

Câu 1. (3 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

2. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. (2 điểm)

1. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

2. Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD, M$ là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB, MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính : $a^{2011} + b^{2011}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} 1a. \quad x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1b. \quad &(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\ &= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\ &= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\ &= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16) \end{aligned}$$

2. Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Câu 2.

1. Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1).q(x)$$

Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6$ (1)

Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2; b=4$

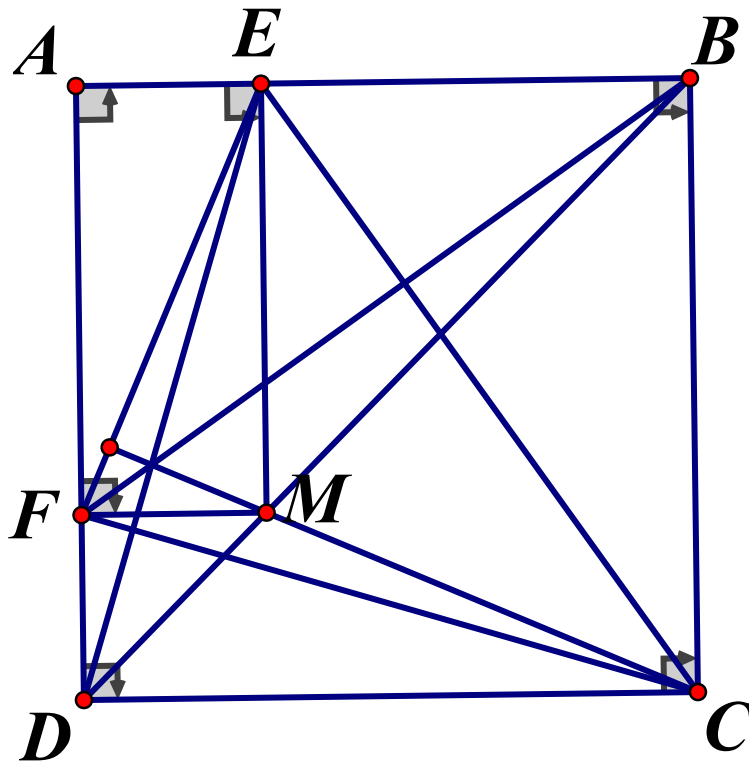
2. Ta có: $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2).(a^2 + 2a + 2)$

Vì $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$

Có: $a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1 \forall a$ và $a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$

Vậy $a^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = -1(tm) \end{cases}$

Câu 3.



- Chứng minh $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow dfcm$
- DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow dfcm$
- Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi
 $\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi
 $\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ (AEMF là hình vuông)
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Câu 4.

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$a=1 \Rightarrow b^{2000}=b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{cases}$$

$$b=1 \Rightarrow a^{2000}=a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$$

$$a=1;b=1 \Rightarrow a^{2011}+b^{2011}=2$$