**Chương 3: Bài 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

**Tên FB: Phạm Thị Hồng Minh. Email: phamthihongminh2308dl@gmail.com**

**🗸Dạng 105: Viết phương trình mặt cầu**

✝❶**\_Tóm tắt lý thuyết cơ bản**

**🞠. *Phương trình mặt cầu***

Trong không gian cho mặt cầu có tâm , bán kính .



Phương trình mặt cầu là: (1)



Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu.

Đặc biệt, khi thì phương trình là .



**🞠*. Phương trình mặt cầu dạng khai triển***

Phương trình dạng với



là phương trình của mặt cầu có tâm và bán kính .



**🞠*. Tương giao giữa mặt cầu và mặt phẳng***

Trong không gian cho mặt cầu có tâm , bán kính và mặt phẳng



Gọi là hình chiếu vuông góc của lên và



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Mặt cầu và không có điểm chung. | Mặt cầu tiếp xúc với tại (là tiếp điểm) | cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm , bán kính |
|  |  |  |

**🞠*.* 🞠*. Tương giao giữa mặt cầu và đường thẳng***

Trong không gian cho mặt cầu có tâm , bán kính và đường thẳng



Gọi là hình chiếu vuông góc của lên và



+ : Mặt cầu và không có điểm chung.



+ : Mặt cầu tiếp xúc với tại (là tiếp điểm)



+ : cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt và



✝❷**\_Phương pháp Casio**

**1. Kiểm tra xem một điểm có thuộc mặt phẳng (P) hay mặt cầu (S) hay không?**

**Bước 1:** Nhập PTMP hoặc PTMC vào MTCT.

**Bước** **2:** Sử dụng phím r

x = --> nhập hoành độ, sau đó nhấn phím =

y = --> nhập tung độ, sau đó nhấn phím =

z = --> nhập cao độ, sau đó nhấn phím =

Nhấn tiếp phím =, nếu kết quả bằng 0 thì điểm đó thuộc mặt phẳng hay mặt cầu.

**2. Tính khoảng cách từ**  **tới mặt phẳng**



**Bước 1:** Nhập công thức tính khoảng cách vào MTCT :



**Bước** **2:** Sử dụng phím r

x = --> nhập hoành độ điểm M, sau đó nhấn phím =

y = --> nhập tung độ điểm M, sau đó nhấn phím =

z = --> nhập cao độ điểm M, sau đó nhấn phím =

Nhấn tiếp phím = Màn hình sẽ hiện lên kết quả.

✝❸**\_Phương pháp tính nhanh:**

Trong không gian , cho mặt cầu có tâm , bán kính



**⮱. Điều kiện tiếp xúc:**

Đường thẳng tiếp xúc với ; mp tiếp xúc với



**⮱. Tìm bán kính của mặt cầu (S) khi biết (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ**

tiếp xúc với



tiếp xúc với



tiếp xúc với  



**⮱. Tìm bán kính của mặt cầu (S) khi biết (S) tiếp xúc với các trục tọa độ**

 tiếp xúc với  

 tiếp xúc với  

 tiếp xúc với  

**🗵\_ Bài tập minh họa trong các đề đã thi của BGD**

|  |
| --- |
| **Câu 1: (THPTQG 2019 Mã đề 102)** Trong không gian , cho mặt cầu . Bán kính của mặt cầu đã cho bằng   1. **A.** . **B.** . **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy**  **+ Tư duy:** Từ phương trình mặt cầu dạng khai triển, ta tìm tâm, sau đó áp dụng công thức tìm bán kính.  **+ Công thức tính:**  Mặt cầu (S):  có tâm  và bán kính  **+ Tính toán Casio**  s1+1+0+7=  **--> Chọn phương án A** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Ta lấy hệ số trước chia cho -2 để tìm tọa độ tâm,  Tâm  Bán kính |

