A}{u_k} \to 1$, ta có điều vô lý. Do đó $\forall\,(u_k) \subset S$ thì (u_k) bị chặn, nghĩa là S bị chặn.

Ta còn phải chứng minh S đóng. Thật vậy, $\forall\ (u_k) \subset S : u_k \to u_0$, ta chứng minh $u_0 \in S$.

Vì g liên tục nên $g(u_k) \to g(u_0)$, mặt khác $u_k \in S$ nên

$$u_k = A + \frac{f(u_k, u_k, \cdots, u_k)}{u_k} = A + \frac{g(u_k)}{u_k},$$

suy ra

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = A + \frac{\lim\limits_{k\to+\infty} g(u_k)}{\lim\limits_{k\to+\infty} u_k},$$

nên

$$u_0 = A + \frac{g(u_0)}{u_0}.$$

Hay

$$u_0 \in S.$$

Vậy S đóng và bị chặn, nên S compact.

Định lý sau cho phép ta xác định được độ dài tối đa của mỗi nửa chu trình của nghiệm.

Định lý 6.33. *Giả sử $A > 0$, $f : R_+^k \to R_+$ là một hàm liên tục, tăng với mỗi biến và thỏa điều kiện (4.39). Gọi $\bar{x}$ là điểm cân bằng dương duy nhất và $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm dương, dao động bất kỳ của phương trình (4.36). Khi đó, mỗi nửa chu trình dương và mỗi nửa chu trình âm của $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xung quanh $\bar{x}$ có không quá $(2k+1)$ số hạng.*

Chứng minh: Giả sử $x_s, x_{s+1}, \cdots, x_{s+2k+1}$ là $(2k+2)$ số hạng liên tiếp của $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ thỏa $x_{s+i} \geq \bar{x}$, $i \in \{0, 1, \cdots, 2k+1\}$. Gọi i_0 là phần tử lớn nhất trong tập $\{0, 1, \cdots, 2k+1\}$ thỏa

$$x_{s+i_0} = \max\{x_s, x_{s+1}, \cdots, x_{s+2k+1}\}.$$

• Nếu $i_0 \in \{0, 1, \cdots, k\}$ thì $\max\{x_{s+i_0+k}, \cdots, x_{s+i_0+1}\} < x_{s+i_0}$. (Vì nếu $\max\{x_{s+i_0+k}, \cdots, x_{s+i_0+1}\} = x_{s+i_0}$ thì $\exists\ i' = i_0 + n_0$, $1 \leqslant n_0 \leqslant k$: $x_{s+i_0} = x_{s+i'} = x_{s+i_0+n_0}$, mâu thuẫn với $i_0 = \max\{0, 1, \cdots, 2k+1\}$).

Vì f là hàm liên tục, tăng với mỗi biến nên

$$x_{s+i_0+k+1} = A + \frac{f(x_{s+i_0+k}, \cdots, x_{s+i_0+1})}{x_{s+i_0}} < A + \frac{f(x_{s+i_0}, \cdots, x_{s+i_0})}{x_{s+i_0}},$$

suy ra

$$x_{s+i_0+k+1} < A + \frac{g(x_{s+i_0})}{x_{s+i_0}}.$$

Do $x_{s+i_0} \geq \bar{x}$ nên áp dụng (4.39) ta được

$$\frac{g(x_{s+i_0})}{x_{s+i_0}} \leqslant \frac{g(\bar{x})}{\bar{x}}.$$

Khi đó

$$x_{s+i_0+k+1} < A + \tfrac{g(\bar{x})}{\bar{x}} = \bar{x} \quad \text{(vô lý)}.$$

• Nếu $i_0 \in \{k+1, \cdots, 2k+1\}$ và $\min\{x_{s+i_0-1}, \cdots, x_{s+i_0-k-1}\} < x_{s+i_0}$ thì ta có

$$x_{(s+i_0-1)+1} = A + \frac{f(x_{s+i_0-1}, \cdots, x_{s+i_0-k})}{x_{s+i_0-k-1}},$$

suy ra

$$x_{s+i_0}.x_{s+i_0-k-1} = Ax_{s+i_0-k-1} + f(x_{s+i_0-1}, \cdots, x_{s+i_0-k}).$$

Hay

$$\begin{aligned} x_{s+i_0-k-1} &= \frac{Ax_{s+i_0-k-1} + f(x_{s+i_0-1}, \cdots, x_{s+i_0-k})}{x_{s+i_0}} \\ &< \frac{Ax_{s+i_0} + f(x_{s+i_0}, \cdots, x_{s+i_0})}{x_{s+i_0}} \\ &\leqslant A + \frac{g(\bar{x})}{\bar{x}} = \bar{x}. \end{aligned}$$

Như vậy

$$x_{s+i_0-k-1} < \bar{x} \quad \text{(vô lý)}.$$

• Nếu $k < x_{s+i_0} = x_{s+i_0-1} = \cdots = x_{s+i_0-k-1}$ thì ta có

$$\begin{aligned} x_{s+i_0-k-1} &= \frac{Ax_{s+i_0-k-1} + f\left(x_{s+i_0-1},\ \cdots,\ x_{s+i_0-k}\right)}{x_{s+i_0}} \\ &= \frac{Ax_{s+i_0} + f\left(x_{s+i_0},\ \cdots,\ x_{s+i_0}\right)}{x_{s+i_0}} \\ &\leqslant A + \frac{g\left(\bar{x}\right)}{\bar{x}} = \bar{x}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_{s+i_0-k-1} < \bar{x} \quad \text{(vô lý)}.$$

Vậy mỗi nửa chu trình dương của $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xung quanh $\bar{x}$ có không quá $(2k+1)$ số hạng.

Chứng minh tương tự cho trường hợp nửa chu trình âm.

Tiếp theo ta nghiên cứu tính bị chặn của nghiệm dương phương trình (4.36).

Định lý 6.34. *Xét phương trình sai phân* (4.36)*, với* $A > 1$ *và* $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ *thỏa tính chất*

$$\forall y_1,\ \cdots,\ y_k \in R_+ : f\left(y_1,\ \cdots,\ y_k\right) \leqslant c \max\left\{y_1,\ \cdots,\ y_k\right\} + b,$$

trong đó b, c *cố định thỏa* $c \in (0; A)$, $b \geq 0$*. Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình* (4.36) *bị chặn.*

Chứng minh: Giả sử tồn tại nghiệm $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ chứa một dãy con (x_{s_n}) dần đến $+\infty$, ta có thể giả sử $x_m < x_{s_n}$, $\forall m < s_n$.

Với mọi $s_n \geq k+2$, ta có

$$x_{s_n} = A + \frac{f\left(x_{s_n-1},\ \cdots,\ x_{s_n-k}\right)}{x_{s_n-k-1}}$$

$$\leqslant A+\frac{c\max\{x_{s_n-1},\ \cdots,\ x_{s_n-k}\}+b}{x_{s_n-k-1}}$$
$$\leqslant A+\frac{b}{A}+\frac{cx_{s_n}}{A},$$

suy ra

$$Ax_{s_n}\leqslant A^2+b+cx_{s_n}.$$

Hay

$$x_{s_n}\leqslant \tfrac{A^2+b}{A-c}\quad \text{(vô lý)}.$$

Vậy mọi nghiệm dương của phương trình (4.36) bị chặn.

Định lý 6.35. *Giả sử $f:\mathbb{R}_+^k\to\mathbb{R}_+$ là hàm tăng với mỗi biến và thỏa điều kiện*

$$f(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_k)\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_iu_i;\ \forall u_i\geq 0,\ i=1,\ \cdots,\ k.$$

Nếu A thỏa mãn bất đẳng thức

$$\sum_{i_1+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\ j=\overline{1,t}}a_{i_1}a_{i_2}\ \cdots a_{i_{t+1}}<A^{t+1},\tag{4.41}$$

(với t là số tự nhiên dương cho trước) thì mọi nghiệm dương của phương trình (4.36) *bị chặn.*

Chứng minh: Giả sử rằng tồn tại nghiệm (x_n) chứa một dãy con (x_{s_n}) dần đến $+\infty$, ta có thể giả sử $x_m<x_{s_n}$, $\forall m<s_n$. Với n đủ lớn, ta có

$$x_n=A+\frac{f(x_{n-1},\cdots,\ x_{n-k})}{x_{n-(k+1)}}\leqslant A+\frac{1}{x_{n-(k+1)}}\sum_{i=1}^{k}a_ix_{n-i}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}x_n&\leqslant A+\frac{1}{x_{n-(k+1)}}\sum_{i_1=1}^{k}a_{i_1}\left[A+\frac{1}{x_{n-i_1-(k+1)}}\sum_{i_2=1}^{k}a_{i_2}x_{n-i_1-i_2}\right]\\&\leqslant A+\sum_{i_1=1}^{k}a_{i_1}+\sum_{i_1=1,\ i_2=1}^{k}a_{i_1}a_{i_2}\frac{x_{n-i_1-i_2}}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}}\quad (do\ x_n>A,\ \forall n)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A+\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}+\sum_{i_1+\,i_2=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\frac{x_{n-i_1-i_2}}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}}+\sum_{i_1+\,i_2\neq k+1} a_{i_1}a_{i_2}\frac{x_{n-i_1-i_2}}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}}\\
&\leqslant A+\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}+\frac{1}{A}\sum_{i_1+\,i_2=k+1} a_{i_1}a_{i_2}+\sum_{i_1+\,i_2\neq k+1} a_{i_1}a_{i_2}\frac{1}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}}x_{n-i_1-i_2}.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
x_n &\leqslant A+\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}+\frac{1}{A}\sum_{i_1+\,i_2=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\\
&+\sum_{i_1+\,i_2\neq k+1} a_{i_1}a_{i_2}\frac{1}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}}\left[A+\frac{1}{x_{n-i_1-i_2-(k+1)}}\sum_{i_3=1}^{k} a_{i_3}x_{n-i_1-i_2-i_3}\right]\\
&\leqslant A+\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}+\frac{1}{A}\sum a_{i_1}a_{i_2}+\frac{1}{A^2}\sum_{i_1+i_2\neq k+1\, i_1+i_2+i_3=k+1} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\\
&+\sum_{i_1+i_2\neq k+1\, i_1+i_2+i_3\neq k+1} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\frac{x_{n-i_1-i_2-i_3}}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}x_{n-(i_1+i_2)-(k+1)}}\\
&\leqslant A+\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}+\frac{1}{A}\sum_{i_1+\,i_2=k+1} a_{i_1}a_{i_2}+\sum_{i_1+\,i_2\neq k+1} a_{i_1}a_{i_2}\frac{1}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}}x_{n-i_1-i_2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_n &\leqslant B+\sum_{i_1,\,i_2,\cdots,i_{t+1}=1\, i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\,\forall j=\overline{1,\,t}}^{k} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{t+1}}\\
&\times\ \frac{x_{n-(i_1+i_2+\cdots+i_{t+1})}}{x_{n-(k+1)}x_{n-i_1-(k+1)}\cdots x_{n-(i_1+i_2+\cdots+i_t)-(k+1)}},
\end{aligned}
$$

với

$$
\begin{aligned}
B &= A+\sum a_{i_1}+\frac{1}{A}\sum a_{i_1}a_{i_2}+\frac{1}{A^2}\sum_{i_1+i_2\neq k+1} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}+\cdots+\frac{1}{A^t}\\
&\times\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\, j=\overline{1,t-1}\, i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{t+1}}.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
x_{s_n}\leqslant B+\sum_{i_1,\,i_2,\cdots,i_{t+1}=1\ \ i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\,\forall j=\overline{1,\,t}}^{k} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{t+1}}
$$

$$\times \quad \frac{x_{s_n-(i_1+i_2+\cdots+i_{t+1})}}{x_{s_n-(k+1)}x_{s_n-i_1-(k+1)}\cdots x_{s_n-(i_1+i_2+\cdots+i_t)-(k+1)}} \qquad (4.42).$$

Vì $x_m < x_{s_n}$, $\forall m < s_n$ và $x_n > A$, $\forall n$ nên từ (4.42) ta có

$$x_n \leqslant B + \sum_{i_1,\, i_2,\cdots,i_{t+1}=1 \;\; i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\, \forall j=\overline{1,\, t}}^{k} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{t+1}}\frac{x_{s_n}}{A^{t+1}},$$

suy ra

$$x_{s_n} - \sum_{i_1,\, i_2,\cdots,i_{t+1}=1 \;\; i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\, \forall j=\overline{1,\, t}}^{k} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{t+1}}\frac{x_{s_n}}{A^{t+1}} \leqslant B$$

hay

$$x_{s_n}\left(1 - \sum_{i_1,\, i_2,\cdots,i_{t+1}=1 \;\; i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\, \forall j=\overline{1,\, t}}^{k} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{t+1}}\frac{1}{A^{t+1}}\right) \leqslant B$$

hay

$$x_{s_n} \leqslant \frac{B}{1 - \sum\limits_{i_1,\, i_2,\cdots,i_{t+1}=1 \;\; i_1+i_2+\cdots+i_{j+1}\neq k+1,\, \forall j=\overline{1,\, t}}^{k} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{t+1}}\frac{1}{A^{t+1}}}.$$

Do đó (x_{s_n}) bị chặn (Vô lý). Định lý được chứng minh.

Trường hợp đặc biệt, với $k = 1$, điều kiện (4.41) trở thành $A > 0$. Do đó trong trường hợp này ta có kết quả: Với mỗi số thực dương $A > 0$, mọi nghiệm dương của phương trình $x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-1}}, n = 0, 1, \cdots$ bị chặn.

Trong mục này, ta nghiên cứu tính hút toàn cục của nghiệm dương phương trình (4.36).

Định lý 6.36. *Giả sử $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ là hàm liên tục, không giảm với mỗi biến và tăng với biến thứ nhất, hàm $g(u) = f(u, u, \cdots, u)$ thỏa mãn điều kiện* (4.38)*. Khi đó mỗi nghiệm bị chặn của phương trình* (4.36) *hội tụ đến điểm cân bằng $\bar{x}$.*

Chứng minh: Giả sử $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ là nghiệm bị chặn của phương trình (4.36). Khi đó, có hai dãy giới hạn đầy (y_m) và (z_m) của $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ thỏa phương trình (4.36) với mọi $m \in \mathbb{Z}$ và

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = z_0 \leqslant z_m,\, y_m \leqslant y_0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Giả sử dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ không hội tụ, khi đó $z_0 < y_0$. Từ (4.36) và vì f là hàm không giảm với mỗi biến, nên ta có

$$y_0 < A + \frac{g(y_0)}{z_0}$$

và

$$z_0 > A + \frac{g(z_0)}{y_0}.$$

Do đó

$$g(y_0) + Az_0 > z_0 y_0 > Ay_0 + g(z_0),$$

suy ra

$$g(y_0) - g(z_0) > A(y_0 - z_0) \quad \text{(vô lý)}.$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 6.37. *Xét phương trình sai phân* (4.36)*, với* $A > 1$ *và* $f : R_+^k \to R_+$ *là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện*

a) f *không giảm với mỗi biến và tăng với biến thứ nhất.*

b) $g(u) - g(v) \leqslant c(u - v)$, $\forall u > v \geq 0$*;* c *cố định thuộc* $[0; A)$.

Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình (4.36) *hội tụ đến điểm cân bằng dương của phương trình này.*

Chứng minh: Do f không giảm với mỗi biến và tăng với biến thứ nhất nên

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_k) \leqslant g(\max\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}), \quad \forall y_1, y_2, \cdots, y_k \in \mathbb{R}.$$

Do (b) ta có

$$g(\max\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}) - g(0) \leqslant c \max\{y_1, y_2, \cdots, y_k\},$$

suy ra

$$g\left(\max\left\{y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_k\right\}\right) \leqslant c\max\left\{y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_k\right\} + g\left(0\right).$$

Do đó

$$f\left(y_1,\, \cdots, y_k\right) \leqslant g\left(max\left\{y_1,\, \cdots, y_k\right\}\right) \leqslant c\max\left\{y_1,\, \cdots, y_k\right\} + g\left(0\right).$$

Vậy

$$f\left(y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_k\right) \leqslant c\max\left\{y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_k\right\} + g\left(0\right).$$

Từ điều này và Định lý 6.34, ta có mọi nghiệm dương của phương trình (4.36) thì bị chặn. Bởi hàm g thỏa điều kiện (4.38) của Định lý 6.31 nên phương trình (4.36) có duy nhất điểm cân bằng $\bar{x} > A$. Do Định lý 6.36, nên mọi nghiệm dương của phương trình (4.36) hội tụ đến điểm cân bằng $\bar{x}$.
Định lý được chứng minh.

Định lý 6.38. *Xét phương trình sai phân* (4.36), *với* $A > 1$ *và* $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ *là hàm liên tục, không giảm với mỗi biến và thỏa mãn điều kiện sau*

$$g\left(y\right) = f\left(y,\, y,\, \cdots,\, y\right) = y, \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Khi đó, mọi nghiệm dương của phương trình (4.36) *hội tụ tới điểm cân bằng* $A+1$.

Chứng minh: Ta có phương trình (4.36) có duy nhất điểm cân bằng $\bar{x} = A+1$ vì thỏa điều kiện

$$g\left(u\right) - g\left(v\right) \leqslant A\left(u - v\right), \quad \forall u > v \geq A.$$

Ta có

$$f\left(y_1,\, \cdots,\, y_k\right) \leqslant f\left(\max\left\{y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_k\right\},\, \cdots,\, \max\left\{y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_k\right\}\right)$$

$$= g\left(\max\left\{y_1,\, \cdots,\, y_k\right\}\right) = \max\left\{y_1,\, \cdots,\, y_k\right\}, \quad \forall y_1,\, \cdots,\, y_k \in R_+.$$

Theo Định lý 6.34 thì dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ bị chặn (với $c = 1 < A$ và $b = 0$). Mặt khác, do hàm g thỏa điều kiện

$$g\left(u\right) - g\left(v\right) = 1.\left(u - v\right), \quad \forall u > v \geq 0,$$

nên theo Định lý 6.36, dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ hội tụ đến điểm cân bằng $\bar{x} = A + 1$. Định lý được chứng minh.

Về một lớp phương trình sai phân phi tuyến có chậm

Xét phương trình sai phân phi tuyến với một chậm dạng

$$x_{n+1} = \lambda x_n + F(x_{n-m}), \tag{4.43}$$

trong đó m là một số nguyên dương cố định, $n \in \mathbb{N}_0$; $x_i, \quad (i = \overline{-m, 0})$ là các số dương cho trước; $\lambda \in (0, 1)$ và $F \in C([0, \infty))$. Phương trình (4.43) xuất hiện trong nhiều ứng dụng và có thể được xem như là kết quả của sự rời rạc hoá phương trình vi phân phi tuyến có chậm

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t - \tau)), \tag{4.44}$$

trong đó $t > 0, f \in C([0, \infty))$, μ và τ là các tham số dương.

