

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1. Khái niệm cực trị hàm số :

Giả sử hàm số xác định trên tập hợp $D(D \subset \mathbb{R})$ và $x_0 \in D$

x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một

khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho: $f \begin{cases} (a;b) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .

x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một

khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho: $f \begin{cases} (a;b) \subset D \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì ngược lại ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .

Như vậy : Điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp D

Điểm cực đại , cực tiểu gọi chung là điểm cực trị của hàm số , $f(x_0)$ là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

Chú ý.

a) Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f chưa hẳn đã là GTLN (GTNN) của hàm số f trên tập xác định D mà $f(x_0)$ chỉ là GTLN (GTNN) của hàm số f trên khoảng $(a,b) \subset D$ và $(a;b)$ chứa x_0 .

b) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định D của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó , nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0)=0$.

Chú ý :

- Đạo hàm f' **có thể** triệt tiêu tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .

- Hàm số **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm

- Hàm số chỉ **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó :

<http://vnteach.com> – Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) < 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x_0) > 0, x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) > 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x_0) < 0, x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

Định lý 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Chú ý :

1. Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực trị của đồ thị* hàm số f .

2. Trong trường hợp $f'(x_0) = 0$ không tồn tại hoặc $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$ thì **định lý 3** không dùng được.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 1: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài toán 01: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH.

Phương pháp giải

Tìm tập xác định D của hàm số f .

Tính $f'(x)$.

Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ (nếu có) và tìm các điểm $x_0 \in D$ mà tại đó hàm f liên tục nhưng $f'(x_0)$ không tồn tại.

Vận dụng định lý 2 (lập bảng xét dấu $f'(x)$) hay định lý 3 (tính $f''(x)$) để xác định điểm cực trị của hàm số.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

Điểm $x = x_0 \in D$ là điểm cực trị của hàm số khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây cùng thỏa mãn:

- Tại $x = x_0$ đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại
- Đạo hàm đổi dấu khi x đi qua x_0 .

Các ví dụ

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = \frac{1 - x^2}{x}$

2.

$y = \frac{-x^2 + x + 1}{2x - 4}$

Lời giải.

1. Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ta có: $y' = -1 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in D$, suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và không có điểm cực trị.

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y		-		-	
y	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có: $y' = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(x-2)^2}$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=-\frac{1}{2} \\ x=3, y=-\frac{5}{2} \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y		-	0	+		+	0	-	
y	$+\infty$				$+\infty$				$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x=3, y_{CD} = -\frac{5}{2}$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1, y_{CT} = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$

2.

$y = (x-2)^3 - 3x + 4$

Lời giải.

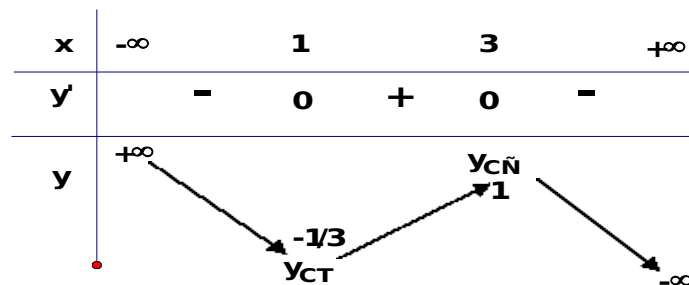
1. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -x^2 + 4x - 3, \forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y(1) = -\frac{1}{3} \\ x=3, y(3) = 1 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty;$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT} = -\frac{1}{3}$, hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và $y_{CD} = 1$.

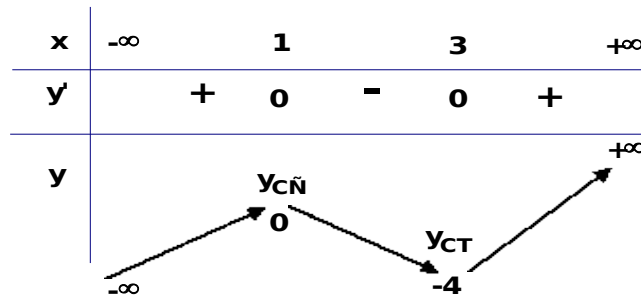
2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(x-2)^2 - 3, \forall x \in D:$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y(1) = 0 \\ x=3, y(3) = -4 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{CT}=-4$, hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CD}=0$.