|  |
| --- |
| **Câu 2: (Đề tham khảo THPTQG 2019)** Trong không gian , cho hai điểm  và . Phương trình của mặt cầu có tâm  và đi qua điểm  là  **A.**   **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  Nhìn PTMC, dựa vào tọa độ tâm I loại được A và D, chỉ còn B và D.  Cách 1: Bán kính  **+ Công thức tính:**  **+ Tính toán Casio**    **Cách 2:** Mặt cầu đi qua A nên tọa độ A thỏa mãn PTMC  Bước 1: Nhập PTMC  (Q(p1)d+(Q)p1)d  +(Qnp1)dp5  Bước 2: r để nhập tọa độ điểm A  r1=2=3==  **Chọn phương án B**. | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Vì mặt cầu có tâm I và đi qua A nên bán kính  Sử dụng công thức tính độ dài đoạn thẳng để tìm R  Khi bấm MTCT, có thể tính ngay  + Nhập PTMC vào máy tính, chuyển hết sang vế trái, sử dụng phím r để nhập tọa độ điểm A vào .  + Nếu kết quả = 0 thì tọa độ A thỏa. |

|  |
| --- |
| **Câu 3: (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110)** Trong không gian hệ tọa độ , tìm tất cả các giá trị của  để phương trình  là phương trình của một mặt cầu.  **A.** . **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy**  **+ Tư duy:**  Phương trình  là phương trình của mặt cầu  **+ Công thức tính:**      **+ Tính toán Casio**  Có thể nhẩm trực tiếp vì bài này đơn giản  Hướng dẫn nhập công thức    r6==  **--> Loại A, D**  r5==  **--> Chọn phương án C** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Ta lấy hệ số trước  chia cho -2 để tìm tọa độ tâm  Có thể nhập vế trái vào máy tính, nhấn phím r để kiểm tra kết quả, nếu kết quả là số dương thì nhận đáp án đó. |

|  |
| --- |
| **Câu 4: (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104)** Trong không gian với hệ trục tọa độ , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm , ,  và có tâm thuộc mặt phẳng  **A.** . **B.** .  **C.** . **D.** . |

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**   * Tọa độ của 3 điểm , ,  thỏa mãn PTMC. * Tâm  thuộc  nên tọa độ của  thỏa mãn phương trình   **+ Công thức tính:**  Mặt cầu (S):  có tâm  **+ Tính toán Casio**  Bước 1: Nhập PTMC vào MT, kiểm tra tọa độ M, N, P có thỏa mãn không.  Q(d+Q)d+Qndp2  Q(+2Q)p2Qnp10  r2=3=3==  **Loại phương án A.**    r2=3=3==    Kiểm tra thấy tọa độ 3 điểm đều thỏa mãn PTMC.  Giữ lại phương án B.  Bước 2: Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu, kiểm tra tọa độ I có thỏa mãn PTMP  không.  2Q(+3Q)pQn+2  r2=p1=3==  **Chọn phương án B** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  + Nhập PTMC vào MTCT. Thế tọa độ của 3 điểm vào PTMC, sử dụng phím r để kiểm tra kết quả, loại trừ phương án nhiễu.  + Nhập PTMP, thế tọa độ của điểm , sử dụng phím r , nếu kết quả bẳng 0 là đúng.  Ta lấy hệ số trước chia cho -2 để tìm tọa độ tâm,  Sử dụng phím Replay  để sửa lại PTMC và làm tương tự  Cần thử tọa độ cả 3 điểm vào PTMC  (S):  có tâm  + Nhập PTMP  Thế tọa độ của điểm , sử dụng phím r , nếu kết quả bẳng 0 là đúng. |

|  |
| --- |
| **Câu 5: (THPT QG 2017 Mã đề 105)** Trong không gian với hệ tọa độ , cho điểm  và mặt phẳng . Mặt cầu tâm  tiếp xúc với  tại điểm . Tìm tọa độ điểm  **A.** . **B.** . **C.** . **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy**  **+ Tư duy:**  Điểm thuộc nên tọa độ H thỏa mãn phương trình  tiếp xúc với  tại  **+ Công thức tính:**  ;    **+ Tính toán Casio**  Bước 1: Kiểm tra xem tọa độ H thỏa PTMP không  2[p2Q)pQnp4  rp3=0=p2==  **--> Loại phương án A.**  **Tương tự, loại phương án B.**  r3=0=2==  **--> Giữ lại phương án A.**  Kiểm tra thấy cả hai phương án A và D đều thỏa.  Bước 2: So sánhvà  có VTPT  ,  **Chọn đáp án C** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Kiểm tra xem tọa độ điểm H ở đáp án có thỏa mãn phương trình  không.  tiếp xúc với  tại  , |

**#Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

**🗵\_ Bài tập áp dụng rèn luyện trong các đề thi thử năm 2019**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **3NB** | **4TH** | **2VD** | **1VDC** |

|  |
| --- |
| **Câu 1: (NB) [2H3-0.0-2]** Trong không gian , cho hai điểm  và . Mặt cầu đường kính  có phương trình là  **A.** . **B.** .  **C.** . **D.** . |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  Cách 1: Tọa độ , thỏa mãn PTMC  Cách 2: Mặt cầu có tâm là trung điểm của , bán kính  **+ Công thức tính:**  là trung điểm của nên    **+ Tính toán Casio**  **Cách 1:**  Q(d+(Q)p2)d+  (Qnp1)dp20  r1=2=3==  **--> Loại phương án A.**  **Làm tương tự, thấy chỉ mỗi phương án C thỏa.**  **Chọn phương án C.**  **Cách 2:**  aQz+QxR2    r1=p1==    (1+1)d+(2p2)  d+(3+1)d=    **Chọn phương án C.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Vì mặt cầu đi qua ,  nên tọa độ , thỏa mãn PTMC.  Nhập PTMC vào MTCT, chuyển vế để vế phải bằng 0. Thế tọa độ của 2 điểm vào PTMC, sử dụng phím r để kiểm tra kết quả, loại trừ phương án nhiễu.  Sử dụng phím Replay  để sửa lại PTMC và làm tương tự  Cần thử tọa độ cả 2 điểm vào PTMC  Nhập công thức tính tọa độ trung điểm vào MTCT  Thế tọa độ của 2 điểm vào công thức, sử dụng phím r  A= --> nhập hoành độ của M  B= --> nhập hoành độ của N  Làm như vậy 3 lần để tìm tọa độ tâm    Tinh ý, nhìn vào đáp án trong bài này, ta không cần tìm tâm, vì tâm trong 4 đáp án là như nhau, chỉ cần tính nhanh MN là được. |

|  |
| --- |
| **Câu 2: (NB)**Trong không gian với hệ tọa độ  phương trình nào sau đây là phương trình của một mặt cầu?  **A.**. **B.** .  C. . **D.** . |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  PT  (\*) là phương trình của mặt cầu khi  **+ Công thức tính:**  Kiểm tra điều kiện  **+ Tính toán Casio**    **Chọn phương án C.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Trong PT (\*), hệ số của , ,  đều bằng nhau và bằng 1, không chứa tích của , ,  --> loại phương án A, D.  Nếu  thì (\*) luôn là phương trình mặt cầu. |

|  |
| --- |
| **Câu 3: (TH)** Trong không gian với hệ tọa độ , mặt cầu tâm  và tiếp xúc với trục  có phương trình là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  tiếp xúc với  **+ Công thức tính:**  **+ Tính toán Casio**  s2d+(p3)d  **Chọn phương án B** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  tiếp xúc với  (Trong công thức tính không có ) |

|  |
| --- |
| **Câu 4: (TH)** Trong không gian với hệ tọa độ , phương trình mặt cầu đi qua hai điểm  và có tâm thuộc trục  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy**  **+ Tư duy:**  Tâm  thuộc trục  nên  Tọa độ của 2 điểm ,  thỏa mãn PTMC.  **+ Công thức tính:**  --> phương trình (S) là  **+ Tính toán Casio**  Q(d+Q)d+Qnd  p2Qnp10  r3=p1=2==  r1=1=p2==  **Chọn phương án A** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Tâm  thuộc trục  nên trong phương trình mặt cầu sẽ không có biểu thức của và  --> Loại phương án B, C.  Cần thử tọa độ cả 2 điểm vào PTMC |

|  |
| --- |
| **Câu 5: (TH)** Trong không gian , viết phương trình mặt cầu  đi qua bốn điểm  và .  **A. .** **B. .**  **C. .** **D. .** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  Mặt cầu  đi qua bốn điểm  nên tọa độ của các điểm này thỏa mãn phương trình mặt cầu.  **+ Công thức tính:**  Nhập PTMC vào MTCT.  Thế tọa độ của 4 điểm vào PTMC  **+ Tính toán Casio**  Q(d+Q)d+Qnd  pQ(+2Q)p4Qn  r0=p2=0==  Điểm  thuộc PTMC  Tương tự, điểm  thuộc PTMC  **Chọn phương án C** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Nhập PTMC vào MTCT. Thế tọa độ của 4 điểm vào PTMC, sử dụng phím r để kiểm tra kết quả, loại trừ phương án nhiễu.  Sử dụng phím Replay  để sửa lại PTMC và làm tương tự  Cần thử tọa độ cả 3 điểm vào PTMC, không cần thử tọa độ của điểm O vì trong PTMC không có hệ số tự do. |

**#Lời giải**

|  |
| --- |
| **Câu 6: (TH)** Trong không gian với hệ tọa độ***,*** cho mặt phẳng :  và điểm . Mặt cầu  tâm  và tiếp xúc  có phương trình  **A.** . **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  tiếp xúc với  **+ Công thức tính:**  ;    **+ Tính toán Casio**  aq(2Q(+2Q)p  Qnp3Rs4+4+1  r1=2=p3==    **Chọn phương án C** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Dựa vào PTMC và tọa độ tâm I, loại được phương án A.  Có thể thế trực tiếp tọa độ điểm I vào công thức để tìm bán kính, hoặc bấm công thức, rồi dùng phím r |

|  |
| --- |
| **Câu 7: (TH)** Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho mặt cầu  có tâm  và mặt phẳng . Biết rằng mặt phẳng  cắt mặt cầu  theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng . Viết phương trình mặt cầu .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy**  **+ Tư duy:**  cắt mặt cầu  theo giao tuyến là đường tròn  có bán kính  với  Khi đó  **+ Công thức tính:**  ;    **+ Tính toán Casio**  aq(Q(+Q)p2Qn  +1Rs1+1+4  r2=1=p4=    Md+1d=    **Chọn phương án A** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Dựa vào PTMC và tọa độ tâm I, loại được phương án B, C.  Cần tính  cắt mặt cầu  theo giao tuyến là đường tròn  có bán kính  thỏa    Có thể thế trực tiếp tọa độ điểm I vào công thức để tìm bán kính, hoặc bấm công thức, rồi dùng phím r |

.

|  |
| --- |
| **Câu 8: (TH)** Trong không gian , cho hai điểm , . Gọi  là mặt cầu có tâm  thuộc mặt phẳng , bán kính  và đi qua hai điểm , . Biết  có tung độ âm, phương trình mặt cầu  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  Kiểm tra xem điểm A, B thỏa mãn PTMC nào, loại phương án nhiễu.  Chọn ra mặt cầu có bán kính  **+ Công thức tính:**  Mặt cầu (S):  có tâm và bán kính  **+ Tính toán Casio**  Q(d+Q)d+Qnd  +6Q)p2  r1=0=p1==    **Chọn phương án A** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  thuộc mặt phẳng  nên , trong PTMT, hệ số trước z bằng 0;  có tung độ âm nên y < 0, dấu trước hệ số của y trong PTMC là dấu “+”  Nhập PTMC vào MTCT. Thế tọa độ của 2 điểm vào PTMC, sử dụng phím r để kiểm tra kết quả, loại trừ phương án nhiễu.  Sử dụng phím Replay  để sửa lại PTMC và làm tương tự  Kiểm tra thấy tọa độ A, B thỏa phương án A, tính được bán kính |

|  |
| --- |
| **Câu 9: (VDT)** Trong không gian với hệ tọa độ  cho mặt phẳng  và các điểm , . Mặt cầu  có bán kính nhỏ nhất đi qua và tiếp xúc với mặt phẳng  có tâm là  **A. .** **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  Tìm thỏa  **+ Công thức tính:**  ;    **+ Tính toán Casio**  aq(2Q(pQ)+2Qn+  5Rs4+1+4=  r1=2=2==        **Chọn phương án A** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Tính  Chọn đáp án nào có  Kiểm tra thấy chỉ phương án A thỏa đề và có bán kính nhỏ nhất |

|  |
| --- |
| **Câu 10: (VDT)** Trong không gian , cho mặt phẳng  và mặt phẳng . Gọi  là một mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt phẳng. Bán kính của  bằng  **A.** . **B.** . **C.**. **D.** 9. |

**Lời giải #Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**  **+ Tư duy:**  Do mặt cầu  tiếp xúc với hai mặt phẳng song song nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đó chính bằng đường kính của .  **+ Công thức tính:**  ;    **+ Tính toán Casio**  aq(6+3Rs1+4+4=    **Chọn đáp án C** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  Lấy điểm . Ta có  .  **Áp dụng công thức tính nhanh** |