Trong mục này chúng ta nghiên cứu một số tính chất của nghiệm phương trình sai phân phi tuyến với một chậm (4.43). Cụ thể là, ta sẽ xác định một số điều kiện để mọi nghiệm của phương trình trên là hội tụ về 0, giới nội ngặt hay hội tụ tới trạng thái cân bằng dương duy nhất. Đặc biệt là điều kiện để tồn tại nghiệm tuần hoàn không tầm thường của (4.43).

Xét phương trình sai phân phi tuyến có chậm (4.43). Ta có công thức biến thiên hằng số như sau

$$x_{n+1} = \lambda^{n+1} x_0 + \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} F(x_{i-m}) \qquad \text{với } n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.45}$$

Công thức (4.45) được chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng phương pháp quy nạp theo n.

Định lý sau sẽ cho ta một điều kiện cần và đủ để mọi nghiệm của (4.43) hội tụ tới 0.

Định lý 6.39. *Điều kiện cần và đủ để mọi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43) hội tụ tới 0 khi n tiến ra vô cùng là $F(u) < (1-\lambda)u$ với mọi $u > 0$.*

Chứng minh: Trước hết giả sử rằng $F(u) < (1-\lambda)u$ với mọi $u > 0$. Gọi $\{x_n\}_n$ là một nghiệm của (4.43) và $M := \max_{-m\leqslant i\leqslant 0} x_i$. Ta chứng minh rằng $x_n \leqslant M$ với mọi n. Thật vậy, dùng phương pháp quy nạp giả sử rằng $x_k \leqslant M$ với mọi $k \leqslant n$. Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n + F(x_{n-m}) \\ &\leqslant \lambda M + (1-\lambda)M = M. \end{aligned}$$

Vì vậy $x_n \leqslant M$ với mọi n. Đặt

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \limsup_{n\to\infty} x_n < +\infty, \\ \ell_2 &= \limsup_{n\to\infty} F(x_{n-m}) < +\infty. \end{aligned}$$

Lấy $\epsilon > 0$ là một số nhỏ tùy ý. Đặt $N = N(\epsilon)$ sao cho $F(x_{n-m}) < \ell_2 + \epsilon$ với mọi $n > N$. Với $n > N$ ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n + F(x_{n-m}) \\ &< \lambda x_n + \ell_2 + \epsilon. \end{aligned}$$

Lấy giới hạn trên hai vế ta nhận được

$$\ell_1 \leqslant \frac{\ell_2 + \epsilon}{1-\lambda}.$$

Vì ϵ là số nhỏ bao nhiêu tùy ý nên điều này cho ta

$$\ell_1 \leqslant \frac{\ell_2}{1-\lambda}. \tag{4.46}$$

Mặt khác, $\{x_n\}_n$ và $\{F(x_{n-m})\}_n$ là các dãy bị chặn nên ta có thể chọn một dãy con $\{n_k\}$ của tập số tự nhiên sao cho

$$\ell_2 = \lim_{k\to\infty} F(x_{n_k-m}).$$

Ta cũng có thể giả sử rằng dãy con $\{x_{n_k-m}\}$ hội tụ tới giới hạn ℓ_3. Vì F là hàm liên tục nên ta có $\ell_2 = F(\ell_3)$. Nếu $\ell_3 > 0$, thì

$$\ell_2 = F(\ell_3) < (1-\lambda)\ell_3.$$

Rõ ràng, $\ell_3 \leqslant \ell_1$. Vì vậy $\ell_2 < (1-\lambda)\ell_1$. Từ (4.46) ta có

$$\ell_2 < (1-\lambda)\ell_1 \leqslant \frac{1-\lambda}{1-\lambda}\ell_2 = \ell_2.$$

Tức là $\ell_2 < \ell_2$ (vô lý). Vậy $\ell_3 = 0$ do đó

$$\ell_2 = F(\ell_3) = F(0) = 0 \text{ suy ra } \ell_1 = 0.$$

Như vậy,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Ngược lại, giả sử rằng $F(u) < (1-\lambda)u$ không thỏa mãn với mọi $u > 0$. Hai trường hợp sau có thể xảy ra:

(i) Tồn tại $a > 0$ sao cho $F(a) = (1-\lambda)a$.

(ii) $F(u) > (1-\lambda)u$ với mọi $u > 0$.

Trong trường hợp thứ nhất dãy $\{x_n\}_n$ với $x_n = a, \quad \forall n$ là một nghiệm dương nên không hội tụ đến 0. Ta xét trường hợp thứ hai. Đặt $x_i = 2, \quad i = \overline{-m, 0}$. Ta chứng minh rằng $x_n > 1$ với mọi n. Bằng quy nạp, giả sử rằng $x_k > 1$ với $k \leqslant n$. Thế thì

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n + F(x_{n-m}) \\ &> \lambda + (1-\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Vì vậy $x_n > 1$ với mọi n, do đó x_n không hội tụ tới 0. Định lý được chứng minh.

Nhận xét 6.5. *Dễ thấy rằng nếu $F(x) \equiv c$ (hằng số) thì $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{c}{1-\lambda}$. Thật vậy, phương trình $x_{n+1} = \lambda x_n + c$ có nghiệm tổng quát là $x_n = \alpha\lambda^n + \frac{c}{1-\lambda}$. Do $\lambda \in (0,1)$ nên ta có ngay $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{c}{1-\lambda}$.*

Định lý sau là một điều kiện đủ để mọi nghiệm của (4.43) là giới nội ngặt.

Định lý 6.40. *Giả sử rằng $F(x) = H(x,x)$, trong đó $H : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ là hàm liên tục, đồng biến theo biến thứ nhất nhưng nghịch biến theo biến thứ hai và $H(x,y) > 0$ nếu $x, y > 0$. Giả thiết thêm rằng*

$$\limsup_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{H(x,y)}{x} < 1 - \lambda, \tag{4.47}$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{H(x,y)}{x} > 1 - \lambda. \tag{4.48}$$

Khi đó mọi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43) là giới nội ngặt.

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh rằng $\{x_n\}_n$ là bị chặn trên. Bằng phương pháp chứng minh phản chứng, giả sử $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$. Với mỗi số nguyên $n \geqslant -m$, ta định nghĩa

$$k_n := \max\{\rho : -m \leqslant \rho \leqslant n, x_\rho = \max_{-m\leqslant i\leqslant n} x_i\}.$$

Nhận xét rằng $k_{-m} \leqslant k_{-m+1} \leqslant \cdots \leqslant k_n \to \infty$ và do đó

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \infty.$$

Chọn $n_0 > 0$ sao cho $k_{n_0} > 0$. Với $n > n_0$ ta có

$$\begin{aligned} x_{k_n} &= \lambda x_{k_n-1} + H(x_{k_n-1-m}, x_{k_n-1-m}) \\ &\leqslant \lambda x_{k_n} + H(x_{k_n-1-m}, 0) \end{aligned}$$

và vì vậy

$$\lim_{n\to\infty} H(x_{k_n-1-m}, 0) = \infty.$$

Điều này kéo theo

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n-1-m} = \infty.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} x_{k_n} &= \lambda x_{k_n-1} + H(x_{k_n-1-m}, x_{k_n-1-m}) \\ &\leqslant \lambda x_{k_n} + H(x_{k_n}, x_{k_n-1-m}) \end{aligned}$$

(vì $x_{k_n} \geqslant x_{k_n-1-m}$ và $H(x,y)$ là hàm đồng biến theo biến x) nên ta có

$$\limsup_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{H(x,y)}{x} \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{H(x_{k_n}, x_{k_n-1-m})}{x_{k_n}} \geqslant 1-\lambda.$$

Điều này mâu thuẫn với (4.47). Do đó, $\{x_n\}_n$ bị chặn trên.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $\liminf_{n\to\infty} x_n > 0$. Bằng phương pháp chứng minh phản chứng, giả sử rằng $\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$. Với mỗi số nguyên $n \geqslant -m$, ta định nghĩa

$$s_n := \max\{\rho : -m \leqslant \rho \leqslant n, x_\rho = \min_{-m\leqslant i\leqslant n} x_i\}.$$

Rõ ràng, $s_{-m} \leqslant s_{-m+1} \leqslant \cdots \leqslant s_n \to \infty$ và do đó

$$\lim_{n\to\infty} x_{s_n} = 0.$$

Gọi C là một cận trên của $\{x_n\}_n$ và $n_0 > 0$ sao cho $s_{n_0} > 0$. Với $n > n_0$ ta có

$$\begin{aligned} x_{s_n} &= \lambda x_{s_n-1} + H(x_{s_n-1-m}, x_{s_n-1-m}) \\ &\geqslant \lambda x_{s_n} + H(x_{s_n-1-m}, C) \end{aligned}$$

và do đó

$$\lim_{n\to\infty} H(x_{s_n-1-m}, C) = 0.$$

Điều này dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty} x_{s_n-1-m} = 0.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} x_{s_n} &= \lambda x_{s_n-1} + H(x_{s_n-1-m}, x_{s_n-1-m}) \\ &\geqslant \lambda x_{s_n} + H(x_{s_n}, x_{s_n-1-m}) \\ (1-\lambda)x_{s_n} &\geqslant H(x_{s_n}, x_{s_n-1-m}) \end{aligned}$$

(vì $x_{s_n} \leqslant x_{s_n-1-m}$ và $H(x,y)$ là hàm đồng biến theo biến x) nên ta nhận được

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{H(x,y)}{x} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{H(x_{s_n}, x_{s_n-1-m})}{x_{s_n}} \leqslant 1-\lambda$$

điều này trái với (4.48). Định lý được chứng minh.

Định nghĩa 6.13. *Với một nghiệm giới nội ngặt $\{x_n\}_n$ của (4.43) ta gọi tập tất cả các điểm tụ của dãy các véc tơ $\{\underline{v}_n = (x_{n-m}, x_{n-m+1}, \cdots, x_n)\}_n$ là tập giới hạn ô mê ga của $\{x_n\}_n$ và kí hiệu là $\omega(x)$.*

Nhận xét 6.6. *Tập giới hạn $\omega(x)$ compact và bất biến đối với ánh xạ*

$$T : \mathbb{R}_+^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{m+1}$$

*xác định bởi $T\underline{v}_n = \underline{v}_{n+1}$. Nếu một nghiệm $\{x_n\}_n$ là tuần hoàn thì tập hợp giới hạn $\omega(x)$ gồm hữu hạn điểm. Ngược lại, nếu tập hợp giới hạn $\omega(x)$ gồm hữu hạn điểm, thì bản thân nó là một nghiệm tuần hoàn (xem [**?**]). Hơn nữa, ánh xạ $T : \omega(x) \longrightarrow \omega(x)$ là toàn ánh. Vì vậy, tồn tại hai nghiệm có nguồn gốc $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (giá trị ban đầu được chọn trong tập giới hạn $\omega(x)$) của phương trình (4.43) với mọi n sao cho*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = P_0, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = Q_0$$

và

$$Q_0 \leqslant P_n \leqslant P_0, \qquad Q_0 \leqslant Q_n \leqslant P_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ta có

$$P_0 = \lambda P_{-1} + F(P_{-m-1}), \quad Q_0 = \lambda Q_{-1} + F(Q_{-m-1}),$$

và hệ quả là,

$$P_0 \leqslant \frac{F(P_{-m-1})}{1-\lambda}, \quad Q_0 \geqslant \frac{F(Q_{-m-1})}{1-\lambda}.$$

Từ công thức này ta có

$$\frac{1}{1-\lambda} \cdot \inf_{x>0} F(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \frac{1}{1-\lambda} \cdot \sup_{x>0} F(x).$$

Từ đây ta luôn giả sử rằng phương trình $x = \lambda x + F(x)$ có nghiệm duy nhất $x = \overline{x} \in (0, \infty)$. Ta sẽ xác định điều kiện để mọi nghiệm của (4.43) hội tụ tới trạng thái cân bằng duy nhất $\overline{x}$ với tất cả các chậm.

Định lý 6.41. *Giả sử F là hàm đơn điệu tăng và*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} < 1-\lambda, \tag{4.49}$$

$$\liminf_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} > 1-\lambda. \tag{4.50}$$

Khi đó mọi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43) hội tụ đến $\overline{x}$.

Chứng minh: Với mỗi $x \in [0, \infty)$ đặt $H(x, y) = F(x), \forall y \in [0, \infty)$, thế thì điều kiện (4.47) và (4.48) là thỏa mãn và định lý 6.40 được áp dụng. Điều này có nghĩa rằng mọi nghiệm của (4.43) là giới nội ngặt. Vì vậy, với mỗi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43), tồn tại hai nghiệm có nguồn gốc $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ của (4.43) sao cho

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = P_0, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = Q_0 \tag{4.51}$$

và

$$Q_0 \leqslant P_n \leqslant P_0, \qquad Q_0 \leqslant Q_n \leqslant P_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Hơn nữa,

$$P_0 \leqslant \frac{F(P_{-m-1})}{1-\lambda} \leqslant \frac{F(P_0)}{1-\lambda} \tag{4.52}$$

và tương tự

$$Q_0 \geqslant \frac{F(Q_{-m-1})}{1-\lambda} \geqslant \frac{F(Q_0)}{1-\lambda}. \tag{4.53}$$

Đặt

$$\xi(x) = \frac{F(x)}{x} - (1-\lambda).$$

Từ (4.52) và (4.53) ta thu được $\xi(P_0) \geqslant 0$ và $\xi(Q_0) \leqslant 0$. Mặt khác, từ (4.49) suy ra $\limsup_{x\to\infty} \xi(x) < 0$, và từ (4.50) ta nhận được $\liminf_{x\to 0} \xi(x) > 0$. Do đó, hai trường hợp sau có thể xảy ra: Hoặc là trong $(0, Q_0]$ và $[P_0, \infty)$ có hai điểm K', K'' khác nhau sao cho $\xi(K') = \xi(K'') = 0$, hoặc $P_0 = Q_0 = \overline{x}$. Theo giả thiết thì trường hợp thứ hai xảy ra. Định lý được chứng minh.

Định lý 6.42. *Giả sử F là hàm đơn điệu giảm. Đặt*

$$f(x) = \frac{F(x)}{1-\lambda}.$$

Giả thiết thêm rằng hệ hai phương trình sau

$$\alpha = f(\beta), \quad \beta = f(\alpha)$$

có nghiệm duy nhất $\alpha = \beta$. Khi đó mọi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43) hội tụ đến $\overline{x}$.

Chứng minh: Với mỗi $y \in [0, \infty)$ đặt $H(x, y) = F(y), \forall x \in [0, \infty)$, thế thì điều kiện (4.47) và (4.48) là thỏa mãn và định lý 6.40 được áp dụng. Do vậy, với mỗi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43), tồn tại hai nghiệm có nguồn gốc $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ của (4.43) sao cho

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = P_0, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = Q_0$$

và

$$Q_0 \leqslant P_n \leqslant P_0, \qquad Q_0 \leqslant Q_n \leqslant P_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Vì vậy,

$$P_0 \leqslant \frac{F(P_{-m-1})}{1-\lambda} \leqslant \frac{F(0)}{1-\lambda} = f(0) =: b_1$$

và tương tự

$$Q_0 \geqslant \frac{F(Q_{-m-1})}{1-\lambda} \geqslant f(\infty) =: a_1.$$

Xét hệ các phương trình sai phân sau

$$a_{n+1} = f(b_n), \quad b_{n+1} = f(a_n) \quad \text{với } n \in \mathbb{N}.$$

Thế thì cả P_0 và Q_0 cùng thuộc vào đoạn $[a_n, b_n]$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Dãy $\{a_n\}_n$ là đơn điệu tăng và dãy $\{b_n\}_n$ là đơn điệu giảm. Vì vậy tồn tại hai giới hạn tương ứng là α và β. Hơn nữa, các giới hạn này thỏa mãn hệ

$$\alpha = f(\beta), \quad \beta = f(\alpha).$$

Theo giả thiết của ta thì $\alpha = \beta = \overline{x}$. Vì vậy, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \overline{x}$ và do đó, $P_0 = Q_0 = \overline{x}$. Định lý được chứng minh.

Tiếp theo, ta giả sử rằng với $y_0 > 0$, ta có

$$F(y_0) = \max_{x\geqslant 0} F(x)$$

và F là hàm đơn điệu tăng trong $[0, y_0]$, đơn điệu giảm trong (y_0, ∞). Trong trường hợp này F được gọi là hàm hình chuông. Đặt

$$f(x) = \frac{F(x)}{1-\lambda}.$$

Giả thiết thêm rằng $\{x_n\}_n$ là một nghiệm giới nội ngặt của (4.43). Gọi $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là hai nghiệm có nguồn gốc của phương trình (4.43) sao cho

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = P_0, \quad Q_0 \leqslant P_n \leqslant P_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.54}$$

Vì vậy,

$$P_0 \leqslant \frac{F(P_{-m-1})}{1-\lambda} \leqslant \frac{F(y_0)}{1-\lambda} = f(y_0). \tag{4.55}$$

Định lý 6.43. *Giả sử rằng $f(y_0) \leqslant y_0$ và (4.50) cũng được giả thiết là đúng. Giả sử $\{x_n\}_n$ là một nghiệm giới nội ngặt của (4.43). Thế thì $\{x_n\}_n$ hội tụ đến $\overline{x}$.*

Chứng minh: Từ (4.54) và (4.55) ta có $P_n \leqslant P_0 \leqslant y_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Nhưng F là hàm tăng trong $[0, y_0]$ nên ta thu được

$$P_0 \leqslant \frac{F(P_{-m-1})}{1-\lambda} \leqslant \frac{F(P_0)}{1-\lambda} \tag{4.56}$$

và tương tự

$$Q_0 \geqslant \frac{F(Q_{-m-1})}{1-\lambda} \geqslant \frac{F(Q_0)}{1-\lambda}. \tag{4.57}$$

Đặt

$$\xi(x) = \frac{F(x)}{x} - (1-\lambda).$$

Từ (4.56) và (4.57) suy ra

$$\xi(P_0) \geqslant 0, \quad \xi(Q_0) \leqslant 0.$$

Mặt khác, rõ ràng $\limsup_{x\to\infty} \xi(x) < 0$ và từ (4.50) ta có $\liminf_{x\to 0} \xi(x) > 0$. Do đó, hai trường hợp sau có thể xảy ra: Hoặc là trong $(0, Q_0]$ và $[P_0, \infty)$ có hai điểm $K^{'}, K^{''}$ khác nhau sao cho $\xi(K^{'}) = \xi(K^{''}) = 0$, hoặc $P_0 = Q_0 = \overline{x}$. Do giả thiết của ta trường hợp thứ hai xảy ra. Định lí được chứng minh.

