

DẠNG 12.2**Các bài toán cực trị phần 2****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0; y_M > 0; z_M > 0$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ là
- A. 10. B. 3. C. 5. D. 21.
- Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 25$ và hai điểm $A(2; 1; -3)$, $B(4; 0; -2)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua A, B , cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) . Gọi (N) là khối nón đỉnh I (tâm của mặt cầu (S)) nhận (C) làm đường tròn đáy. Thể tích của khối nón (N) đạt lớn nhất khi $(P): x + by + cz + d = 0$. Tổng $b + c + d$ bằng
- A. -9. B. 9. C. -10. D. 10.
- Câu 3:** Trong không gian Oxy , cho các điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$. Gọi N là điểm thuộc (P) sao cho $2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài ON bằng
- A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{\sqrt{38}}{4}$. C. $\sqrt{35}$. D. $\frac{\sqrt{26}}{2}$.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-13; -9; 3)$, $B(2; 0; 0)$ và $C(1; 1; -1)$. Xét các mặt phẳng (P) đi qua C sao cho A và B nằm cùng phía so với (P) . Khi $d(A, (P)) + 2d(B, (P))$ đạt giá trị lớn nhất thì (P) có dạng $ax + by + cz - 5 = 0$. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.
- Câu 5:** Suy ra $a = 2, b = 2, c = -1 \Rightarrow a + b + c = 3$. Trong không gian cho điểm $A(13; -7; -13)$, $B(1; -1; 5)$ và $C(1; 1; -3)$. Xét các mặt phẳng (P) đi qua C sao cho A và B nằm cùng phía so với (P) . Khi $d(A, (P)) + 2d(B, (P))$ đạt giá trị lớn nhất thì (P) có dạng $ax + by + cz + 3 = 0$. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 6:** Suy ra $a = 2, b = -2, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$. Trong không gian $Oxyz$, điểm $A(2; -5; -3)$, mặt phẳng $(\alpha): x - y - z + 2 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$. Biết rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm hoành độ của điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho độ dài đoạn AM lớn nhất?
- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

- Câu 7:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(3;-2;0)$; $B(-1;2;4)$. Xét trụ (T) nội tiếp mặt cầu đường kính AB và có trục nằm trên đường thẳng AB . Thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất thì chứa đường tròn đáy đi qua điểm nào dưới đây?
A. $C(0;-1;-2\sqrt{3})$. **B.** $C(0;-1;2\sqrt{3})$. **C.** $C(1;0;-2\sqrt{3})$. **D.** $C(-1;0;2\sqrt{3})$.
- Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;-1;1)$, $I(-1;0;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$. Trong các mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) , gọi (α) là mặt phẳng cách A một khoảng lớn nhất. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?
A. $Oy \subset (\alpha)$. **B.** $d(O;(\alpha)) = 2$. **C.** $(Ox,(\alpha)) = 45^\circ$. **D.** $E(-2;2;3) \in (\alpha)$.
- Câu 9:** Trong không gian với Oxyz cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-2;-1;3)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Điểm M di động trên (S) . Gọi α, β lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = 2MA^2 - MB^2 + MC^2$. Tính: $\alpha^2 - \beta^2$?
A. $396\sqrt{13}$. **B.** $648\sqrt{13}$. **C.** $792\sqrt{13}$. **D.** $-648\sqrt{13}$.
- Câu 10:** Trong không gian hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-4=0$ và ba điểm $A(3;3;-2)$, $B(0;-3;4)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho $MA+MB=\sqrt{91}$. Biết độ dài đoạn thẳng CM lớn nhất bằng $a+\sqrt{\frac{b}{c}}$; với a, b, c là những số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị $(a+b+c)$ bằng
A. 299. **B.** 178. **C.** 181. **D.** 192.
- Câu 11:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 48$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(0;0;-4)$ và $N(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng
A. $\frac{128\pi}{3}$. **B.** $\frac{88\pi}{3}$. **C.** 39π . **D.** $\frac{215\pi}{3}$.
- Câu 12:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $S(7;8;6)$ và $P(-5;-4;0)$. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SP . Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng $(ABCD)$ có phương trình $2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng
A. -5. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 3.
- Câu 13:** Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 35 = 0$ và hai mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$, $(Q): x+2y-2z-1=0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với mặt phẳng (Q) . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng
A. $9+5\sqrt{3}$. **B.** $3+7\sqrt{3}$. **C.** $3+5\sqrt{3}$. **D.** $9+7\sqrt{3}$.
- Câu 14:** Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng

cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng $2x + my + nz - p = 0$. Khi đó, $T = 2m + n + p$ bằng

- A. $T = 10$. B. $T = 8$. C. $T = 7$. D. $T = 9$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0, y_M > 0, z_M > 0$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ là

- A. 10. B. 3. C. 5. D. 21.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) đường kính AB , với điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối trụ (T) có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S) và có trục nằm trên đường thẳng AB . Khi (T) có thể tích lớn nhất thì hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đáy của (T) có phương trình dạng $2x + by + cz + d_1 = 0$ và $2x + by + cz + d_2 = 0$ ($d_1 < d_2$). Có bao nhiêu số nguyên thuộc khoảng $(d_1; d_2)$?

- A. 11. B. 17. C. 15. D. 13.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 25$ và hai điểm $A(2;1;-3), B(4;0;-2)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) . Gọi (N) là khối nón đỉnh I (tâm mặt cầu (S)) nhận (C) là đường tròn đáy. Thể tích của khối nón (N) lớn nhất khi $(P): x + by + cz + d = 0$. Tổng $b + c + d$ bằng

- A. -9. B. 9. C. -10. D. 10.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;8;2), B(9;-7;23)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khi đó tổng $b + c + d$ có giá trị bằng

- A. $b + c + d = 2$. B. $b + c + d = 4$. C. $b + c + d = 3$. D. $b + c + d = 1$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 25$ và các điểm $A(1;2;3); B(1;-2;1)$. Gọi $(P): ax + by + cz - 1 = 0$ là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A; B$ và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Tổng $T = a + b + c$ là

- A. -2. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;4), B(0;4;3), C(7;0;-1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$. Gọi điểm $M \in (Oxy)$ và điểm $N \in (S)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MN + \frac{1}{3}|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ bằng:

- A. $\sqrt{19}$. B. $\sqrt{35} + 1$. C. $\frac{\sqrt{46} + \sqrt{11}}{2} - 1$. D. $\sqrt{35} - 1$.

- Câu 21:** Vậy $\min T = \sqrt{35} - 1$. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 4 = 0$ và hai điểm $A(-2; 2; 4), B(2; 6; 6)$. Gọi M là điểm di động trên (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M . Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng OM . Khi đó giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng
- A. $4\sqrt{52}$. B. 104. C. 122. D. $4\sqrt{61}$.
- Câu 22:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 75$ và mặt phẳng $(P): (m^2 + 2m)x - (m^2 + 4m - 1)y + 2(3m - 1)z + m^2 + 1 = 0$. A là điểm thuộc mặt cầu (S) . Khi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất thì khối nón có đỉnh là A , đường tròn đáy là giao tuyến của (P) và (S) có thể tích bằng bao nhiêu?
- A. $128\pi\sqrt{3}$. B. $75\pi\sqrt{3}$. C. $32\pi\sqrt{3}$. D. $64\pi\sqrt{3}$.
- Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON = 2020$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng đi qua $D(0; 202; 10)$ cắt (S) theo một dây cung EF , khi đó EF có độ dài ngắn nhất là.
- A. $4\sqrt{10226}$. B. $2\sqrt{10226}$. C. $3\sqrt{10226}$. D. $5\sqrt{10226}$.
- Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2; 1; 3), B(6; 5; 5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là đường tròn tâm H (giao của (S) và (P)) có thể tích lớn nhất. Biết $(P): 2x + by + cz + d = 0$, tính $S = b + c + d$.
- A. $S = -18$. B. $S = -11$. C. $S = -24$. D. $S = -14$.
- Câu 25:** (P) qua H , có $\vec{n}_P = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow (P): 2x + 2y + z - 21 = 0 \Rightarrow S = 2 + 1 - 21 = -18$. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1; 0; 2), B(-1; 2; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.
- A. 3. B. -3. C. 0. D. -2.
- Câu 26:** Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(0; 8; 2), B(9; -7; 23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b + c + d$ khi đó là
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 27:** Vậy $P_{\max} = 18\sqrt{2}$ khi $b + c + d = 3$. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2; 1; 3), B(6; 5; 5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H sao

cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{R}$. Tính $S = b + c + d$.

A. $S = 24$.

B. $S = -18$.

C. $S = -12$.

D. $S = 18$.

Câu 28: ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \\ d = -21 \end{cases} \Rightarrow b + c + d = -18$. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$

có $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$; $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm phẳng B', C', D' sao cho $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

B. $16x + 40y + 44z - 39 = 0$.

C. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$.

D. $16x - 40y - 44z - 39 = 0$.

Câu 29: Phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ qua $B'(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4})$ có vpt $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (4; 10; -11)$ là $16x + 40y - 44z + 39 = 0$. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(4; 4; -3)$, $C(2; 3; -2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{1-y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi $(P): ax + by - 6z + c = 0$ là mặt phẳng chứa d sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (P) và biểu thức $h = d_1 + 2d_2 + 3d_3$ đạt giá trị lớn nhất, với d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (P) . Tính tổng $T = a + b + 2c$?

A. $T = 6$.

B. $T = 8$.

C. $T = 1$.

D. $T = 12$.

Câu 30: ---HẾT--- Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha): x + y = 0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm hoành độ của điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(6; -10; 3)$ lớn nhất.

