**Chương 1:** Bài GIÁ TRỊ LỚN NHÂT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**.**

**🗸.Dạng 22: Ứng dụng GTLN,GTNN vào giải quyết bài toán thực tế.**

✝❶**\_Tóm tắt lý thuyết cơ bản:**

***Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn***

Giả sử hàm số  liên tục trên đoạn . Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm  trên đoạn  ta làm như sau:

 Tìm các điểm  thuộc  sao cho tại đó hàm số  có đạo hàm bằng  hoặc không xác định.

 Tính .

 So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm  trên đoạn , số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm  trên đoạn .

\* **Nếu:**

**+)** 

**+)** 

**Chú ý**

** Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

 Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm  rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm  trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

* Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

✝❷**\_Phương pháp Casio:**

**①. Sử dụng lệnh .** **(TABLE) lập bảng giá trị của hàm số.**

**Sử dụng TABLE xét hàm số f(x) trên**   

Lưu ý cách chọn các giá trị Start, End, Step.

Start ? Ta nhập giá trị a.

End ? Ta nhập giá trị b.

Step? Ta nhập bước nhảy phù hợp ( Thường chọn bước nhảy là  hoặc 0.1; 0.5; 1 )

* Sử dụng lệnh **** giải phương trình f ‘(x) = 0

**③. Sử dụng lệnh**  **(SOLVE)** giải phương trình f ‘(x) = 0

1. Giải phương trình f ’ (x) = 0 bằng cách sử dụng lệnh SOLVE , lấy giá trị x trên để dò nghiệm(Đối với những phương trình quá đơn giản thì không cần dùng lệnh này) , ta được các nghiệm của phương trình f ‘ (x) = 0.
2. Dùng để tìm giá trị của f ( x) tại các điểm đầu mút và điểm  là nghiệm của phương trình f ‘ (x) = 0 rồi so sánh từ đó kết luận Max, Min.
3. **Qui ước: Khoảng**  = 

**R =** 

**Xem chúng như đoạn.**

✝❸**\_Phương pháp tính nhanh: Sử dụng đạo hàm cấp một, cấp hai.**

|  |
| --- |
| ***Để giải bài toán ứng dụng thực tế, ta làm như sau :***  ***①-Bước 1: Từ điều kiện đề bài, thiết lập được hàm số.***  ***②-Bước 2: Nhận dạng được bài toán cần tìm GTNN hay GTLN***  ***③-Bước 3: Tìm nghiệm của phương trình đạo hàm cấp một.***  ***④-Bước 4:Tính đạo hàm cấp hai hoạc lập bảng biến thiên suy ra GTLN, GTNN*** |