Xét trường hợp $f(y_0) > y_0$. Trước tiên, ta nhắc lại định lý sau của Ivanov đã được trình bày trong [**?**]:

Định lý 6.44. [**?**] *Giả sử tồn tại một đoạn I trong $\mathbb{R}$ là bất biến đối với ánh xạ $f \in C(\mathbb{R})$, tức là $f(I) \subset I$. Giả thiết thêm rằng, có duy nhất một điểm $\overline{x} \in \ \mathrm{int}I$ là điểm hút toàn cục của f, tức là $f(\overline{x}) = \overline{x}$ và $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \overline{x}$ với mọi $x \in \ \mathrm{int}I$. Thế thì, mọi nghiệm $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_{-m}}, x_i \in \ \mathrm{int}I, \quad i = \overline{-m, 0}$ của phương trình*

$$x_{n+1} = \frac{\mu}{\mu+1}x_n + \frac{1}{\mu+1}f(x_{n-m}), \quad \mu > 0$$

hội tụ tới $\overline{x}$.

Đặt I là đoạn $[0, f(y_0)]$. Rõ ràng hàm f đưa I vào chính nó. Từ (4.55) ta có $x_n \in I$ với tất cả n trừ một số hữu hạn chỉ số n. Mặt khác, vì $\overline{x}$ là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x = \lambda x + F(x)$ nên nó cũng là nghiệm dương duy nhất của phương trình $f(x) = x$. Điều này có nghĩa $\overline{x} \in \operatorname{int} I$ là điểm cố định duy nhất của f. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 6.4. *Giả sử rằng $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \overline{x}$ với tất cả $x \in I$. Thế thì mọi nghiệm giới nội ngặt của (4.43) hội tụ tới $\overline{x}$.*

Chứng minh: Như đã đề cập ở trên với một nghiệm giới nội ngặt $\{x_n\}_n$ ta phải có $x_n \in I$ với tất cả n trừ một số hữu hạn chỉ số n. Vì vậy không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $x_n \in I$ với mọi n. Theo định lý 6.44 ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 6.5. *Giả sử hàm f có đạo hàm đến cấp 3 trên I, $|f'(\overline{x})| \leqslant 1$ và đạo hàm Schwarzian*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\frac{\Big(f''(x)}{f'(x)\Big)^2}$$

của f âm trong $I \setminus \{\overline{x}\}$. Thế thì $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \overline{x}$ với tất cả $x \in I$.

Phép chứng minh của bổ đề 6.5 có thể tìm thấy ở [**?**], [**?**]. Bổ đề 6.4 và 6.5 cho ta định lý sau:

Định lý 6.45. *Giả sử hàm f có đạo hàm đến cấp 3 trên I, $|f'(\overline{x})| \leqslant 1$ và đạo hàm Schwarzian*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\frac{\Big(f''(x)}{f'(x)\Big)^2}$$

của f âm trong $I \setminus \{\overline{x}\}$. Thế thì mọi nghiệm giới nội ngặt của (4.43) hội tụ tới $\overline{x}$.

Bây giờ chúng ta nghiên cứu hiệu suất của chậm m đối với sự hội tụ của nghiệm phương trình (4.43) tới trạng thái cân bằng dương $\overline{x}$. Ta giả thiết $f(y_0) > y_0$. Điều này kéo theo $\overline{x} > y_0$.

Mệnh đề 6.3. *Với mỗi nghiệm giới nội ngặt $\{x_n\}_n$ của (4.43) ta có*

$$\lambda^{m+1}\overline{x} < \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{x} \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant f(y_0).$$

Chứng minh: Gọi $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là các nghiệm có nguồn gốc của phương trình (4.43) với $P_0 = \limsup_{n\to\infty} x_n$ và $Q_0 = \liminf_{n\to\infty} x_n$. Ta có

$$Q_0 = \lambda Q_{-1} + F(Q_{-1-m}) \geqslant \lambda Q_0 + F(Q_{-1-m}),$$

do đó $Q_0 \geqslant f(Q_{-1-m})$. Nhưng $Q_0 \leqslant Q_{-1-m}$, vì vậy $Q_{-1-m} \geqslant f(Q_{-1-m})$. Mặt khác, ta có $y < f(y)$ với mọi $y \in (0, \overline{x})$. Vì vậy, $Q_{-1-m} \geqslant \overline{x}$. Từ đây suy ra $P_0 \geqslant \overline{x}$. Hơn nữa, từ công thức biến thiên hằng số ta có

$$\begin{aligned} Q_0 &= \lambda Q_{-1} + F(Q_{-1-m}) \\ &= \lambda(\lambda Q_{-2} + F(Q_{-2-m})) + F(Q_{-1-m}) \\ &= \lambda^2 Q_{-2} + \lambda F(Q_{-2-m}) + F(Q_{-1-m}) \\ &= \lambda^{m+1} Q_{-1-m} + \sum_{j=0}^{m} \lambda^j F(Q_{-1-m-j}) > \lambda^{m+1}\overline{x}. \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$P_0 = \lambda P_{-1} + F(P_{-1-m}) \leqslant \lambda P_0 + F(P_{-1-m}),$$

nên $P_0 \leqslant f(P_{-1-m}) < f(y_0)$. Nhưng $P_0 \geqslant P_{-1-m}$, do đó $P_{-1-m} \leqslant f(P_{-1-m})$. Mặt khác, ta có $y > f(y)$ với mọi $y \in (\overline{x}, \infty)$. Vì vậy, $P_{-1-m} \leqslant \overline{x}$. Từ đây suy ra $Q_0 \leqslant \overline{x}$. Mệnh đề được chứng minh.

Định lý 6.46. *Giả sử tồn tại các hằng số dương L_1, L_2 sao cho hàm f thoả mãn điều kiện*

$$0 \leqslant f(x) - \overline{x} \leqslant L_1(\overline{x} - x) \quad \textit{với mọi } x \in [\lambda^{m+1}\overline{x}, \overline{x}],$$

$$0 \leqslant \overline{x} - f(x) \leqslant L_2(x - \overline{x}) \quad \textit{với mọi } x \in [\overline{x}, f(y_0)]. \tag{4.58}$$

Khi đó mọi nghiệm giới nội ngặt $\{x_n\}_n$ của (4.43) hội tụ đến $\overline{x}$ nếu

$$\lambda^{m+1} > 1 - \frac{1}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Chứng minh: Gọi $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là các nghiệm có nguồn gốc của phương trình (4.43) với $P_0 = \limsup_{n\to\infty} x_n$ và $Q_0 = \liminf_{n\to\infty} x_n$. Từ mệnh đề 6.3 ta có

$$\lambda^{m+1}\overline{x} < Q_0 \leqslant P_{-m-1} \leqslant \overline{x} \leqslant Q_{-m-1} \leqslant P_0 \leqslant f(y_0).$$

Từ công thức biến thiên hằng số ta có

$$\begin{aligned}
\overline{x} - Q_0 &= \overline{x} - \lambda^{m+1} Q_{-1-m} - \sum_{j=0}^{m} \lambda^j F(Q_{-1-m-j}) \\
&\leqslant \overline{x}\big(1 - \lambda^{m+1}\big) - (1-\lambda)\sum_{j=0}^{m} \lambda^j f(Q_{-1-m-j}) \\
&= (1-\lambda)\sum_{j=0}^{m} \lambda^j (\overline{x} - f(Q_{-1-m-j})) \\
&\leqslant (1-\lambda) \sum_{\{0\leqslant j\leqslant m:\ \ \overline{x}\geqslant f(Q_{-1-m-j})\}} \lambda^j (\overline{x} - f(Q_{-1-m-j})) \\
&\leqslant (1-\lambda^{m+1})(P_0 - \overline{x})L_2.
\end{aligned}$$

Tương tự,

$$\begin{aligned}
P_0 - \overline{x} &= \lambda^{m+1} P_{-1-m} - \overline{x} + \sum_{j=0}^{m} \lambda^j F(P_{-1-m-j}) \\
&\leqslant (\lambda^{m+1} - 1)\overline{x} + (1-\lambda)\sum_{j=0}^{m} \lambda^j f(P_{-1-m-j}) \\
&= (1-\lambda)\sum_{j=0}^{m} \lambda^j (f(P_{-1-m-j}) - \overline{x}) \\
&\leqslant (1-\lambda) \sum_{\{0\leqslant j\leqslant m:\ \ f(P_{-1-m-j})\geqslant\overline{x}\}} \lambda^j (f(P_{-1-m-j}) - \overline{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-\lambda)\sum_{j=0}^{m}\lambda^j L_1(\overline{x}-Q_0) \\ &= \big(1-\lambda^{m+1}\big)L_1(\overline{x}-Q_0) \\ &\leqslant \big(1-\lambda^{m+1}\big)^2 L_1L_2\big(P_0-\overline{x}\big). \end{aligned}$$

Nhưng từ giả thiết của ta,

$$\big(1-\lambda^{m+1}\big)^2 L_1L_2 < 1,$$

nên $P_0 = Q_0 = \overline{x}$. Định lý được chứng minh.

Mệnh đề 6.4. *Giả sử các giả thiết của định lý 6.46 được thoả mãn. Cho $m_0 \geqslant 0$ là một số nguyên sao cho $m_0 < m$ và*

$$\lambda^{m_0+1} > 1 - \frac{1}{\sqrt{L_1L_2}}.$$

Thế thì mỗi nghiệm (khác hằng) $\{x_n\}_n$ của (4.43) không tuần hoàn với chu kì $m - m_0$.

Chứng minh: Giả sử trái lại, tức tồn tại $\{x_n\}_n$ là một nghiệm tuần hoàn (khác hằng) với chu kì $m - m_0$. Thế thì $\{x_n\}_n$ là nghiệm của phương trình

$$x_{n+1} = \lambda x_n + F(x_{n-m_0}).$$

Chậm trong phương trình này là m_0, nên áp dụng định lý 6.46, ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

Nhưng $\{x_n\}_n$ là dãy tuần hoàn nên $x_n = \overline{x}$ với mọi n. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\{x_n\}_n$ là nghiệm khác hằng. Mệnh đề được chứng minh.

Trên đây ta đã nghiên cứu hiệu suất của chậm m đối với sự hội tụ của nghiệm phương trình (4.43). Ta đã chứng minh rằng với chậm nhỏ và F là hàm phi tuyến hình chuông, thì mỗi nghiệm giới nội ngặt hội tụ đến trạng thái cân bằng dương $\overline{x}$. Bây giờ ta sẽ nghiên cứu tính tuần hoàn của nghiệm trong trường hợp chậm m đủ lớn. Với giả thiết $f(x) > x$ khi $x < \overline{x}$ và $f(x) < x$ khi $x > \overline{x}$, ta đã chứng minh rằng tất cả các nghiệm giới nội ngặt $\{x_n\}_n$ của (4.43) thỏa mãn

$$\lambda^{m+1}\overline{x} < \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{x} \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \max_{\lambda^{m+1}\overline{x}\leqslant x\leqslant\overline{x}} f(x). \tag{4.59}$$

Hệ quả là, nếu một nghiệm giới nội ngặt không dao động xung quanh trạng thái cân bằng dương $\overline{x}$, thì nó phải hội tụ đến $\overline{x}$. Cũng vậy, rõ ràng rằng mỗi nghiệm tuần hoàn khác hằng số phải dao động xung quanh $\overline{x}$. Cho nên, trong mục này ta chỉ quan tâm nghiệm dao động xung quanh trạng thái cân bằng dương $\overline{x}$.

Ta giả sử tồn tại một đoạn compact $I = [a, b] \ni \overline{x}$ sao cho $f(I) \subseteq I$, $f(x) > \overline{x}$ với $x \in (a, \overline{x})$ và $f(x) < \overline{x}$ với $x \in (\overline{x}, b]$. Kí hiệu $\mathcal{K}$ là khối $[\overline{x}, b]^{m+1}$. Rõ ràng, $\mathcal{K}$ là tập lồi compact của $\mathbb{R}^{m+1}$. Ta nghiên cứu nghiệm dao động của (4.43) xuất phát từ $\mathcal{K}$.

Mệnh đề 6.5. *Giả sử $\{x_n\}_n$ là một nghiệm của (4.43) xuất phát từ $\mathcal{K}$. Thế thì $x_n \in I$ với tất cả $n \in \mathbb{N}$.*

Chứng minh: Ta chứng minh quy nạp theo n. Giả sử $x_k \in I = [a, b]$ với tất cả $k \leqslant n$. Thế thì

$$x_{n+1} = \lambda x_n + (1-\lambda) f(x_{n-m}) \geqslant \lambda a + (1-\lambda)a = a,$$

bởi vì f ánh xạ đoạn I vào chính nó. Tương tự, $x_{n+1} \leqslant b$, và do đó, $x_{n+1} \in I$. Mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề 6.6. *Tồn tại một nghiệm dao động của (4.43) xuất phát từ $\mathcal{K}$.*

Chứng minh: Giả sử trái lại rằng mỗi nghiệm xuất phát từ $\mathcal{K}$ là không dao động. Thế thì từ (4.59) ta suy ra tất cả các nghiệm đều hội tụ đến trạng thái cân bằng $\overline{x}$. Mặt khác, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} K : \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (x_{-m}, x_{-m+1}, \cdots, x_0) &\mapsto (x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{2m}). \end{aligned}$$

Rõ ràng K là một ánh xạ liên tục. Đỉnh $(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})$ là một điểm bất động cực biên của ánh xạ K. Theo định lý điểm bất động (không cực biên) Browder (xem [**?**]), K có một điểm bất động khác ở bên trong $\mathcal{K}$. Gọi $\{y_n\}_n$ là một nghiệm của (4.43) xuất phát từ điểm bất động này. Thế thì $\{y_n\}_n$ là một nghiệm tuần hoàn khác hằng của (4.43). Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng mỗi nghiệm xuất phát từ $\mathcal{K}$ hội tụ tới trạng thái cân bằng dương. Mệnh đề được chứng minh.

Định nghĩa 6.14. *Một nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43) xuất phát từ $\mathcal{K}$ được gọi là dao động chậm xung quanh trạng thái cân bằng dương $\overline{x}$ nếu tồn tại dãy các số nguyên dương*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

sao cho $n_{k+1} - n_k > m$ và

$$x_{n_{2k}}, x_{n_{2k}+1}, \cdots, x_{n_{2k}+m} \geqslant \overline{x},$$

$$x_{n_{2k-1}}, x_{n_{2k-1}+1}, \cdots, x_{n_{2k-1}+m} < \overline{x}$$

với tất cả các số nguyên dương k.

Mệnh đề 6.7. *Mọi nghiệm dao động của (4.43) xuất phát từ $\mathcal{K}$ là dao động chậm.*

Chứng minh: Xét một nghiệm dao động $\{x_n\}_n$ xuất phát từ $\mathcal{K}$. Từ định nghĩa của $\mathcal{K}$ ta có $x_{-m}, x_{-m+1}, \cdots, x_0 \geqslant \overline{x}$. Giả sử n_1 là chỉ số nhỏ nhất sao cho $x_{n_1} < \overline{x}$. Thế thì $x_{n_1}, x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_1+m} < \overline{x}$. Thật vậy, giả sử trái lại, tức là có $k \in [0, m)$ sao cho $x_{n_1+k+1} \geqslant \overline{x}$ và $x_{n_1+k} < \overline{x}$. Khi đó,

$$(1-\lambda) f(x_{n_1+k-m}) = x_{n_1+k+1} - \lambda x_{n_1+k} > \overline{x} - \lambda \overline{x},$$

suy ra $f(x_{n_1+k-m}) > \overline{x}$. Nhờ giả thiết trên hàm f, ta nhận được $x_{n_1+k-m} < \overline{x}$. Điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của n_1. Vì vậy,

$$x_{n_1}, x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_1+m} < \overline{x}.$$

Bây giờ giả sử $n_2 > n_1$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho $x_{n_2} \geqslant \overline{x}$. Rõ ràng, $n_2 > n_1+m$. Ta sẽ chứng minh rằng $x_{n_2}, x_{n_2+1}, \cdots, x_{n_2+m} \geqslant \overline{x}$. Thật vậy, giả sử trái lại, tồn tại $k \in [0, m)$ thoả mãn $x_{n_2+k+1} < \overline{x}$ và $x_{n_2+k} \geqslant \overline{x}$. Khi đó,

$$(1-\lambda)f(x_{n_2+k-m}) = x_{n_2+k+1} - \lambda x_{n_2+k} < \overline{x} - \lambda\overline{x},$$

kéo theo $f(x_{n_2+k-m}) < \overline{x}$. Nhờ giả thiết của hàm f, ta nhận được $x_{n_2+k-m} > \overline{x}$. Điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của n_2. Vì vậy,

$$(x_{n_2}, x_{n_2+1}, \cdots, x_{n_2+m}) \in \mathcal{K}.$$

Bằng quy nạp, ta có thể xác định dãy

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

các số nguyên dương sao cho $n_{k+1} - n_k > m$ và

$$x_{n_{2k}}, x_{n_{2k}+1}, \cdots, x_{n_{2k}+m} \geqslant \overline{x},$$

$$x_{n_{2k+1}}, x_{n_{2k+1}+1}, \cdots, x_{n_{2k+1}+m} < \overline{x}$$

với tất cả các số nguyên dương k. Mệnh đề được chứng minh.

Bây giờ ta nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tuần hoàn không tầm thường của (4.43) khi chậm m đủ lớn. Tuyến tính hoá (4.43) tại trạng thái cân bằng (đặt $x_n = \overline{x} + \epsilon y_n$, với $\epsilon > 0$ là một số nhỏ tuỳ ý) ta được

$$y_{n+1} = \lambda y_n + F'(\overline{x})y_{n-m}.$$

Tìm nghiệm dưới dạng $y_n = z^n$, ta nhận được phương trình đặc trưng

$$z^{m+1} = \lambda z^m + F^{'}(\overline{x}).$$

Sự ổn định tuyến tính ở đây được xác định nhờ độ lớn của z. Điều kiện ổn định là $| z |< 1$ và không ổn định khi $| z |> 1$. Trường hợp $| z |= 1$ thì hiện tượng rẽ nhánh Hopf xảy ra. Hệ số rẽ nhánh được xác định như sau: Chọn $z = \cos\theta + i\sin\theta$ và đặt $D = F^{'}(\overline{x})$, ta có

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1} &= \lambda(\cos\theta + i\sin\theta)^m + D,\\ \cos(m+1)\theta + i\sin(m+1)\theta &= \lambda(\cos m\theta + i\sin m\theta) + D.\end{aligned}$$

Từ đây ta nhận được

$$\begin{aligned}\cos(m+1)\theta &= \lambda\cos m\theta + D,\\ \sin(m+1)\theta &= \lambda\sin m\theta.\end{aligned}$$

Suy ra

$$1 = \lambda^2 + D^2 + 2\lambda D\cos m\theta,$$

hay

$$\cos m\theta = \frac{1-\lambda^2-D^2}{2\lambda D},$$

hay

$$m\theta = \arccos\frac{1-\lambda^2-D^2}{2\lambda D}.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned}\cos m\theta\cos\theta - \sin m\theta\sin\theta &= \lambda\cos m\theta + D,\\ \sin m\theta\cos\theta + \cos m\theta\sin\theta &= \lambda\sin m\theta.\end{aligned}$$

Giải hệ này ta được

$$\cos\theta = \frac{1+\lambda^2-D^2}{2\lambda},$$

hay

$$\theta = \arccos\frac{1+\lambda^2-D^2}{2\lambda}.$$

Do đó, hệ số rẽ nhánh là

$$m^* = \frac{\arccos \frac{1-\lambda^2-D^2}{2\lambda D}}{\arccos \frac{1+\lambda^2-D^2}{2\lambda}},$$

trong đó $F'(\overline{x}) \in [-1-\lambda, -1+\lambda] \cup [1-\lambda, 1+\lambda]$.