Ví dụ 3: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = -\frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{5}{4}$

2. $y = 2x^3 + 3x + 1$

Lời giải.

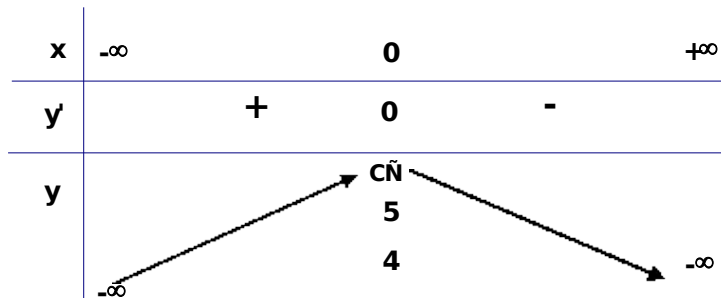
1. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -x^3 - 2x = -x(x^2 + 2)$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, y(0) = \frac{5}{4}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{4x^4} \right) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{4x^4} \right) = -\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$, $y_{CD} = \frac{5}{4}$.

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

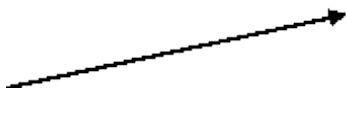
Ta có: $y' = 6x^2 + 3 > 0 \forall x \in D$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$

Bảng biến thiên

<http://vnteach.com> – Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$		$+\infty$



Ví dụ 4: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

2. $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Lời giải.

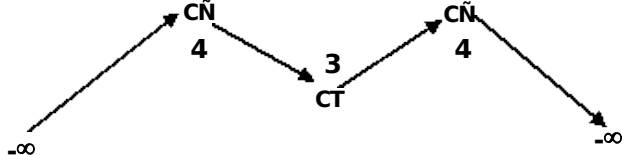
1. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y(0) = 3 \\ x = \pm 1, y(\pm 1) = 4 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$								$-\infty$



Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, y_{CT} = 3$.

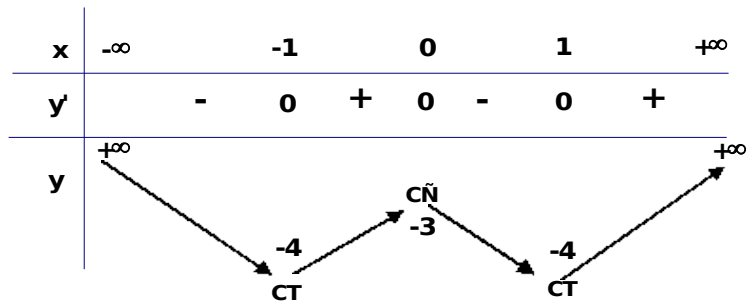
Hàm số đạt cực đại tại hai điểm $x = \pm 1, y_{CD} = 4$

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y(0) = -3 \\ x = \pm 1, y(\pm 1) = -4 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} \right) = +\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$, $y_{\text{CD}} = -3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x=\pm 1$, $y_{\text{CT}} = -4$

Ví dụ 5: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 6x + 3$

2.

$y = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6$

Lời giải.

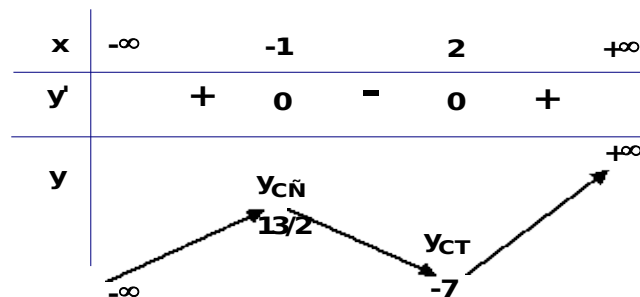
Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3x - 6$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y(-1) = \frac{13}{2} \\ x = 2, y(2) = -7 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = +\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2, y_{\text{CT}} = -7$, hàm số đạt cực đại tại $x=-1, y_{\text{CD}} = \frac{13}{2}$.