**🗵\_ Bài tập minh họa trong các đề đã thi của BGD. *(5-10 câu) hoặc có thể tìm thêm.***

|  |
| --- |
| **Câu 1:**  Một nhà sản xuất bột trẻ em muốn thiết kế bao bì mới cho một loại sản phẩm mới của nhà máy thể tích 1. Nếu bạn là nhân viên thiết kế bạn phải thiết kế bao bì hình gì để nhà máy chọn bản thiết kế của bạn?   1. Hình hộp chữ nhật. **B.** Hình lập phương. 2. Hình trụ. **D.** Hình vuông. |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_ *Phương án 1****:* Làm bao bì dạng hình hộp chữ nhật đáy là hình vuông cạnh x (x > 0), chiều cao h (h > 0).  **h**  **x**  Thể tích khối hộp: . Suy ra .  Diện tích toàn phần của hình hộp:  Để tốn ít vật liệu nhất thì diện tích toàn phần là nhỏ nhất. Như vậy bài toán đặt ra là cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số .  ***Quy trình bấm máy***.  Qui ước :  Ta có    Ta thay nghiệm vừa tìm được cùng hai điểm đầu mút vào hàm số rồi so sánh để đưa ra Max, Min    **Cú pháp:**  **+ Nhập biểu thức S(x)**  **+**  **+**  **+**  Từ kết quả hiện trên màn hình ta thấy    Lưu ý, khi x = 1 thì h = 1  Vậy nếu làm theo dạng hình hộp chữ nhật thì người thiết kế cần làm hình lập phương cạnh 1dm. Khi đó diện tích toàn phần là  6.  **② *Phương án 2****:* Làm theo dạng hình trụ, bán kính x ( ), chiều cao h ().  Description: Kết quả hình ảnh  Tương tự như trên, ta cần làm sao cho diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất.  Thể tích khối trụ:  Diện tích toàn phần của hình trụ:  Như vậy bài toán đặt ra là cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  ***Quy trình bấm máy***.  Qui ước :  Ta có .  Ta thay nghiệm vừa tìm được cùng hai điểm đầu mút vào hàm số rồi so sánh để đưa ra Max, Min  **Cú pháp:**  **+** Nhập biểu thức  **+**  **+**  **+**  Từ kết quả hiện trên màn hình ta thấy    Lưu ý, khi x =  thì  Vậy nếu làm theo dạng hình trụ thì người thiết kế cần làm hình trụ sao cho chiều cao bằng đường kính đáy (bằng  dm). Khi đó diện tích toàn phần là khoảng 5,54. | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Người thiết kế muốn nhà máy chọn bản thiết kế của mình thì ngoài tính thẩm mỹ của bao bì, cần tính đến chi phí kinh tế sao cho việc làm một bao bì ít tốn kém nguyên vật liệu nhất.  Theo cách thông thường, ta làm bao bì dạng hình hộp chữ nhật hoặc hình trụ. Như vậy cần tính xem làm theo dạng nào thì sẽ tốn ít nguyên vật liệu hơn. Tức là, ta cần tính xem diện tích toàn phần của hình nào là nhỏ hơn.  Theo tính toán ở trên cả hai hộp đều có thể tích 1  nhưng diện tích toàn phần của hộp lập phương lớn hơn hộp hình trụ. Do vậy, chi phí để làm hộp lập phương là tốn kém hơn. Vì thế, nếu chỉ xét trên tiêu chí là tiết kiệm nguyên vật liệu thì người thiết kế phải chọn dạng hình trụ để làm bao bì cho sản phẩm |