Theo nguyên lý rẽ nhánh Hopf ta có kết quả sau cho sự tồn tại nghiệm tuần hoàn không tầm thường của (4.43).

Định lý 6.47. *Nếu hàm F khả vi tại $\overline{x}$ và chậm m thoả mãn điều kiện*

$$m > \frac{\arccos \frac{1-\lambda^2-D^2}{2\lambda D}}{\arccos \frac{1+\lambda^2-D^2}{2\lambda}} \qquad \Big(D = F'(\overline{x}) \in [-1-\lambda, -1+\lambda] \cup [1-\lambda, 1+\lambda]\Big) \quad (4.60)$$

thì (4.43) nhận một nghiệm tuần hoàn không tầm thường, xuất phát từ $\mathcal{K}$ và dao động chậm xung quanh trạng thái cân bằng dương $\overline{x}$.

Định nghĩa 6.15. *Một nghiệm $\{x_n\}_n$ của mô hình quần thể (4.43) được gọi là diệt vong nếu $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; được gọi là trường tồn nếu*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n < \infty$$

và được gọi là phát triển bền vững nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} x_n \in (0, \infty)$.

Ví dụ 6.51. *(Mô hình quần thể chim cút ở bang Wisconsin)*

Khảo sát sự diệt vong, trường tồn, phát triển bền vững và tuần hoàn của mô hình quần thể chim cút ở bang Wisconsin hợp chủng quốc Hoa Kỳ

$$x_{n+1} = \lambda x_n + \frac{\mu x_{n-m}}{1 + x_{n-m}^k} \quad (0 < \lambda < 1, \quad \mu, k > 0).$$

Phương trình này thuộc dạng (4.43) với

$$F(x) = \frac{\mu x}{1+x^k}, \quad f(x) = \frac{F(x)}{1-\lambda}.$$

Sự diệt vong

Nếu $\lambda + \mu \leqslant 1$ *hay* $\mu \leqslant 1 - \lambda$ *thì*

$$F(x) = \frac{\mu x}{1 + x^k} \leqslant \frac{(1-\lambda)x}{1+x^k} < (1-\lambda)x, \quad x > 0.$$

Theo định lý 6.39 ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Sự trường tồn

Tiếp theo ta xét $\lambda + \mu > 1$. *Đặt*

$$H(x,y) = \mu x \frac{1}{1+y^k}.$$

Rõ ràng, H *là hàm đồng biến trên* $[0,+\infty)$ *đối với* x *và nghịch biến trên* $[0,+\infty)$ *đối với* y*; hơn nữa* H *liên tục và* $F(x) = H(x,x)$. *Ta có*

$$\limsup_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{\mu x \frac{1}{1+y^k}}{x} = \limsup_{y\to\infty} \frac{\mu}{1+y^k} = 0 < 1 - \lambda,$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mu x \frac{1}{1+y^k}}{x} = \liminf_{y\to 0} \frac{\mu}{1+y^k} = \mu > 1 - \lambda.$$

Vậy theo định lý 6.40 ta có

$$0 < \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n < \infty.$$

b Sự phát triển bền vững

Ta có

$$F^{'}(x) = \mu \cdot \frac{1 + (1-k)x^k}{(1+x^k)^2}.$$

Do đó nếu $k \leqslant 1$ *thì* $F^{'}(x) > 0$ *và* F *là hàm đồng biến. Hơn nữa các điều kiện (4.49) và (4.50) của định lý 6.41 được thỏa mãn. Tức là*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\mu}{1+x^k} = 0 < 1 - \lambda,$$

$$\liminf_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \liminf_{x\to 0} \frac{\mu}{1+x^k} = \mu > 1 - \lambda.$$

Xét phương trình $F(x) = (1-\lambda)x, x > 0$ *ta có* $\frac{\mu x}{1+x^k} = (1-\lambda)x$ *từ đó ta thu được* $x = \sqrt[k]{\frac{\lambda+\mu-1}{1-\lambda}}$ *duy nhất (vì* $x > 0$*). Theo định lý 6.41 ta có*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{\frac{\lambda+\mu-1}{1-\lambda}}.$$

Bây giờ ta xét trường hợp $k > 1$*. Trong trường hợp này dùng định lý 6.43 ta tính được*

$$\begin{aligned} F^{'}(x) = 0 &\implies 1 + (1-k)x^k = 0 \\ &\implies x = \sqrt[k]{\frac{1}{k-1}} > 0. \end{aligned}$$

Xét $y_0 = \sqrt[k]{\frac{1}{k-1}} > 0$ *ta có*

$$F(y_0) = \max_{x\geqslant 0} F(x)$$

$$F(y_0) = \frac{\mu y_0}{1+y_0^k} = \frac{(k-1)\mu}{k} y_0$$

và ta nhận được rằng nếu $0 < k < \frac{\mu}{\lambda+\mu-1}$ *thì*

$$F(y_0) = (1-\frac{1}{k})\mu y_0 \leqslant (1-\frac{\lambda+\mu-1}{\mu})\mu y_0 = (1-\lambda)y_0,$$

từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{\frac{\lambda+\mu-1}{1-\lambda}}.$$

Tiếp theo ta xét trường hợp

$$k > \frac{\mu}{\lambda+\mu-1}.$$

Để áp dụng định lí 6.45, trước hết ta tính $f'(\overline{x})$*. Ta có*

$$f'(\overline{x}) = \frac{1}{\mu}\{\mu - k(\lambda+\mu-1)\}.$$

Ta cần tìm điều kiện để $\mid f'(\overline{x}) \mid \leqslant 1$*. Điều này cho ta*

$$k \leqslant \frac{2\mu}{\lambda+\mu-1}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng với $k \geqslant 2$ đạo hàm Schwarzian Sf là âm trên đoạn $[0, f(y_0)]$. Ta có

$$Sf(x) = -\frac{k(k-1)x^k\{(k-1)(k-2)x^k + 2(k+1)\}}{2x^2\{(k-1)x^k - 1\}^2}.$$

Vì vậy $Sf(x) < 0$ với mọi $x > 0$ nếu $k \geqslant 2$.

Trong trường hợp $1 < k < 2$ ta phải giả thiết thêm rằng

$$\frac{\mu}{1-\lambda} \leqslant \sqrt[k]{\frac{2(k+1)}{2-k}} \cdot \frac{k}{k-1}$$

để nhận được sự ổn định tiệm cận toàn cục của $\overline{x}$. Thật vậy, điều kiện để đạo hàm Schwarzian âm trong $[0, f(y_0)]$ là

$$\begin{aligned} & (k-1)(k-2)x^k + 2(k+1) > 0 \\ \iff \quad & x < \sqrt[k]{\frac{2(k+1)}{2-k}} \sqrt[k]{\frac{1}{k-1}} = \sqrt[k]{\frac{2(k+1)}{2-k}} \cdot y_0. \end{aligned}$$

Ngoài ra ta còn cần

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{\frac{2(k+1)}{2-k}} \cdot y_0 \quad &\geqslant \quad f(y_0) = \frac{(k-1)\mu}{k(1-\lambda)} \cdot y_0 \\ \sqrt[k]{\frac{2(k+1)}{2-k}} \quad &\geqslant \quad \frac{(k-1)\mu}{k(1-\lambda)} \\ \frac{\mu}{1-\lambda} \quad &\leqslant \quad \sqrt[k]{\frac{2(k+1)}{2-k}} \cdot \frac{k}{k-1}. \end{aligned}$$

Để áp dụng định lí 6.46 ta tìm số L sao cho

$$|f(x) - \overline{x}| \leqslant L|x - \overline{x}| \qquad \text{với mọi } x \in [y_0, f(y_0)].$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{F'(x)}{1-\lambda} = \frac{\mu}{1-\lambda}\frac{[(1+x^k) - kx^{k-1}x]}{(1+x^k)^2} = \frac{\mu}{1-\lambda}\frac{[1+(1-k)x^k]}{(1+x^k)^2}.$$

Đặt

$$\phi(y) = \frac{\mu}{1-\lambda}\frac{[1+(1-k)y]}{(1+y)^2}, \ \text{với } y = x^k.$$

Vì $\phi(y)$ luôn âm nên ta xét

$$\varphi(y) = \mid \phi(y) \mid = \frac{\mu}{1-\lambda}\frac{(k-1)y-1}{(1+y)^2}, \quad y \geqslant y_0^k.$$

Dễ dàng tính được

$$\varphi^{'}(y) = \frac{\mu}{(1-\lambda)(1+y)^4}[(1-k)y^2 + 2y + k + 1]$$

và phương trình $\varphi^{'}(y) = 0$ có 2 nghiệm $y_1 = -1, y_2 = \frac{k+1}{k-1}$. Vậy

$$\max_{y\in[y_0^k, f(y_0)^k]} \varphi(y) = \varphi(\frac{k+1}{k-1}) = \frac{\mu}{1-\lambda} \cdot \frac{(k-1)^2}{4k} = L = L_1 = L_2.$$

Do đó, nếu

$$\lambda^{m+1} > 1 - \frac{1}{L}$$

và nếu $f(\lambda^{m+1}\overline{x}) \geqslant \overline{x}$, tức là, nếu

$$\frac{\lambda+\mu-1}{1-\lambda} \geqslant \frac{1-\lambda^{m+1}}{\lambda^{m+1} - \lambda^{(m+1)k}},$$

thì ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

với mỗi nghiệm $\{x_n\}_n$ của (4.43).

Tổng hợp lại các kết quả ở trên ta được:

Nếu $\lambda + \mu \leqslant 1$ thì mọi nghiệm diệt vong.

Nếu $\lambda + \mu > 1$ thì mọi nghiệm trường tồn. Với điều kiện này thì trạng thái cân bằng dương duy nhất của mô hình là

$$\overline{x} = \sqrt[k]{\frac{\lambda+\mu-1}{1-\lambda}}.$$

Khi đó mọi nghiệm phát triển bền vững ($\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$) nếu một trong hai điều kiện sau đây thoả mãn:

(i) $k \in \left(0, \frac{\mu}{\lambda+\mu-1}\right] \cup \left[2, \frac{2\mu}{\lambda+\mu-1}\right)$,

(ii) $1 - \lambda^{m+1} < \frac{4k}{(k-1)^2} \cdot \frac{1-\lambda}{\mu}$ *và* $\frac{1-\lambda^{m+1}}{\lambda^{m+1}-\lambda^{(m+1)k}} \leqslant \frac{\lambda+\mu-1}{1-\lambda}$.

Nhận xét 6.7. *Kết quả này là mới và có ý nghĩa, bởi vì trước đây (xem* [**?**], [**?**], [**?**]*), các tác giả đã chứng minh sự ổn định toàn cục với tất cả các chậm, tuy nhiên sử dụng thêm giả thiết khác.*

Trong [**?**] *các tác giả đã chứng minh rằng nếu*

$$k < \frac{2}{1-\lambda} \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu-1}$$

thì trạng thái cân bằng dương $\overline{x}$ là ổn định tiệm cận địa phương. Kết quả của ta là ổn định tiệm cận toàn cục nên đòi hỏi phải thêm điều kiện về các tham số.

Bây giờ ta nghiên cứu tính chất tuần hoàn của nghiệm. Giả sử

$$k > \frac{2\mu}{\lambda+\mu-1} \quad \text{và} \quad y_0 = \sqrt[k]{\frac{1}{k-1}}.$$

Thế thì

$$F(y_0) = \frac{(k-1)\mu}{k} y_0 = \max_{x\geqslant 0} F(x),$$

và

$$F'(\overline{x}) = \frac{1-\lambda}{\mu}[\mu - k(\lambda+\mu-1)] < 0.$$

Rõ ràng, $f(y_0) > y_0$ và f đơn điệu tăng trong đoạn $[y_0, f(y_0)]$. Tồn tại một đoạn đóng $I = [a,b] \subseteq [y_0, f(y_0)]$ sao cho f ánh xạ đoạn này vào chính nó. Khi đó, với chậm m đủ lớn tồn tại một nghiệm tuần hoàn khác hằng số xuất phát từ khối $[\overline{x}, b]^{m+1}$. Chú ý rằng, để nhận được (4.60) đòi hỏi phải có

$$k < \frac{2\mu}{\lambda+\mu-1} \cdot \frac{1}{1-\lambda}.$$

Ví dụ 6.52. *(Mô hình quần thể ruồi xanh Nicholson).*

Khảo sát sự diệt vong, trường tồn, phát triển bền vững và tuần hoàn của mô hình quần thể ruồi xanh Nicholson

$$x_{n+1} = \lambda x_n + p x_{n-m} e^{-q x_{n-m}}, \quad \lambda \in (0,1), \quad p, q \in (0, \infty).$$

Phương trình này thuộc dạng (4.43) với

$$F(x) = pxe^{-qx}, \quad f(x) = \frac{F(x)}{1-\lambda}.$$

Rõ ràng, hàm phát triển trong mô hình này là hàm hình chuông với bất kì $p, q \in (0, \infty)$*; trong khi đó, với* $0 < k \leqslant 1$ *thì hàm phát triển trong mô hình quần thể chim cút là hàm đơn điệu tăng trên* $[0, \infty)$.

Ta dễ dàng nhận được các điều kiện sau cho sự diệt vong, trường tồn, phát triển bền vững và tuần hoàn của quần thể ruồi xanh Nicholson:

Nếu $p \leqslant 1-\lambda$ *thì mọi nghiệm diệt vong.*

Nếu $p > 1-\lambda$ *thì mọi nghiệm trường tồn.*

Nếu $p > 1-\lambda$ *thì trạng thái cân bằng dương duy nhất là*

$$\overline{x} = \frac{1}{q} \ln \frac{p}{1-\lambda}.$$

Khi đó nếu một trong 2 điều kiện sau thoả mãn thì mọi nghiệm là phát triển bền vững:

(i) $p \leqslant e^2(1-\lambda)$,

(ii) $e^2(1-\lambda) < p < e^2$ *và* $m < \frac{\ln \frac{p-(1-\lambda)e^2}{p\lambda}}{\ln \lambda}$.

Nếu $p \geqslant e^2$ *và*

$$m > \frac{\arccos \frac{1-\lambda^2-[(1-\lambda)(1-\ln \frac{p}{1-\lambda})]^2}{2\lambda[(1-\lambda)(1-\ln \frac{p}{1-\lambda})]}}{\arccos \frac{1+\lambda^2-[(1-\lambda)(1-\ln \frac{p}{1-\lambda})]^2}{2\lambda}}$$

thì tồn tại nghiệm tuần hoàn khác hằng số.

Bài tập

1. Chứng minh định lý sau: "Giả sử hàm f đơn điệu giảm theo biến x với mỗi $y > 0$ và đơn điệu tăng theo biến y với mỗi $x > 0$. Giả thiết thêm rằng, $M := \sup_{x,y \geqslant 0} f(x, y) < \infty$ và hệ phương trình

$$\begin{aligned} u &= f(v, u), \\ v &= f(u, v) \end{aligned}$$

có nghiệm duy nhất $u = v = \ell$. Khi đó mọi nghiệm của

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-1}}$$

hội tụ đến ℓ".

2. Giả sử $\gamma \geqslant \alpha/A$. Chứng minh rằng, nếu một trong các điều kiện sau thoả mãn thì mọi nghiệm của phương trình sai phân

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-1}}$$

hội tụ đến $\ell = \frac{\sqrt{(\gamma - A)^2 + 4\alpha(B+1)} + \gamma - A}{2(B+1)}$:

(*i*) $\gamma \leqslant A$;

(*ii*) $\gamma > A$ và $B \leqslant 1$;

(*iii*) $\gamma > A, B > 1$ và $(\gamma - A)^2 \leqslant 4\alpha/(B-1)$.

3. Cho dãy $(x_n)_{n=-1}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n},\ n = 0,\ 1, \cdots,$$

trong đó x_{-1}, x_0 là các số thực dương cho trước. Chứng minh rằng

a) Nếu $\alpha > 1$ thì dãy $(x_n)_{n=-1}^{\infty}$ hội tụ.

b) Nếu $0 \leqslant \alpha < 1$ và x_{-1}, x_0 thỏa $0 \leqslant x_{-1} < 1$, $x_0 \geq \frac{1}{1-\alpha}$ thì

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \infty,$$

và

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha.$$

4. Cho dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\beta x_{n-k}}{1 + x_n^{\alpha}}, \quad n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

trong đó $x_{-k},\, \cdots,\, x_0$ là các số thực dương cho trước, $0 < \alpha < 1$ và $\beta \in (0;\, 1 + \alpha^{\alpha})$. Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ bị chặn.

5. Cho dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{\beta + x_n^{\rho_1} x_{n-1}^{\rho_2} \cdots x_{n-k+1}^{\rho_k}}, \quad n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

trong đó $x_{-k},\, \cdots,\, x_0$ là các số thực dương cho trước, $\rho_j \in (0;\, 1)\,,\ j = \overline{1,\, k}$ sao cho $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_k =: \lambda \in (0;\, 1)\,,\ \beta \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ hội tụ.

6. Cho dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{1 + \tau_1 x_n^{\rho_1} + \tau_2 x_{n-1}^{\rho_2} + \cdots + \tau_k x_{n-k+1}^{\rho_k}}, \quad n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

trong đó $x_{-k},\ \cdots,\ x_0$ là các số thực dương cho trước, $\alpha > 0;\ \tau_j \geq 0,\ j = \overline{1,\, k}$ sao cho $\sum\limits_{j=1}^{k} \tau_j > 0,\ \rho_i \in (0;\, 1)\,,\ j = 1,\, 2,\, \cdots,\, k$. Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ hội tụ.

7. Cho dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{t x_n^{\lambda_1} x_{n-1}^{\lambda_2} \cdots x_{n-k+1}^{\lambda_k}}, \quad n = 0,\, 1,\, \cdots.$$

trong đó $x_{-k},\, \cdots,\, x_0$ là các số thực dương cho trước, $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \cdots,\, \lambda_k$ là các số thực dương, sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$. Chứng minh rằng, dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ hội tụ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

a) $\alpha > 0,\, t > 0$ và $t\alpha \geq 3$.

b) $\alpha > 0$ và $2t\alpha \geq 3 + \sqrt{5}$.

8. Cho dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\, x_{n-k}}{\lambda_1 x_n^{\theta} + \lambda_2 x_{n-1}^{\theta} + \cdots + \lambda_k x_{n-k+1}^{\theta}}, \quad n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

trong đó $x_{-k}, \cdots, x_0$ là các số thực dương cho trước, $\alpha > 1, \theta > 0, \lambda_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots k$. Chứng minh rằng, dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ hội tụ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

a) $\theta + 2 < \alpha^{\theta} + \alpha^{-\theta}$.

b) $2\alpha^{\theta} > \theta + 2 + \sqrt{\theta^2 + 4\theta}$.