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

<http://vnteach.com> – Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam

Ta có: $y' = -3x^2 + 9x$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y(0) = -6 \\ x = 3, y(3) = \frac{15}{2} \end{cases}$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{9}{2x} - \frac{6}{x^3} \right) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{9}{2x} - \frac{6}{x^3} \right) = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-6 y_{CT}	y_{CN} $15/2$	$-\infty$	

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -6$, hàm số đạt cực đại tại $x = 3, y_{CD} = \frac{15}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm cực trị (nếu có) của hàm số sau: $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Bài 2: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = -x^3 - 1,5x^2 + 6x + 1$

2. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

3. $y = \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + 4$

Bài 3: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

2. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

3. $y = -0,25x^4 + x^3 - 4x + 1$

4. $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

Bài toán 02: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI, CHỨA CĂN THỨC.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = \frac{4 - |x|}{4 + |x|}$

$y = |x + 3| + \frac{1}{x + 1}$

2.

Lời giải.

1. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Nếu $x \in [0; +\infty)$ thì $y = \frac{4 - x}{4 + x} \Rightarrow y' = -\frac{8}{(4 + x)^2} < 0, \forall x \in [0; +\infty)$

Nếu $x \in (-\infty; 0]$ thì $y = \frac{4 + x}{4 - x} \Rightarrow y' = \frac{8}{(4 - x)^2} > 0, \forall x \in (-\infty; 0]$

Tại $x = 0$ thì $y'(0^+) = -\frac{1}{2}, y'(0^-) = \frac{1}{2}$ Vì $y'(0^+) \neq y'(0^-)$ nên $y'(0)$ không tồn tại

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 1$

2. $y = |x + 3| + \frac{1}{x + 1} = \begin{cases} x + 3 + \frac{1}{x + 1} & \text{khi } x \geq -3 \\ -(x + 3) + \frac{1}{x + 1} & \text{khi } x < -3 \end{cases}$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nếu $x \geq -3$ thì $y = x + 3 + \frac{1}{x + 1}$, ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^2 - 1}{(x + 1)^2}$

Và $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 1 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \pm 1 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Tại $x = -3$, ta có: $y'(-3^+) = 1 - \frac{1}{(-3 + 1)^2} = \frac{3}{4}, y'(-3^-) = -1 - \frac{1}{(-3 + 1)^2} = -\frac{5}{4}$

Vì $y'(-3^+) \neq y'(-3^-)$ nên $y'(-3)$ không tồn tại

Nếu $x < -3$ thì $y = -(x + 3) + \frac{1}{x + 1}$, ta có: $y' = -1 - \frac{1}{(x + 1)^2} < 0, \forall x < -3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
y'	-		+ 0 -		- 0 +	
y						

Suy ra điểm cực tiểu của hàm số là $x = -3$, $y_{CT} = -\frac{1}{2}$ và $x = 0$, $y_{CT} = 4$; điểm cực đại của hàm số là $x = -2$, $y_{CD} = 0$.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số sau: $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ -x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq (-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in i \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0 \vee x \leq 0 \Leftrightarrow x \in i$$

Vậy tập xác định của hàm số : $D = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - x + 1} \right)'}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}} = \frac{1 + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}} = \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1} \cdot 2\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ 4(x^2 - x + 1) = (1 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4 = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, lại có y' luôn tồn tại, suy ra hàm số không có điểm cực trị.

Bài 1: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = 1 + |x - 1|$ 2. $y = \sqrt{|x|}(x - 3)$

Bài 2: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

$$\mathbf{1.} \ y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}} \qquad \mathbf{2.} \ y = \frac{x^2+20}{\sqrt{x+1}}$$

Bài 3: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = x\sqrt{4 - x^2}$ **2.** $y = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$

Bài 4: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

$$\mathbf{1.} \ y = \sqrt{x}(x-3) \qquad \mathbf{2.} \ y = (x+3)\sqrt{3-2x-x^2}$$

Bài 5: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$
2. $y = \left(x + \frac{3}{2}\right) \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

Bài toán 03: TÌM CỰC TRI HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Tìm cực trị (nếu có) của hàm số : $y = 2\sin 2x - 3$

Lời giải.