|  |
| --- |
| **Câu 2:** Bố cần xây một hồ nước dạng khối hộp chữ nhật có thể tích , đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công là 100000 đồng trên mỗi  xây dựng. Bố cần bao nhiêu tiền để thuê nhân công xây hồ .   1. 15000000 **B. 25000000** **C. 10000000** **D. 30000000** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **① *Phương án 1****:* Xác định ba kích thước tùy ý của hồ theo yêu cầu, chẳng hạn rộng 10m, dài 20m, cao .  Khi đó diện tích xây dựng là    Số tiền phải trả cho nhân công là 250.100000 = 25000000 đồng.  Tuy nhiên trong trường hợp này, câu hỏi đặt ra là nếu xây hồ theo các kích thước khác thì số tiền thuê nhân công là ít hay nhiều hơn? Làm thế nào để bố ít tốn tiền nhất ? Để trả lời câu hỏi đó thì ta cần phải biết số tiền ít nhất có thể thuê nhân công làm xong hồ, tức là phải biết nhân công phải xây ít nhất bao nhiêu  thì xong hồ.  **②** ***Phương án 2****:* Xác định các kích thước của hồ nước để diện tích xây dựng là nhỏ nhất.  Gọi x, y, z lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hồ nước, trong đó và .  Thể tích hồ nước  Diện tích xây dựng là    Bài toán đặt ra là tìm GTNN của hàm số  .  ***Quy trình bấm máy***.  Qui ước :      Ta thay nghiệm vừa tìm được cùng hai điểm đầu mút vào hàm số rồi so sánh để đưa ra Max, Min  **Cú pháp:**  **+** Nhập biểu thức  **+**  **+**  **+**  Từ kết quả hiện trên màn hình ta thấy    Tiền thuê nhân công là 150.100000 = 15000000 đồng.  Lưu ý,    Vậy để số tiền thuê nhân công xây hồ ít nhất thì ta cần xây hồ với các kích thước là rộng 5m, dài 10m, cao . Khi đó, số tiền thuê nhân công là 15000000 đồng. | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Ngoài việc làm cho học sinh thấy được ứng dụng thực tế của GTNN của hàm số, bài toán cho chúng ta thấy được lợi ích kinh tế to lớn khi áp dụng toán học và thực tiễn cuộc sống. Sự chênh lệch về chi phí giữa hai phương án thực hiện là không hề nhỏ chút nào. Điều đó giúp cho học sinh có ý thức tự rèn luyện cho minh thói quen luôn sẵn sàng áp dụng kiến thức học được vào cuộc sống, luôn tìm tòi các giải pháp khác nhau để giải quyết công việc, trên cơ sở đó lựa chọn giải pháp ối ưu nhất. |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 3:** Trong một xưởng cơ khí, sau đợt tham gia học tập, người chủ tổ chức thi để đánh giá trình độ tay nghề của các học viên. Sau khi kiểm tra xong các kiến thức cơ bản, người chủ giao cho mỗi học viên một tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 50cm X 80cm và yêu cầu cắt đi ở bốn góc vuông bốn hình vuông bằng nhau để khi gấp lại thì được một cái thùng không nắp dạng hình hộp chữ nhật dùng để dự trữ nước ngọt cho các chiến sĩ ở đảo xa.  Các em hãy giúp để người thợ làm được cái thùng đựng được lượng nước theo đúng ý của người chủ.     |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |  1. **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_*Phương án 1****:* Người thợ chỉ quan tâm đến tính thẩm mỹ của cái thùng.  Người thợ cắt một hình vuông bất kỳ và làm thùng. Chẳng hạn anh ta cắt một hình vuông có cạnh 5cm. Khi đó thùng tạo thành có chiều cao h = 5cm, chiều dài a = 70cm, chiều rộng b = 40cm. Khi đó thể tích của thùng tạo thành là    **②** ***Phương án 2****:* Người thợ này cắt hình vuông cạnh x  và quan tâm đến việc tạo thành cái thùng có thể tích lớn nhất.  Thể tích cái thùng tạo thành là .  Bài toán đặt ra là tìm x để V lớn nhất.  **Quy trình bấm máy.**  Qui ước :  Ta có  Dùng  suy ra x = 10  Ta thay nghiệm vừa tìm được cùng hai điểm đầu mút vào hàm số rồi so sánh để đưa ra Max, Min  **Cú pháp:**  **+** Nhập biểu thức  **+**  **+**  **+**  Từ kết quả hiện trên màn hình ta thấy    Vậy người thợ cần cắt các hình vuông cạnh bằng 10cm thì sẽ làm được cái thùng có thể tích lớn nhất. Khi đó, nếu làm thùng đẹp thì chắc chắn người thợ này sẽ làm được cái thùng mà người chủ mong muốn. | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Yêu cầu của người chủ là một yêu cầu “mở”. Sẽ có rất nhiều người làm theo phương án 1, chỉ cố gắng để làm một cái thùng thật đẹp, tức là chỉ quan tâm đến tính thẩm mỹ của sản phẩm và rõ ràng như thế là chưa đủ. Để giải quyết tốt vấn đề đặt ra đòi hỏi người thực hiện phải gắn mình vào cuộc sông thực tế, phải thực sự am hiểu được thực tế của cuộc sống.  Ngoài việc rèn luyện cho học sinh những vấn đề như trong bài toán 1 và bài toán 2, bài toán này còn hướng học sinh phải biết hòa mình vào cuộc sống, phải đặt bản thân vào những hoàn cảnh cụ thể của cuộc sống để thông cảm, chia sẻ với mọi người. Từ đó có những suy nghĩ thấu đáo, những hành động đẹp; góp phần xây dựng cuộc sống ngày một tươi đẹp hơn. |

|  |
| --- |
| **Câu 4:** Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn ảnh). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Vị trí đó cách màn ảnh bao nhiêu mét?  C  B  A O   1. 2,5m **B.** 3,4m **C.** 2,5m **D.** 2,4m |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| Theo yêu cầu bài toán này ta cần xác định OA để góc  lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi  lớn nhất.  Đặt  với x > 0, ta có:    Xét hàm số , với x > 0  Bài toán trở thành tìm x > 0 để hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất.  ***Quy trình bấm máy***.  Qui ước :  Ta có        Dùng suy ra x =  Kiểm tra tương tự như những bài trên, ta có f(x) lớn nhất khi x = 2,4  Vậy để nhìn rõ nhất cần đứng ở vị trí cách màn ảnh 2,4m. | **②\_Bài học kinh nghiệm**  -Từ điều kiện bài toán , hs phải biết cách thiết lập hàm số.  - Biết cách tính đạo hàm.  - Biết cách giải phương trình đạo hàm cấp một tìm nghiệm.  - Biết cách chuyển khoảng thành đoạn và dò tìm max, min. |