9. Cho dãy $(x_n)_{n=-1}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-1}},\ n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

trong đó $A > 0$, x_{-1}, x_0 là các số thực dương cho trước. Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n=-1}^{\infty}$ bị chặn.

10. Cho dãy $(x_n)_{n=-2}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = A + \frac{a_1 x_n + a_2 x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

trong đó x_{-2}, x_{-1}, x_0, a_1, a_2, A là các số thực dương cho trước. Chứng minh rằng

a) Nếu $a_2 < A$ thì mọi nghiệm của phương trình bị chặn.

b) Nếu $a_1 + a_2 < A$ thì mọi nghiệm của phương trình hội tụ đến điểm cân bằng $\bar{x} = A + a_1 + a_2$.

11. Cho dãy $(x_n)_{n=-4}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = 2 + \frac{4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}}{8x_{n-4}},\ n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

trong đó x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 là các số thực dương cho trước. Chứng minh dãy $(x_n)_{n=-4}^{\infty}$ hội tụ về điểm 3.

12. Cho dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$x_{n+1} = A + \frac{a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k+1}}{x_{n-k}},\ n = 0,\, 1,\, \cdots,$$

trong đó x_{-k}, x_{-k+1}, $\cdots$, x_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_k là các số thực dương cho trước, $A > 1$. Chứng minh rằng, nếu $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$ thì dãy $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ hội tụ về điểm cân bằng $\bar{x} = A + 1$.

Chương 7

Khảo sát các phương trình đại số

7.1 Nhắc lại các kiến thức cơ bản về số phức và hàm phức

7.2 Số nghiệm của phương trình đa thức trên một khoảng

7.3 Đánh giá khoảng nghiệm

7.4 Giải gần đúng phương trình đa thức

Phụ lục A
Hàm sinh và áp dụng

P-1 Ví dụ minh họa

Trước hết ta xét hai ví dụ sau

Ví dụ P.1. Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta kí hiệu l_n là số cách phân tích n thành tổng của các số tự nhiên lẻ, còn k_n là số cách biểu diễn n thành tổng của các số tự nhiên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng $l_n = k_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Với $|x| < 1$, xét các hàm số

$$p(x) = \prod_{i \in \mathbb{N},\, i \text{ lẻ}} \Big(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots\Big), \quad q(x) = \prod_{j \in \mathbb{N}} (1 + x^j). \tag{0}$$

Ta có các nhận xét sau:

Hệ số của x^n trong khai triển $p(x)$ trong (0) chính là l_n vì nó bằng số cách chọn các thừa số x^t sao cho tổng các lũy thừa của x bằng n.

Hệ số của x^n trong khai triển vế phải của $q(x)$ chính là k_n.

Chú ý rằng khi $x \in (-1; 1)$, ta có $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$, do đó

$$p(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\cdots.$$

Còn $q(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x}\dfrac{1-x^4}{1-x^2}\dfrac{1-x^6}{1-x^3}\cdots = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^3}\dfrac{1}{1-x^5}\cdots.$

Vậy nên $p(x) = q(x)$, suy ra $l_n = k_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ P.2. Cho $(a_n) \subset \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N})$ là dãy số không giảm sao cho mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $a_i + 2a_j + 4a_k$ trong đó $i,\ j,\ k \in \mathbb{N}$, không nhất thiết phải khác nhau. Hãy tính a_{2004}.

Lời giải. Đặt $F(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots$ với $|x| < 1$. Khi đó

$$F\Big(x^2\Big) = x^{2a_0} + x^{2a_1} + x^{2a_2} + \cdots; \quad F\Big(x^4\Big) = x^{4a_0} + x^{4a_1} + x^{4a_2} + \cdots.$$

Từ đó ta có $F(x)F\Big(x^2\Big)F\Big(x^4\Big) = \sum\limits_{i;j;k\in\mathbb{N}} x^{a_i+2a_j+4a_k} := M(x)$.
Theo giả thiết, mọi số tự nhiên đều có thể phân tích được dưới dạng $a_i + 2a_j + 4a_k$, nên ta có $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow M(x) = \dfrac{1}{1-x}\cdot$ Ta có dãy biến đổi sau

$$\begin{aligned}
F(x)F\Big(x^2\Big)F\Big(x^4\Big) = \frac{1}{1-x} &\Rightarrow F\Big(x^2\Big)F\Big(x^4\Big)F\Big(x^8\Big) = \frac{1}{1-x^2}\\
\Rightarrow (1+x)F\Big(x^2\Big)F\Big(x^4\Big)F\Big(x^8\Big) &= \frac{1}{1-x} = F(x)F\Big(x^2\Big)F\Big(x^4\Big)\\
\Rightarrow F(x) = (1+x)F\Big(x^8\Big) &= (1+x)\Big(1+x^8\Big)F\Big(x^{8^2}\Big)\\
\cdots \qquad & \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
&= (1+x)\Big(1+x^8\Big)\Big(1+x^{8^2}\Big)\Big(1+x^{8^3}\Big)\cdots.
\end{aligned}$$

Vậy a_i là các số tự nhiên mà khi viết theo cơ số 8 chỉ có mặt các chữ số 0 và 1. Để xác định a_{2004} trước hết ta biểu diễn số 2004 theo cơ số 2 rồi thay cơ số 2 bởi cơ số 8. Mà $2004 = 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ nên ta được $a_{2004} = 8^2 + 8^4 + 8^6 + 8^7 + 8^8 + 8^9 + 8^{10}$.

P-2 Khái niệm về hàm sinh

Trong lời giải của hai ví dụ trên ta đã sử dụng khái niệm hàm sinh (Generating function). Khái niệm này còn được sử dụng trong các dạng bài tập khác về dãy số nên ta sẽ nhắc qua ở đây. Bạn đọc quan tâm có thể đọc bài viết của Srini Devadas và Eric Lehman trong tạp chí "Mathematic for Computer

Science", April, 2005.

Có hai khái niệm trong Toán phổ thông mà ở đây ta muốn mở rộng, đó là:
1. Khái niệm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (Sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 nâng cao, trang 133).
2. Khái niệm đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$.

Định nghĩa P.1. *Cho dãy hàm $(u_n(x))$ với $u_n(x) \in \mathcal{F}(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Cho $\Omega \subseteq X$.*
Gọi $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ là tổng riêng thứ n của dãy. Nếu $(S_n(x)) \rightrightarrows S(x)$ trên Ω, thì $S(x)$ còn được gọi là tổng vô hạn các số hạng của dãy hàm $(u_n(x))$.
Ta viết $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
Kí hiệu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ hay là $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ còn được gọi là chuỗi (hàm) với số hạng tổng quát $u_n(x)$, còn $S(x)$ được gọi là tổng của chuỗi đó. Ta còn nói rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ về $S(x)$ trên Ω và ký hiệu là $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ trên Ω hay là $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ nếu đã rõ miền Ω.

Định nghĩa P.2. *Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ với $a_n \in \mathbb{R}$ được gọi là chuỗi lũy thừa.*

Ví dụ P.3. Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} u_1x^n$ là một chuỗi lũy thừa. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_1x^n \rightrightarrows \dfrac{u_1}{1-x}$ trên $(-1; 1)$,
hay là $\sum_{n=0}^{+\infty} u_1x^n = u_1 + u_1x + u_1x^2 + \cdots = \dfrac{u_1}{1-x}$, $\forall\, x \in (-1; 1)$.

Chú ý P.1.
1. Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ là mở rộng của tổng vô hạn $\sum_{n=0}^{+\infty} u_1x^n$ khi các hệ số của tổng khác nhau, cũng là mở rộng

của đa thức $P(x)$ khi số số hạng là vô hạn. Có thể coi chuỗi lũy thừa là đa thức bậc vô cùng.

2. Trong chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lấy $x = 1$, được chuỗi số $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Đối với chuỗi số ta cũng có các khái niệm tổng riêng, hội tụ, phân kì, v.v. như với chuỗi hàm. Có thể coi chuỗi số là trường hợp riêng của chuỗi hàm với $u_n(x) = a_n$.

Định lý P.1 (Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ)**.** *Nếu* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *hội tụ thì* $a_n \to 0$.

Hệ quả P.1. *Chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *với* (a_n) *không phải là một VCB thì phân kì.*

Định lý P.2. *Nếu* $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ u_n(x) \in \mathbb{C}(X)$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *trên* X *thì* $f(x) \in \mathbb{C}(X)$.

Định lý P.3. *Nếu* $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ u_n(x)$ *có đạo hàm trên* X *và* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *trên* X *thì* $f(x)$ *cũng có đạo hàm trên* X *và* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) \rightrightarrows f'(x)$ *trên* X.

Định lý P.4. *Nếu* $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ u_n(x) \in \mathbb{C}([a;b]),\ (a < b)$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *trên* $[a;b]$ *thì* $f(x) \in \mathbb{C}([a;b])$. *Ngoài ra,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^x u_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *với mọi* $x \in [a;b]$.

Hiển nhiên chuỗi lũy thừa thỏa mãn tất cả các điều kiện của ba định lí trên. Để xác định sự hội tụ của một chuỗi hàm, thường sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass

Định lý P.5 (Tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass cho chuỗi hàm)**.** *Cho chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *với* $u_n:\ X \to \mathbb{R}$. *Nếu tồn tại dãy số* $(c_n) \subset \mathbb{R}^+$ *sao cho* $|u_n(x)| \leqslant c_n,\ \forall\, x \in X,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *và chuỗi số* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên* X.

Định nghĩa P.3 (Khai triển Taylor).
1. Biểu diễn (hình thức) hàm số $f(x)$[1] *và khai triển Maclaurin*[2] *dưới dạng*

$$f(x) = f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\cdots := \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

được gọi là khai triển hàm số đó thành chuỗi Taylor.

2. Đặc biệt, khi $a = 0$, chuỗi Taylor còn được gọi là chuỗi Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \cdots := \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n.$$

Ta sẽ không đi sâu hơn mà chỉ lưu ý rằng trong hai biểu diễn trên, chưa chắc vế phải đã hội tụ về vế trái. Tuy nhiên, nếu xảy ra sự hội tụ thì khai triển dạng đó là duy nhất. Trong phần này ta quy ước nếu viết được dưới một trong hai dạng trên thì vế trái hội tụ về vế phải.

Định lý P.6 (Khai triển Maclaurin của một số hàm số sơ cấp).

1. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có* $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$ (1)
2. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có* $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots.$ (2)
3. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có* $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ (3)
4. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có* $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$ (4)
5. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có* $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$ (5)
6. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có* $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$ (6)

Chú ý P.2. Ta đã không sử dụng đến điều kiện $x \in \mathbb{R}$ nên các công thức trên cũng đúng với $x \in \mathbb{C}$. Trong công thức (1) thay x bởi iz ta được

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iz)^n}{n!} + \cdots$$

---

[1] Brook Taylor (1685-1731), nhà toán học người Anh, cùng thời với Newton và Leibniz. Khái niệm chuỗi Taylor được Ông đưa ra khi mới 29 tuổi, trong cuốn " Methodus incrementorum directa et inversa", London, 1715.

[2] Colin Maclaurin (1698-1746), nhà toán học người Scotland. Khai triển này được ông đưa ra năm 1742.

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right). \text{ Suy ra}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{7}$$

Tương tự, có

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{8}$$

Từ (7) và (8) ta được hai công thức sau

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz) \tag{9}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(iz) \text{ hay là } \sinh(iz) = i \sin z. \tag{10}$$

Các công thức (9), (10) gọi là các công thức Euler. Với $z = x + iy$, $x; y \in \mathbb{R}$, ta có

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{11}$$

Ta biết rằng mọi số phức đều có thể viết dưới dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Theo (7) còn có thể viết số phức z dưới dạng $z = re^{i\varphi}$. Đó là dạng mũ của số phức.

Định lý P.7 (Một số khai triển Maclaurin khác)**.**

1. Với mọi $x \in (-1; 1)$, có

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots . \tag{12}$$

2. Với mọi $x \in (-1; 1)$, $t \in \mathbb{R}$, có

$$(1+x)^t = 1 + \frac{t}{1!}x + \frac{t(t-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}x^n + \cdots . \tag{13}$$

3. Với mọi $x \in (-1; 1)$, có

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots . \tag{14}$$

Bằng phép thế ; lấy đạo hàm hai vế ; lấy tích phân hai vế ta có thể tìm được khai triển của các hàm số khác nữa.

Ví dụ P.4. *Chứng minh chuỗi điều hòa* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ *phân kì.*

Lời giải. Xét dãy các tổng riêng $S_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$. Gọi $k\in\mathbb{N}$, sao cho

$$2^k\leqslant n<2^{k+1}\Leftrightarrow k\leqslant\log_2 n<k+1\Rightarrow k=[\log_2 n].$$

Ta có $\frac{1}{2^k}\geqslant\frac{1}{n}>\frac{1}{2^{k+1}}$. Thực hiện dãy biến đổi và đánh giá sau

$$\begin{aligned}
S_n&=1+\frac{1}{2}+\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\Big)+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\cdots+\frac{1}{n}\\
&>\sum_{i=0}^{k}\Big(\frac{1}{2^i+1}+\cdots+\frac{1}{2^{i+1}}\Big)\quad\Big(\text{do } 1>\frac{1}{2}\text{ và bỏ đi các số hạng dương ở cuối}\Big)\\
&>\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2}\qquad\Big(\text{vì }\Big(\frac{1}{2^i+1}+\cdots+\frac{1}{2^{i+1}}\Big)>\sum_{l=1}^{2^i}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{2}\cdot\Big)\\
&=\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\Big([\log_2 n]+1\Big)\to+\infty\Rightarrow S_n\to+\infty.
\end{aligned}$$

Ví dụ P.5. *Chứng minh rằng tập các số nguyên tố ¶ là vô hạn.*

Lời giải.[3] Với mọi $p\in$ ¶, ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$ hội tụ (vì $|\frac{1}{p}|\leqslant\frac{1}{2}<1$).
Giả sử tập ¶ là hữu hạn và ¶ $=\{p_1;p_2;\cdots;p_l\}$.
Khi đó, do mỗi chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{p_j^n}$, $(j\in\overline{1..l})$ hội tụ nên chuỗi $\prod_{j=1}^{l}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{p_j^n}\Big):=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ cũng hội tụ. Nhưng các số c_n có dạng $\frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_l^{k_l}}$ nên theo khai triển tiêu chuẩn của số nguyên dương, ta có $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ là phân kì theo ví dụ P.4. Điều mâu thuẫn đó chứng tỏ giả sử của ta là sai, tức là tập ¶ vô hạn.

Ví dụ P.6. Chứng minh rằng $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\qquad(16)^4$$

[3] Lời giải của Leonard Euler (1707-1783).
[4] Kết quả này được G.W.Leibnitz đưa ra năm 1666.

Lời giải. Có $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$, $\forall\, x \in [-1;1]$. Từ đó, với mọi $x \in [0;1]$, ta có

$$\arctan x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int\limits_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \forall\, x \in [-1;1].$$

Cho $x = 1$ ta được điều phải chứng minh.

Định nghĩa P.4 (Hàm sinh)**.** *Hàm sinh của dãy số* (g_n) *với dạng khai triển* $< g_0; g_1; g_2; \cdots; g_n; \cdots >$ *là một chuỗi lũy thừa hình thức* $G(x) := g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_n x^n + \cdots := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n x^n$.

Ta viết "chuỗi hình thức" vì chưa chắc chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n x^n$ đã hội tụ. Nếu chuỗi đó hội tụ về hàm số $G(x)$ thì ta viết

$$< g_0; g_1; g_2; \cdots; g_n; \cdots > \longleftrightarrow g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_n x^n + \cdots = [\equiv\ \vee\ \rightrightarrows] G(x).$$

Hay là ngắn gọn hơn $(g_n) \longleftrightarrow G(x)$.

Ví dụ P.7. 1. $< 0; 0; 0; \cdots > \longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0x^n = 0$.

2. $< a; 0; 0; \cdots > \longleftrightarrow a + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \cdots = a$.

3. $< a_0; a_1; a_2; \cdots a_n; 0; 0; 0; \cdots > \longleftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

4. $< 1; 1; 1; 1; \cdots > \longleftrightarrow 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}\cdot$

Định lý P.8 (Các phép toán đối với hàm sinh)**.**

1. Nếu $(g_n) \longleftrightarrow g(x)$; $(f_n) \longleftrightarrow f(x)$ *và* a, b *là các hằng số thì*

$$(a \cdot g_n + b \cdot f_n) \longleftrightarrow a \cdot g(x) + b \cdot f(x).$$

2. Nếu $< f_0; f_1; f_2; \cdots > \longleftrightarrow f(x)$ *thì* $< \underbrace{0; 0; \cdots; 0}_{k \text{ chữ số } 0}; f_0; f_1; f_2; \cdots > \longleftrightarrow x^k f(x)$

3. Nếu $< f_0; f_1; f_2; f_3; \cdots > \longleftrightarrow f(x)$ *thì* $< f_1; 2f_2; 3f_3; \cdots > \longleftrightarrow f'(x)$.

Ví dụ P.8. Tìm hàm sinh của dãy các số chính phương (n^2).

Lời giải. Xét dãy tương ứng sau

$$< 1; 1; 1; 1; \cdots > \longleftrightarrow \frac{1}{1-x} \Rightarrow < 1; 2; 3; 4; \cdots > \longleftrightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow < 0; 1; 2; 3; \cdots > \longleftrightarrow \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow < 1; 4; 9; 16; \cdots > \longleftrightarrow \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow (n^2) \equiv < 0; 1; 4; 9; 16; \cdots > \longleftrightarrow \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\cdot$$

Ví dụ P.9. 1. Tìm hàm sinh của dãy số (a_n) cho bởi

$$a_0 = 0\ ;\ a_1 = 1\ ;\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n. \tag{15}$$

2. Từ đó, hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số này.

Lời giải. 1. Giả sử $(a_n) \longleftrightarrow f(x)$. Ta có dãy biến đổi

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & < & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & > & \longleftrightarrow & x \\
+ & < & 0 & 3a_0 & 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 & \cdots & > & \longleftrightarrow & 3xf(x) \\
 & < & 0 & 0 & -2a_0 & -2a_1 & -2a_2 & \cdots & > & \longleftrightarrow & -2x^2f(x) \\
\hline
 & < & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & > & \longleftrightarrow & f(x)
\end{array}$$

Vậy $f(x) = x + 3xf(x) - 2x^2f(x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 3x + 1}$ là hàm sinh cần tìm.