A. -1 .

B. -4 .

C. 2 .

D. -5 .

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 4 = 0$ và hai điểm $A(-2; 2; 4)$, $B(2; 6; 6)$. Gọi M là điểm di động trên (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M . Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của độ dài OM . Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng

A. $4\sqrt{61}$.

B. 104 .

C. 122 .

D. $4\sqrt{52}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2; 1; 1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2; 1; 5)$ có bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1) , (S_2) . Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P) . Giá trị $M + m$ bằng

A. $\sqrt{15}$.

B. $8\sqrt{3}$.

C. 9 .

D. 8 .

Câu 33: BỎ

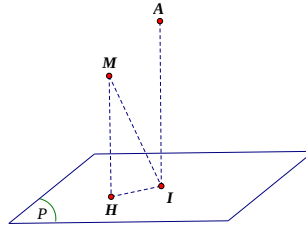
- Câu 34:** $b+c+d=\frac{47}{3}$. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón N có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi N có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của N có dạng $2x+by+cz+d=0$. Giá trị của $b+c+d$ bằng
- A. -21 . B. -12 . C. -18 . D. -15 .
- Câu 35:** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt phẳng (α) đi qua tâm I của mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (OAB) có dạng $mx+ny+pz+q=0$ (với $m,n,p,q \in \mathbb{Z}; \frac{q}{p}$ là phân số tối giản). Giá trị $T=m+n+p+q$ bằng
- A. 3 . B. 9 . C. 5 . D. -5 .
- Câu 36:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;1)$ và $B(2;1;1)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của (N) cách điểm $E(1;1;1)$ một khoảng là bao nhiêu?
- A. $d=\frac{1}{2}$. B. $d=2$. C. $d=\frac{1}{3}$. D. $d=3$
- Câu 37:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;0), B(0;0;-1)$ và mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. Mặt phẳng $(P): x+ay-bz+c=0$ ($a>0$) đi qua A, B cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho hình nón (N) đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Khi đó $2a+b-3c$ bằng
- A. $-4+3\sqrt{2}$. B. 4 . C. 7 . D. $4+3\sqrt{2}$.
- Câu 38:** Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+8y-12z+27=0$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+17=0$. Một khối trụ (N) có một đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng (P) và đường tròn đáy còn lại nằm trên mặt cầu. Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy đi qua điểm nào sau đây?
- A. $C(0;1;10)$. B. $D(0;0;8)$. C. $E(8;3;0)$. D. $F(2;0;8)$.
- Câu 39:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1), B(3;-2;0), C(1;2;-5)$. Mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cz-24=0$ qua C và $d(A,(\alpha))+2d(B,(\alpha))$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của $P=a+4b^2+c$ là
- A. $P=21$. B. $P=23$. C. $P=24$. D. $P=20$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0; y_M > 0; z_M > 0$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ là
- A. 10. B. 3. C. 5. D. 21.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3), r = 4$. Ta có $d(I, (P)) = 0 \Rightarrow I \in (P)$.

Qua I dựng đường thẳng Δ vuông góc với (P) . Gọi A là một giao điểm của (S) và đường thẳng Δ ta có $IA = r$.

Lấy điểm $M \in (S)$. Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) ta có $d = d(M, (P)) = MH \leq MI = r \Rightarrow d_{\max} = r$ khi $H \equiv I$ điều này xảy ra khi $M \equiv A$.

Phương trình của đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow A(1 + 2t; 2 - t; 3 + 2t).$$

Mà $M \equiv A$ nên suy ra $M(1 + 2t; 2 - t; 3 + 2t)$.

Mà $M \in (S)$ nên ta có phương trình $(2t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases}$.

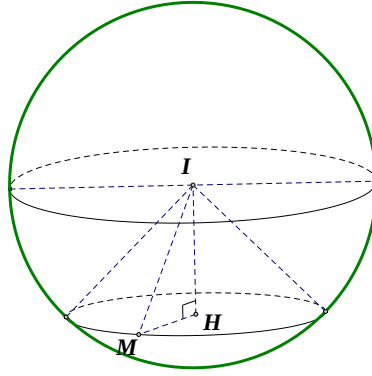
Với $t = -\frac{4}{3}$ suy ra điểm M có tọa độ không thỏa mãn $x_M > 0; y_M > 0; z_M > 0$.

Với $t = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{11}{3}; \frac{2}{3}; \frac{17}{3}\right)$ thỏa mãn $x_M > 0; y_M > 0; z_M > 0$.

Vậy $B = x_M + y_M + z_M = 10$.

- Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 25$ và hai điểm $A(2; 1; -3), B(4; 0; -2)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua A, B , cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) . Gọi (N) là khối nón đỉnh I (tâm của mặt cầu (S)) nhận (C) làm đường tròn đáy. Thể tích của khối nón (N) đạt lớn nhất khi $(P): x + by + cz + d = 0$. Tổng $b + c + d$ bằng
- A. -9. B. 9. C. -10. D. 10.

Chọn C



mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -6)$, bán kính $R = 5$.

Do mặt phẳng (P) đi qua A, B nên ta có hệ $\begin{cases} 2+b-3c+d=0 \\ 4-2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c-2=0 \\ 2c=d+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=d+8 \\ 2c=d+4 \end{cases}$

Gọi V là thể tích khối nón. $IH = d(I, (P))$

$$V = \frac{1}{3} IH \cdot \pi (R^2 - (IH)^2).$$

Gọi M là hình chiếu của I lên AB thì $IH \leq IM = d(I, AB) = \frac{|\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.

$$\overrightarrow{IA} = (1; -1; 3), \overrightarrow{IB} = (3; -2; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}] = (2; 5; 1) \Rightarrow \|\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\| = \sqrt{30}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } d(I, AB) = \frac{\|\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\|}{|\overrightarrow{AB}|} = \sqrt{5}$$

$$\text{Đặt } IH = t \left(0 < t \leq \sqrt{5} \right).$$

$$\text{Xét } h(t) = t(25 - t^2).$$

$$h'(t) = 25 - t^2 - 2t^2 = 25 - 3t^2 > 0 \quad \forall x \in (0; \sqrt{5}].$$

V lớn nhất khi $h(t)$ lớn nhất khi $t = \sqrt{5}$.

$$IH = \frac{|1+2b-6c+d|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow \frac{|1+2b-6c+d|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2|1+d+8-3(d+4)+d|}{\sqrt{4+(2b)^2+(2c)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2|-d-3|}{\sqrt{4+(d+8)^2+(d+4)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 16d + 64 = 0 \Leftrightarrow d = -8 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow b + c + d = -10.$$

Câu 3: Trong không gian Oxy , cho các điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$. Gọi N là điểm thuộc (P) sao cho $2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài ON bằng

A. $\sqrt{5}$.

B. $\frac{\sqrt{38}}{4}$.

C. $\sqrt{35}$.

D. $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

Với M, J lần lượt là trung điểm của BC, AM . Khi đó:

$$2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + 2\vec{IM} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IJ} = \vec{0} \Leftrightarrow I \equiv J.$$

Vậy I là trung điểm của AM , với M là trung điểm của BC .

$$\text{Từ giả thiết } A(1;1;1), B(0;1;2), C(-2;0;1) \Rightarrow M\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow I\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

$$\text{Do: } 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2\vec{NA}^2 + \vec{NB}^2 + \vec{NC}^2 = 2(\vec{IA} - \vec{IN})^2 + (\vec{IB} - \vec{IN})^2 + (\vec{IC} - \vec{IN})^2$$

$$2IA^2 + IB^2 + IC^2 + 4IN^2 - 2(2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC})\vec{IN} = 2IA^2 + IB^2 + IC^2 + 4IN^2.$$

Do: $A(1;1;1), B(0;1;2), C(-2;0;1), I\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ cố định nên $2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi chỉ khi IN^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) .

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ qua } I \text{ và vuông góc với } (P) \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4} - t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = \frac{5}{4} + t \end{cases}$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ cắt } (P) \text{ tại } N(x; y; z) \text{ có tọa độ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4} - t \\ z = \frac{5}{4} + t \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ suy ra: } N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow ON = \frac{\sqrt{38}}{4}.$$

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-13; -9; 3), B(2; 0; 0)$ và $C(1; 1; -1)$. Xét các mặt phẳng (P) đi qua C sao cho A và B nằm cùng phía so với (P) . Khi $d(A, (P)) + 2d(B, (P))$ đạt giá trị lớn nhất thì (P) có dạng $ax + by + cz - 5 = 0$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 3.

Lời giải**Chọn D**

Gọi $\vec{n}(a'; b'; c')$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$$\text{Do } (P) \text{ đi qua } C(1; 1; -1) \text{ nên } (P): a'(x-1) + b'(y-1) + c'(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a'x + b'y + c'z - a' - b' + c' = 0.$$

Do $A(-13; -9; 3), B(2; 0; 0)$ nằm cùng phía so với (P) nên ta có

$$(-13a' - 9b' + 3c' - a' - b' + c')(2a' - a' - b' + c') > 0$$

$$\Leftrightarrow (-14a' - 10b' + 4c')(a' - b' + c') > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= d(A, (P)) + 2d(B, (P)) = \frac{|-14a' - 10b' + 4c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} + 2 \frac{|a' - b' + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \\ &= \frac{|(-14a' - 10b' + 4c') + (2a' - 2b' + 2c')|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \frac{|-12a' - 12b' + 6c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(-12a' - 12b' + 6c')^2 \leq (12^2 + 12^2 + 6^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)$$

$$\Rightarrow |-12a' - 12b' + 6c'| \leq \sqrt{324} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}.$$

$$\text{Suy ra } T \leq \sqrt{324} = 18.$$

$$\text{Dấu bằng có khi } \frac{a'}{-12} = \frac{b'}{-12} = \frac{c'}{6} \Leftrightarrow a' = b' = -2c'.$$

Chọn $c' = -1$ ta được $a' = 2, b' = 2$. Khi đó $(P): 2x + 2y - z - 5 = 0$.