TXD: $D = j$

Ta có $y' = 4\cos 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$y'' = -8\sin 2x$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -8\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 & \text{khi } k = 2n \\ 8 & \text{khi } k = 2n + 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{4} + n\pi; y\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = -1$ và đạt cực đại tại

$$x = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}; y\left(\frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = -5$$

Ví dụ 2 Tìm cực trị (nếu có) của hàm số : $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 2\sin x(2\cos x + 1)$ và $y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$y''(k\pi) = 2\cos(k\pi) + 2\cos 2(k\pi)$$

$y''(k\pi) = 6 > 0$ nếu k chẵn, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm

$$x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ và } y(2n\pi) = 0$$

$y''(k\pi) = 2 > 0$ nếu k lẻ, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm

$$x = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ và } y(2n+1)\pi = 4.$$

$$y''\left(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) < 0 \text{ suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm } x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ và}$$

$$y\left(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = \frac{9}{2}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = 2\sin 2x - 3$

2. $y = \sin^6 \frac{x}{4} + \cos^6 \frac{x}{4}$

Bài 2: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = \cos x \sqrt{\sin x}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. $y = |\cos^3 x + \sin^3 x| + 3\sin 2x$

Bài toán 04: TÌM ĐIỂM LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ CỦA SỐ HÀM SỐ

Các ví dụ

Ví dụ 1 Tìm các giá trị của m để hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm ở về hai phía khác nhau của đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$;

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(0;2) \\ x=2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow B(2;-2) \end{cases}$

$(C_m): (x-m)^2 + (y-2m)^2 = 1$ có tâm $I(m;2m)$ và bán kính $R=1$

Vì $IB = \sqrt{5m^2 + 4m + 8} \sqrt{5\left(m + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}} > 1 = R \Rightarrow$ điểm A nằm trong đường

tròn $(C_m) \Leftrightarrow IA < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < m < 1$.

Ví dụ 2 Cho đồ thị $(C): y = x^4 - 6x^2 + 2x$. Chứng minh rằng (C) có 3 điểm cực trị phân biệt không thẳng hàng. Viết phương trình đường tròn qua 3 điểm cực trị đó.

Lời giải.

Trước hết ta có $y' = 2(2x^3 - 6x + 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 1 = 0$

Xét hàm $g(x) = 2x^3 - 6x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$; và có $g(-2).g(-1) = -9 < 0$,
 $g(-1).g(1) = -9 < 0$, $g(1).g(2) = -15 < 0$. Do đó phương trình $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay hàm số có ba cực trị phân biệt.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là một điểm cực trị nào đó.

Nên có: $x_0^3 = 3x_0 - \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = x_0^4 - 6x_0^2 + 2x_0 = -3x_0^2 + \frac{3}{2}x_0$. Suy ra cả ba điểm cực

trị đều nằm trên Parabol $y = -3x^2 + \frac{3}{2}x$ nên nó không thẳng hàng.

Mặt khác lại có $y_0^2 = (-3x_0^2 + \frac{3}{2}x_0)^2 = 9x_0^4 - 9x_0^3 + \frac{9}{4}x_0^2$
 $= 9x_0 \left(3x_0 - \frac{1}{2} \right) - 9 \left(3x_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{9}{4}x_0^2 = \frac{117}{4}x_0^2 - \frac{63}{2}x_0 + \frac{9}{2}$

Suy ra $x_0^2 + y_0^2 = \frac{121}{4}x_0^2 - \frac{63}{2}x_0 + \frac{9}{2} = \frac{121}{4} \left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{y_0}{3} \right) - \frac{63}{2}x_0 + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + \frac{131}{8}x_0 + \frac{121}{12}y_0 - \frac{9}{2} = 0$.

Vậy các điểm cực trị nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{131}{8}x + \frac{121}{12}y - \frac{9}{2} = 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

<http://vnteach.com> – Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam

Bài 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số đã cho cắt đường tròn (T): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + m = 0$ một dây cung có độ dài bằng $\frac{4\sqrt{30}}{5}$.

Bài 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm M, N sao cho tứ giác AMBN là hình thoi.

Bài toán 06: TÌM CỰC TRỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ KHÁC **Các ví dụ**

Ví dụ 1 Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x=0$ và chứng minh rằng hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, biết rằng hàm số $f(x)$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x} - 1}{x^2},$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{x^2 \left[\sqrt[3]{(1+x\sin^2 x)^2} + \sqrt[3]{1+x\sin^2 x} + 1 \right]}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x\sin^2 x)^2} + \sqrt[3]{1+x\sin^2 x} + 1} = 0$$

Mặt khác $x \neq 0$, ta có : $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(1+x\sin^2 x)^2} + \sqrt[3]{1+x\sin^2 x} + 1} \Rightarrow f(x) \geq 0 = f(0).$

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng $f'(x) = 0$

nhưng hàm số $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm 0.