2. Viết $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \equiv f(x) = \dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{1}{1-x}\cdot$ Suy ra

$$f(x) = \Big(1 + (2x) + (2x^2) + \cdots + (2x)^n \cdots\Big) - \Big(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n - 1)x^n \Rightarrow a_n = 2^n - 1 \quad \text{là số hạng tổng quát cần tìm.}$$

P-3 Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ P.10. Cho $p_1; p_2; \cdots; p_n; \cdots$ là dãy các số nguyên tố liên tiếp. Cho $x_0 \in (0; 1)$. Dãy số (x_k) được xác định như sau

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x_{k-1} = 0 \\ \left\{\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right\} & \text{nếu } x_{k-1} \neq 0, \end{cases}$$

trong đó ta ký hiệu $\{a\} := a - [a]$ là phần phân của số thực a.

Tìm x_0 để trong dãy số (x_k) chỉ có hữu hạn số khác 0.

Lời giải. Nhận xét rằng nếu $x_k \in \mathbb{Q}$ $\quad(\mathbb{Q} :=$ tập các số hữu tỷ) thì

Khi $x_k = 0$, ta có $\left[\begin{array}{lcl} x_{k-1} & = & 0 \\ \dfrac{p_k}{x_{k-1}} & \in & \mathbb{N}^* \end{array}\right. \Rightarrow x_{k-1} \in \mathbb{Q}$.

Khi $x_k \neq 0$, ta có $x_k = \dfrac{p_k}{x_{k-1}} - \left[\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right] \Rightarrow x_{k-1} = \dfrac{p_k}{x_k + \left[\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right]} \Rightarrow x_{k-1} \in \mathbb{Q}$.

Vậy nếu $x_k \in \mathbb{Q}$ thì $x_{k-1} \in \mathbb{Q}$. Ta cần phải chứng minh tồn tại k để $x_k = 0$. Khi đó các số hạng tiếp theo đều bằng 0 và trong dãy số có không quá k số hạng khác 0 là $x_0; x_1; \cdots ; x_{k-1}$. Thế nhưng, nếu $x_k = 0 \in \mathbb{Q}$ thì theo trên

$$x_{k-1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_{k-2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_0 \in \mathbb{Q}.$$

Ngược lại, nếu $x_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_0 = \dfrac{m}{n}$ với $0 < m < n$ thì $x_1 = \dfrac{r}{m}$ trong đó r là số dư trong phép chia np_1 cho m. Từ đó suy ra mẫu số của x_1 nhỏ hơn mẫu số của x_0.

Tương tự, chứng minh được tồn tại x_l sao cho mẫu số của x_l bằng 1 và khi đó $\dfrac{p_k}{x_l} \in \mathbb{N}^*$, suy ra $x_{l+1} = \left\{\dfrac{p_k}{x_l}\right\} = 0$ nên tồn tại k, $\;(k = l+1)$, sao cho ; $x_k = 0$.

Vậy $x_0 \in \mathbb{Q}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ P.11. Tìm số các tam giác có số đo các cạnh là các số nguyên dương không vượt quá $2n$.

Lời giải. Gọi $f(n)$ là số cần tìm ; $f_1(n)$ là số các tam giác có số đo một cạnh là $2n+1$, số đo các cạnh kia không quá $2n+1$; $f_2(n)$ là số các tam giác có số đo một cạnh là $2n+2$, số đo các cạnh kia không quá $2n+2$. Khi đó dễ thấy

$$f(1) = 3\ ;\ \ f(n+1) = f(n) + f_1(n) + f_2(n)$$

(có 3 tam giác có số đo các cạnh không quá 2 là các tam giác $(1;1;1)$; $(1;2;2)$; $(2;2;2)$).

Gọi $a \geqslant b \geqslant c$ là số đo ba cạnh của một tam giác thì $f_1(n)$ là số các tam giác có

$$a = 2n+1\ ;\ b = 2n+1-k,\ (k \in \overline{0..2n})\ ;\ c = x\ \ (\text{với } x \in \mathbb{N}^*, x \leqslant b).$$

Nhưng

$$b+c > a \Rightarrow 2n+1-k+x > 2n+1 \Rightarrow x > k \Rightarrow k+1 \leqslant x \leqslant 2n+1-k\ ;\ k \leqslant n.$$

Vậy với mỗi giá trị của $k \leqslant n$, x nhận $2n+1-2k$ giá trị và do đó

$$f_1(n) = \sum_{k=0}^{n}(2n+1-2k) = \cdots = (n+1)^2.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $f_2(n) = \sum_{k=0}^{n}(2n+2-2k) = \cdots = (n+1)(n+2)$.

Từ đó suy ra $f(n+1) = f(n)+(n+1)^2+(n+1)(n+2) = f(n)+2n^2+5n+3$.

Giải phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 trên với $f(1) = 3$ ta được $f(n) = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ là số cần tìm.

Ví dụ P.12. Cho $S_n = \{1;\ 2; \cdots ;\ n\}$. Phần tử $j \in S_n$ được gọi là điểm bất động của song ánh[5], $p:\ S_n \to S_n$ nếu $p(j) = j$.

Gọi $f(n)$ là số song ánh từ S_n lên S_n không có điểm bất động, còn $g(n)$ là số song ánh có đúng một điểm bất động. Chứng minh rằng $|f(n) - g(n)| = 1$.

Lời giải. Gọi p là một song ánh từ S_n lên S_n mà có đúng một điểm bất động j.

Có n cách chọn $j \in S_n$ và $f(n-1)$ cách lập các song ánh từ $S_n \setminus \{j\}$ lên $S_n \setminus \{j\}$ mà không có điểm bất động. Vậy

$$g(n) = nf(n-1), \quad \forall n \geqslant 2. \tag{1}$$

Bây giờ, gọi r là song ánh từ S_n lên S_n mà không có điểm bất động.

Khi đó, $r(1) = j$ với $j \neq 1$ và có $n-1$ cách chọn j như vậy.

[5]Về khái niệm song ánh, xem trong chuyên đề *Phương trình hàm*

Nếu $r(j) = 1$ thì có $f(n-2)$ các song ánh từ $S_n \setminus \{1; j\}$ lên $S_n \setminus \{1; j\}$ mà không có điểm bất động. Nếu bổ sung thêm $r(1) = j,\ r(j) = 1$ thì song ánh r đó từ S_n lên S_n cũng không có điểm bất động. Vậy có $(n-1)f(n-2)$ các song ánh từ S_n lên S_n loại này.

Nếu $r(j) \neq 1$ thì có $f(n-1)$ các song ánh từ $S_n \setminus \{1\}$ lên $S_n \setminus \{1\}$ mà không có điểm bất động. Gọi q là một song ánh như vậy. Bằng cách đặt

$$\begin{cases} p(i) = q(i) & \text{nếu } q(i) \neq j \\ p(i) = 1,\ p(1) = j & \text{nếu } q(i) = j \end{cases}$$

ta cũng được song ánh p không có điểm bất động từ S_n lên S_n. Vậy có $(n-1)f(n-1)$ các song ánh từ S_n lên S_n loại này. Tóm lại, ta có

$$f(n) = (n-1)f(n-2) + (n-1)f(n-1),\ \forall n \geqslant 3. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra với mọi $n \geqslant 2$ ta luôn có

$$f(n+1) - g(n+1) = n[f(n) + f(n-1)] - (n+1)f(n) = nf(n-1) - f(n) = g(n) - f(n).$$

Mà $f(1) - g(1) = 0 - 1 = -1 \Rightarrow f(2) - g(2) = 1,\ \cdots$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f(n) - g(n) = (-1)^n \Rightarrow |f(n) - g(n)| = 1$.

Ví dụ P.13. Trên mặt phẳng cho $2n+1$ đường thẳng ($n \in \mathbb{N}^*$). Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác.

Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải. Gọi số các tam giác nhọn tạo thành là $f(n)$. Ta phải chứng minh

$$f(n) \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Có thể giả sử trong $2n+1$ đường thẳng đã cho không có hai đường thẳng nào song song, không có hai đường thẳng nào vuông góc với nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy.

Thật vậy, nếu có hai đường thẳng song song hoặc vuông góc thì ta chỉ việc quay chúng một góc đủ nhỏ sao cho các tam giác nhọn vẫn là các tam giác nhọn, khi đó số các tam giác nhọn không giảm. Nếu có ba đường thẳng nào đồng quy thì ta tịnh tiến song song một đường một khoảng đủ nhỏ, số tam giác nhọn cũng không giảm.

Như vậy, ba đường thẳng bất kì trong số các đường thẳng đã cho luôn cắt nhau và tạo thành một tam giác hoặc nhọn hoặc tù.

Gọi $g(n)$ là số các tam giác tù. Ta gọi một tam giác tạo bởi ba đường thẳng a, b, c nào đó là giả nhọn cạnh a nếu các góc chung cạnh a của tam giác đó là các góc nhọn. Chọn một đường thẳng l nào đó và coi nó là trục hoành. Các đường thẳng còn lại được chia thành hai tập: Tập T^+ gồm các đường thẳng với hệ số góc dương và tập T^- gồm các đường thẳng với hệ số góc âm. Hai đường thẳng tạo với l một tam giác giả nhọn nếu một đường thuộc T^+, đường kia thuộc T^-. Gọi p là số đường thẳng thuộc T^+, q là số đường thẳng thuộc T^-. Khi đó $p + q = 2n$ và số tam giác giả nhọn cạnh l sẽ là pq. Nhớ rằng $pq \leqslant \left(\dfrac{p+q}{2}\right)^2 = n^2$.

Nhưng l có thể là đường thẳng bất kì trong số $2n + 1$ đường thẳng đã cho nên ta có số cặp (đường thẳng l ; tam giác giả nhọn cạnh l) sẽ không quá $n^2(2n + 1)$.

Trong cách tính trên mỗi tam giác nhọn được tính 3 lần (theo 3 cạnh) còn mỗi tam giác tù chỉ được tính một lần nên $3f(n) + g(n) \leqslant n^2(2n + 1)$.

Thế nhưng tổng số các tam giác là C^3_{2n+1}, tức là

$$f(n) + g(n) = C^3_{2n+1} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}\cdot$$

Vậy ta có $f(n) \leqslant \dfrac{n^2(2n+1) - (f(n) + g(n))}{2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot$

Ví dụ P.14. Cho $(f(n))$, $(n \in \mathbb{N})$ là dãy số tự nhiên không giảm sao cho mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $f(i) + 2f(j) + 4f(k)$ trong đó $i,\ j,\ k \in \mathbb{N}$, không nhất thiết phải khác nhau. Hãy tính $f(2004)$.

Lời giải. (Đây là lời giải khác của ví dụ P.2). Ta có các nhận xét sau

Nhận xét P.1. Dãy $(f(n))$ tăng ngặt.

Thật vậy, nếu $f(j) = f(j+1)$ thì $n = f(i) + 2f(j) + 4f(k) = f(i) + 2f(j+1) + 4f(k)$ là điều vô lí vì số n đó có hai cách biểu diễn khác nhau.

Nhận xét P.2. Có duy nhất một dãy $(f(n))$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Thật vậy, giả sử có hai dãy $(f(n))$, $(g(n))$ cùng thoả mãn yêu cầu bài ra. Gọi n là chỉ số nhỏ nhất mà $f(n) \neq g(n)$, tức là $f(i) = g(i)$, $\forall i < n$.
Giả sử $f(n-1) < g(n) < f(n)$. Hiển nhiên, $f(0) = g(0) = 0$. Do $g(n) \in \mathbb{N}$ nên

$$g(n) = f(i) + 2f(j) + 4f(k), \text{ với } i,\ j,\ k < n.$$

Mà $g(n) < f(n)$ nên ta có

$$f(i) = g(i),\ f(j) = g(j),\ f(k) = g(k) \Rightarrow g(n) = g(i) + 2g(j) + 4g(k).$$

Nhưng $g(n) = g(n) + 2g(0) + 4g(0)$ suy ra điều vô lí. Vậy dãy $(f(n))$ thoả mãn yêu cầu bài ra là duy nhất.
Ta xác định một số số hạng ban đầu. Có $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Với $m \leqslant 7$ có

$$m = x_0 + 2x_1 + 4x_2, \quad (x_i \in \{0;1\}) \Rightarrow f(2) = 8,\ f(3) = 9.$$

Với $m \leqslant 63$ có $m = x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + 2^3x_3 + 2^4x_4 + 2^5x_5$, $(x_i \in \{0;1\})$, suy ra

$$m = (x_0 + 8x_3) + 2(x_1 + 8x_4) + 4(x_2 + 8x_5).$$

Nhưng $x_i + 8x_{i+3} \in \{0;1;8;9\}$ và $9 + 2.9 + 4.9 = 63$ nên $f(4) = 64,\ f(5) = 65$.
Nói chung, nếu $m = x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + 2^3x_3 + \cdots \quad (x_i \in \{0;1\})$ thì

$$m = (x_0 + 8x_3 + 8^2x_6 + \cdots) + 2(x_1 + 8x_4 + 4^2x_7 + \cdots) + 4(x_2 + 8x_5 + 8^2x_8 + \cdots)$$

nên ta chọn $f(n)$ dưới dạng $f(n) = y_0 + 8y_1 + 8^2y_2 + \cdots \quad (y_i \in \{0; 1\})$.
Do $(f(n))$ tăng ngặt nên nếu $n = n_0 + 2n_1 + 2^2n_2 + \cdots$ là cách biểu diễn số n theo hệ cơ số 2 thì $f(n) = n_0 + 8n_1 + 8^2n_2 + \cdots$.
Đặc biệt, do $2004 = 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ nên ta được

$$f(2004) = 8^2 + 8^4 + 8^6 + 8^7 + 8^8 + 8^9 + 8^{10}.$$

Ví dụ P.15. Cho $f(x) \in \mathbb{Q}[x],\ \deg f \geqslant 2$. Dãy các số $(a_i) \subset \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $f(a_{n+1}) = a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại $k \neq l$ để $a_k = a_l$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh tập $\{a_n\}$ giới nội. Thật vậy do $\deg f \geqslant 2$ nên tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $|f(x_0)| > 2|x|$ với mọi x thỏa mãn $|x| > x_0$. Giả sử tồn tại n sao cho với $|a_n| > x_0$ ta có $f(a_n) > 2|a_n|$. Thế thì

$$a_{n-1} = f(a_n) > 2|a_n| > 2x_0 \Rightarrow a_{n-2} = f(a_{n-1}) > 2|a_{n-1}| > 2^2|a_n| > 2^2x_0$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\Rightarrow a_1 > 2^{n-1}x_0 \Rightarrow n \text{ hữu hạn} \Rightarrow \{a_n\} \text{ bị chặn}.$$

Ta chứng minh số mẫu số của các phân số $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ là hữu hạn. Thật vậy, kí hiệu L là mẫu số chung nhỏ nhất của các số hệ số trong đa thức $f(x)$. Ta có

$$f(x) = \frac{1}{L}(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n), \quad (b_i \in \mathbb{Z}).$$

Khi đó với m tuỳ ý thuộc $\mathbb{N}^*$

$$a_m = f(a_{m+1}) = \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{n} b_j a_{m+1}^{n-j} \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} b_j a_{m+1}^{n-j} = La_m. \tag{1}$$

Đặt $t = b_0b,\ b \in \mathbb{Z}$, sao cho t chia hết cho mẫu số của a_m. Nhân hai vế của (1) với $b_0^{n-1}b^n$ ta được $b_0^nb^na_{m+1}^n + b_1b_0^{n-1}b^na_{m+1}^{n-1} + \cdots + b_nb_0^{n-1}b^n = b_0^{n-1}b^nLa_m \in \mathbb{Z}$.
Suy ra $b_0ba_{m+1} = ta_{m+1}$ là nghiệm của một phương trình đa thức với các hệ số nguyên và hệ số chính bằng 1 nên $ta_{m+1} \in \mathbb{Z}$ suy ra t chia hết cho mẫu số

của a_{m+1}. Vậy t chia hết cho mẫu số của tất cả các số a_n (do ở trên ta chọn m bất kì, thuộc $\mathbb{N}^*$). Vậy các mẫu số của các số a_n chỉ có thể là các ước số của một số t cố định. Do đó, số mẫu số của các phân số $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ là hữu hạn. Trở lại bài toán. Do tập các phân số $\{a_n\}$ là bị chặn và số các mẫu số của các phân số a_n là hữu hạn nên các số a_n chỉ nhận hữu hạn giá trị. Nhưng có vô số các số a_n nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại $k \neq l$ để $a_k = a_l$.

Ví dụ P.16. Cho $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
Hãy xác định số nghiệm của phương trình $\underbrace{f(f(\cdots f(f(x))\cdots))}_{\text{7 lần lấy hàm hợp } f} = 0.$

Lời giải. Nhận xét rằng phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 3$. Ký hiệu $f_k(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(f(x))\cdots))}_{k \text{ lần lấy hàm } f}$. Giả sử phương trình $f_k(x) = 0$ có a_k nghiệm ; phương trình $f_k(x) = 3$ có b_k nghiệm. Vì $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow f_{k-1}(x) = 0 \ \vee \ f_{k-1}(x) = 3$ nên

$$a_k = a_{k-1} + b_{k-1}. \tag{1}$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có $f: \ [0;4] \to [0;4]$ và với mỗi $a \in [0;4]$, phương trình $f(x) = a$ có đúng ba nghiệm phân biệt nên $b_k = 3b_{k-1}$ mà $b_1 = 3 \Rightarrow b_k = 3^k$. Từ (1) và do $a_1 = 2$ (dễ thấy), ta được

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-2} + b_{k-2} + b_{k-1} = a_{k-3} + b_{k-3} + b_{k-2} + b_{k-1} = \cdots \\ &= a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1} = 2 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1} \\ &= 2 + \frac{3^k - 3}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2} \Rightarrow a_7 = \frac{3^7 + 1}{2} = 1094. \ \boxtimes. \end{aligned}$$

Ví dụ P.17. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = \dfrac{1}{2}$; $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1 + a_n^2}$ và dãy số (b_n) xác định bởi $b_0 = 4$; $b_{n+1} = b_n^2 - 2b_n + 2$.
Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $a_n = \dfrac{2b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{b_n}$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Ta có

$$f(a_{n+1}) = \frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}} = \frac{1-\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}}{1+\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}} = \left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)^2 = f^2(a_n). \tag{1}$$

Áp dụng liên tiếp (1) với $f(a_0) = \dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$, ta được

$$f(a_{n+1}) = f^2(a_n) = f^{2^2}(a_{n-1}) = \cdots = f^{2^{n+1}}(a_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}. \tag{2}$$

Suy ra $\dfrac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2^{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{3^{2^{n+1}}-1}{3^{2^{n+1}}+1} \Rightarrow a_n = \dfrac{3^{2^n}-1}{3^{2^n}+1}$.
Lại xét hàm số $g(x) = x - 1$.
Có $f(b_{n+1}) = b_{n+1} - 1 = b_n^2 - 2b_n + 1 = (b_n - 1)^2 = f^2(b_n)$. Vậy

$$b_n - 1 = f(b_n) = f^2(b_{n-1}) = f^{2^2}(b_{n-2}) = \cdots = f^{2^n}(b_0) = 3^{2^n} \Rightarrow b_n = 3^{2^n} + 1.$$

Từ đó có

$$a_nb_n = 3^{2^n} - 1 = (3^{2^{n-1}} + 1)\cdots(3^{2^1} + 1)(3^{2^1} - 1) = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1.2.b_0 \Rightarrow \boxtimes.$$

Chú ý P.3. Lập luận mà ta đã sử dụng trong (2) được gọi là đệ quy. Phương pháp tìm số hạng tổng quát của dãy số sử dụng trong ví dụ trên được gọi là phương pháp hàm lặp. Ta thường xác định các hàm số $f(x)$, $h(x)$ sao cho $f(u_n) = h(f(u_{n-1}))$. Áp dụng đệ quy suy ra

$$f(u_n) = h(f(u_{n-1})) = h(h(f(u_{n-2}))) := h_2(f(u_{n-2})) = \cdots = h_n(f(u_0)).$$

Từ đó thu được biểu thức của u_n. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số phụ, còn hàm số $h(x)$ được gọi là hàm lặp. Trong ví dụ trên, ở cả hai trường hợp ta đều có hàm lặp là $h(x) = x^2$.
Về khái niệm hàm lặp, xem trong chuyên đề *"Phương trình hàm"*.