Câu 5: Suy ra $a = 2, b = 2, c = -1 \Rightarrow a + b + c = 3$. Trong không gian cho điểm $A(13; -7; -13), B(1; -1; 5)$ và $C(1; 1; -3)$. Xét các mặt phẳng (P) đi qua C sao cho A và B nằm cùng phía so với (P) . Khi $d(A, (P)) + 2d(B, (P))$ đạt giá trị lớn nhất thì (P) có dạng $ax + by + cz + 3 = 0$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $\vec{n}(a'; b'; c')$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Do (P) đi qua $C(1; 1; -3)$ nên $(P): a'(x - 1) + b'(y - 1) + c'(z + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow a'x + b'y + c'z - a' - b' + 3c' = 0.$$

Do $A(13; -7; -13), B(1; -1; 5)$ nằm cùng phía so với (P) nên ta có

$$(13a' - 7b' - 13c' - a' - b' + 3c')(a' - b' + 5c' - a' - b' + 3c') > 0$$

$$\Leftrightarrow (12a' - 8b' - 10c')(-2b' + 8c') > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= d(A, (P)) + 2d(B, (P)) = \frac{|12a' - 8b' - 10c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} + 2 \frac{|-2b' + 8c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \\ &= \frac{|(12a' - 8b' - 10c') + (-4b' + 16c')|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \frac{|12a' - 12b' + 6c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(12a' - 12b' + 6c')^2 \leq (12^2 + 12^2 + 6^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) \Rightarrow |12a' - 12b' + 6c'| \leq \sqrt{324} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$$

.

$$\text{Suy ra } T \leq \sqrt{324} = 18.$$

$$\text{Dấu bằng có khi } \frac{a'}{12} = \frac{b'}{-12} = \frac{c'}{6} \Leftrightarrow a' = -b' = 2c'.$$

Chọn $c' = 1$ ta được $a' = 2, b' = -2$. Khi đó $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$.

Câu 6: Suy ra $a = 2, b = -2, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$. Trong không gian $Oxyz$, điểm $A(2; -5; -3)$, mặt phẳng $(\alpha): x - y - z + 2 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 8$. Biết rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm hoành độ của điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho độ dài đoạn AM lớn nhất?

A. 1.

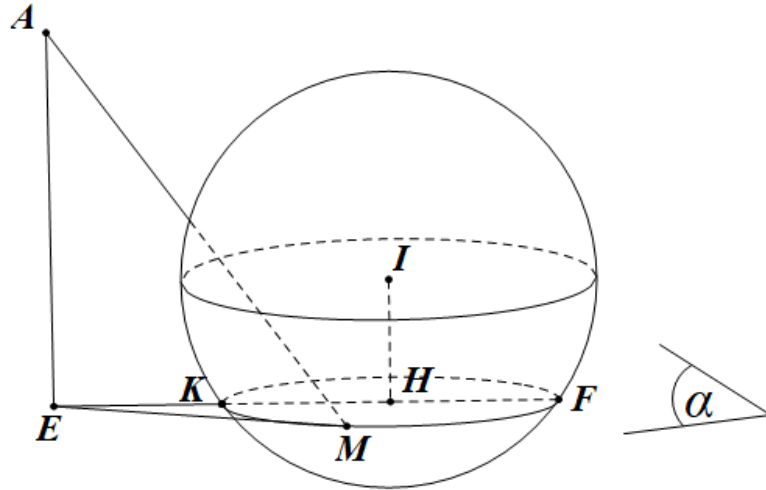
B. 2.

C. -2.

D. -1.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$ bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

$\overline{AI} = (0; 4; 4) \Rightarrow IA = 4\sqrt{2} > R$, do đó A nằm ngoài (S) .

Ta có $d(I; (\alpha)) = \frac{|2+1-1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Gọi H là tâm của đường tròn (C) .

Phương trình đường thẳng $IH: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$, tọa độ $H(2+t; -1-t; 1-t)$.

$H \in (\alpha)$ nên $2+t+1+t-1+t+2=0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{3}$.

Tọa độ $H\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$, bán kính đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (\alpha))} = \sqrt{8 - \frac{16}{3}} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Gọi E là hình chiếu của A trên (α) , phương trình đường thẳng $AE: \frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+3}{-1}$.

Tọa độ điểm $E(2+a; -5-a; -3-a)$, $E \in (\alpha)$ nên $2+a+5+a+3+a+2=0 \Leftrightarrow a = -4$.

Do đó $E(-2; -1; 1)$, $\overline{EH} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow HE = \frac{4\sqrt{6}}{3} = 2r$.

Nhận xét $HE > r$ nên E nằm ngoài (C) .

Ta có $AM = \sqrt{AE^2 + EM^2}$, AM lớn nhất khi và chỉ khi EM lớn nhất.

Nhận xét $EM \leq EF$, do đó AM lớn nhất là AF , đạt được khi $M \equiv F$.

Gọi K là trung điểm HE , ta có $K\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$, khi đó $M(2; 1; 3)$.

Hoành độ điểm M là 2.

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(3; -2; 0)$; $B(-1; 2; 4)$. Xét trụ (T) nội tiếp mặt cầu đường kính AB và có trục nằm trên đường thẳng AB . Thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất thì chứa đường tròn đáy đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $C(0; -1; -2\sqrt{3})$. B. $C(0; -1; 2\sqrt{3})$. C. $C(1; 0; -2\sqrt{3})$. D. $C(-1; 0; 2\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overline{AB}(-4; 4; 4)$. Bán kính mặt cầu $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2} = 2\sqrt{3}$

Gọi $O(1; 0; 2)$ là tâm của mặt cầu

Gọi h là chiều cao của trụ, r là bán kính đáy của trụ

Ta có: $V_T = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = f(h)$

Xét hàm số $f(h)$ có: $f'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: $V_{T(\max)}$ khi $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3} = 4$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đáy của trụ, suy ra mp (P) nhận $\overline{AB}(-4; 4; 4)$ làm VTPT và cách O một khoảng bằng 2

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng là: $-4x + 4y + 4z + D = 0$

$$d((P), O) = \frac{|-4 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + D|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|4 + D|}{4\sqrt{3}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -4 - 8\sqrt{3} \\ D = -4 + 8\sqrt{3} \end{cases}$$

Do đó: $(P_1): -4x + 4y + 4z - 4 - 8\sqrt{3} = 0$

$(P_2): -4x + 4y + 4z - 4 + 8\sqrt{3} = 0$

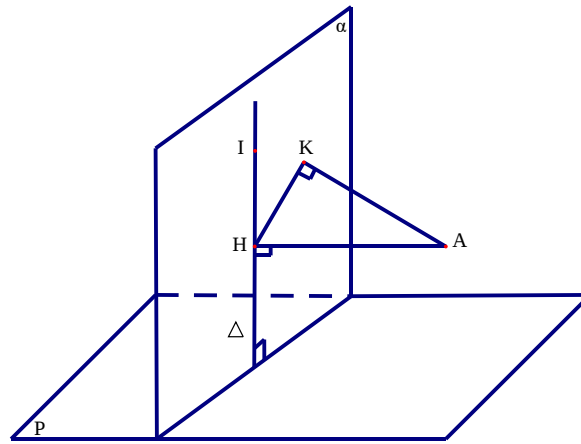
Thay các đáp án, ta thấy đáp án D nằm trên (P_1) .

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2; -1; 1)$, $I(-1; 0; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$. Trong các mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) , gọi (α) là mặt phẳng cách A một khoảng lớn nhất. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. $Oy \subset (\alpha)$. B. $d(O; (\alpha)) = 2$. C. $(Ox, (\alpha)) = 45^\circ$. D. $E(-2; 2; 3) \in (\alpha)$.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -2; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Khi đó đường thẳng Δ đi qua $I(-1; 0; 3)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_P = (1; -2; 1)$ nên có

phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ , tọa độ điểm $H\left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{7}{2}\right)$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) thì mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ .

Gọi K là hình chiếu của A lên mặt phẳng (α) .

Ta có $d(A, (\alpha)) = AK \leq AH$ (do ΔAHK vuông tại K)

Từ đó $d(A, (\alpha))_{\max} = AH$ khi H trùng K . Suy ra (α) là mặt phẳng đi qua $I(-1; 0; 3)$ và có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{5}{2}; 0; \frac{5}{2}\right)$ nên có phương trình: $x - z + 4 = 0$.

Khi đó, $(Ox, (\alpha)) = 45^\circ$.

Câu 9: Trong không gian với $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; -2; 1), C(-2; -1; 3)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Điểm M di động trên (S) . Gọi α, β lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = 2MA^2 - MB^2 + MC^2$. Tính: $\alpha^2 - \beta^2$?

- A. $396\sqrt{13}$. B. $648\sqrt{13}$. C. $792\sqrt{13}$. D. $-648\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $J(1; 2; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Giả sử điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có:

$$\begin{cases} 2(1-x_0) - (-x_0) + (-2-x_0) = 0 \\ 2(-y_0) - (-2-y_0) + (-1-y_0) = 0 \\ 2(-z_0) - (1-z_0) + (3-z_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{1}{2} \\ z_0 = 1 \end{cases} \text{ hay } I\left(0; \frac{1}{2}; 1\right).$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} T &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Mặt khác: $IJ = \frac{\sqrt{13}}{2} < 3 = R$ hay điểm I nằm bên trong mặt cầu.

Vậy:

$$MI_{\max} = R + IJ = 3 + \frac{\sqrt{13}}{2}; MI_{\min} = R - IJ = 3 - \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\left(3 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{25}{4} + \frac{41}{4} = 33 + 6\sqrt{13}. \\ \beta &= 2\left(3 - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{25}{4} + \frac{41}{4} = 33 - 6\sqrt{13}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \alpha^2 - \beta^2 = 792\sqrt{13}.$$

Câu 10: Trong không gian hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 4 = 0$ và ba điểm $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(4; -1; -1)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho

$MA + MB = \sqrt{91}$. Biết độ dài đoạn thẳng CM lớn nhất bằng $a + \sqrt{\frac{b}{c}}$; với a, b, c là những số

nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị $(a + b + c)$ bằng

A. 299.

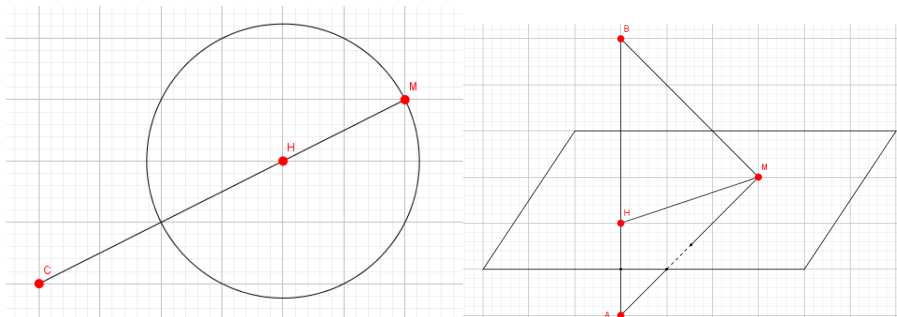
B. 178.