|  |
| --- |
| **Câu 5:** Từ một khúc gỗ tròn hình trụ, cần xẻ thành một chiếc xà có thiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của miếng phụ để sử dụng khối gỗ một cách tốt nhất (tức là diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất).      **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều dài của miếng phụ và d là đường kính của khúc gỗ. Khi đó ta có thiết diện ngang của thanh xà có cạnh là và  .  Theo đề bài ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ. Áp dụng định lý Pitago ta có    Suy ra diện tích mỗi miếng phụ là    với  Làm tương tự như các bài trên, ta có S lớn nhất khi và chỉ khi . | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

**#Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

**🗵\_ Bài tập áp dụng rèn luyện trong các đề thi thử năm 2019. *(10-15 câu)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **3NB** | **4TH** | **2VD** | **1VDC** |

|  |
| --- |
| **Câu 1:** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gởi trong kho là 10 đôla mỗi cái trên một năm. Để đặt hàng, chi phí cố định là 20 đôla, cộng thêm 9 đôla mỗi cái. Cửa hàng nên đặt bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi năm bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất?   1. 25 ;100 **B. 25 ;100** **C. 25 ; 10** **D. 30 ;100** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  Gọi x là số tivi mỗi lần đặt hàng,  .  Khi đó số lượng tivi trung bình gởi trong kho là  . Do đó chi phí gởi hàng trong kho là  .  Số lần đặt hàng mỗi năm là  Chi phí đặt hàng mỗi năm là  Suy ra chi phí hàng tồn kho là  Ta có  ,  Suy ra  Khi đó số lần đặt hàng mỗi năm là  Vậy để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất thì cửa hàng cần đặt 25 lần mỗi năm và mỗi lần đặt 100 cái | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 2:** Có một tấm tôn hình vuông ABCD có cạnh 30cm. Người ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau (như hình vẽ) để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tính x để thể tích khối trụ lớn nhất?    **A.** x = 10cm **B.** x = 20cm **C.** x = 5cm **D.** x = -10cm |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**    Thể tích khối lăng trụ là    với  Xét hàm số    Với qui trình bấm máy như các bài trước ta có  Khi đó  Vậy x = 10cm. | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 3:** Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với vận tốc 6 hải lí/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách giữa hai tàu là nhỏ nhất.  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  Tại thời điểm t sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d.  Ta có  Suy ra .  Ta được d nhỏ nhất khi  (giờ). Khi đó  (hải lí). | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 4:** Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn bán kính a. Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất, biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức  ( là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỉ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  Gọi h là độ cao của đèn so với mặt bàn (h > 0). Các kí hiệu r, M, N, Đ, I như hình vẽ.  Ta có  và .  Suy ra cường độ sáng là .  Ta có C lớn nhất khi và chỉ khi  Khi đó . | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 5:** Một con đường được xây dựng nối hai thành phố A và B. Hai thành phố này ngăn cách bởi con sông có chiều rộng r. Người ta cần xây dựng một cây cầu bắt qua sông biết rằng A cách cong sông một khoảng a, B cách sông một khoảng b  như hình vẽ. Hãy xác định vị trí xây cầu để con đường nối hai thành phố là ngắn nhất.  B  E b  D  r sông  C x  a F  A  p  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  Chiều dài con đường nối hai thành phố là  ,    Ta suy ra được    Vậy, để chiều dài con đường nối hai thành phố là ngắn nhất thì . | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

**#Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

|  |
| --- |
| **Câu 6:**  **A.** **B.** **C.** **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.** | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 7:**  **A.** **B.** **C.** **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.** | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 8:**  **A.** **B.** **C.** **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.** | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 9:**  **A.** **B.** **C.** **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.** | **②\_Bài học kinh nghiệm** |

|  |
| --- |
| **Câu 10:**  **A.** **B.** **C.** **D.** |

**Lời giải #Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.** | **②\_Bài học kinh nghiệm** |