Ví dụ P.18. *Cho* $k \in \mathbb{N}^*$ *và dãy số* (a_n) *thỏa mãn điều kiện*
$a_0 = 0$; $a_1 = 1$; $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$. *Chứng minh rằng* $a_n \vdots 3^k \Leftrightarrow n \vdots 3^k$.

Lời giải. Dễ thấy $a_n = \dfrac{p^n - q^n}{2\sqrt{3}}$ với $p := 2 + \sqrt{3}, q := 2 - \sqrt{3}$, $pq = 1$.
Có $3a_n(4a_n^2 + 1) = 12\Big(\dfrac{p^n - q^n}{2\sqrt{3}}\Big)^3 + 3\dfrac{p^n - q^n}{2\sqrt{3}} = \dfrac{p^{3n} - q^{3n}}{2\sqrt{3}} = a_{3n}, \ \forall \ n.$
Từ $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ và $a_{n+3} = 15a_{n+1} - 4a_n$ suy ra nếu n không chia hết cho 3 thì a_n cũng không chia hết cho 3. Đặt $n = 3^s.t$ với $(t; 3) = 1$. Theo trên, a_t không chia hết cho 3. Ta có

$$a_n = a_{3^s t} = 3a_{3^{s-1}t}(4a^2_{3^{s-1}t} + 1) = \cdots = 3^s a_l \prod_{k=0}^{s-1}(4a^2_{3^k t} + 1) := 3^s.a_t.M.$$

Do $\forall \ n \in \mathbb{N}$, số $(4n^2 + 1)$ không chia hết cho 3 nên $a_t.M$ không chia hết cho 3. Vậy số mũ của 3 trong khai triển chính tắc của n bằng số mũ của 3 trong khai triển chính tắc của a_n. Vậy $n \vdots 3^k \Leftrightarrow n = 3^s.t$, $(s \geqslant k) \Leftrightarrow a_n = 3^s.L$, $(L \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow a_n \vdots 3^k$.

Ví dụ P.19. Chứng minh rằng tồn tại $q \in \mathbb{R}$ sao cho số $\left[2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^q}}}}}}\right]$, ($n$ lần nâng lên lũy thừa) là số nguyên tố với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. (Ta kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x.)

Lời giải. Gọi ¶ là tập các số nguyên tố và kí hiệu $2_n(q) := 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^q}}}}}}$ (n lần nâng lên lũy thừa). Ta sẽ xây dựng dãy các đoạn thắt $\Delta_n = [a_n; b_n]$ thỏa mãn điều kiện
$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \cdots$ sao cho với mọi $q \in \Delta_n$, tồn tại $p_n \in$ ¶ để $p_n = [2_n(q)]$.

- Với $n = 1$, chọn $\Delta_1 = \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$. Khi đó $[2_1(q)] = 2 \in$ ¶ với mọi $q \in \Delta_1$.
- Giả sử đã có đoạn Δ_n và với mọi $q \in \Delta_n, p_n = [2_n(q)] \in$ ¶. Ta có

$$p_n = [2_n(q)] \Rightarrow p_n \leqslant 2_n(q) < p_n + 1 \Rightarrow 2^{p_n} \leqslant 2_{n+1}(q) < 2.2^{p_n}.$$

Nhưng với $m \geqslant 2$ thì giữa m và $2m$ luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố, nói cách khác, tồn tại $p_{n+1} \in ¶,$ sao cho $2^{p_n} \leqslant p_{n+1} \leqslant 2.2^{p_n}$. Ta dựng đoạn

$$\Delta_{n+1} = \left[\underbrace{\log_2(\log_2(\cdots(\log_2(p_{n+1}))))}_{n \text{ lần lấy hàm hợp}}; \underbrace{\log_2(\log_2(\cdots(\log_2\left(p_{n+1}+\frac{1}{2}\right))))}_{n \text{ lần lấy hàm hợp}}\right].$$

Có $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ và $p_{n+1} \leqslant 2_{n+1}(q) < p_{n+1} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow [2_{n+1}(q)] = p_{n+1} \in ¶,\ \forall\ q \in \Delta_{n+1}$. Vậy ta đã xây dựng được dãy các đoạn thắt (Δ_n) thỏa mãn yêu cầu đặt ra.

Do $\Delta = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \neq \emptyset$ nên tồn tại $q \in \Delta$. Với số q đó ta có $[2_n(q)] \in ¶$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ P.20. Chuỗi $\zeta(z) := 1 + \dfrac{1}{2^z} + \dfrac{1}{3^z} + \cdots + \dfrac{1}{n^z} + \cdots$ được gọi là hàm Zeta.

Sử dụng hàm Zeta hãy chứng minh

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \tag{1}$$

Lời giải. [6]. Euler đã xuất phát từ ba nhận xét sau:

1. Nếu đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0)$ có các nghiệm $x_1; x_2; \cdots; x_n \in \mathbb{R}^*$ thì

$$P(x) = a_n\Big(1 - \frac{x}{x_1}\Big)\Big(1 - \frac{x}{x_2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{x}{x_n}\Big). \tag{1.1}$$

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots.$ (1.2)

3. Hàm số $\dfrac{\sin x}{x}$ có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}^*$ là $x_{\pm n} = \pm n\pi,\ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Mở rộng công thức (1.1)[7], Euler viết

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{x}{n\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{n\pi}\Big) = \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big) \tag{1.3}$$

[6] Của chính L.Euler

[7] Gần 100 năm sau, nhà toán học người Đức K. Weierstrass (1815-1897) mới chứng minh được sự mở rộng này là đúng đắn!

Hệ số của x^2 ở vế phải của (1.3) là

$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{2^2\pi^2}-\cdots-\frac{1}{n^2\pi^2}-\cdots=-\frac{1}{\pi^2}\zeta(2). \tag{1.4}$$

Từ (1.2), hệ số của x^2 trong khai triển của $\dfrac{\sin x}{x}$ là $-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6}\cdot$

Từ đó và từ (1.4) ta được

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots:=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Chú ý P.4. Về hàm Zeta, từ giữa thế kỷ XIX, nhà toán học người Đức Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) đã đưa ra giả thiết rằng mọi nghiệm của hàm Zeta đều là số phức và có dạng $z_k=\dfrac{1}{2}+iy_k$. Cho đến nay, giả thiết Riemann vẫn là bài toán mở, chưa giải quyết được. Bằng máy tính điện tử, người ta đã tìm được vài triệu nghiệm của hàm Zeta và chúng đều có dạng như ở giả thiết Riemann. Tuy nhiên đối với Toán học điều đó chưa phải là chứng minh!

Ví dụ P.21. Hãy tính xác suất để một phân số được lấy bất kì là phân số tối giản.

Lời giải.[8] Ta chọn trong số các phân số dạng $\dfrac{m}{n}$ với $1\leqslant m;n\leqslant N$, trong đó $N\in\mathbb{N}^*$ là số cho trước. Có tất cả N^2 phân số như vậy. Gọi $f(N)$ là số các phân số tối giản trong số N^2 phân số đó. Khi đó, xác suất p cần tìm là $p=\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{f(N)}{N^2}$.

Số phân số có tử và mẫu có thể rút gọn cho 2 (tử và mẫu cùng chẵn) là $\dfrac{N}{2}\cdot\dfrac{N}{2}=\dfrac{N^2}{4}$ nên các phân số như vậy sẽ chiếm $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2^2}$ phần của tổng số các phân số. Do đó, số phân số mà không tối giản được cho 2 sẽ chiếm $1-\dfrac{1}{2^2}$ phần.

Tương tự, lượng phân số không tối giản được cho 3, 5, 7 sẽ chiếm tương ứng

[8] Của nhà toán học người Nga P.L.Chebyshev (1821-1894).

là $\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)$; $\left(1-\dfrac{1}{5^2}\right)$; $\left(1-\dfrac{1}{7^2}\right)$ phần. Gọi q là ước số nguyên tố lớn nhất của N thì số phân số không tối giản trong số N^2 phân số nói trên là

$$N^2\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{q^2}\Big).$$

Hiển nhiên, khi $N \to +\infty$ thì $q \to +\infty$. Ta có

$$p = \lim_{N\to+\infty}\frac{f(N)}{N^2} = \lim_{q\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{q^2}\Big) = \prod_{q\in¶}\Big(1-\frac{1}{q^2}\Big).$$

Để tính p ta xét $\dfrac{1}{p}$ và áp dụng khai triển của $\dfrac{1}{1-x}$, được

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{q^2}}\cdots$$

$$= \prod_{q\in¶}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{q^{2j}}\Big).$$

Lập luận tương tự như ở ví dụ P.5 và sử dụng kết quả của ví dụ P.20 ta được

$$\frac{1}{p} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow p = \frac{6}{\pi^2} \approx 0,6079.$$

Phụ lục B
Hệ động lực hồi quy và hệ động lực tuần hoàn

Q-1 Ma trận lũy linh

Ma trận lũy linh và ma trận tuần hoàn là các vấn đề đã được đề cập đến. Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu, khai thác mặt ứng dụng của chúng; chẳng hạn như nếu ma trận cộng đồng trong các hệ sinh học là ma trận luỹ linh hay tuần hoàn thì dáng điệu của hệ khi thời gian ra vô cùng sẽ dễ dàng nhận được nhờ tính chất đặc biệt của các ma trận này. Mặt khác, sử dụng khai triển Jordan chúng ta có thể tìm được công thức nghiệm tường minh và một một phép chứng minh mới về tính ổn định nghiệm của hệ động lực (cả rời rạc và liên tục).

Định nghĩa Q.5. *Ma trận vuông A được gọi là ma trận lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương p sao cho $A^p = 0$ (ở đây 0 là ma trận không). Đa thức đặc trưng của ma trận được định nghĩa bởi*

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Định lý Q.9. *Cho A là một ma trận vuông cỡ $n \times n$ trên trường bất kỳ. Thế thì, A là ma trận lũy linh nếu và chỉ nếu*

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n.$$

Chứng minh. Nếu đa thức đặc trưng của ma trận A có dạng λ^n thì áp dụng định lý Caley - Hamilton ta được $A^n = 0$. Vậy A là ma trận luỹ linh. Để chứng minh phần đảo lại của định lý ta nhận xét rằng với trường k bất kỳ luôn tồn tại trường K là mở rộng của trường k sao cho trong K mọi đa thức với hệ số trong k có đủ nghiệm, tức K là trường đóng đại số. Vì thế, không mất tính tổng quát, ta giả sử trường đã cho là trường đóng đại số. Kí hiệu λ là một giá trị riêng của ma trận luỹ linh A ứng với véc tơ riêng $\underline{v}$ của A. Khi đó $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Theo giả thiết A là ma trận lũy linh nên tồn tại số nguyên dương $p > 1$ sao cho $A^p = 0$. Do đó $A^p\underline{v} = \lambda^p\underline{v} = \underline{0}$. Nhưng véc tơ riêng $\underline{v}$ không thể bằng $\underline{0}$ nên $\lambda^p = 0$. Suy ra $\lambda = 0$. Vậy đa thức đặc trưng của A phải có dạng λ^n. Định lý được chứng minh.

Nhận xét Q.3. *Nhận xét rằng, nếu k là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$ thì ta có phép chứng minh khác. Thật vậy, vì k là không gian Banach nên theo định lý của Gelfand, bán kính phổ*

$$\rho(A) = \sup\{|\lambda|: \quad \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\to\infty} || A^n ||^{\frac{1}{n}} .$$

Mà A là ma trận lũy linh nên tồn tại số nguyên dương $p > 1$ sao cho $A^p = 0$. Do vậy $\rho(A) = 0$ nên $\lambda = 0$. Vậy đa thức đặc trưng của A phải có dạng λ^n.

Kết hợp định lý này với định lý Caley - Hamilton ta có

Hệ quả Q.2. *Nếu A là một ma trận lũy linh cỡ $(n \times n)$, thì ta có $A^n = 0$.*

Nhận xét Q.4. *Hệ quả này nói rằng nếu ta cần kiểm tra tính luỹ linh của một ma trận $n \times n$ thì chỉ cần tính đến luỹ thừa thứ n của nó là đủ. Nếu tới luỹ thừa n mà vẫn chưa nhận được ma trận 0 thì ma trận đó chắc chắn không thể là ma trận luỹ linh được. Hơn nữa ta cần chú ý rằng tổng cũng như tích của hai ma trận luỹ linh không nhất thiết phải là luỹ linh. Thật vậy xét hai ma trận luỹ linh (2×2) sau đây*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $A^2 = B^2 = 0$, do đó A và B là các ma trận lũy linh. Nhưng cả tổng

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{và tích} \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

không là ma trận luỹ linh vì $(A+B)^2 = I$ (ma trận đơn vị) và $(AB)^2 = AB$. (Cũng có thể tính trực tiếp được đa thức đặc trưng của $A+B$ là $\lambda^2 - 1$ và đa thức đặc trưng của AB là $\lambda^2 - \lambda$ nên chúng không thể là luỹ linh). Mặt khác nhận thấy rằng nếu hai ma trận luỹ linh A và B là tựa giao hoán với nhau ($AB = \lambda \cdot BA$) thì rõ ràng cả tổng và tích của chúng là luỹ linh. Đảo lại ta có hai mệnh đề quan trọng sau đây:

Mệnh đề Q.1. *Nếu A, B và $A+B$ là các ma trận lũy linh cỡ (2×2) thì ta có $AB = -BA$. Từ đó, AB và BA là các ma trận lũy linh.*

Chứng minh. Theo định lý Q.9 ta có $A^2 = B^2 = (A+B)^2 = 0$. Vì vậy, $AB + BA = 0$, do đó $AB = -BA$. Từ đó suy ra, $(AB)^2 = ABAB = -AABB = 0$, do đó AB là ma trận lũy linh. Tương tự ta thu được BA là ma trận lũy linh. Mệnh đề được chứng minh

Mệnh đề Q.2. *Nếu A, B và AB, BA là các ma trận lũy linh cỡ (2×2) thì $A + B$ là ma trận lũy linh và ta cũng thu được $AB = -BA$.*

Chứng minh. Ta có

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = AB + BA.$$

Từ đó,

$$(A+B)^4 = (AB+BA)^2 = (AB)^2 + ABBA + BAAB + (BA)^2 = 0.$$

Điều này chứng tỏ $A+B$ là ma trận lũy linh và nhờ mệnh đề trên ta thu được $AB = -BA$. Mệnh đề được chứng minh.

Nhận xét Q.5. *Đối với những ma trận luỹ linh cỡ lớn hơn 2×2 thì mệnh đề Q.1 và Q.2 không còn đúng. Ta lấy các ví dụ như sau:*

Ví dụ Q.22. *Với* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Dễ kiểm tra được* $A, B, A+B$ *là các ma trận luỹ linh nhưng ma trận*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

không là ma trận luỹ linh vì

$$(AB)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 16 \\ 0 & -32 & 32 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ví dụ Q.23. *Với* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Dễ kiểm tra được* AB, BA, A, B *là các ma trận luỹ linh nhưng ma trận*

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

không là ma trận luỹ linh vì

$$(A+B)^2 = I.$$

Nhận xét Q.6. *Ma trận luỹ linh xuất hiện trong lý thuyết hệ động lực như một hệ động lực hồi quy đơn giản nhất. Nếu xuất phát từ một véc tơ bất kỳ trong không gian n chiều thì hệ thống luôn quay về gốc toạ độ sau không quá n bước. Tiếp theo ta đề cập đến một số khái niệm và tính chất của ma trận tuần hoàn.*

Q-2 Ma trận tuần hoàn

Định nghĩa Q.6. *Ma trận vuông* U *được gọi là ma trận tuần hoàn nếu tồn tại số nguyên dương* $k > 1$ *sao cho* $U^k = I$ *(ở đây* I *là ma trận đơn vị).*

Ma trận tuần hoàn là ví dụ đơn giản cho hệ động lực tuần hoàn. Sau p bước hệ thống của ta trở về trạng thái ban đầu. Đây cũng là chu kỳ của hệ động lực. Các ma trận tuần hoàn đều là các *ma trận nửa đơn* (xem [?], p.613)). Nhắc lại rằng *ma trận nửa đơn* là các ma trận có hệ véc tơ riêng đầy đủ (tức là chúng đồng dạng với ma trận chéo). Chẳng hạn xét ma trận

$$U = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/p) & \sin(2\pi/p) \\ -\sin(2\pi/p) & \cos(2\pi/p) \end{pmatrix}$$

ta có ngay $U^p = I$ nên U là ma trận tuần hoàn. Đây là một phép quay quanh gốc toạ độ với góc $\frac{2\pi}{p}$. Rõ ràng là sau p bước ta quay về vị trí ban đầu. Một lớp các ví dụ hấp dẫn khác là các *ma trận hoán vị*. Những ma trận này dùng để biểu diễn các *nhóm đối xứng*. Để cụ thể hơn những vấn đề này ta ký hiệu V là không gian véc tơ n chiều trên trường số phức với cơ sở là $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_n\}$. Kí hiệu S_n là nhóm đối xứng với các phần tử là các hoán vị của tập hợp $\{1, 2, \cdots, n\}$. Tương ứng với mỗi hoán vị σ ta thành lập ánh xạ tuyến tính P_σ như sau $P_\sigma \underline{v}_j = \underline{v}_{\sigma(j)}$ với $j = 1, 2, \cdots, n$. Ma trận của ánh xạ tuyến tính P_σ trong cơ sở $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_n\}$ cũng được ký hiệu là P_σ và có tên là ma trận hoán vị. Về mặt trực quan, các ma trận hoán vị là các bảng số vuông mà trong mỗi dòng mỗi cột có đúng một số 1, các số còn lại đều bằng 0. Chẳng hạn

$$P_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad P_{(1,3,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

với $(1, 2)$ là hoán vị đổi chỗ 1 với 2, còn $(1, 3, 2)$ là vòng xích đưa 1 vào 3, 3 vào 2 còn 2 thì trở về. Ta có $P_{(1,2)}^2 = P_{(1,3,2)}^3 = I$ và đa thức đặc trưng của $P_{(1,2)}$ là $\chi P_{(1,2)} = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)$ còn đa thức đặc trưng của $P_{(1,3,2)}$ là $\chi P_{(1,3,2)} = (\lambda^3 - 1)$.