C. 181.

D. 192.

Lời giải

Chọn A



- Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -6; 6)$, $\overrightarrow{n_p} = (1; 2; -2)$ là VTPT của (P) .
- Vì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_p}$ nên đường thẳng AB vuông góc với (P) .
- Ta thấy hai điểm A, B nằm về hai phía so với (P) .

- Một vector chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (1; 2; -2)$.
- Phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$
- Gọi $H(x; y; z)$ là giao điểm của AB với (P) (AB vuông góc với (P) tại H).
- Tọa độ H là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - 2t \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$
- Giải hệ trên ta được $t = -1; x = 2, y = 1, z = 0$. Vậy $H = (2; 1; 0)$.
- Đặt $HM = x, (x \geq 0)$. Vì $AB \perp (P)$ tại H nên hai tam giác MHA, MHB vuông tại H . Do đó ta có: $MA = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{9 + x^2}$; $MB = \sqrt{BH^2 + HM^2} = \sqrt{36 + x^2}$.
- Theo giả thiết ta có $\sqrt{9 + x^2} + \sqrt{36 + x^2} = \sqrt{91}$ (1). Xem x là ẩn số, ta cần giải phương trình (1).

Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{36 + x^2} &= \sqrt{91} \\ \Leftrightarrow 9 - 36 &= \sqrt{91}(\sqrt{9 + x^2} - \sqrt{36 + x^2}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{9 + x^2} - \sqrt{36 + x^2} &= -\frac{27}{\sqrt{91}} \end{aligned}$$

Do đó, có hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{36 + x^2} = \sqrt{91} \\ \sqrt{9 + x^2} - \sqrt{36 + x^2} = -\frac{27}{\sqrt{91}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9 + x^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{91} - \frac{27}{\sqrt{91}}\right) \\ \sqrt{36 + x^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{91} + \frac{27}{\sqrt{91}}\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9 + x^2} = \frac{32}{\sqrt{91}} \\ \sqrt{36 + x^2} = \frac{59}{\sqrt{91}} \end{cases} &\Leftrightarrow x^2 = \frac{205}{91} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{205}{91}}. \end{aligned}$$

- Vậy ta luôn có $HM = \sqrt{\frac{205}{91}}$.
- Tọa độ điểm C thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên $C \in (P)$.
- Vì H cố định; $H, M \in (P)$ và $HM = \sqrt{\frac{205}{91}}$ nên M thuộc đường tròn (T) có tâm là H ,

bán kính $R = \sqrt{\frac{205}{91}}$ (Đường tròn (T) nằm trong (P)).

- Vì $CH = 3 > R$ nên điểm C nằm ngoài đường tròn (T) . Do đó CM đạt giá trị lớn nhất là

$$CM_{\max} = CH + R = 3 + \sqrt{\frac{205}{91}} = a + \sqrt{\frac{b}{c}}.$$

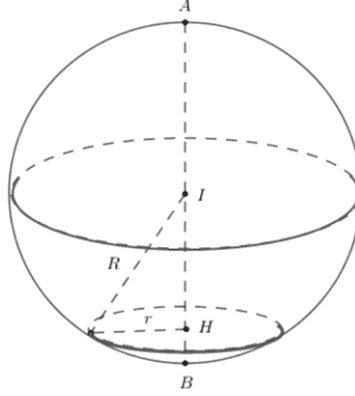
- Kết luận: $a = 3; b = 205; c = 91$. Do đó $a + b + c = 299$.

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 48$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M(0;0;-4) và N(2;0;0) và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{128\pi}{3}$. B. $\frac{88\pi}{3}$. C. 39π . D. $\frac{215\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm I(1;-2;3) và bán kính $R = 4\sqrt{3}$.

Gọi (P): $ax + by + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là mặt phẳng đi qua M(0;0;-4) và N(2;0;0).

$$\Rightarrow \begin{cases} -4c + d = 0 \\ 2a + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4c \\ a = -\frac{d}{2} = -2c \end{cases} \Rightarrow (P): -2cx + by + cz + 4c = 0.$$

Khi đó đặt

$$\begin{aligned} x = d(I, (P)) &= \frac{|-2c - 2b + 3c + 4c|}{\sqrt{(-2c)^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2b - 5c|}{\sqrt{b^2 + 5c^2}} \\ &= \frac{|2b - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}c|}{\sqrt{b^2 + 5c^2}} \leq \frac{\sqrt{(2^2 + (-\sqrt{5})^2)(b^2 + 5c^2)}}{\sqrt{b^2 + 5c^2}} = 3 \text{ (Theo BĐT Bunhiacopxki)} \Rightarrow 0 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{b}{2} = \frac{c\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} \Leftrightarrow b = -2c$.

Bán kính đường tròn (C) là: $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{48 - x^2}$.

Thể tích khối nón (N) là $V = \frac{\pi R^2 x}{3} = \frac{\pi x(48 - x^2)}{3}$.

Đặt $f(x) = \frac{\pi x(48 - x^2)}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi(48 - 3x^2)}{3}$.

Do $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in [0; 3] \Rightarrow f(x) = \frac{\pi x(48 - x^2)}{3} \leq f(3) = 39\pi$.

- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $S(7;8;6)$ và $P(-5;-4;0)$. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SP . Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng $(ABCD)$ có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị $b + c + d$ bằng
- A. -5. B. 5. C. -3. D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overline{PS} = (12;12;6) \Rightarrow SP = 18 \Rightarrow R = 9$.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$.

Theo công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp ta có:

$$R = \frac{SA^2}{2SI} = \frac{SI^2 + IA^2}{2SI} = 9.$$

Khi đó, thể tích khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot \frac{AC^2}{2} = \frac{2}{3} SI \cdot IA^2 = \frac{2}{3} SI \cdot (18SI - SI^2) = \frac{8}{3} \frac{SI}{2} \cdot \frac{SI}{2} (18 - SI)$$

Áp dụng BĐT cosi ta có:

$$V = \frac{8}{3} \cdot \frac{SI}{2} \cdot \frac{SI}{2} (18 - SI) \leq \frac{8}{3} \left(\frac{\frac{SI}{2} + \frac{SI}{2} + 18 - SI}{3} \right)^3 = 576.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{SI}{2} = 18 - SI \Leftrightarrow SI = 12$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều $SP \perp (ABCD) \Rightarrow (ABCD)$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2;2;1)$.

Vậy phương trình $(ABCD)$ là: $2x + 2y + z + d = 0$.

Vì $SI = 12$ nên $d(S; (ABCD)) = \frac{|14 + 16 + 6 + d|}{3} = 12 \Leftrightarrow d = 0$.

Vậy $b + c + d = 2 + 1 + 0 = 3$.

- Câu 13:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 35 = 0$ và hai mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z - 1 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với mặt phẳng (Q) . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng
- A. $9 + 5\sqrt{3}$. B. $3 + 7\sqrt{3}$. C. $3 + 5\sqrt{3}$. D. $9 + 7\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, $R = 7$

Viết đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (Q)

$$\Rightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Ta có $N = (d) \cap (P) \Rightarrow N(4;4;-3)$.

$$\text{Lại có } M = (d) \cap (S) \Rightarrow t = \pm \frac{7}{3} \Rightarrow M_1\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right), M_2\left(-\frac{4}{3}; -\frac{20}{3}; \frac{23}{3}\right)$$

Ta có $M_1N = 2$ và $M_2N = 16$

- Câu 14:** Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A , B , C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A , B , C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng $2x + my + nz - p = 0$. Khi đó, $T = 2m + n + p$ bằng
- A. $T = 10$. B. $T = 8$. C. $T = 7$. D. $T = 9$.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow G(2;1;2)$.

Tổng khoảng cách từ các điểm A , B , C đến mặt phẳng α là

$$d = d(A, (\alpha)) + d(B, (\alpha)) + d(C, (\alpha)) = 3d(G, (\alpha)) \leq 3.GD.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow GD \perp (\alpha)$.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (\alpha)$ đi qua $D(4;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{GD} = (2;1;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến

$$\Rightarrow \text{Phương trình } (\alpha) \text{ là } 2(x-4) + 1(y-2) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow m = 1; n = -1; p = 9.$$

$$\text{Vậy } T = 2.1 + (-1) + 9 = 10.$$

- Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0$, $y_M > 0$, $z_M > 0$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ là
- A. 10. B. 3. C. 5. D. 21.

Lời giải

Chọn A

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm $I(1;2;3)$ của mặt cầu (S) và vuông góc với $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$.

$$\text{Khi đó đường thẳng } d \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}.$$

Gọi E và F lần lượt là giao điểm của d và mặt cầu (S) , khi đó ta có phương trình:

$$(1+2t-1)^2 + (2-t-2)^2 + (3+2t-3)^2 = 16 \Leftrightarrow 9t^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{11}{3}; \frac{2}{3}; \frac{17}{3}\right) \\ B\left(-\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{M \in (S)} d(M, (P)) = \max\{d(E, (P)); d(F, (P))\} = \max\{d(E, (P)); d(F, (P))\}.$$

$$\text{Ta có: } d(E, (P)) = \frac{\left| 2 \cdot \frac{11}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{17}{3} - 6 \right|}{3} = 4; \quad d(F, (P)) = \frac{\left| 2 \cdot \frac{-5}{3} - 1 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} - 6 \right|}{3} = 4.$$

Vậy $\max_{M \in (S)} d(M, (P)) = 4 \Rightarrow M \equiv E$ hoặc $M \equiv F$ (mp(P) là mặt phẳng trung trực của EF).

Do $x_M > 0, y_M > 0, z_M > 0$ nên $M \equiv E \Rightarrow B = x_M + y_M + z_M = 10$.

Câu 16: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) đường kính AB, với điểm A(2;1;3) và B(6;5;5). Xét khối trụ (T) có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S) và có trục nằm trên đường thẳng AB. Khi (T) có thể tích lớn nhất thì hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đáy của (T) có phương trình dạng $2x + by + cz + d_1 = 0$ và $2x + by + cz + d_2 = 0$ ($d_1 < d_2$). Có bao nhiêu số nguyên thuộc khoảng $(d_1; d_2)$?