Lời giải.

Ta có $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.

Với mọi $x \neq 0$: $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ và $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Do đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.

Lấy một dãy $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, khi đó $f(x_n) = \frac{1}{(2n\pi)^2} \sin 2n\pi = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng bất kỳ chứa điểm 0 .

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = 0$ nên với n đủ lớn $x_n \in (a; b)$ và do $f(x_n) = 0 = f(0), \forall n \in \mathbb{N}$, theo định nghĩa cực trị của hàm số, $x = 0$ không phải là một điểm cực trị của $f(x)$.

Dạng 2: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Bài toán 01: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ HOẶC KHÔNG CÓ CỰC TRỊ.

Phương pháp .

Quy tắc 1: Áp dụng định lý 2

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số có cực trị tại điểm x_0 .

Quy tắc 2: Áp dụng định lý 3

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- Với mỗi x_i tính $f''(x_i)$.
 - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
 - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Các ví dụ

Ví dụ 1 :

1. Định m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$ không có cực trị.

2. Cho hàm số: $y = (m - 2)x^3 - mx - 2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số không có điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x - m - 2}{(x - 1)^2}$

Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức phải có: $\Delta' \leq 0 \Rightarrow 1 + m + 2 \leq 0 \Rightarrow m \leq -3$
 Vậy, với $m \leq -3$ thì hàm số không có cực trị.

2. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(m - 2)x^2 - m$

Để hàm số không có cực trị thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 0 + 4.3m(m - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$

Ví dụ 2 :

1. Định m để hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực đại, cực tiểu.

2. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số: $y = mx^4 + (m - 1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một điểm cực trị.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho xác định $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(m + 2)x^2 + 6x + m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, tức phải có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 9 - 3m(m + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3m^2 - 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$$

Vậy, với $\begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

2. Hàm số đã cho xác định $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(m - 1)x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m - 1 = 0 \end{cases} (*)$

Hàm số chỉ có một cực trị khi phương trình $y' = 0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó. Khi đó phương trình

$2mx^2 + m - 1 = 0 (*)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 0 \\ \Delta' = -2m(m - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m < 0 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -2 + m \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}; y'' = \frac{m}{\sqrt{(x^2-4x+5)^3}}$.

- + Nếu $m=0$ thì $y = -2 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.
- + $m \neq 0$ vì dấu của y'' chỉ phụ thuộc vào m nên để hàm có cực đại thì trước hết $y'' < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có nghiệm (1).

Cách 1:

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2+1} = m(x-2)$ (2).

Đặt $t = x - 2$ thì (2) trở thành :

$$mt = 2\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ (m^2-4)t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t^2 = \frac{1}{m^2-4} \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \text{ (Do } m < 0 \text{)}.$$

Vậy $m < -2$ thì hàm số có cực đại.

Cách 2: Với $m < 0$ hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{m(x_0-2)}{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = \frac{m}{2} \quad (1)$$

Với $m < 0$ thì (1) $\Rightarrow x_0 < 2$. Xét hàm số : $f(x_0) = \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2}, x_0 < 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = -1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = -\infty$$

Ta có $f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-2)^2 \sqrt{x_0^2-4x_0+5}} < 0, \forall x_0 \in (-\infty; 2)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$ 2	
f'(x)		-
f(x)	-1 $-\infty$	

Phương trình (1) có nghiệm $x_0 < 2 \Leftrightarrow \frac{m}{2} < -1 \Leftrightarrow m < -2$

Ví dụ 4: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol (P): $y = x^2 + x - 4$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - m - 2}{(x - 1)^2}, x \neq 1$. Đặt $g(x) = x^2 - 2x - m - 2$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm

phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (-m - 2) > 0 \\ g(1) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$

$A(1 + \sqrt{m + 3}; m + 2 + 2\sqrt{m + 3})$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

$A \in (P) \Leftrightarrow m + 2 + 2\sqrt{m + 3} = (1 + \sqrt{m + 3})^2 + 1 + \sqrt{m + 3} - 4 \Leftrightarrow m = -2$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1), m là tham số. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu đồng thời thời khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị đến gốc tọa độ O bằng 3 lần khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị đến O .