Bây giờ ta sẽ nghiên cứu chi tiết đa thức đặc trưng của các ma trận tuần hoàn.

Bổ đề Q.1. *Nếu $U^p = U^q = I$, trong đó p và q là các số nguyên tố cùng nhau thì $U = I$.*

Chứng minh. Vì p và q là hai số nguyên tố cùng nhau, nên tồn tại các số tự nhiên m và n sao cho $pm = nq + 1$. Do đó,

$$U^{mp} = U^{nq+1}.$$

Theo giả thiết, ta có vế trái là I và vế phải là U. Bổ đề được chứng minh.

Định lý Q.10. *Cho A là một ma trận cỡ $n \times n$ trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ với các giá trị riêng khác nhau trên trường số phức $\mathbb{C}$. Giả thiết thêm là tồn tại số nguyên tố p sao cho $A^p = I$. Thế thì đa thức đặc trưng của A phải có dạng $\lambda^p - 1$ hoặc $\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \cdots + 1$. Suy ra $p = n$ hoặc $p = n + 1$.*

Chứng minh. Cho λ là một giá trị riêng của A. Thế thì $\lambda^p = 1$. Mặt khác các giá trị riêng của A đều phân biệt nên đa thức đặc trưng của A phải là thừa số của đa thức $\lambda^p - 1$. Khi phân tích đa thức $\lambda^p - 1$ ra thừa số nguyên tố trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ ta được

$$\lambda^p - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \cdots + 1).$$

Vậy đa thức đặc trưng của A chỉ có thể là một trong hai dạng trên. Ta đã chứng minh xong.

Nhận xét Q.7. *Điều kiện các giá trị riêng của A phải phân biệt là vô cùng quan trọng không thể bỏ được. Ví dụ ma trận đơn vị I thoả mãn tất cả các điều kiện khác của định lý này mà không có đa thức đặc trưng như hai dạng trên.*

Hệ quả Q.3. *Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 2 thì ít nhất một trong hai số $\{\cos(2\pi/p), \sin(2\pi/p)\}$ phải là số vô tỷ.*

Chứng minh. Ta xét ma trận sau

$$U = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/p) & \sin(2\pi/p) \\ -\sin(2\pi/p) & \cos(2\pi/p) \end{pmatrix}.$$

Khi đó $U^p = I$. Nếu cả hai số $\{\cos(2\pi/p), \sin(2\pi/p)\}$ là số hữu tỷ, ta sử dụng định lý 1.2 và nhận được $p = 2$ hoặc 3. Theo giả thiết của ta p là số nguyên tố lớn hơn 2. Với $p = 3$ ta có ngay $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ là số vô tỷ. Hệ quả được chứng minh xong.

Bây giờ ta xét đa thức đặc trưng của các ma trận hoán vị. Trước hết nhận xét rằng véc tơ $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \cdots + \underline{v}_n$ là véc tơ riêng của mọi ma trận hoán vị ứng với giá trị riêng bằng 1. Mặt khác nếu hoán vị σ không thay đổi vị trí của j thì $\underline{v}_j$ sẽ là véc tơ riêng của ma trận P_σ ứng với giá trị riêng bằng 1. Như vậy nếu σ cố định k điểm thì đa thức đặc trưng của P_σ sẽ chia hết cho $(\lambda - 1)^k$. Cụ thể hơn ta có

Bổ đề Q.2. *Giả sử $\sigma \in S_n$ là một vòng xích độ dài p. Thế thì đa thức đặc trưng $\chi(\lambda)$ của ma trận hoán vị P_σ là*

$$(\lambda^p - 1)(\lambda - 1)^{n-p}.$$

Chứng minh. Ta sẽ liệt kê tất cả các véc tơ riêng (độc lập tuyến tính) của ma trận P_σ. Không mất tính tổng quát, giả sử σ là vòng xích $(1, 2, \cdots, p)$. Khi đó $\{\underline{v}_{p+1}, \cdots, \underline{v}_n\}$ là $n - p$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với giá trị riêng 1. Bây giờ đặt $\varsigma = \cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$ là căn bậc p của 1 và $\underline{u}_j = \varsigma^{jp}\underline{v}_1 + \varsigma^{j(p-1)}\underline{v}_2 + \cdots + \varsigma^{j}\underline{v}_p$ với $j = 1, 2, \cdots, p$. Khi đó

$$P_\sigma \underline{u}_j = \varsigma^{jp}\underline{v}_2 + \varsigma^{j(p-1)}\underline{v}_3 + \cdots + \varsigma^{j}\underline{v}_1 = \varsigma^{j}\underline{u}_j.$$

Bởi định lý quen thuộc của VanderMonde ta có hệ véc tơ riêng ς^j $j = 1, 2, \cdots, p$ là độc lập tuyến tính. Suy ra đa thức đặc trưng của ma trận hoán vị P_σ là

$$(\lambda - \varsigma)(\lambda - \varsigma^2)\cdots(\lambda - \varsigma^p)(\lambda - 1)^{n-p} = (\lambda^p - 1)(\lambda -)^{n-p}.$$

Bổ đề được chứng minh.

Định lý Q.11. *Giả sử $\tau \in S_n$ được biểu diễn dưới dạng tích của k vòng xích rời nhau $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$. Giả sử p_i là độ dài của σ_i (với $i = 1, 2, \cdots, k$) và*

$q = n - (p_1 + p_2 + \cdots + p_k)$. *Thế thì đa thức đặc trưng* $\chi(\lambda)$ *của ma trận hoán vị* P_τ *là*

$$(\lambda^{p_1} - 1)(\lambda^{p_2} - 1)\cdots(\lambda^{p_k} - 1)(\lambda - 1)^q.$$

Chứng minh. Bằng quy nạp theo k và sử dụng bổ đề 1.2, ta có định lý đúng với $k = 2$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử σ_1 là vòng xích $(1, 2, \cdots, p_1)$ và giả sử σ_2 là vòng xích $(p_1+1, p_1+2, \cdots, p_1+p_2)$. Trước hết ta có $n - p_1 - p_2 = q$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính của P_τ tương ứng với giá trị riêng 1 là $\underline{v}_{p_1+p_2+1}, \cdots, \underline{v}_n$. Bây giờ giả sử $\varsigma_1 = \cos(2\pi/p_1) + i\sin(2\pi/p_1)$ là nghiệm phức thứ p_1 của 1 ($\varsigma^{p_1} = 1$) và giả sử $\varsigma_2 = \cos(2\pi/p_2) + i\sin(2\pi/p_2)$ là nghiệm phức thứ p_2 của 1 ($\varsigma^{p_2} = 1$). Nhờ đó ta có thể viết các véc tơ riêng của P_τ tương ứng với ς_1^ℓ và ς_2^j trong đó $\ell = 1, 2, \cdots, p_1$ và $j = 1, 2, \cdots, p_2$. Vì thế đa thức đặc trưng $\chi(\lambda)$ của P_τ có dạng

$$\chi(\lambda) = (\lambda^{p_1} - 1)(\lambda^{p_2} - 1)(\lambda - 1)^{n-p_1-p_2}.$$

Định lý được chứng minh.

Tiếp theo ta ta nghiên cứu không gian véc tơ tuyến tính định chuẩn k chiều V trên trường số phức $\mathbb{C}$. Ma trận lũy đẳng là ma trận vuông U cỡ $(k \times k)$ sao cho $U - I$ là ma trận lũy linh. Rõ ràng, đa thức đặc trưng của ma trận lũy đẳng U là $(\lambda - 1)^k$. Vì vậy, bán kính phổ của ma trận lũy đẳng là 1. Để ý rằng, chuẩn của các ma trận lũy linh có thể rất lớn, mặc dù bán kính phổ của chúng là 0.

Ta định nghĩa

$$e^{At} = I + \frac{t}{1!}A + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots.$$

Rõ ràng, chuỗi này hội tụ với chuẩn của ma trận. Từ định nghĩa, dễ thấy

- $(e^{At})' = Ae^{At}$,
- Nếu A và B là các ma trận vuông giao hoán thì $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$,

◦ Nếu λ là một giá trị riêng của A thì $e^{\lambda t}$ là giá trị riêng của e^{At},

◦ Nếu $U^2 = I$ thì $e^{Ut} = I\cosh t + U\sinh t$.

◦ Nếu N là ma trận lũy linh cỡ $(k \times k)$ thì

$$e^{Nt} = I + \frac{t}{1!}N + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}$$

là ma trận lũy đẳng.

Ta hãy xét các ví dụ sau,

◦ Nếu $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ thì $e^{Ut} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$ $(U^2 = I)$;

◦ Nếu $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ thì $e^{Ut} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ $(U^2 = -I)$.

Nhắc lại rằng, mọi ma trận A đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $A = S + N$, trong đó S là ma trận nửa đơn, N là ma trận lũy linh và $SN = NS$ (khai triển Jordan cộng tính). Ta có định lý quen thuộc sau mà phép chứng minh nó có thể thấy dễ dàng nhờ sử dụng khai triển này.

Định lý Q.12. *Nghiệm của hệ $\underline{\dot{u}}(t) = A\underline{u}(t)$ với $t > 0$ có dạng $\underline{u}(t) = e^{At}\underline{u}(0)$. Hơn hữa, nếu $A = S + N$ là khai triển Jordan cộng tính của A, trong đó S là ma trận nửa đơn cỡ $k \times k$ có k véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_k$ tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ (không nhất thiết khác nhau), thì nghiệm tổng quát của hệ có dạng*

$$\underline{u}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} e^{Nt}\underline{v}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} e^{Nt}\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k e^{\lambda_k t} e^{Nt}\underline{v}_k \quad \text{với } t \geq 0. \tag{4.1}$$

Nếu $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$ *với tất cả* $j = 1, 2, \cdots, k,$ *thì*

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}(t) = \underline{0}. \tag{4.2}$$

Chứng minh. Từ $SN = NS$ ta có

$$e^{(S+N)t} = e^{St}e^{Nt}$$

từ đó ta có (4.1). Ta chứng minh(4.2). Để ý rằng độ lớn của $\| e^{Nt}\underline{v}_j \|$ là giá trị của đa thức (t biến số) bậc $k-1$ không đổi. Do đó,

$$\lim_{t\to\infty} | e^{\lambda_j t} | \cdot \| e^{Nt}\underline{v}_j \| = 0,$$

và suy ra (4.2).

Chú ý rằng nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & y(t) \\ \dot{y}(t) = & 0 \end{cases}$$

có dạng

$$\begin{cases} x(t) = & a + bt \\ y(t) = & b \end{cases}$$

Ma trận A của hệ này là ma trận lũy linh và chỉ có một véc tơ riêng (độc lập tuyến tính). Để ý rằng

$$e^{At} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

và ta luôn có nghiệm của hệ $\underline{\dot{u}}(t) = A\underline{u}(t)$ với $t > 0$ là $\underline{u}(t) = e^{At}\underline{u}(0)$.

Tiếp theo, ta chứng minh tính ổn định nghiệm của hệ động lực rời rạc bằng cách dùng khai triển Jordan nhân tính. Nhắc lại rằng tất cả các ma trận khả nghịch A đều có thể biểu diễn (duy nhất) dưới dạng tích (giao hoán được) của một ma trận nửa đơn S và một ma trận lũy đẳng U (khai triển Jordan nhân tính). Giá trị riêng của S chính là giá trị riêng của A. Ta có định lý quen thuộc sau mà phép chứng minh nó có thể thấy dễ dàng nhờ sử dụng khai triển này.

Định lý Q.13. *Nghiệm của hệ $\underline{u}_{n+1} = A\underline{u}_n$ với $n = 0, 1, \cdots,$ có dạng $\underline{u}_n = A^n\underline{u}_0$. Hơn nữa, nếu $A = SU$ là khai triển Jordan nhân tính của A (A được giả thiết là ma trận khả nghịch), trong đó S là ma trận nửa đơn cỡ $(k \times k)$ có*

k véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_k$ tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ (không nhất thiết khác nhau), thì nghiệm tổng quát của hệ có dạng

$$\underline{u}_n = \alpha_1 \lambda_1^n U^n \underline{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^n U^n \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n U^n \underline{v}_k \text{ với } n = 0, 1, \cdots \tag{4.3}$$

Nếu $\mid \lambda_j \mid < 1$ với tất cả $j = 1, 2, \cdots, k$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \underline{u}_n = \underline{0}. \tag{4.4}$$

Chứng minh. Do $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_k$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính trong không gian k chiều, nên chúng tạo thành cơ sở của không gian này. Vì vậy, với véc tơ $\underline{u}_0$ cho trước, ta có

$$\underline{u}_0 = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k.$$

Thay vào công thức $\underline{u}_n = A^n \underline{u}_0$ ta có ngay

$$\begin{aligned} \underline{u}_n = A^n \underline{u}_0 &= U^n S^n (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k \underline{v}_k) \\ &= \alpha_1 \lambda_1^n U^n \underline{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^n U^n \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n U^n \underline{v}_k. \end{aligned}$$

Nếu giá trị tuyệt đối của λ nhỏ hơn thì $\mid \lambda^n \mid = (1+a)^{-1}$ tiến tới 0 rất nhanh khi n tiến tới vô cùng. Còn chuẩn của ma trận luỹ đẳng

$$U^n = (I+N)^n = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} N^r$$

sẽ bị chặn trên bởi đa thức

$$p(n) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\| N \|^r}{r!} n(n-)\cdots(n-r+1)$$

có bậc là $k-1$ (cố định) của n. Hàm số mũ có độ lớn rất nhiều so với hàm đa thức. Nói một cách cụ thể hơn nếu $p(n)$ là đa thức còn a là một số dương thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mid p(n) \mid}{(1+a)^n} = 0.$$

Vì vậy ta có $\lim_{n\to\infty} \underline{u}_n = \underline{0}$. Định lý đã được chứng minh trong trường hợp A là ma trận khả nghịch. Nếu A không khả nghịch ta có thể phân tích không gian véc tơ đã cho thành tổng trực tiếp của hai không gian con bất biến là V_1 và $V_2 = \{\underline{v} : A\underline{v} = \underline{0}\}$. Hạn chế của ánh xạ tuyến tính A trên không gian con V_1 là khả nghịch nên ta có thể áp dụng kết quả vừa chứng minh ở trên để kết luận $\lim_{n\to\infty} \underline{u}_n = \underline{0}$.

Để ý rằng ma trận lũy linh

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

có duy nhất một véc tơ riêng (độc lập tuyến tính)

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nên nghiệm tổng quát của hệ $\underline{u}_{n+1} = A\underline{u}_n$ với $n = 0, 1, 2, \cdots$, không có dạng (4.3) trong định lý trên. Hơn nữa, $\underline{u}_0$ và $\underline{u}_1$ không nhất thiết là 0 và $\underline{u}_n = 0$ với tất cả $n > 1$.

Tài liệu tham khảo

[1] R. Courant, G.Robins, *Toán học là gì?* (tiếng Nga), NXB Matxcơva, 1967
.

[2] A.V. Dorofeeva, *Giáo trình Toán cao cấp cho khoa Triết học ở các trường đại học* (tiếng Nga), NXB MGU, Matxcơva, 1971.

[3] Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Complexnumbers from A to Z ...*, Birkhäuser, 2006.

[4] I.M. Yaglom, *Số phức và ứng dụng trong hình học* (tiếng Nga), Moskva, 1963.

[5] S.I. Xvarcburd, *Izbrannye voproksy matematiki Fakultativnyi kurs 10*, Moskva, 1963.

[6] G.Polya, G.Szege, *Các định lý và bài tập của giải tích*, (tiếng Nga), Nhà xuất bản Mir, Moscow, 1973

[7] D.Shkliarsky, N.Chentsov, I.Iaglom, *The USSR Olympiad Problem book,* Dover Publications, New York, 1994.

[8] Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, *Proofs from the Book*, Third Edition, Springer, 2003

[9] Arthur Engel, *Problems solving strategies*, Springer 1998

[10] Alexeev A., *Định lý Abel qua các bài toán và lời giải* (tiếng Nga), Nhà xuất bản MCCME, 2001

[11] P.S.Modenov, *Problems in Geometry*, Mir publishers 1981

[12] H. Dorrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their history and solutions*, Dover Publications, Newyork 1965

[13] B.J.Venkatachala, *Functional Equations, A problem Solving Approach*, Prism Books, 2002

[14] Zvezdelina Stankova, *Complex numbers in Geometry*, Berkeley Mathematical circle.

[15] Ross Honsberger, *Mathematical Gems III*, MAA Publications 1985

[16] Nguyễn Cảnh Toàn, *Hình học cao cấp*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1979.

[17] Lê Hải Châu, *Thi vô địch toán Quốc tế*, Nhà xuất bản trẻ, 2001.

[18] Đoàn Quỳnh, *Số phức với Hình học phẳng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.

[19] Titu Andresscu, Complex Numbers from A to Z, Birkhauser, 2000.

[20] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Một số chuyên đề số học chọn lọc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008

[21] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề hình học và các vấn đề liên quan*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008

[22] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trịnh Đào Chiến, Trần Nam Dũng, Nguyễn Đăng Phất, *Một số chuyên đề chọn lọc về đa thức và áp dụng*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

[23] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ* , Nhà xuất bản Giáo dục, 2007 (tái bản lần thứ hai).

[24] Đại số 10, Nhà xuất bản Giáo dục, 1969.

[25] Giải tích 12, Nhà xuất bản Giáo dục, 2009.

[26] Bl. Sendov, A. Andreev and Kjurkchiev, *Numerical Solution of Polynomial Equations* (Part 2, Vol. VIII trong bộ sách Handbook of Numerical Analysis, Eds., P. G. Ciarlet and Lions), Nhà xuất bản Elsevier Science, 1994.

[27] Chủ biên: P. C. Aleksandrov, A. I. Markusevich, A. Ia. Khinchin, *Từ điển toán sơ cấp, Viện Hàn lâm khoa học giáo dục Liên bang Nga*, Nhà xuất bản sách kĩ thuật - lí thuyết, Moskva, 1951 (tiếng Nga), trang 356 - 379.

[28] Nguyễn Hữu Điển, *Đa thức và ứng dụng*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2005.

[29] Ngô Việt Trung, *Lý thuyết Galoa*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.

[30] Tạ Duy Phượng, *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2004.

[31] Eric W. Weisstein, *CRC Consise Encyclopedia of Mathemtics*, CRC Press LLC, USA, 1999.

[32] A. Sveshnikov, A. Tikhonov, *The Theory of Function of a complex variable*, Mir Publishers, 1973.

[33] Nguyễn Thủy Thanh, *Cơ sở lý thuyết hàm biến phức,* NXB ĐHQGHN, 2007.

[34] Nguyễn Thủy Thanh, *Bài tập toán cao cấp,* NXB ĐHQGHN, 2007.