A. 11.

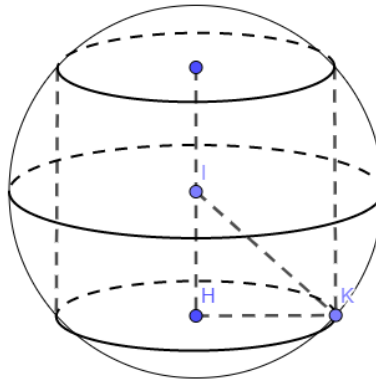
B. 17.

C. 15.

D. 13.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu đường kính AB có tâm I(4;3;4) và bán kính bằng $R = 3$.

Gọi x là bán kính đáy của (T) ($0 < x < 3$), khi đó chiều cao của khối trụ (T) là: $h = 2\sqrt{9 - x^2}$

Thể tích của khối trụ (T):

$$V = 2\pi x^2 \sqrt{9 - x^2} = 4\pi \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (9 - x^2)} \leq 4\pi \sqrt{\left(\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + (9 - x^2)}{3} \right)^3} = 12\pi\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow$ Thể tích lớn nhất của (T): $V_{\max} = 12\pi\sqrt{3}$ khi $\frac{x^2}{2} = 9 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$.

Gọi mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của khối trụ (T).

Vector pháp tuyến của (P): $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB} = (4; 4; 2) = 2(2; 2; 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2x + 2y + z + d = 0$

Khoảng cách từ tâm I(4;3;4) đến (P) bằng IH:

$$IH = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -18 + 3\sqrt{3} \\ d = -18 - 3\sqrt{3} \end{cases}.$$

Hai mặt phẳng có dạng $(P_1): 2x + 2y + z + 3\sqrt{3} - 18 = 0$ và $(P_2): 2x + 2y + z - 3\sqrt{3} - 18 = 0$

Vậy có 11 giá trị nguyên thuộc khoảng $(-18-3\sqrt{3}; -18+3\sqrt{3})$.

- Câu 17:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 25$ và hai điểm $A(2;1;-3), B(4;0;-2)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) . Gọi (N) là khối nón đỉnh I (**tâm mặt cầu (S)**) nhận (C) là đường tròn đáy. Thể tích của khối nón (N) lớn nhất khi $(P): x+by+cz+d=0$. Tổng $b+c+d$ bằng
- A. -9. B. 9. C. -10. D. 10.

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $I(1;2;-6)$ và bán kính $R=5$.

Ta có $d(I, AB) = \sqrt{5}$.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của (N) .

Ta có: $r^2 = 25 - h^2$ và $V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi hr^2 = \frac{1}{3}\pi h(25 - h^2)$ với $h \leq \sqrt{5}$.

Bằng cách khảo sát hàm số ta thấy $V_{(N)}$ lớn nhất khi $h = \sqrt{5}$.

Vì (P) đi qua A, B nên $\begin{cases} 2+b-3c+d=0 \\ 4-2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c+2 \\ d=2c-4 \end{cases}$.

Do đó: $(P): x+(c+2)y+cz+2c-4=0$

Ta có: $d(I; (P)) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-2c|}{\sqrt{1+(c+2)^2+c^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow c = -2$.

Do đó: $b=0, d=-8$

Vậy $b+c+d = -10$

- Câu 18:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(0;8;2), B(9;-7;23)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x+by+cz+d=0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khi đó tổng $b+c+d$ có giá trị bằng
- A. $b+c+d=2$. B. $b+c+d=4$. C. $b+c+d=3$. D. $b+c+d=1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $A \in (P)$ nên $8b+2c+d=0 \Leftrightarrow d=-8b-2c \Rightarrow (P): x+by+cz-8b-2c=0$

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5-3b+7c+d|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-11b+5c+5|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Lại có } d(B; (P)) = \frac{|9-15b+21c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = \frac{|(-11b+5c+5)+4(-b+4c+1)|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow d(B; (P)) \leq \frac{|(-11b+5c+5)|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} + \frac{|4(-b+4c+1)|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = 6\sqrt{2} + \frac{|4(-b+4c+1)|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1^2 + 4^2 + 1^2)(b^2 + c^2 + 1^2)}}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 18\sqrt{2}.$$

Vậy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất là $18\sqrt{2}$ khi

$$\begin{cases} (-11b + 5c + 5) \cdot (-b + 4c + 1) > 0 \\ \frac{b}{-1} = \frac{c}{4} = \frac{1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow b = -1; c = 4.$$

Từ đây có $b = -1; c = 4; d = 0 \Rightarrow b + c + d = 3$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 25$ và các điểm $A(1; 2; 3); B(1; -2; 1)$. Gọi $(P): ax + by + cz - 1 = 0$ là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A; B$ và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Tổng $T = a + b + c$ là

A. -2.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

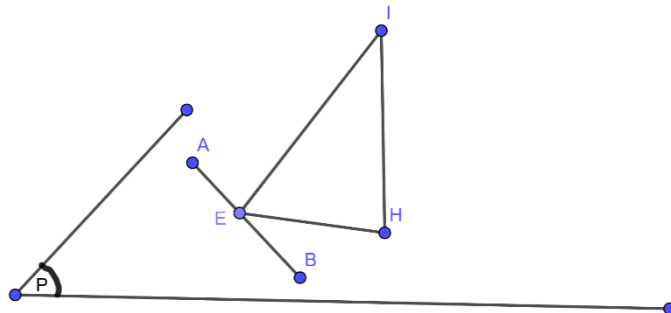
Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm và bán kính là: $I(-1; -2; 2); R = 5$

Giả sử mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có tâm H , bán kính r . Ta có:

$$R^2 = r^2 + IH^2 (*)$$

Để đường tròn có diện tích nhỏ nhất ta có bán kính r nhỏ nhất. $(*) \Leftrightarrow r^2 = 25 - IH^2$, nên để r nhỏ nhất thì IH lớn nhất.



Gọi E là hình chiếu của I lên đường thẳng AB , ta có $IH \leq IE$, IH lớn nhất bằng IE , khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận véc tơ $\overrightarrow{IE}$ làm véc tơ pháp tuyến.

*) Xác định điểm E

Đường thẳng qua AB nhận $\overrightarrow{AB} = (0; -4; -2)$ làm véc tơ chỉ phương; ta chọn lại véc tơ chỉ phương là:

$$\vec{u} = (0; 2; 1); \text{ Phương trình đường thẳng qua } AB \text{ là: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Ta có: $E(1; 2 + 2t; 3 + t); \overrightarrow{IE} = (2; 4 + 2t; 1 + t)$

$$\text{Ta có } IE \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IE} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(4 + 2t) + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{5}$$

$$\text{Khi này: } \overrightarrow{IE} = \left(2; \frac{2}{5}; \frac{-4}{5} \right);$$

Phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-1) + \frac{2}{5}(y-2) - \frac{4}{5}(z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 2z - 1 = 0$

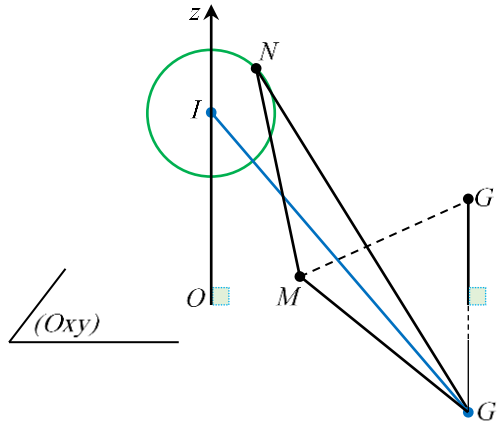
Vậy: $T = a + b + c = 4$

Câu 20: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;-1;4)$, $B(0;4;3)$, $C(7;0;-1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$. Gọi điểm $M \in (Oxy)$ và điểm $N \in (S)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MN + \frac{1}{3}|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ bằng:

- A. $\sqrt{19}$. B. $\sqrt{35} + 1$. C. $\frac{\sqrt{46} + \sqrt{11}}{2} - 1$. D. $\sqrt{35} - 1$.

Lời giải

Chọn D



♦ Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R = 1$.

Xét: $d(I, (Oxy)) = 3 > 1 = R \Rightarrow$ Mặt cầu (S) và mặt phẳng (Oxy) không cắt nhau.

♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$: $G(3;1;2)$ và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Xét: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3.MG$.

♦ $T = MN + \frac{1}{3}|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = MN + MG$

Nhận xét: I và G nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy).

Gọi G' là điểm đối xứng với G qua mặt phẳng (Oxy): $G'(3;1;-2)$.

Do đó: $T = MN + MG = MN + MG' \geq NG' \geq IG' - R = \sqrt{35} - 1$.

Dấu "=" xảy ra khi: M, N, G', I thẳng hàng.

Câu 21: Vậy $\min T = \sqrt{35} - 1$. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - y + z - 4 = 0$ và hai điểm $A(-2;2;4)$, $B(2;6;6)$. Gọi M là điểm di động trên (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng OM. Khi đó giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng

- A. $4\sqrt{52}$. B. 104. C. 122. D. $4\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà mặt phẳng (P) luôn đi qua. Ta có

$$(m^2 + 2m)x_0 - (m^2 + 4m - 1)y_0 + 2(3m - 1)z_0 + m^2 + 1 = 0 \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 + 1)m^2 + (2x_0 - 4y_0 + 6z_0)m + y_0 - 2z_0 + 1 = 0 \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 \\ 2x_0 - 4y_0 + 6z_0 = 0 \\ y_0 - 2z_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-2; -1; 0).$$

Ta có $IM = 3\sqrt{3} < R$ nên M nằm trong mặt cầu. Do đó (P) luôn cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.

$$\text{Ta có } d(A, (P)) \leq R + d(I, (P)) \leq R + IM = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Trong trường hợp này đường tròn đáy là giao tuyến của (P) và (S) có bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - IM^2} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Khi đó } V_N = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 128\pi\sqrt{3}.$$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON = 2020$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng đi qua $D(0; 202; 10)$ cắt (S) theo một dây cung EF , khi đó EF có độ dài ngắn nhất là.

A. $4\sqrt{10226}$.

B. $2\sqrt{10226}$.

C. $3\sqrt{10226}$.

D. $5\sqrt{10226}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC): \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{101} = 1 \Leftrightarrow 505x + 404y + 20z - 2020 = 0$$

Gọi $N(x; y; z)$

Theo giả thiết ta có N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON = 2020$ suy ra $\overrightarrow{OM} = \frac{2020}{ON^2} \cdot \overrightarrow{ON}$

$$\text{Do đó } M\left(\frac{2020x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{2020y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{2020z}{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

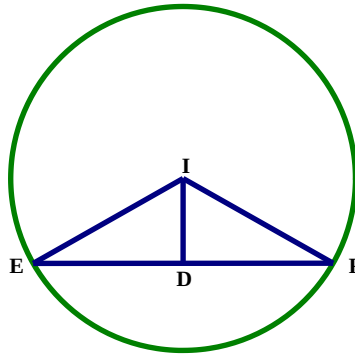
$$\text{Mặt khác } M \in (ABC) \text{ nên } 505 \frac{2020x}{x^2 + y^2 + z^2} + 404 \frac{2020y}{x^2 + y^2 + z^2} + 20 \frac{2020z}{x^2 + y^2 + z^2} - 2020 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 505x - 404y - 20z = 0.$$

Do đó điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 505x - 404y - 20z = 0$.

Dễ thấy D nằm trong mặt cầu, do vậy EF ngắn nhất khi và chỉ khi $ID \perp EF$, trong đó

$$I\left(\frac{505}{2}; 202; 10\right).$$



$$\text{Khi đó } FE_{\min} = 2DF = 2\sqrt{R^2 - ID^2} = 2\sqrt{\left(\frac{505}{2}\right)^2 + 202^2 + 10^2 - \left(\frac{505}{2}\right)^2} = 4\sqrt{10226}$$

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là đường tròn tâm H (giao của (S) và (P)) có thể tích lớn nhất. Biết $(P): 2x + by + cz + d = 0$, tính $S = b + c + d$.

A. $S = -18$.

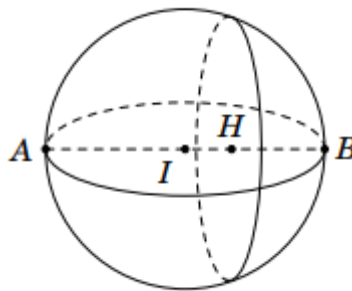
B. $S = -11$.

C. $S = -24$.

D. $S = -14$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB = 6$, Gọi (C) là đường tròn giao của (S) và (P) có tâm H , bán kính r .

Đặt $AH = x$ ($0 < x < 6$), ta có $V_{(N)} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{(C)} = \frac{1}{3}AH \cdot \pi r^2$.

Do AB là đường kính nên ta có $r^2 = AH \cdot HB = x(6 - x)$.

Khi đó $V_{(N)} = \frac{\pi}{3}x^2(6 - x) = \frac{\pi}{3}(-x^3 + 6x^2) = \frac{\pi}{3}f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2$ trên $(0; 6)$, $f'(x) = -3x^2 + 12x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	0	4	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{(N)}$ lớn nhất khi $x = 4$ hay $AH = \frac{2}{3}AB$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x_H - 2; y_H - 1; c - 2) = \frac{2}{3}(4; 4; 2) \Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{14}{3} \\ y_H = \frac{11}{3} \\ z_H = \frac{13}{3} \end{cases}.$$

Câu 25: (P) qua H , có $\vec{n}_P = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow (P): 2x + 2y + z - 21 = 0 \Rightarrow S = 2 + 1 - 21 = -18$. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

A. 3.

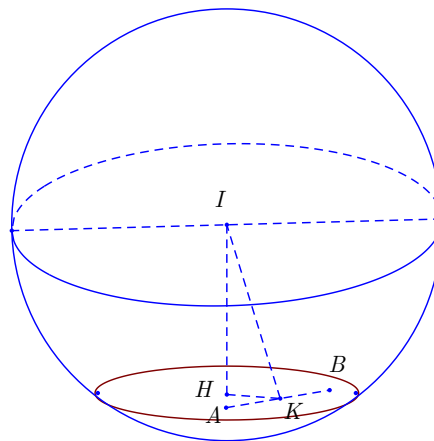
B. -3.

C. 0.

D. -2.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu có tâm $I(1; 2; 3)$ bán kính là $R = 4$.

Ta có A, B nằm trong mặt cầu. Gọi K là hình chiếu của I trên AB và H là hình chiếu của I lên thiết diện.

Ta có diện tích thiết diện bằng $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - IH^2)$. Do đó diện tích thiết diện nhỏ nhất khi IH lớn nhất. Mà $IH \leq IK$ suy ra (P) qua A, B và vuông góc với IK .

Ta có $IA = IB = \sqrt{5}$ suy ra K là trung điểm của AB . Vậy $K(0; 1; 2)$ và $\overrightarrow{KI} = (1; 1; 1)$.

Vậy $(P): (x-1) + y + (z-2) = 0 \Leftrightarrow -x - y - z + 3 = 0$.

Vậy $T = -3$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(0; 8; 2)$, $B(9; -7; 23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và

tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b+c+d$ khi đó là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải**Chọn B**

Vì $A \in (P)$ nên $8b+2c+d=0 \Leftrightarrow d=-8b-2c \Rightarrow (P): x+by+cz-(8b+2c)=0$

Do (P) tiếp xúc mặt cầu (S) nên $d(I;(P))=R \Leftrightarrow \frac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}$.

Ta có: $d(B;(P))=\frac{|9-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=\frac{|(5-11b+5c)+4(1-b+4c)|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$

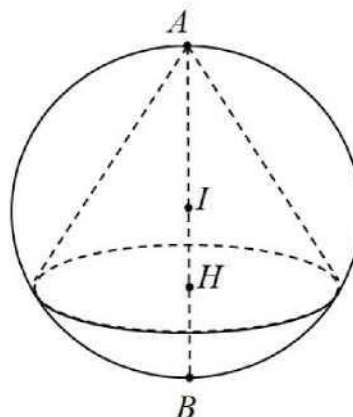
$\Rightarrow d(B;(P)) \leq \frac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}+4\frac{|1-b+4c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow d(B;(P)) \leq 6\sqrt{2}+4\frac{|1-b+4c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$

$\Leftrightarrow^{\text{Cosi-Svac}} d(B;(P)) \leq 6\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{(1+1+16)(1+b^2+c^2)}}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow d(B;(P)) \leq 18\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 1=-b=\frac{c}{4} \\ \frac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=4 \\ d=0 \end{cases}$

Vậy $P_{\max}=18\sqrt{2}$ khi $b+c+d=3$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x+by+cz+d=0$ với $b, c, d \in \mathbb{R}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=24$.B. $S=-18$.C. $S=-12$.D. $S=18$.**Lời giải****Chọn B**

(S) là mặt cầu đường kính AB có tâm $I(4; 3; 4)$ và bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}{2}=3$.

Dễ thấy H nằm ngoài đoạn IA thì thể tích khối nón sẽ lớn hơn khi thấy H nằm trong đoạn IA.

$IH=x(0 < x < 3)$, bán kính mặt nón đỉnh A là $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{9-x^2}$.

$$\text{Thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3}AH.\pi.r^2 = \frac{1}{3}\pi(3+x)(9-x^2) = \frac{\pi}{3}(-x^3-3x^2+9x+27) = f(x).$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{\pi}{3}(-x^3-3x^2+9x+27) \text{ trên khoảng } (0;3)$$

$$\text{có } f'(x) = \frac{\pi}{3}(-3x^2-6x+9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

x	0	1	3
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên khoảng $(0;3)$:

Thể tích khối nón lớn nhất khi $IH = x = 1$, mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H nhận $\overrightarrow{AB} = (4; 4; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mp (P) có dạng $2x + 2y + z + d = 0$

$$IH = x = 1 = d(I, (P)) = \frac{|2.4 + 2.3 + 4 + d|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|18+d|}{3} \Leftrightarrow |18+d| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 21 \\ d = -15 \end{cases}$$

Với $d = -15$ thì mp $(P): 2x + 2y + z - 15 = 0$, hai điểm A, I nằm khác phía (P) nên loại.

Với $d = 21$ thì mp $(P): 2x + 2y + z - 21 = 0$, hai điểm A, I nằm cùng phía (P) thỏa mãn nên

$$\text{ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \\ d = -21 \end{cases} \Rightarrow b + c + d = -18.$$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;1;1), B(2;0;2); C(-1;-1;0), D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm phẳng B', C', D' sao cho $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

B. $16x + 40y + 44z - 39 = 0$.

C. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$.

D. $16x - 40y - 44z - 39 = 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ba số ta có: } 4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$$

$$\Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64}V_{ABCD}$$

$$\text{Để } V_{AB'C'D'} \text{ nhỏ nhất khi và chỉ khi } \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$$

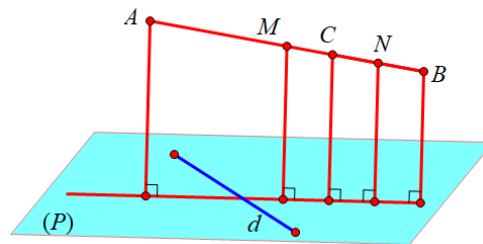
$$\text{Lúc đó mặt phẳng } (B'C'D') \text{ song song với mặt phẳng } (BCD) \text{ và đi qua } B'\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = (-3; -1; -2); \overrightarrow{BD} = (-2; 3; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (4; 10; -11)$$

- Câu 29:** Phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ qua $B'\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$ có vtcp $\vec{n} = [\vec{BC}; \vec{BD}] = (4; 10; -11)$ là $16x + 40y - 44z + 39 = 0$. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 1; 0), B(4; 4; -3), C(2; 3; -2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{1-y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi $(P): ax + by - 6z + c = 0$ là mặt phẳng chứa d sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (P) và biểu thức $h = d_1 + 2d_2 + 3d_3$ đạt giá trị lớn nhất, với d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (P) . Tính tổng $T = a + b + 2c$?
- A. $T = 6$. B. $T = 8$. C. $T = 1$. D. $T = 12$.

Lời giải

Chọn A



Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (1; -2; -1)$ làm vector chỉ phương và đi qua điểm $I(1; 1; 1)$.