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = m - 1 \vee x = m + 1$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\forall m \in \mathbb{R}$.

Điểm cực đại của đồ thị là $A(m - 1; 2 - 2m)$;

Điểm cực tiểu của đồ thị là $B(m + 1; -2 - 2m)$.

$OB = 3OA \Leftrightarrow \sqrt{(m + 1)^2 + (-2 - 2m)^2} = 3\sqrt{(m - 1)^2 + (2 - 2m)^2}$

$\Leftrightarrow (m + 1)^2 + (-2 - 2m)^2 = 9[(m - 1)^2 + (2 - 2m)^2] \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = \frac{1}{2}$

Ví dụ 6: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}, x \neq 1, g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$

$$\text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ khác } 1. \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{cases}$$

$$y_1 \cdot y_2 = (1 - m)^2 - 4(-m^2 + 3m - 2)$$

$$y_1 \cdot y_2 = 5m^2 - 14m + 9 = f(m) \text{ và } f(m) \text{ có đỉnh } S\left(\frac{7}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Với } 1 < m < 2, \text{ xét } f(m) \text{ có } m = \frac{7}{5} \in (1; 2) \Rightarrow \min_{m \in (1; 2)} f(m) = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \min y_1 \cdot y_2 = -\frac{4}{5} \text{ khi } m = \frac{7}{5}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**Bài 1:**

1. Tìm m để hàm số: $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ có cực trị.

2. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số: $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một điểm cực trị.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$. Xác định m để đồ thị của hàm số đã cho có cực tiểu mà không có cực đại.

Bài 3: Tìm m để hàm số sau có cực trị:

1.

$$y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-4)x + m$$

3. $y = \frac{x^2 + (2m-1)x + m^2 + m - 3}{x + m}$

2. $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 1}{mx - 1}$

4. $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$

Bài 4: Tìm a để các hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + ax + 1$; $g(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3ax + a$ có các điểm cực trị nằm xen kẽ nhau.

Bài 5: Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Tìm m để:

1. Hàm số có ba cực trị.
2. Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Bài 6:

1. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + ab}{ax + b}$ (a, b là hai tham số, $a \neq 0$). Tìm các giá trị của a, b sao cho hàm số đạt cực trị tại $x=0$ và $x=1$.
2. Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho các điểm A(0;2) và B(2;-2) lần lượt là các điểm cực tiểu và cực đại của đồ thị hàm số.

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI ĐIỂM .

Phương pháp .

Trong dạng toán này ta chỉ xét trường hợp hàm số có đạo hàm tại x_0 .

Khi đó để giải bài toán này ,ta tiến hành theo hai bước.

Bước 1. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại x_0 là $y'(x_0) = 0$, từ điều kiện này ta tìm được giá trị của tham số .

Bước 2. Kiểm lại bằng cách dùng một trong hai quy tắc tìm cực trị ,để xét xem giá trị của tham số vừa tìm được có thỏa mãn yêu cầu của bài toán hay không?

Chú ý:

Định lý 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng (a;b) chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Trong trường hợp $f'(x_0) = 0$ không tồn tại hoặc $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$ thì định lý

3 không dùng được.

Các ví dụ

Ví dụ 1 : Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$;

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$, $y'' = 2x - 2m$

Điều kiện cần: $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2$

Điều kiện đủ:

<http://vnteach.com> – Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam

Với $m=1$ thì $y''(1)=0 \Rightarrow$ hàm số không thể có cực trị.

Với $m=2$ thì $y''(1)=-2 < 0 \Rightarrow$ hàm số có cực đại tại $x=1$.

Vậy, $m=2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét:

• Nếu trình bày lời giải theo sơ đồ sau: Hàm số đạt cực đại tại

$$x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases} (*) \text{ thì lời giải chưa chính xác}$$

Vì dấu hiệu nêu trong **định lý 3** chỉ phát biểu khi $y''(x_0) \neq 0$. Các bạn sẽ thấy điều đó rõ hơn bằng cách giải bài toán sau:

1. Tìm m để hàm số $y = x^4 + 3mx^2 + m^2 + m$ đạt cực tiểu tại $x=0$

2. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3(m-2)x^2 + (m-4)x + 2m - 1$ đạt cực đại tại $x=-1$.

