Câu lạc bộ Toán học

Viện Toán học Hà Nội
18 Hoàng Quốc Việt
Cầu Giấy, Hà Nội

Bài tập về nhà số 1
31/10/2010

Bài 1. *Một người vào Bưu điện lĩnh tiền người ta gửi đến. Người phát tiền đưa nhầm: số đôla thì bằng số xu ghi trong giấy, số xu thì bằng số đôla. Người lĩnh tiền không đếm lại, mà bỏ vào túi, đồng thời đánh rơi đồng 5 xu. Về đến nhà, anh ta thấy số tiền mình nhận được gấp đôi số ghi trong giấy chuyển tiền. Hỏi trong giấy ghi bao nhiêu? (1 đôla = 100 xu).*

Bài 2. *Nam và Hà xuống tầng bằng thang máy (chạy liên tục) trong siêu thị. Nam bảo: "Tớ đếm được 50 bậc", Hà bảo: "Tớ đếm được 75 bậc". Hỏi nếu thang máy đứng yên thì có bao nhiêu bậc, biết rằng Hà, Nam, thang máy đều chuyển động với tốc độ đều và tốc độ của Hà gấp 3 lần tốc độ của Nam.*

Bài 3. *Tìm các số chính phương có* 5 *chữ số mà tổng của số lập nên bởi* 2 *chữ số đầu và số lập nên bởi* 2 *chữ số cuối là một lũy thừa bậc* 3.

Bài 4. *Tìm số chính phương nhỏ nhất và số chính phương lớn nhất chứa các chữ số* 0 *đến* 9, *mỗi chữ số xuất hiện đúng một lần.*

Bài 5. *Tìm hai số nhỏ nhất có tính chất: hiệu các bình phương của chúng là một lũy thừa bậc 3; hiệu các lập phương của chúng là một lũy thừa bậc 2.*

Bài 6. *(Kvant M2184) Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tính chất sau: mỗi đường thẳng trên mặt phẳng tọa độ cắt đồ thì này với số điểm đúng bằng số điểm mà đường thẳng đó cắt đồ thị hàm số $y = x^2$. Chứng minh rằng $f(x) = x^2$.*

Bài 7. *(Kvant M2186) Nam tước Münchhause khẳng định rằng để xác định được một đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên không âm ông chỉ cần biết hai số $P(2)$ và $P(P(2))$. Liệu Nam tước có nói đúng không?*

Bài 8. *(Thi Olympic Matxcơva 2010) Cho x, y, z và p, q là các số thực thỏa mãn*

$$\begin{cases} y = x^n + px + q \\ z = y^n + py + q \\ x = z^n + pz + q \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x^2y + y^2z + z^2x \geq xy^2 + yz^2 + zx^2$ với

1. $n = 2$;
2. $n = 2010$.

Bài 9. *Chứng minh rằng phương trình $y^2 = x^3 - 6$ không có nghiệm nguyên.*

Bài 10. *Tìm số các phân tử của các tập hợp sau.*

1. *Các tập con của $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$ chứa ít nhất* 1 *số lẻ;*
2. *Các hoán vị P của $[6]$ sao cho $P(1) \neq 2$;*
3. *Có* 4 *cô gái và* 6 *chàng trai. Mỗi cô iu đúng một anh (và ngược lại, mỗi anh yêu đúng một cô). Có bao nhiêu cách có thể?*

4. *Các cách phân 10 người vào 5 nhóm, mỗi nhóm đúng 2 người;*

5. *Các hợp thành của 19 chỉ sử dụng các số 2 và 3;*

6. *Các cách sắp xếp các chữ trong từ MISSISSIPPI sao cho 4 chữ S không đứng cạnh nhau;*

7. *Số các dãy số gồm 4 số 0 và 8 số 1 sao cho không có hai số 0 đứng cạnh nhau;*

8. *Các ánh xạ từ [5] vào [5] sao cho có cùng lắm 2 số vào cùng 1 số.*

Bài 11. *Một hộp có 3 bóng xanh, 3 bóng đỏ và 4 bóng vàng. Lấy ra 8 quả, từng quả một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy như vậy (các quả cùng màu được coi là như nhau).*

Bài 12. *Một người nghĩ các cách chia 900 đồng tiền vàng ra làm 30 phần để tiêu trong 30 ngày. Sau đó anh ta lại nghĩ cách chia 900 đồng tiền ra để mỗi ngày tiêu ít hơn 30 đồng, bao nhiêu ngày cũng được. Hỏi số cách chia theo kiểu 1 nhiều hơn hay số cách chia theo kiểu 2 ?*

Bài 13. *Một ngôi nhà có một số chẵn bóng đèn được chia vào các phòng sao cho mỗi phòng có ít nhất 3 bóng. Mỗi bóng đèn được chung công tắc với đúng một bóng khác đèn khác, không nhất thiết trong cùng một phòng. Mỗi lần thay đổi trạng thái công tắc thì sẽ thay đổi trạng thái các cặp bóng đèn nối với nó. Chứng minh rằng dù trạng thái ban đầu thế nào thì ta vẫn có cách tắt hoặc bật các công tắc đề cuối cùng trong phòng nào cũng có đèn bật và đèn tắt.*

Bài 14. *Hai người chia nhau một cái bánh, người thứ nhất chia và người thứ hai chọn. Rất dễ thấy là nếu người thứ nhất cố gắng chia thành hai phần mà anh ta cho là bằng nhau, người thứ hai chọn phần anh ta cho là lớn hơn hoặc bằng phần kia thì cả hai người đều hài lòng.*

1. *Tìm một phương pháp cho ba người chia và chọn để cả ba đều hài lòng (Một người cảm thấy hài lòng nếu anh ta nghĩ mình được nhiều hơn hoặc bằng 1/3 cái bánh);*

2. *Tìm một phương pháp chia bánh cho n người mà cả n người hài lòng (Một người cảm thấy hài lòng nếu anh ta nghĩ mình được nhiều hơn hoặc bằng 1/n cái bánh).*

Bài 15. *Cho $z_1, \dots, z_n, n > 1$ là các số phức biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ gốc O. Với A là một tập con bất kỳ của $\{1, 2, \dots, n\}$, ký hiệu $z_A = \sum_{i \in A} z_i$. Giả sử 2^n véctơ $\vec{O}z_A, A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ có phương khác nhau. Với $\sigma = \{i_1, \dots, i_n\}$ là một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ ta ký hiệu $s_0(\sigma) = 0$, $s_k(\sigma) = z_{i_1} + z_{i_2} + \cdots + z_{i_k}, k = 1, \dots, n$ và P_σ là bao lồi của các điểm $s_0(\sigma), s_1(\sigma), \dots, s_n(\sigma)$. Chứng minh rằng nếu tập A có m phần tử thì trong số n! đa giác P_σ có đúng $2(m-1)!(n-m)!$ đa giác chứa 1 cạnh song song và bằng Oz_A .*