Ta có $AB = 3\sqrt{6}; BC = \sqrt{6}, AC = 2\sqrt{6} \Rightarrow AC + CB = AB$, tức là C nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AC = 2CB$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Khi đó C là trung điểm của MN .

$$h = d_1 + 2d_2 + 3d_3 = (d_1 + d_2) + (d_2 + d_3) + 2d_3 = 2d(M, (P)) + 2d(N, (P)) + 2d_3 \\ = 4d_3 + 2d_3 = 6d_3 = 6d(C, (P)) \leq 6(C, d)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi hình chiếu H của C lên d cũng là hình chiếu của C lên (P) .

Gọi $H \in d \Rightarrow H(1+t; 1-2t; 1-t)$ và ta có:

$$\overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1(t-1) - 2(-2t-2) - (3-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(1; 1; 1), \overrightarrow{CH} = (-1; -2; 3).$$

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $H(1; 1; 1)$ và nhận $\overrightarrow{CH} = (-1; -2; 3)$ làm vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) nên $(P): -(x-1) - 2(y-1) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3z = 0$.

Đổi chiếu giả thiết $(P): ax + by - 6z + c = 0$ ta suy ra $a = 2; b = 4; c = 0$.

Vậy $T = a + b + 2c = 6$.

- Câu 30:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha): x + y = 0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm hoành độ của điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(6; -10; 3)$ lớn nhất.
- A. -1 . B. -4 . C. 2 . D. -5 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 2; -3)$.

Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng (α)

$$\text{Ptđt } (AA'): \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -10 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

Ta có $A' = AA' \cap (\alpha)$

$$\Rightarrow 6 + t - 10 + t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A'(8; -8; 3)$$

Gọi I' là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) suy ra I' là tâm của đường tròn (C)

Làm tương tự như cách tìm tọa độ A' , ta có $I'(-1; 1; -3)$

Ta có $AM^2 = AA'^2 + A'M^2$ vì AA' không đổi nên AM lớn nhất khi $A'M$ lớn nhất, từ đó suy ra A', M, I' thẳng hàng và I' nằm giữa A' và M .

Ta có

$$II' = \sqrt{2}; A'I' = 3\sqrt{22}$$

$$R_{(C)} = \sqrt{22}$$

$$\Rightarrow A'M = 4\sqrt{22}$$

Vậy

$$\overrightarrow{A'M} = \frac{4}{3} \overrightarrow{A'I'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_{A'} = \frac{4}{3}(x_{I'} - x_{A'}) \\ y_M - y_{A'} = \frac{4}{3}(y_{I'} - y_{A'}) \\ z_M - z_{A'} = \frac{4}{3}(z_{I'} - z_{A'}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -4 \\ y_M = 4 \\ z_M = -5 \end{cases}$$

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 4 = 0$ và hai điểm $A(-2; 2; 4), B(2; 6; 6)$. Gọi M là điểm di động trên (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M . Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của độ dài OM . Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng

A. $4\sqrt{61}$.

B. 104.

C. 122.

D. $4\sqrt{52}$.

Lời giải

Chọn B

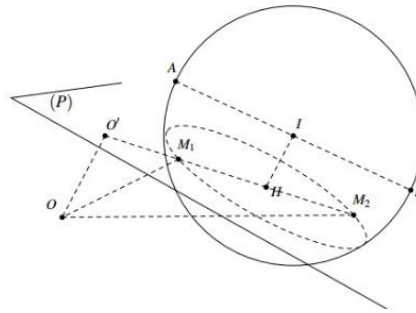
$$\text{Có } \begin{cases} \angle AMB = 90^\circ \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M \in (C) = (P) \cap (S) \text{ với } (S): x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 9 \text{ là mặt cầu đường}$$

kinh AB có tâm $I(0; 4; 5)$.

Tâm của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc H của I lên mặt phẳng (P) .

$$\text{Toạ độ điểm } H \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ \frac{x-0}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-5}{1} \end{cases} \Rightarrow H(1; 3; 6).$$

$$\text{Bán kính của đường tròn } (C) \text{ là } r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}.$$



Điểm O' là hình chiếu vuông góc của O lên (P) có tọa độ là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \end{cases} \Rightarrow O' \left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{4}{3} \right).$$

Khi đó theo pitago có $OM^2 = OO'^2 + O'M^2 = \frac{16}{3} + O'M^2$

Và $HO' - r \leq O'M \leq HO' + r \Rightarrow O'M \in \left[\frac{\sqrt{366}}{3} - \sqrt{6}; \frac{\sqrt{366}}{3} + \sqrt{6} \right]$.

Do đó $a^2 + b^2 = \left[\frac{16}{3} + \left(\frac{\sqrt{366}}{3} - \sqrt{6} \right)^2 \right] + \left[\frac{16}{3} + \left(\frac{\sqrt{366}}{3} + \sqrt{6} \right)^2 \right] = 104$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1) , (S_2) . Đặt M , m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P) . Giá trị $M + m$ bằng

A. $\sqrt{15}$.

B. $8\sqrt{3}$.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Giả sử (P) tiếp xúc với (S_1) , (S_2) lần lượt tại A và B .

Gọi $IJ \cap (P) = M$. Do $\frac{IA}{JB} = \frac{MI}{MJ} = 2$ nên J là trung điểm của IM . Suy ra $M(2;1;9)$.

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Ta có: $(P): a(x-2) + b(y-1) + c(z-9) = 0$.

Và: $\begin{cases} d(I, (P)) = R_1 \\ d(J, (P)) = R_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 = 3 \quad (1).$

Ta có: $d(O, (P)) = \frac{|2a + b + 9c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2a + b + 9c|}{2|c|} = \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{c} + \frac{b}{c} + 9 \right|$.

Đặt $t = \frac{2a}{c} + \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = t - \frac{2a}{c}$. Ta có: $d(O, (P)) = \frac{1}{2} |t + 9|$.

Thay $\frac{b}{c} = t - \frac{2a}{c}$ vào (1), ta được $\left(\frac{a}{c} \right)^2 + \left(t - \frac{2a}{c} \right)^2 = 3 \Leftrightarrow 5 \left(\frac{a}{c} \right)^2 - 4 \frac{a}{c} \cdot t + t^2 - 3 = 0$.

Để phương trình có nghiệm với ẩn $\frac{a}{c}$ thì $4t^2 - 5t^2 + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{15} \leq t \leq \sqrt{15}$

$$\Leftrightarrow 0 < 9 - \sqrt{15} \leq t + 9 \leq 9 + \sqrt{15} \Rightarrow \frac{9 - \sqrt{15}}{2} \leq d(O, (P)) \leq \frac{9 + \sqrt{15}}{2}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{9 + \sqrt{15}}{2} \text{ và } m = \frac{9 - \sqrt{15}}{2}.$$

Vậy $M + m = 9$.

- Câu 33:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón N có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi N có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của N có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + d$ bằng
- A. -21. B. -12. **C. -18.** D. -15.

Lời giải

Chọn C

Đặt tâm đường tròn đáy I ; tâm mặt cầu là O ; R là bán kính của mặt cầu (S) đường kính AB . Mặt phẳng cần tìm là (P) . Dễ thấy $AB \perp (P)$. Lấy M là điểm tùy ý thuộc đường tròn đáy của hình nón.

Dễ thấy tam giác ABM vuông tại M và

$$IM^2 = IA \cdot IB \Leftrightarrow r^2 = h(AB - h) \quad (0 < h < AB).$$

Thể tích của khối nón là:

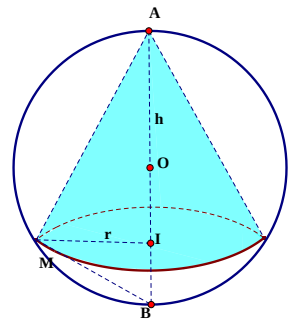
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi h^2 (AB - h) = \frac{1}{6} \pi h^2 (2AB - 2h) \leq \frac{1}{6} \pi \frac{(h + h + 2AB - 2h)^3}{27} = \frac{8\pi AB^3}{162}.$$

$$\text{Vậy: } \max V = \frac{8\pi AB^3}{162} \text{ khi } h = h = 2AB - 2h \Leftrightarrow h = \frac{2}{3} AB \Rightarrow IA = \frac{2}{3} AB$$

$$\Rightarrow IA = 2IB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow I\left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right).$$

Lúc này (P) đi qua $I\left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$ có phương trình

$$P: 2x + 2y + z - 21 = 0.$$



- Câu 34:** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$. Khi tổng $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt phẳng (α) đi qua tâm I của mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (OAB) có dạng $mx + ny + pz + q = 0$ (với $m, n, p, q \in \mathbb{Z}; \frac{q}{p}$ là phân số tối giản).

Giá trị $T = m + n + p + q$ bằng

- A. 3. B. 9. C. 5. D. -5.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=90$.

Ta có

$$P = OA + OB + OC = a + b + c. \text{ Đặt } x = a - 4 \geq 0, y = b - 5 \geq 0, z = c - 6 \geq 0.$$

Khi đó

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z + 77 = 90.$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13.$$

$$T = (x+y+z)^2 + 12(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z + 2(xy + yz + zx + 2x + y).$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13$ và $x, y, z \geq 0$ nên $(x+y+z)^2 + 12(x+y+z) - 13 \geq 0$.

$$\Leftrightarrow x+y+z \geq 1 \Leftrightarrow a-4+b-5+c-6 \geq 1 \Leftrightarrow a+b+c \geq 16 \Rightarrow \{OA+OB+OC\}_{\min} = 16.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=4, b=5, c=6$.

Suy ra, $A(4;0;0), B(0;5;0), C(0;0;6)$.

Gọi mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A(4;0;0), B(0;5;0), C(0;0;6), O(0;0;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 16-8a+d=0 \\ 25-10b+d=0 \\ 47-14z+d=0 \\ d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{5}{2} \\ c=\frac{7}{2} \\ d=0 \end{cases}$$

Tâm của mặt cầu (S) là $I\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(OAB) \equiv (Oxy): z=0 \Rightarrow (\alpha): z+e=0$.

Vì $I\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ thuộc (α) nên $\frac{7}{2}+e=0 \Leftrightarrow e=-\frac{7}{2}$

Suy ra, $2z-7=0 \Rightarrow m=0; n=0; p=2; q=-7$.

$$T = m + n + p + q = -5$$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1;0;2), B(-1;2;2)$. Xét khối nón (N) có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) , đường tròn đáy là thiết diện của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B sao cho thể tích của khối nón (N) là lớn nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax+by+cz+3=0$. Tính $T=a+b+c$.

A. 3.

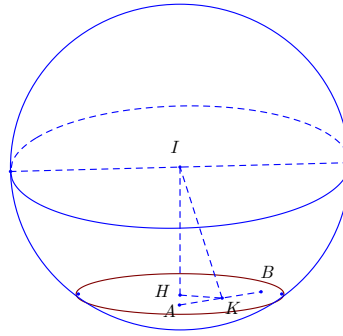
B. -3.

C. 0.

D. -2.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ bán kính là $R = 4$.

Ta có A, B nằm trong mặt cầu. Gọi K là hình chiếu của I trên AB và H là hình chiếu của I lên thiết diện.

Ta có diện tích thiết diện bằng $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - IH^2)$. Do đó thể tích khối nón (N) lớn nhất khi diện tích thiết diện nhỏ nhất hay IH lớn nhất. Mà $IH \leq IK$ suy ra (P) qua A, B và vuông góc với IK .

Ta có $IA = IB = \sqrt{5}$ suy ra K là trung điểm của AB . Vậy $K(0;1;2)$ và $\overrightarrow{KI} = (1;1;1)$.

Vậy (P): $(x-1) + y + (z-2) = 0 \Leftrightarrow -x - y - z + 3 = 0$.

Câu 36: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-2;1;1)$ và $B(2;1;1)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB. Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của (N) cách điểm $E(1;1;1)$ một khoảng là bao nhiêu?

A. $d = \frac{1}{2}$.

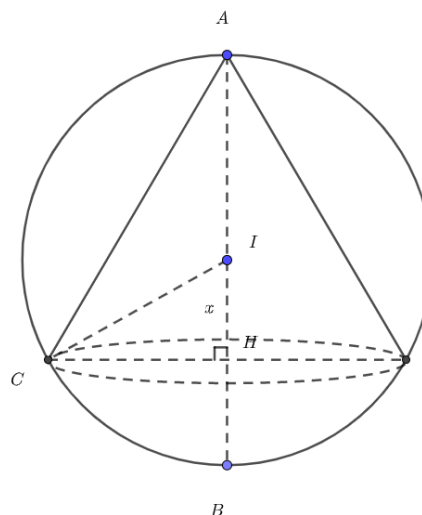
B. $d = 2$.

C. $d = \frac{1}{3}$.

D. $d = 3$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;0;0)$ nên (P) có vtpt là $(1;0;0)$

$AB = 4 \Rightarrow R = 2$. Đặt x như hình vẽ

Khối nón (N) có $h = x + 2$ và $r^2 = HC^2 = 4 - x^2$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi (4 - x^2)(x + 2) \text{ với } 0 \leq x \leq 2$$

Khảo sát hàm số $y = (4 - x^2)(x + 2)$ với $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Đạt max khi } x = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IB} \text{ với } I(0;1;1)$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};1;1\right) \Rightarrow 1.\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0(y-1) + 0(z-1) = 0$$

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;0;-1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Mặt phẳng $(P): x + ay - bz + c = 0$ ($a > 0$) đi qua A, B cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho hình nón (N) đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Khi đó $2a + b - 3c$ bằng

A. $-4 + 3\sqrt{2}$.

B. 4.

C. 7.

D. $4 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;1)$, bán kính $R = 3$.

Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy hình nón (N) , H là tâm đường tròn đáy của (N)

Điều kiện mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) khi $0 \leq h < R \Rightarrow 0 \leq h < 3$.

Ta có: $r^2 = R^2 - IH^2 = 9 - h^2$

Thể tích khối nón (N) : $V = \frac{1}{3}h.\pi r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.(9 - h^2) = \frac{1}{3}\pi(9h - h^3)$

Xét hàm số $f(h) = \frac{1}{3}\pi(9h - h^3)$ với $0 \leq h < 3$ ta suy ra V đạt giá trị lớn nhất khi $h = \sqrt{3}$.

Hay V đạt giá trị lớn nhất khi $d(I, (P)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|a - b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \sqrt{3} \quad (1).$

Mặt khác $(P): x + ay - bz + c = 0$ đi qua A, B nên ta có $\begin{cases} 2 + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases} \quad (2).$

Thay (2) vào (1) ta được $|a - 4| = \sqrt{3}.\sqrt{a^2 + 5} \Leftrightarrow 2a^2 + 8a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{2} \\ a = \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Câu 38: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 8y - 12z + 27 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 17 = 0$.

Một khối trụ (N) có một đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng (P) và đường tròn đáy còn lại nằm trên mặt cầu. Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy đi qua điểm nào sau đây?

A. $C(0;1;10)$.

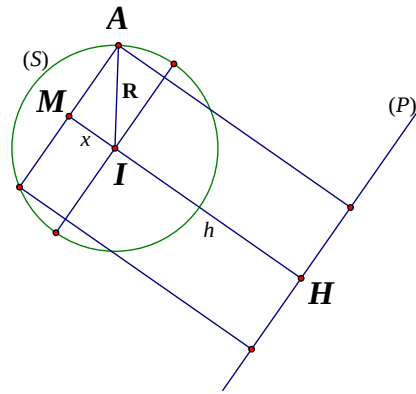
B. $D(0;0;8)$.

C. $E(8;3;0)$.

D. $F(2;0;8)$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(0; -4; 6)$ bán kính $R = 5$. Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$h = d(I, (P)) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + 17|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 11.$$

Giả sử đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu là (M, r) nằm trên mặt phẳng (Q). Suy ra $(P) \parallel (Q)$ và điểm I nằm giữa của hai mặt phẳng đó.

Đặt $IM = x, (0 \leq x < 5)$ suy ra $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$ và chiều cao khối trụ là $x + h = x + 11$. Do đó thể tích khối trụ là $V = \pi(25 - x^2)(x + 11) = \pi(-x^3 - 11x^2 + 25x + 275)$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - 11x^2 + 25x + 275$ trên $[0; 5]$ ta có $f'(x) = -3x^2 - 22x + 25$. Vì

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{25}{3} \end{cases} \text{ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất là } f(1) = 288 \text{ tại điểm } x_0 = 1.$$

Mặt phẳng (Q) có dạng $2x - y + 2z + D = 0$. Vì $d(I, (Q)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|D + 16|}{3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -13 \\ D = -19 \end{cases}$

Vì điểm I nằm giữa $(P), (Q)$ nên $(2 \cdot 0 - 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + 17)(2 \cdot 0 - 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + D) < 0$
 $\Leftrightarrow 33 \cdot (16 + D) < 0 \Leftrightarrow D < -16$

Vậy (Q): $2x - y + 2z - 19 = 0$ đi qua điểm $C(0; 1; 10)$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 0; 1), B(3; -2; 0), C(1; 2; -5)$. Mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz - 24 = 0$ qua C và $d(A, (\alpha)) + 2d(B, (\alpha))$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của $P = a + 4b^2 + c$ là

A. $P = 21$.

B. $P = 23$.

C. $P = 24$.

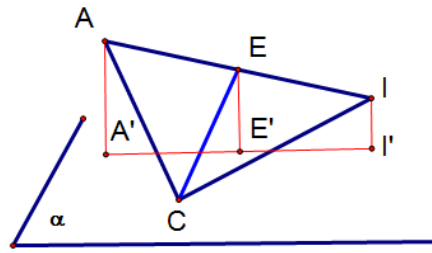
D. $P = 20$.

Lời giải

Lấy điểm I sao cho B là trung điểm CI , suy ra $I(5; -6; 5)$. Khi đó $2d(B, (\alpha)) = d(I, (\alpha))$.

Ta có $d(A, (\alpha)) + 2d(B, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) + d(I, (\alpha))$.

Trường hợp 1: A và I cùng phía so với (α) . (A hoặc I có thể thuộc (α)).



Gọi E là trung điểm AI , suy ra $E(3; -3; 3)$.

Ta có $d(A, (\alpha)) + 2d(B, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) + d(I, (\alpha)) = 2d(E, (\alpha)) \leq 2EC = 2\sqrt{93}$ nên $d(A, (\alpha)) + 2d(B, (\alpha))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2EC$ khi và chỉ khi C là hình chiếu vuông góc của E trên (α) .

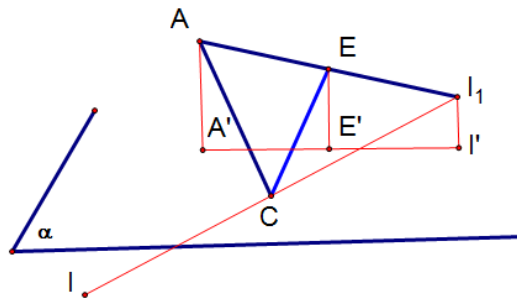
Khi đó, (α) qua C , nhận $\overrightarrow{CE} = (2; -5; 8)$ là vector pháp tuyến.

$$(\alpha): 2(x-1) - 5(y-2) + 8(z+5) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 8z + 48 = 0 \Leftrightarrow -x + \frac{5}{2}y - 4z - 24 = 0.$$

Thử lại, ta thấy A, I cùng phía so với (α) .

$$\text{Vậy } a = -1, b = \frac{5}{2}, c = -4 \Rightarrow P = a + 4b^2 + c = 20.$$

Trường hợp 2: A và I khác phía so với (α) .



Gọi I_1 là điểm đối xứng của I qua điểm $C \Rightarrow I_1(-3; 10; -15)$.

Gọi E là trung điểm của $AI_1 \Rightarrow E(-1; 5; -7) \Rightarrow CE = \sqrt{17}$. Ta có:

$$d(A, (\alpha)) + 2d(B, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) + d(I_1, (\alpha)) = 2d(E, (\alpha)) \leq 2EC = 2\sqrt{17} < 2\sqrt{93}$$

Trường hợp này không thỏa mãn.

$$\text{KL: Vậy } a = -1, b = \frac{5}{2}, c = -4 \Rightarrow P = a + 4b^2 + c = 20.$$