• Nếu ta khẳng định được $y''(x_0) \neq 0$ thì ta sử dụng $(*)$ được.

Ví dụ 2 : Tìm các hệ số a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + ab}{ax + b}$ đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\forall x \neq -\frac{b}{a}, a \neq 0$

Ta có đạo hàm $y' = \frac{a^2x^2 + 2abx + b^2 - a^2b}{(ax + b)^2}$

• Điều kiện cần :

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2 - a^2b}{b^2} = 0 \\ \frac{16a^2 + 8ab + b^2 - a^2b}{(4a + b)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

• Điều kiện đủ : $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 4x}{(-x + 2)^2} \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Từ bảng biến thiên : hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$.

Vậy $a = -2, b = 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3 : Cho hàm số: $y = 2x^2 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên ;

<http://vnteach.com> – Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam

Ta có: $y' = 6(x-1)(x-m)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt tức là $m \neq 1$.

Với $m \neq 1$, thì đồ thị của hàm số có các điểm cực trị là

$$A(1; m^3 + 3m - 1), B(m; 3m^2).$$

$$AB = \sqrt{2} \cdot (m-1)^2 + (3m^2 - m^3 - 3m + 1) = 2 \cdot m = 0; m = 2 \text{ (thỏa điều kiện)}.$$

Vậy, $m = 0; m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$. Tìm giá trị của tham số

thực m sao cho hàm số có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn:

$$OA^2 + OB^2 = 120.$$

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

$$\text{Ta có: } y'(x) = \frac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2} = \frac{g(x)}{(x+2)^2}$$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm tức là $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\text{Nghĩa là phải có: } \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ g(-2) = m^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq 0.$$

Khi đó hai điểm cực trị là $A(-2-m; -2), B(-2+m; 4m-2)$

$$\overline{OA} = (-2-m; -2) \Rightarrow OA^2 = (-2-m)^2 + (-2)^2, \overline{OB} = (-2+m; 4m-2) \Rightarrow OB^2 = (-2+m)^2 + (4m-2)^2$$

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 = 18m^2 - 16m + 16 = 120 \Leftrightarrow m = -2 \text{ hoặc } m = \frac{26}{9} \text{ thỏa điều kiện}$$

$m \neq 0$ Vậy, $m = -2$ hoặc $m = \frac{26}{9}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5 : Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho AB nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - 2mx - 1$$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 .

Giả sử các điểm cực trị của hàm số là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Ta có: $y = \frac{1}{3}(x - m).y' - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1$ (bạn đọc xem thêm bài toán 03, dạng toán 03)

$$\square y_1 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 + \frac{2}{3}m + 1; y_2 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2 + \frac{2}{3}m + 1$$

$$\text{Suy ra: } AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (4m^2 + 4) \left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2 \right] \geq 4 \left(1 + \frac{4}{9} \right)$$

$$\square AB \geq \frac{2\sqrt{13}}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \square m = 0. \text{ Vậy, } \min AB = \frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ khi } m = 0.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - m^3 - 3m^2 + m$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m đồ thị hàm số có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm này không đổi

2. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$, chứng minh rằng với

mọi m , đồ thị (C_m) luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

3. Chứng minh rằng với mọi tham số m hàm số

$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ luôn có cực đại và cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số không đổi.

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1. $y = \frac{x^3}{3} + (2m-1)x^2 + (m-9)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

2. $y = mx^3 + 2(m-1)x^2 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

3. $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

4. $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 3 - 2m}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Bài 3:

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để đồ thị của hàm số có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

2. Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tiếp xúc với đường tròn: $(x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$.

3. $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ O .

Bài 4: Tìm m để đồ thị hàm số: có 2 cực trị, đồng thời khoảng cách giữa 2 cực trị bằng $2\sqrt{15}$.

Bài 5: Tìm m để đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6: Tìm m để đồ thị hàm số: $y = \frac{mx^2 - 1}{x}$ có hai điểm cực trị A, B và đoạn AB ngắn nhất.

<http://vn teach.com> – Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam