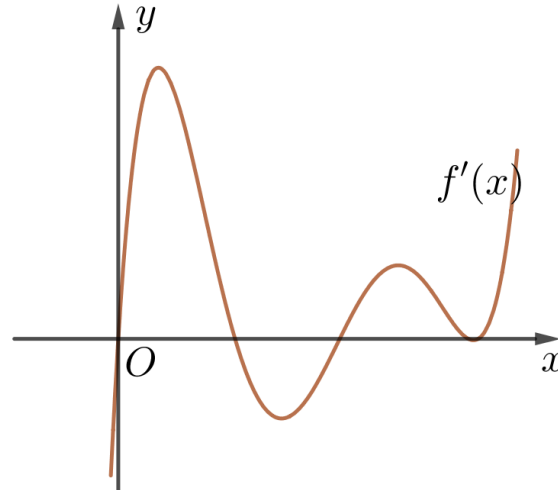


DẠNG 8**Tìm cực trị của $f(u)$ khi biết $f(x)$ hoặc $f'(x)$**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		↗ 1	↘ -2	↗ 1	↘

A. $x = -\frac{1}{2}$.B. $x = \frac{1}{2}$.C. $x = 1$.D. $x = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

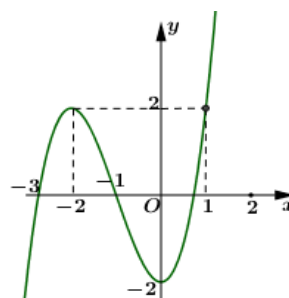
A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

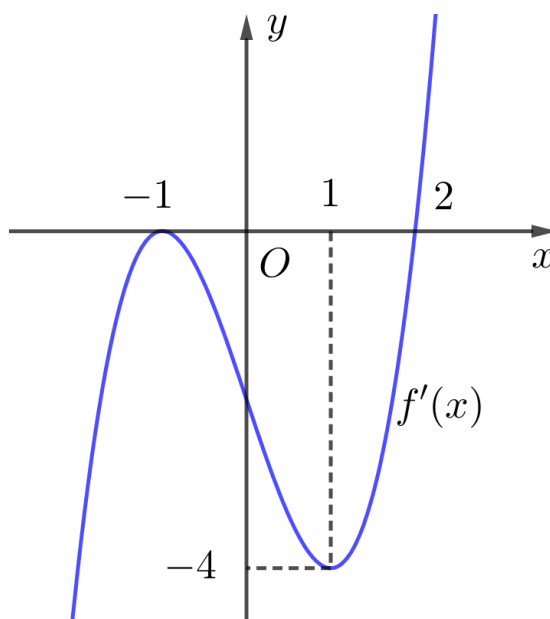
A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.



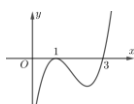
A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



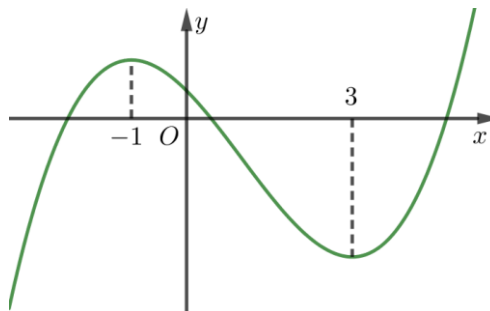
Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)^4(x-3)^5(x+1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

- A. 1.
- B. 5.
- C. 3.
- D. 2.

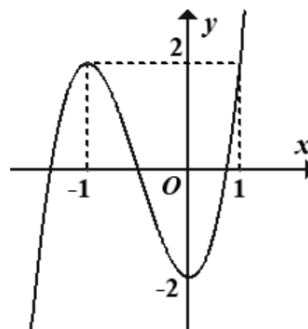
Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là:

- A. 2.
- B. 4.
- C. 8.
- D. 10.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 0.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

- A. $x = 0$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 3$.
- D. $x = 1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

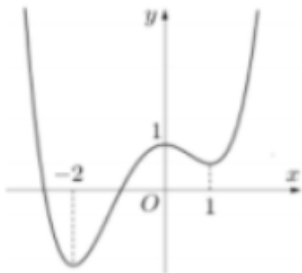
Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ là :

- A. 7 .
- B. 9 .
- C. 3 .
- D. 5 .

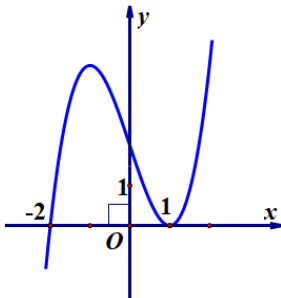
Câu 14: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số cực trị của hàm số $y = f\left(\left|x + 1\right| - 3\right)$ là

- A. 3 .
- B. 8 .
- C. 7 .
- D. 4 .

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Sô điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 3\right)$ là

- A. 5 .
- B. 4 .
- C. 2 .
- D. 3 .

Câu 16: Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$	
		-1			-1			

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right) = x^4\left[f\left(x - 1\right)\right]^2$ là

- A. 7 .
- B. 5 .
- C. 9 .
- D. 11 .

Câu 17: Cho hàm số $y = f\ x$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

$\nearrow 4 \searrow -3 \nearrow$

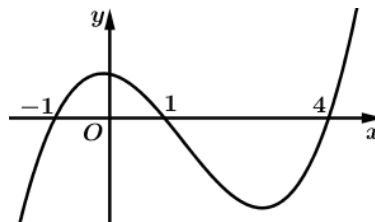
Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(3x)$ là

- A. $y = -3$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $x = 2$ D. $x = -\frac{2}{3}$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

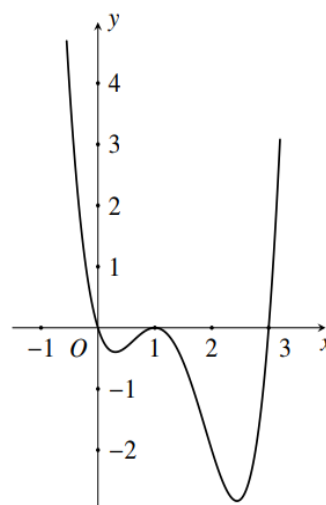
Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:



Hàm số $y = f(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ hình vẽ sau



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2	-1	$+\infty$
		-3			

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ là:

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2	3		-2		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

- A. 11. B. 9. C. 7. D. 5.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 5})$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

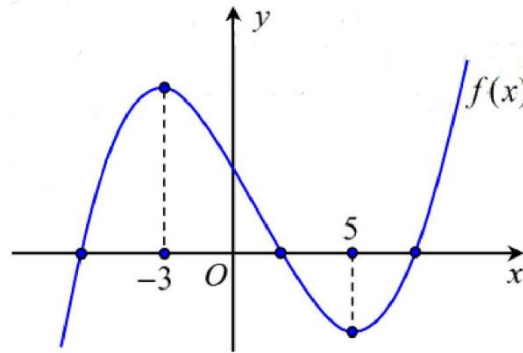
Câu 25: Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-1	1		-1		$+\infty$

Hỏi hàm số $y = g(x) = [f(x^2) - 1]^4$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



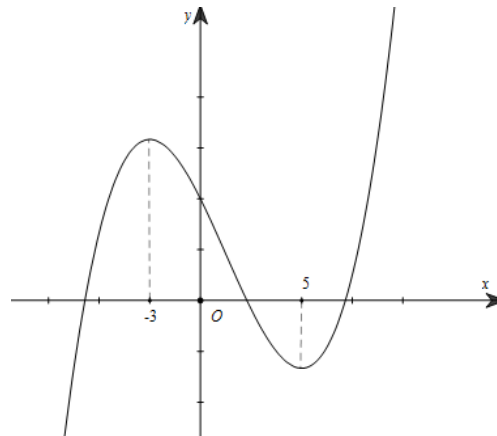
A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 27: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



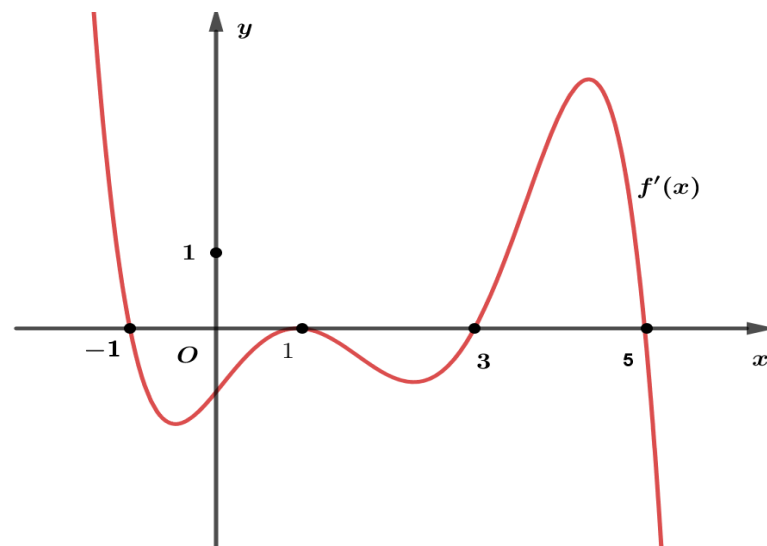
A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(6 - 2\sqrt{6x - x^2})$ có tất cả bao nhiêu cực đại?



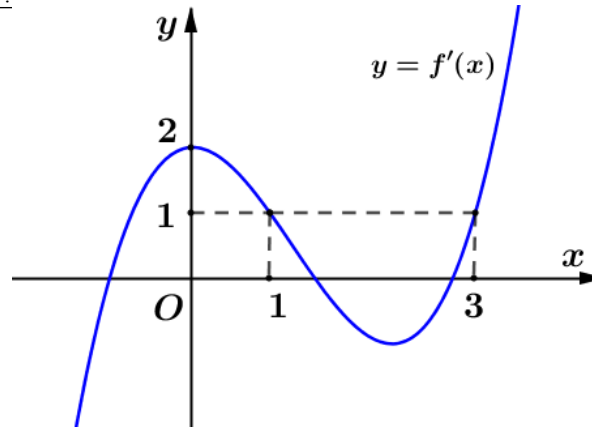
A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

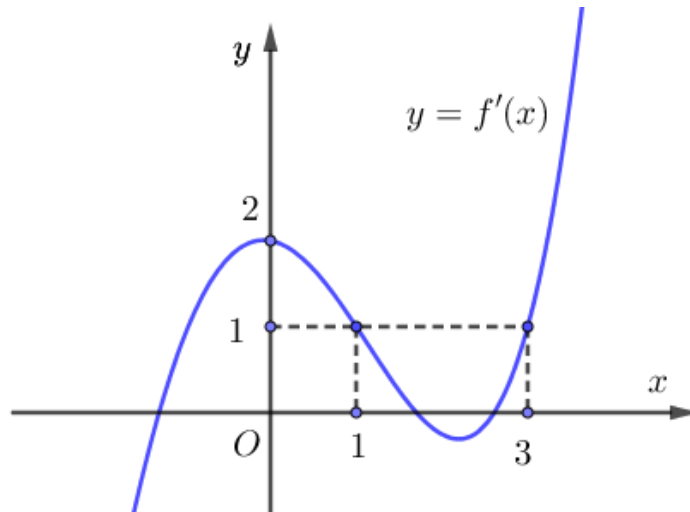
Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là

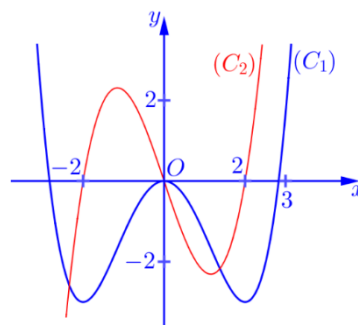
- A. 2 B. 5 C. 3 D. 4

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là



- A. 2. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f[e^{-x} \cdot f(x)]$ trên khoảng $(-\infty; 3)$ là



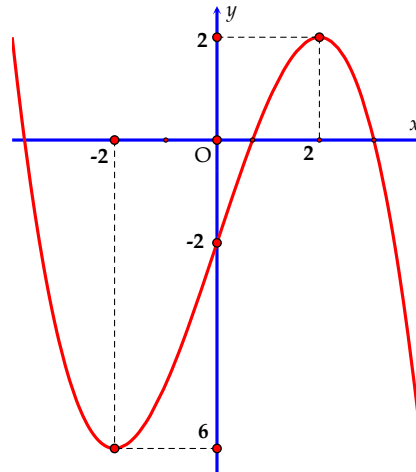
- A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^3(2^x - 8)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị hàm số như hình bên. Điểm cực

đại của đồ thị hàm số $y = f(2-x) + 3$ là



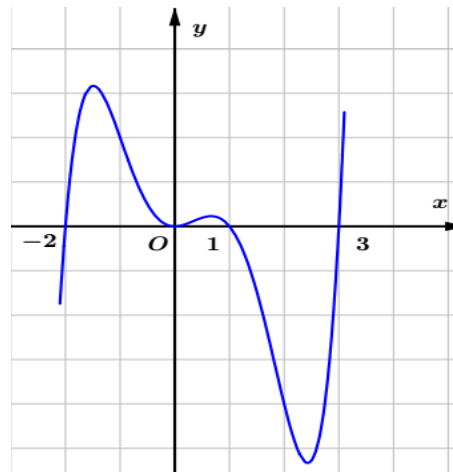
A. $(0; 5)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(5; -6)$.

D. $(5; 3)$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = |f(x-2017) + 2018|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2.

B. 3.

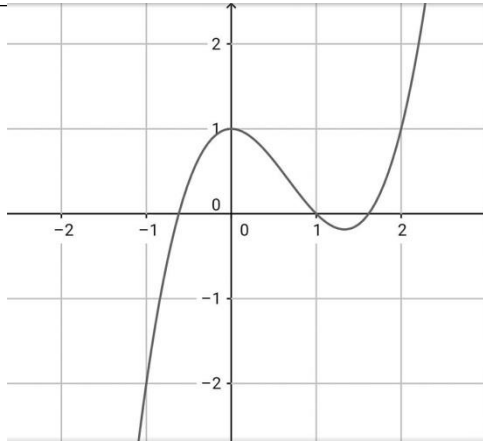
C. 4.

D. 5.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

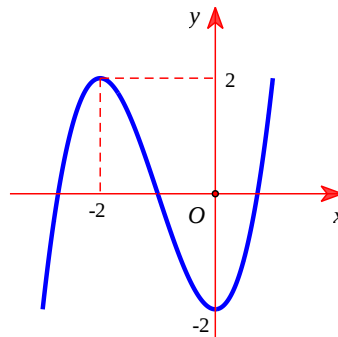
$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \text{ đạt cực đại tại điểm nào?}$$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số



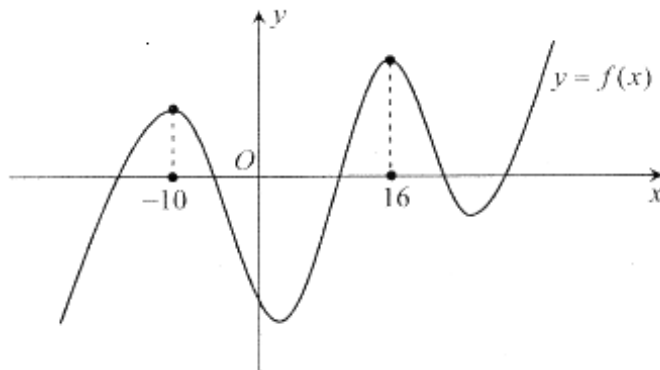
- A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$ là



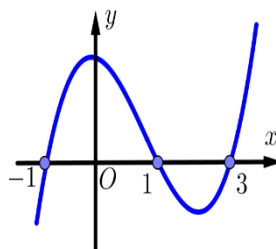
- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y = f(x^3 - 12x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 11. B. 10. C. 12. D. 9.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(xe^x)$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4$.

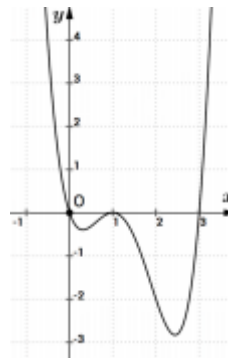
A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

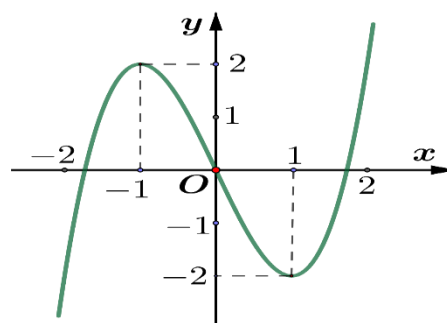
A. 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y = f'(x) = x^2 - 4x - 5$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x^3 - 3x^2)$ là

A. 2.

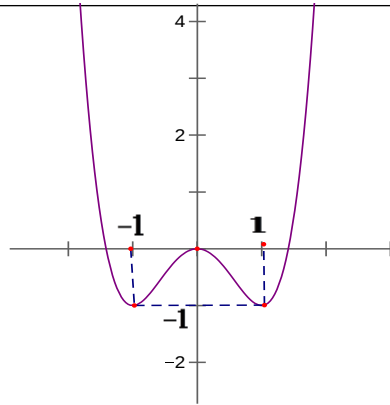
B. 7.

C. 6.

D. 4.

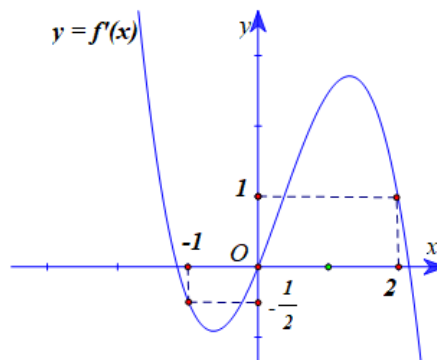
Câu 44: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là



- A. 11. B. 9. C. 8. D. 10.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

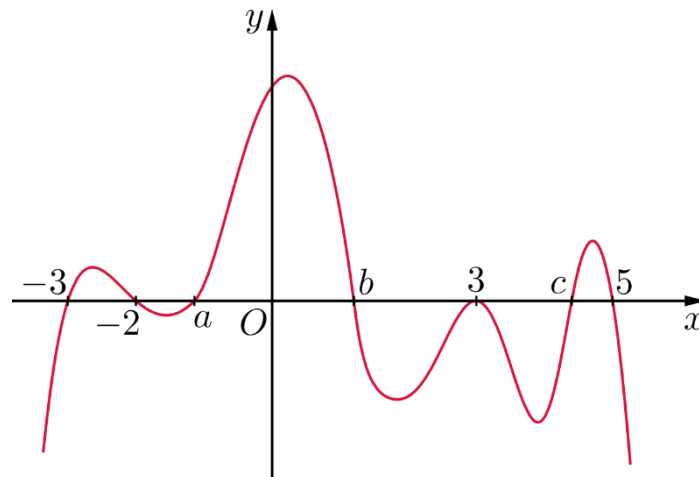
A. 9

B. 4

C. 7

D. 5

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với $-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. Vô số.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

A. $x = 3$.B. $x = 0$.C. $x = 1$.D. $x = -1$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

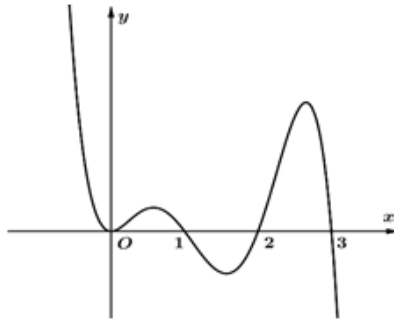
A. 5.

B. 9.

C. 11.

D. 7.

Câu 51: Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị của $m \in [0; 6]; 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

- A. 7. B. 5. C. 3. D. 6.

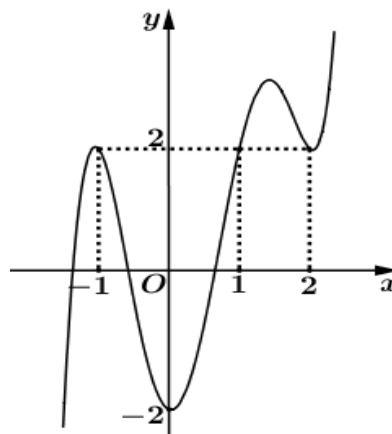
Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	5	-1	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

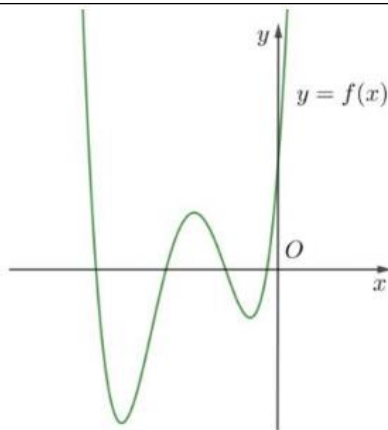
Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x-1)$ như hình vẽ



Khi đó hàm số $y = e^{f(x) + 2x}$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x_0 \in (-1; 0)$. B. $x_0 \in (-4; -2)$. C. $x_0 \in (0; 1)$. D. $x_0 \in (-2; -1)$.

Câu 54: Cho hàm số $F(x)$ có $F(0) = 0$. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $G(x) = |F(x^6) - x^3|$ là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\nearrow$	$\searrow -3$	$\nearrow 2$	$\searrow -\infty$	

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = |f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3)|$ là

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow -1$	$\searrow -\frac{61}{3}$	$\nearrow +\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - x)$, $x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

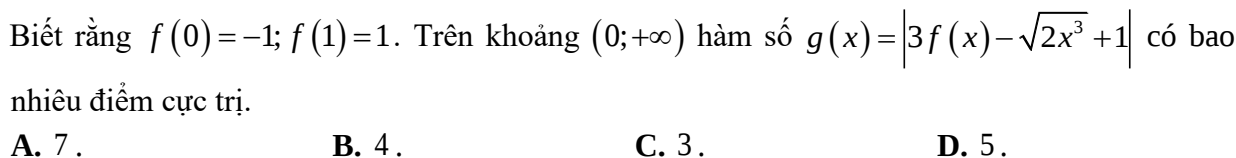
A. 154.

B. 17.

C. 213.

D. 153.

Câu 58: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như hình vẽ bên



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$					

A. 7. **B. 8.** **C. 5.** **D. 9.**

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-2	3	$-\infty$

A. 7. **B. 8.** **C. 9.** **D. 5.**

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		0		5		$-\infty$

Tư duy toán học 4.0 – Luyện thi Đại học 2022 | 16

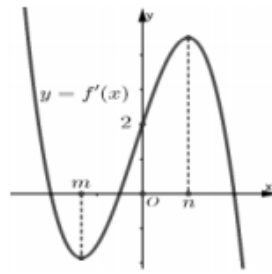
A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 62: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $e > n$



Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là

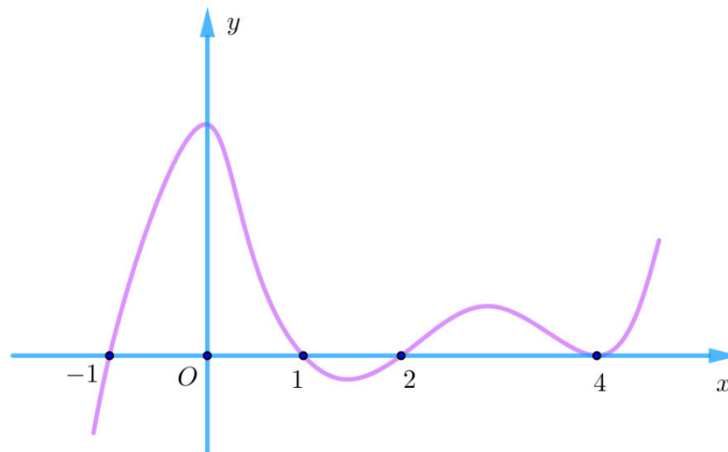
A. 7.

B. 6.

C. 10

D. 14.

Câu 63: Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị?

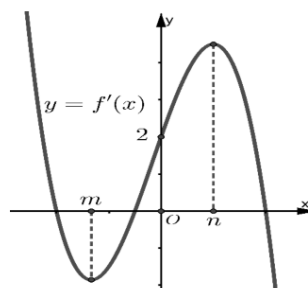
A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

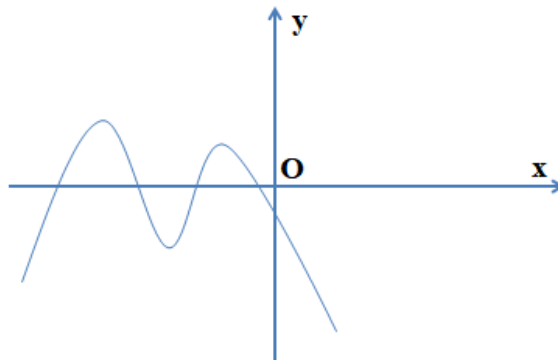
A. 7.

B. 10.

C. 14.

D. 6.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



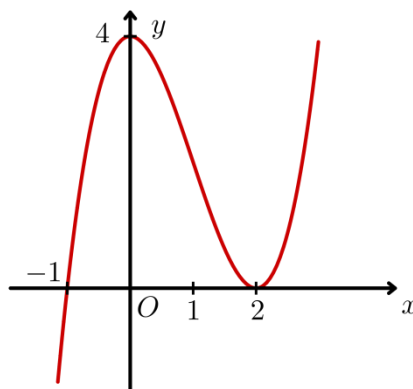
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) + x^2|$ là

- A. 3. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 16)(x + 1)(x^2 - 4x + m - 4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021; 2021]$ sao cho hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 2025. B. 2026. C. 2021. D. 4043.

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f(f'(x))$, $h(x) = f'(f(x))$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

- A. 12. B. 11. C. 8. D. 13.

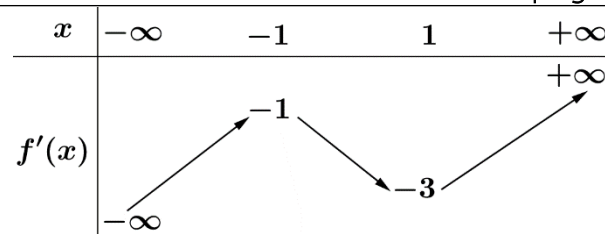
Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 69: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(1) \leq 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $g(x) = \left| f(\sqrt{x^2+1}) + x^2 \right|$ có mấy điểm cực trị?

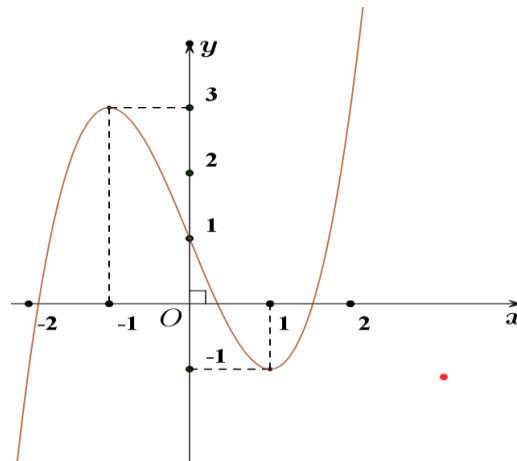
A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?

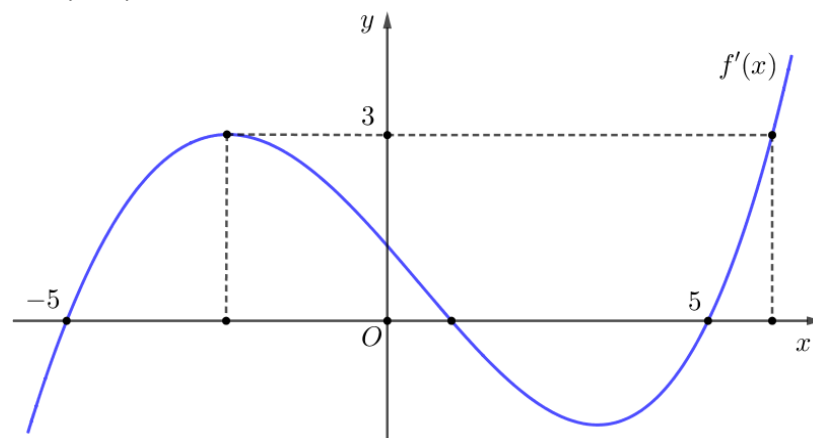
A. 20.

B. 16.

C. 15.

D. 18.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(10) = 30$, $f(-6) = 30$, $f(5) = 30$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f[f(x) - 3x + 9]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



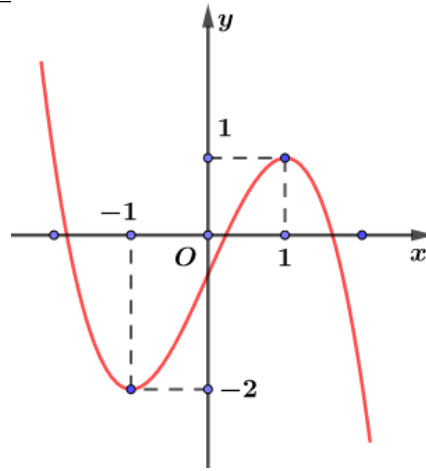
A. 7.

B. 9.

C. 5.

D. 3.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(e^{f(x)} - \frac{1}{2}f(x)^2 - f(x)\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



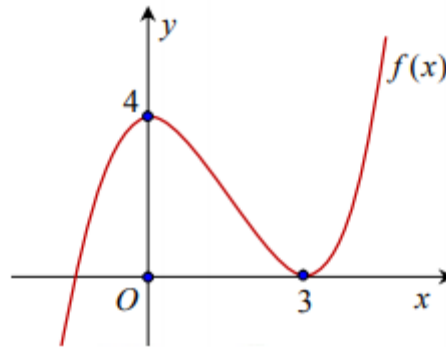
A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 9.

Câu 73: Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(3f(x) - m)$ có đúng 6 điểm cực trị?



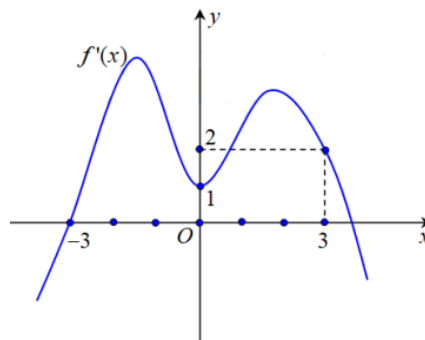
A. 7.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Câu 74: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f'(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$; có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - \left(\frac{x^2 + 6x}{3}\right) \cdot f(x) + \left(\frac{x^2 + 6x}{6}\right)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Giá trị $\min\left(\min_{x \in (-\infty; 3]} f(x)\right)$ bằng



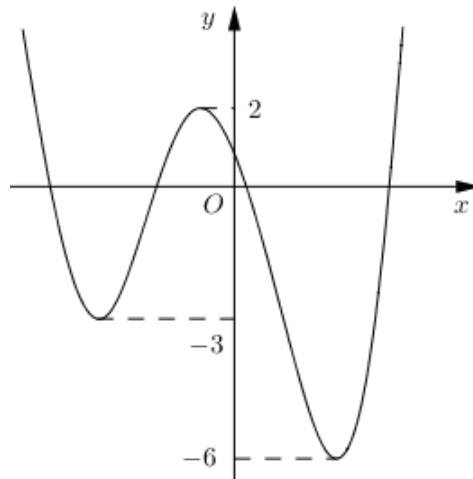
A. 0.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 75: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



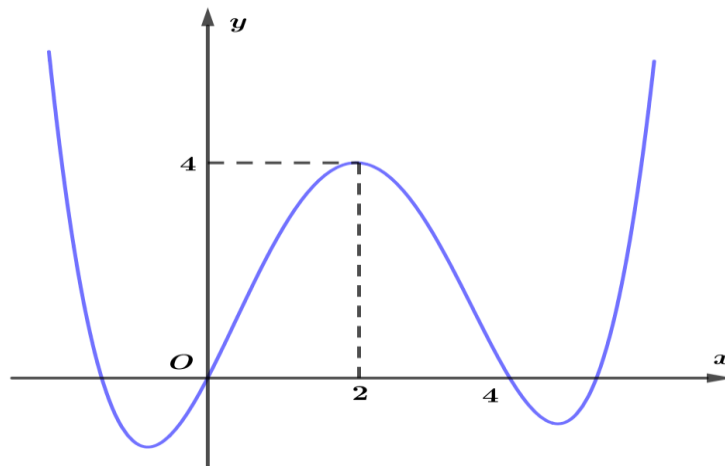
A. 12.

B. 14.

C. 15.

D. 13.

Câu 76: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$ là



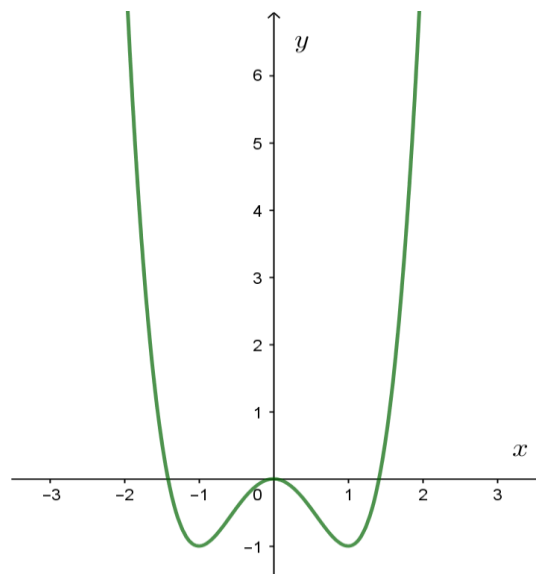
A. 7.

B. 10.

C. 5.

D. 11.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Câu 78: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	6	2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2} (f(x) - 6)^4$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	-1	0	1	0

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 80: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

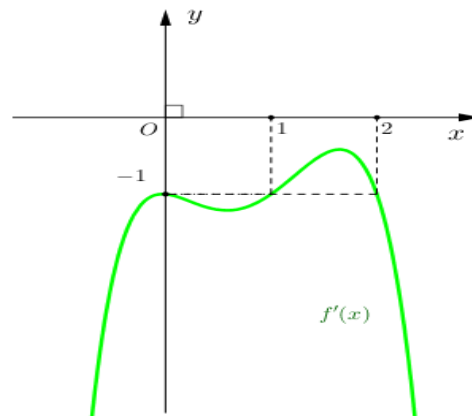
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$ là



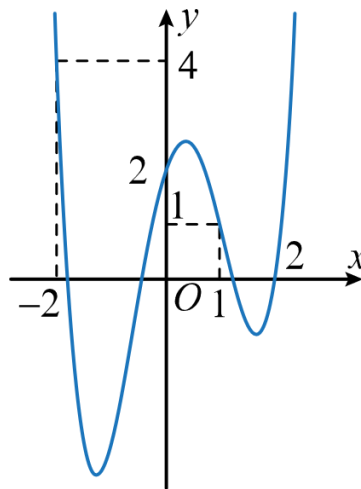
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4$ là

A. 7.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

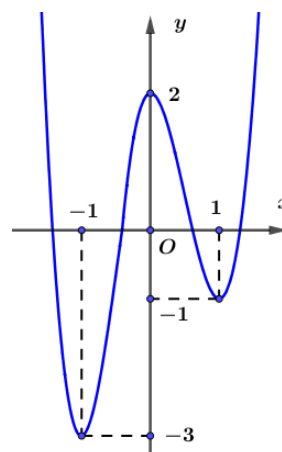
A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Câu 84: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ là



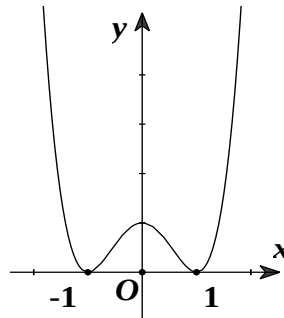
A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Câu 85: Vậy hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ có 5 điểm cực trị. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin^2 x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$?

A. 15.

B. 11.

C. 9.

D. 13.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

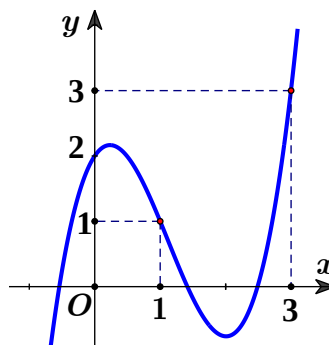
A. 9.

B. 7.

C. 11.

D. 5.

Câu 87: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ là

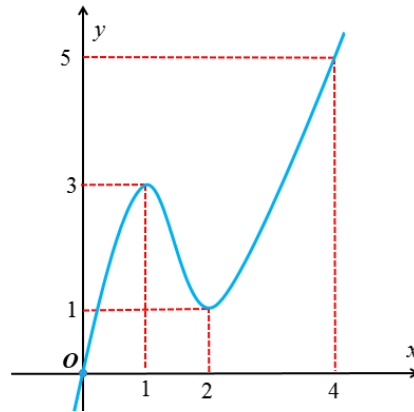
A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$.



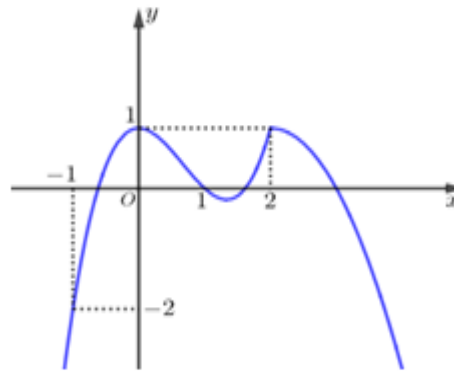
A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

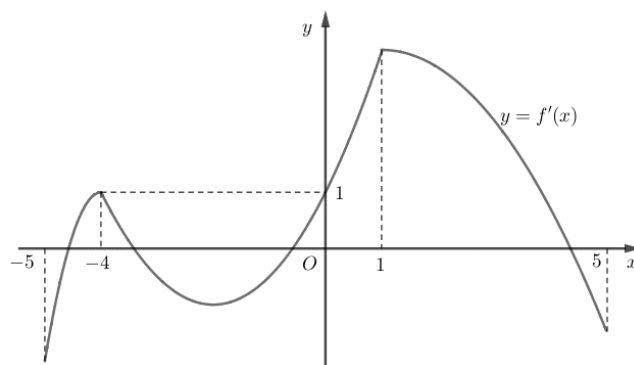
A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



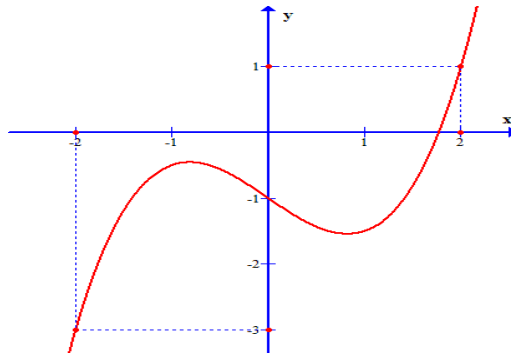
A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Câu 91: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = \left| 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

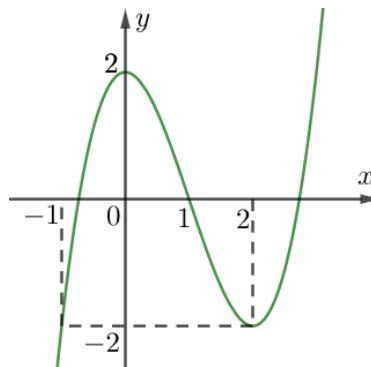
Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1		$+\infty$

Hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - x^2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



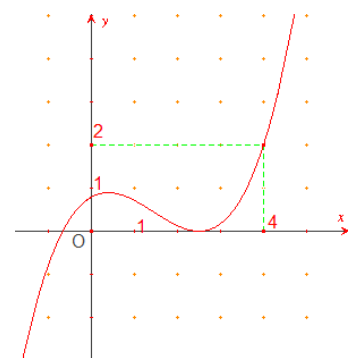
Hàm số $g(x) = \left| 5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$?

- A. 16. B. 32. C. 17. D. 33.

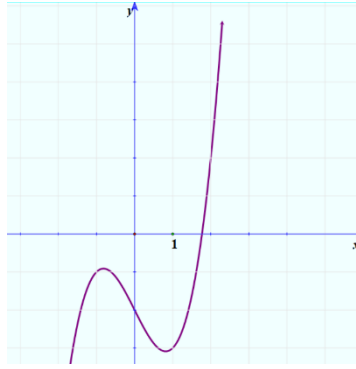
Câu 94: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{2}{3}x^3 \right|$.

- A. 3. B. 7.
C. 6. D. 5.



Câu 95: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(0) = 2021$ và đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y = |f(x^2) - 2|x| - 2021|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

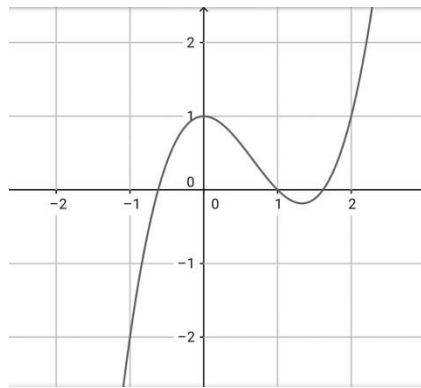
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 96: Cho $f(x)$ là một hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(1) = -\frac{5}{3}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $g(x) = \left| f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = \left| 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7.

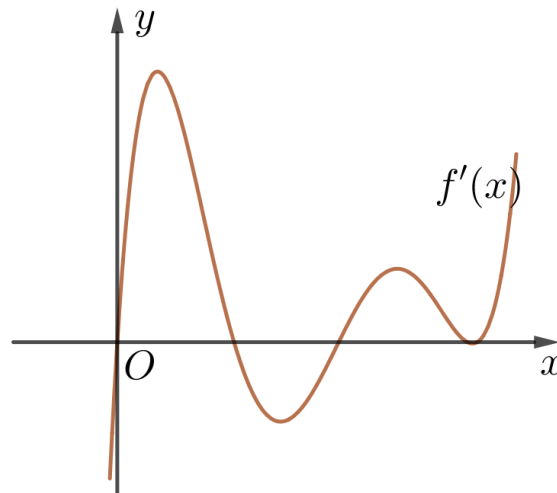
B. 6.

C. 3.

D. 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3.

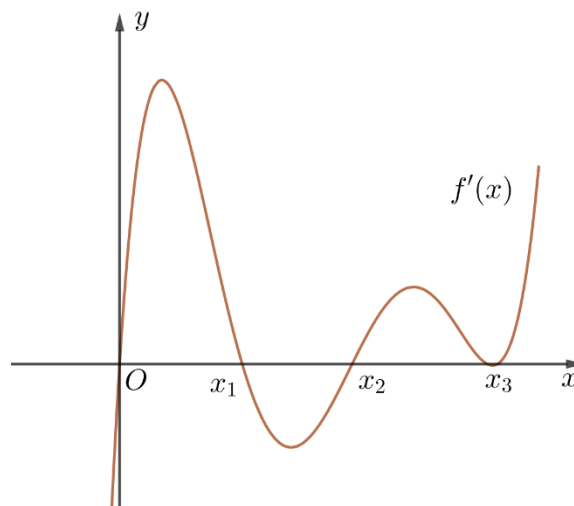
B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn A



Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	x_1	x_2	x_3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

Suy ra hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow 1$	$\searrow -2$	$\nearrow 1$	$\searrow$

A. $x = -\frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = 1$.

D. $x = 0$

Lời giải

Chọn B.

$$g'(x) = -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -1 \\ 1-2x = 0 \\ 1-2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$ CĐ	$\searrow$ CT	$\nearrow$ CĐ	$\searrow$

Ta xét dấu bằng cách thay số

Với $x = 2 \Rightarrow g'(2) = -2f'(-3) < 0$

Với $x = \frac{3}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = -2f'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

Với $x = \frac{1}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{1}{4}\right) = -2f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

Với $x = -1 \Rightarrow g'(-1) = -2f'(3) > 0$

Vậy hàm số $y = f(1 - 2x)$ đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

$$\text{Suy ra: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \end{cases}$$

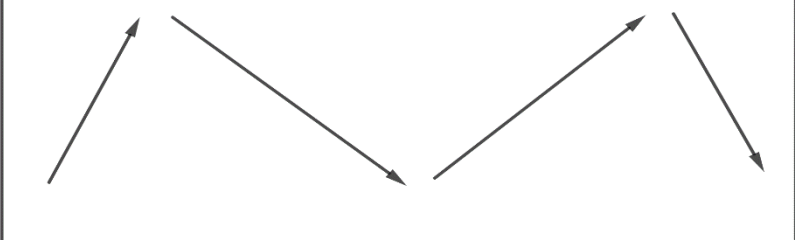
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Xét } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ f'(x^2 - 2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x^2 - 2x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \leq 0 \\ f'(x^2 - 2x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x \geq 3 \\ x^2 - 2x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}.$$

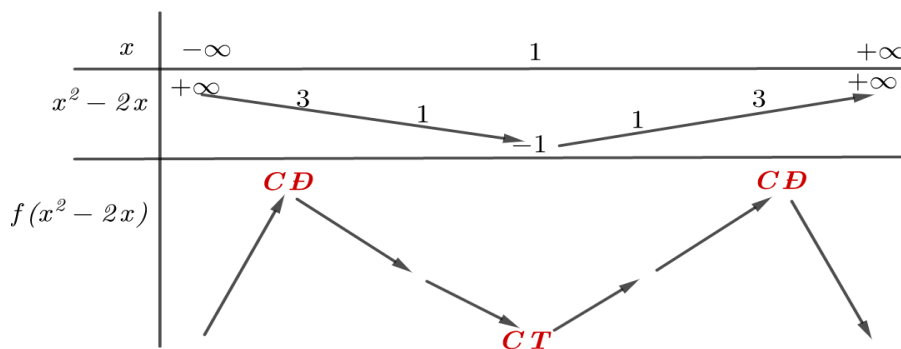
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$				
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$											

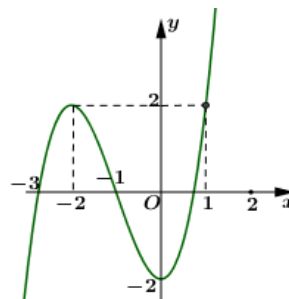
Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có 1 điểm cực tiểu.

Cách khác:

Từ BBT hàm $f(x^2 - 2x)$ được mô tả ở dưới ta suy ra hàm có 1 điểm cực tiểu.



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$.

Xét phương trình $f'(x) \cdot e^{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0, (e^{f(x)} > 0, \forall x)$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -1, x = a, (0 < a < 1)$.

Các nghiệm này là các nghiệm đơn. Do vậy hàm số $y = e^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau biến thiên như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$:

$$g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \text{ đều là các nghiệm bội lẻ.}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

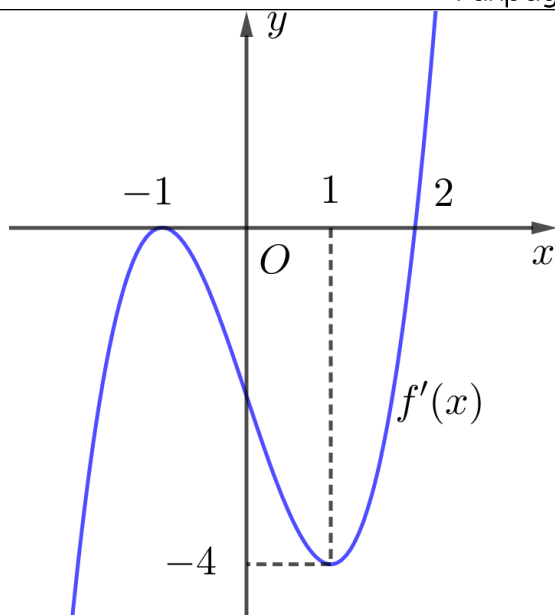
D. 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ ta thấy đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm 2 lần nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$.

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

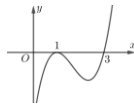
Nhận xét: $f'(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = -1$ là nghiệm kép.

Bảng biến thiên

x	0	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$		
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có 2 điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	+
$f(x)$				

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)^4(x-3)^5(x+1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

- A. 1.
- B. 5.
- C. 3.
- D. 2.

Lời giải

Chọn C

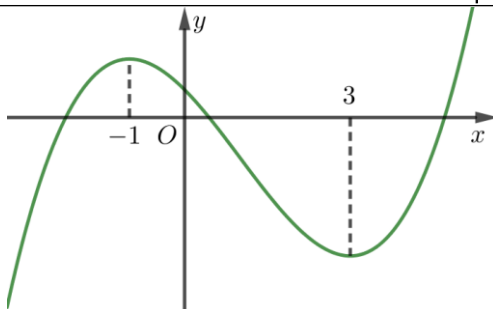
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+ 0	+ 0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$f(-1)$		$f(3)$		$+\infty$

x	$-\infty$		-3	0	3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$f(3)$		$f(0)$		$+\infty$

Vậy hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là:

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2(x-1)f'((x-1)^2 + m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'((x-1)^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 = -1-m(1) \\ (x-1)^2 = 3-m(2) \end{cases}$$

+) Nếu $-1-m=0 \Leftrightarrow m=-1$ khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 nên $m=-1$ thỏa mãn.

+) Nếu $3-m=0 \Leftrightarrow m=3$ khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = -4$ vô nghiệm. Do đó, $m=3$ không thỏa mãn.

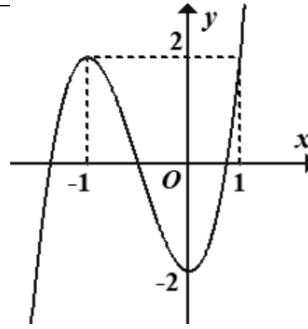
+) Để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị thì phương (1) có hai nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm; hoặc (1) vô nghiệm và (2) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-m > 0 \\ 3-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Vậy $-1 \leq m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Chọn A.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn.

Đặt $g(x) = e^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.

Vì $e^{f(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn chính là 3 nghiệm của $f'(x) = 0$.

Do đó hàm số $y = e^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

A. $x = 0$.

B. $x = -1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 1$.

Lời giải

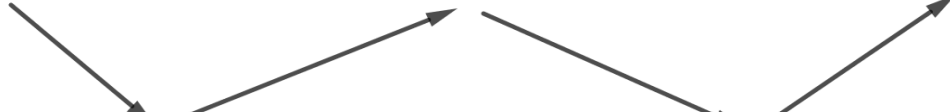
Chọn D

Theo giả thiết: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=-2 \text{ (vn)} \\ x^2-2x=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=3 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$					
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$												

Dựa vào BBT, hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là :

A. 7.

B. 9.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $y' = (2x-2)f'(x^2-2x)$.

$$y' = 0 \Rightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	d	$+\infty$
y	$+\infty$				2				$+\infty$
			-3				-1		

$y = 0$

$$\text{Ta có } f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2-2x = b \in (-1; 0) \\ x^2-2x = c \in (0; 1) \\ x^2-2x = d \in (1; +\infty) \end{cases} (*)$$

Nhận xét phương trình $x^2 - 2x = m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$:

+) Có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $1+m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

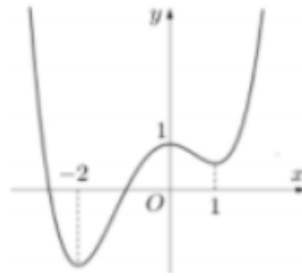
+) Có nghiệm kép khi và chỉ khi: $1+m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ khi đó nghiệm kép $x=1$.

+) Có nghiệm $x=1$ khi và chỉ khi: $-1-m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Suy ra (*) có 6 nghiệm phân biệt và khác $x=1$. Do đó $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy: $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số cực trị của hàm số $y = f(|x+1| - 3)$ là

A. 3.

B. 8.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Xét $g(x) = f(|x+1| - 3)$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = (|x+1| - 3)' f'(|x+1| - 3) = \frac{x+1}{|x+1|} f'(|x+1| - 3) = \frac{1}{|x+1|} h(x)$

Với $h(x) = (x+1) \cdot f'(|x+1| - 3)$

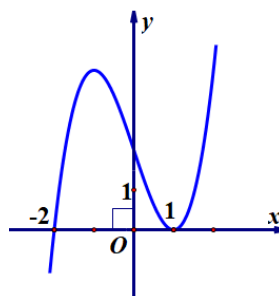
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(|x+1| - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ |x+1| - 3 = -2 \\ |x+1| - 3 = 0 \\ |x+1| - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = -4 \\ x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-5	-4	-2	-1	0	2	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn D**

Đặt $g(x) = f(x^2 - 3)$ ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$.

$$\text{Từ đồ thị của } y = f'(x) \text{ ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Cũng từ đồ thị ta thấy $x = \pm 2$ là nghiệm kép của phương trình, nên ta có $x = 0, x = \pm 1$ là các nghiệm đơn của $g'(x) = 0$. Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 3)$ có tất cả là 3 cực trị.

Câu 16: Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$	

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 -1

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x-1)]^2$ là

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 11.

Lời giải**Chọn C**

Cách 1. Từ giả thiết đề bài đã cho ta thấy rằng hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Sử dụng giả thiết ta được

$$f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x-1) = 16(x-1)^3 - 16(x-1) = 16x(x-1)(x-2)$$

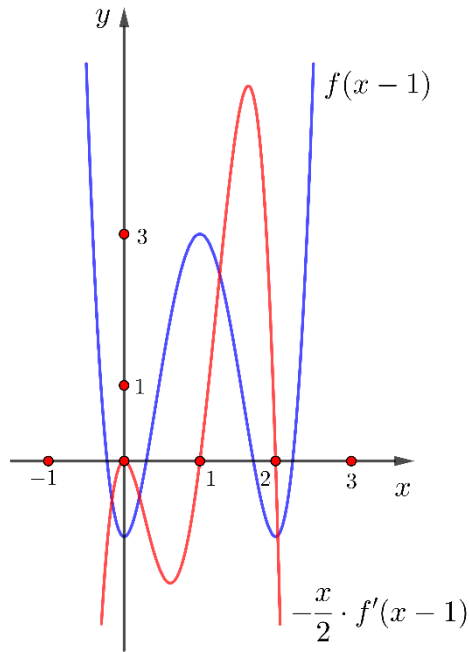
Ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 [f(x-1)]^2 + 2x^4 \cdot f(x-1) \cdot f'(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x-1) = 0 \\ 2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Xét phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{x}{2} \cdot f'(x-1)$, ta có $-\frac{x}{2} \cdot f'(x-1) = -8x^2(x-1)(x-2)$.

Biểu diễn hai hàm số $f(x-1)$ và $-\frac{x}{2} \cdot f'(x-1)$ trên cùng một đồ thị đồ thị ta có



Như vậy phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt.

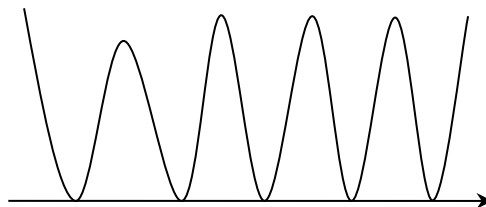
$$\text{Xét phương trình } f(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = \frac{3}{2} \\ (x-1)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Thay 4 nghiệm này vào phương trình (*) thì ta thấy rằng các nghiệm của phương trình này không phải là nghiệm của phương trình (*).

Vậy hàm số đã cho có tất cả 9 điểm cực trị.

Cách 2.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy rằng phương trình $f(x-1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0, suy ra phương trình $g(x)=x^4[f(x-1)]^2=0$ có tất cả 5 nghiệm bội chẵn, khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ sẽ có dạng như sau



Như vậy hàm $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(3x)$ là

- A. $y = -3$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $x = 2$ D. $x = -\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$y' = 3f'(3x)$$

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -1 \\ 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -1 \\ 3x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < 3x < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Do đó, điểm cực tiểu của hàm số là $x = \frac{2}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số

$$g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 6}\right)$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$ có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 6} = 3 \end{cases}$$

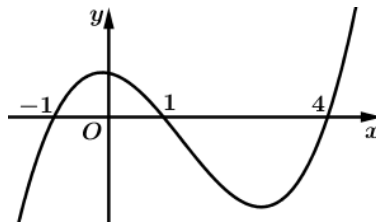
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng biến thiên. Ta thấy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:



Hàm số $y = f(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x) = f(x^2 + x)$, ta có $g'(x) = (2x+1)f'(x^2 + x)$,

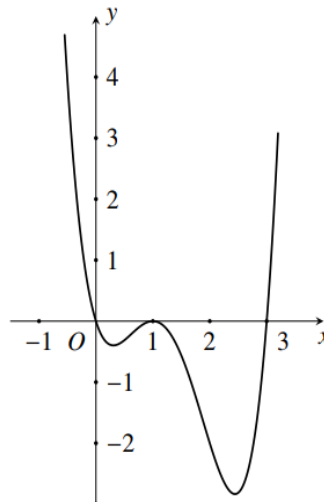
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2 + x = -1 \\ x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $d = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	a	b	$-\frac{1}{2}$	c	d	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ ta có hàm số $g(x) = f(x^2 + x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ hình vẽ sau



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

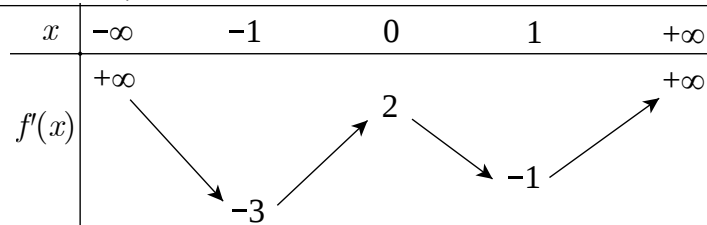
Ta có: $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $y' = 0$ có đúng 5 nghiệm bội lẻ là: $x = -1; x = 0; x = 1; x = 2; x = 3$ nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Từ giả thiết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 5 điểm cực trị suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 3 điểm cực tiểu

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ là:

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

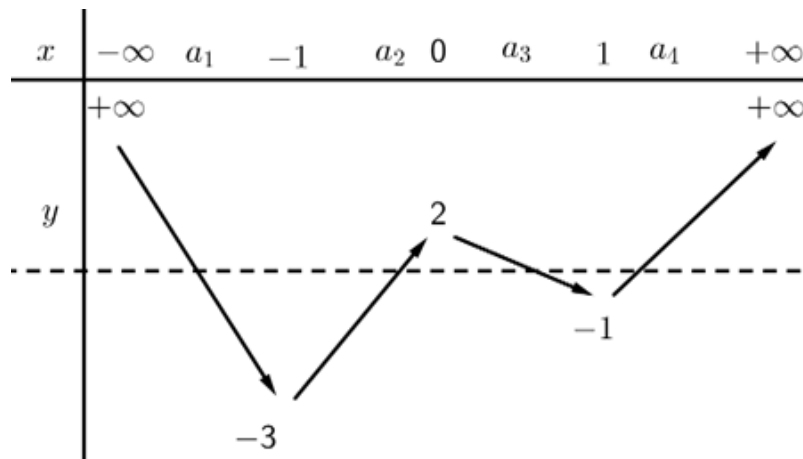
Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = (6x - 6) f'(3x^2 - 6x + 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (6x - 6) f'(3x^2 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(3x^2 - 6x + 2) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

BBT:



$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = a_1 \in (-\infty; -1): (vn) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_2 \in (-1; 0) \quad (2n_0) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_3 \in (0; 1) \quad (2n_0) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_4 \in (1; +\infty) \quad (2n_0) \end{cases}$$

Vì phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ có 7 cực trị.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ $f'(x) = 4x^3 + 2x \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 + C$. Do $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Ta có $g(x) = f^3(x) \Rightarrow g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) = 3(x^4 + x^2 + 1)^2 \cdot 2x(2x^2 + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + x^2 + 1 = 0 \\ x = 0 \\ 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại $x = 0$ nên hàm số có đúng 1 điểm cực tiểu.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2	3		-2		$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

A. 11.

B. 9.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm bậc bốn $y = f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$ có bảng biến thiên như đề cho.

Ta có $g'(x) = 4x^3 [f(x+1)]^2 + x^4 \cdot 2 \cdot f(x+1) f'(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 \cdot f(x+1) \cdot [2f(x+1) + x f'(x+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 & (1) \\ f(x+1) = 0 & (2) \\ 2f(x+1) + x f'(x+1) = 0 & (3) \end{cases}$$

+ Phương trình có nghiệm bội $x = 0$.

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 1 \Rightarrow$ Phương trình: $f(x+1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 0$.

+ Giải: Đặt $x+1 = t \Rightarrow x = t-1$, phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 2f(t) + (t-1) \cdot f'(t) &= 0 \Leftrightarrow 2(5t^4 - 10t^2 + 3) + (t-1)(20t^3 - 20t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \quad (3') \end{aligned}$$

Bấm MTCT thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt $t \neq 1$.

$\Rightarrow$ Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 0$.

Ngoài ra, nghiệm của phương trình không phải là nghiệm của phương trình vì những giá trị x thỏa mãn $f(x+1) = 0$ không thỏa mãn phương trình.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ có 9 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số

$$g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) \text{ là}$$

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} f'(\sqrt{x^2+2x+5}).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} f'(\sqrt{x^2+2x+5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+5} = 1 \text{ (VN)} \\ \sqrt{x^2+2x+5} = 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

Suy ra: Đáp án C

Câu 25: Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = g(x) = [f(x^2) - 1]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = 4.2x.f'(x^2)[f(x^2) - 1]^3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \\ f(x^2) = 1 \end{cases}$

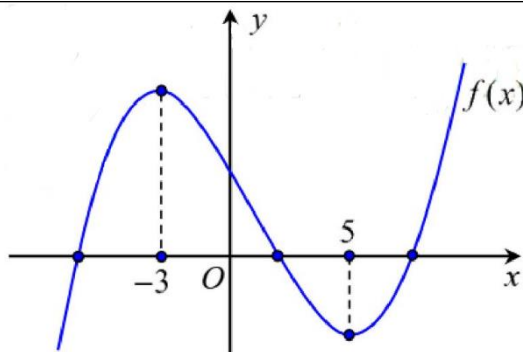
$$f'(x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (VN)} \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f(x^2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a < -1 \text{ (VN)} \\ x^2 = 0 \\ x^2 = b > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{b} \\ x = -\sqrt{b} \end{cases}$$

Do đó các cực trị của hàm số $y = g(x)$ là $x = 0, x = 1, x = -1, x = \sqrt{b}, x = -\sqrt{b}$

Vậy hàm số có 5 cực trị.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải**Chọn C**

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = -3, x = 5$.

$$\text{Do đó: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases}.$$

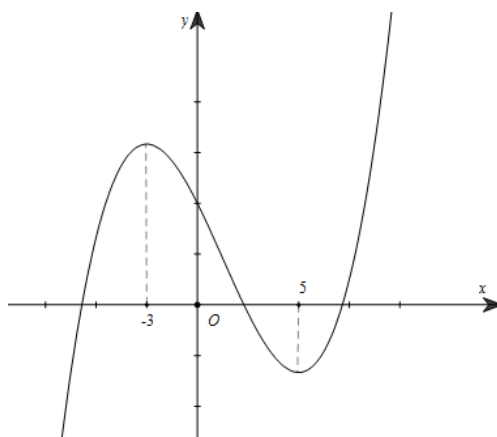
Đặt $g(x) = f(2x^3 - 6x)$. Ta có $g'(x) = (6x^2 - 6)f'(2x^3 - 6x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 \\ f'(2x^3 - 6x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ 2x^3 - 6x = -3 \\ 2x^3 - 6x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x \approx 1,38 \\ x \approx -1,94 \\ x \approx 0,56 \\ x \approx 2,05 \end{cases}.$$

Các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ đều là các nghiệm đơn phân biệt nên $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó.

Vậy hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả 6 điểm cực trị.

Câu 27: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

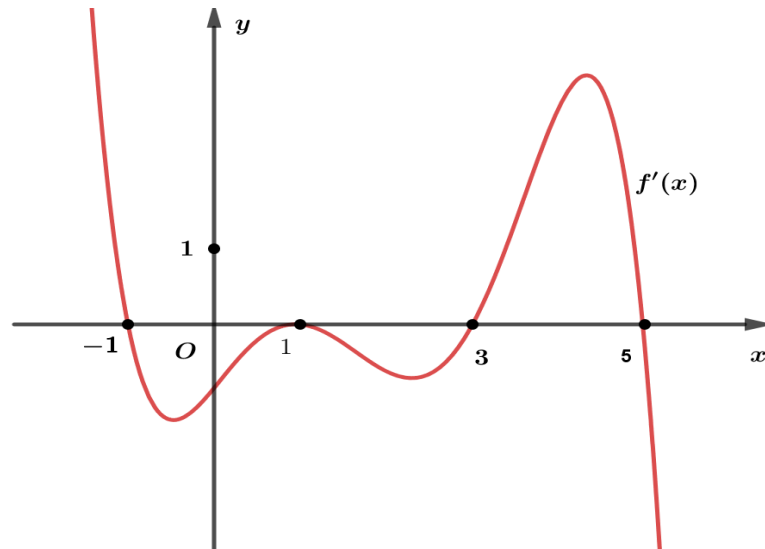
Lời giải**Chọn C**

Hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có $y' = (6x^2 - 6)f'(2x^3 - 6x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 \\ 2x^3 - 6x = -3 \Leftrightarrow \\ 2x^3 - 6x = 5 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ x \approx -1,942 \\ x \approx 1,384 \\ x \approx 0,558 \\ x \approx 2,054 \end{cases}$$

Ta thấy $y' = 0$ có 6 nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 6 cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x) = 6 - 2\sqrt{6x - x^2}$ có tất cả bao nhiêu cực đại?



A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t(x) = 6 - 2\sqrt{6x - x^2}$, $x \in [0; 6]$

Ta có: $\forall x \in (0; 6)$, $t'(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{6x-x^2}} \Rightarrow t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow t_{CT} = t(3) = 0$

Từ đồ thị có BBT cho $y = f(t)$:

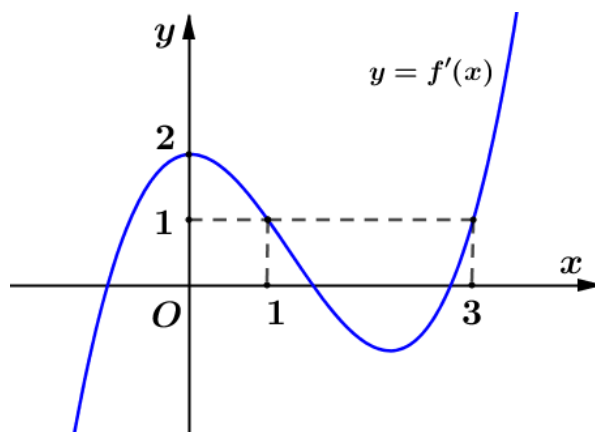
t	$-\infty$	-1	0	3	5	$+\infty$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
$y = f(t)$							

BBT ghép cho hàm $y = g(x) = f(6 - 2\sqrt{6x - x^2}) = f(t)$

x	0	3				6	
t	6	5	3	0	3	5	6
$y = f(t)$							

Từ BBT ta có hàm số $y = f(6 - 2\sqrt{6x - x^2})$ có 3 cực đại.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là

A. 2

B. 5

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = f'(x)(2021^{f(x)} \ln 2021 + 2020^{f(x)} \ln 2020)$

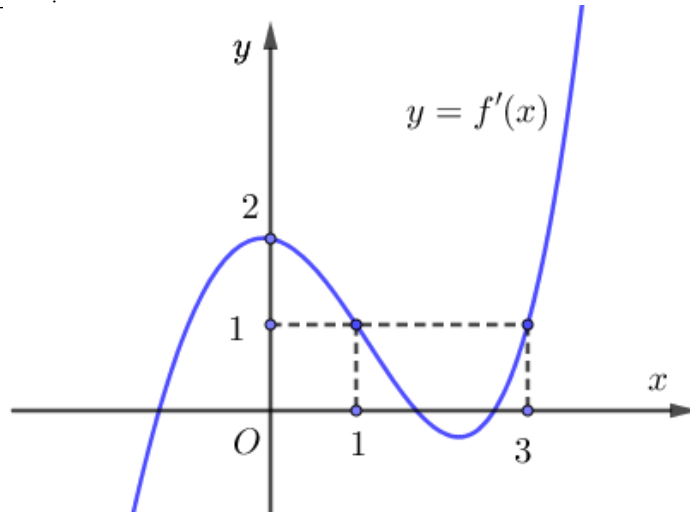
Do $2021^{f(x)} \ln 2021 + 2020^{f(x)} \ln 2020 > 0, \forall x$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; 0) \\ x = x_2 \in (1; 3) \\ x = x_3 \in (1; 3), x_1 < x_2 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là



A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

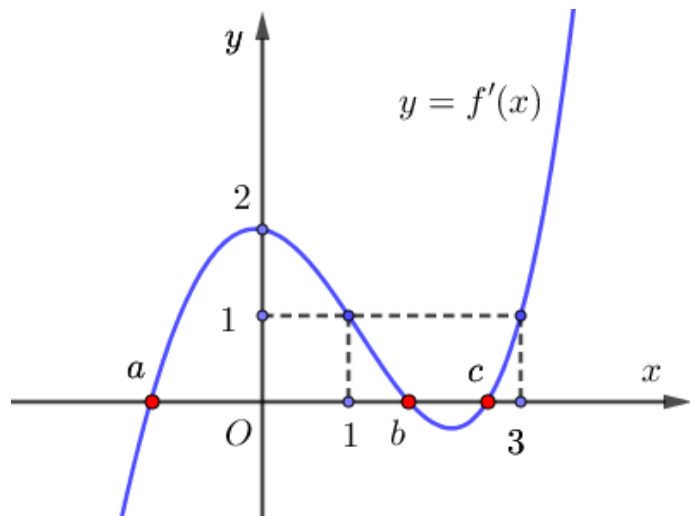
Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = f'(x) \cdot 2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + f'(x) \cdot 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020$.

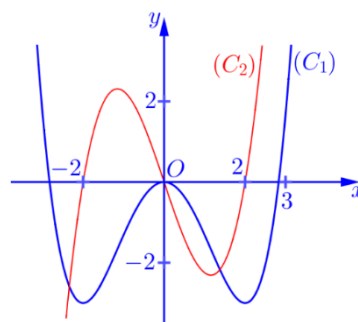
$= f'(x) \cdot [2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020]$.

Do $2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020 > 0, \forall x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b. \\ x_3 = c \end{cases}$



Vậy hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ có ba điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f[e^{-x} \cdot f(x)]$ trên khoảng $(-\infty; 3)$ là



A. 9.

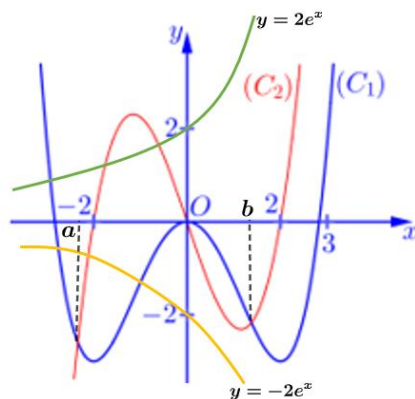
B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $g'(x) = e^{-x} \cdot [f'(x) - f(x)] \cdot f'(e^{-x} - f(x))$.



$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - f(x) = 0 \\ f(e^{-x} \cdot f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(e^{-x} \cdot f(x)) = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ x = b \\ e^{-x} \cdot f(x) = -2 \\ e^{-x} \cdot f(x) = 0 \\ e^{-x} \cdot f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ x = b \\ f(x) = 2e^{-x} \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2e^x \end{cases}$$

Từ đồ thị ta suy ra được:

Phương trình $f(x) = -2e^x$ có nghiệm đơn.

Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội chẵn ($x = 0$).

Phương trình $f(x) = 2e^x$ có 1 nghiệm đơn.

Vậy $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn nên hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^3(2^x - 8)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải**Chọn B**

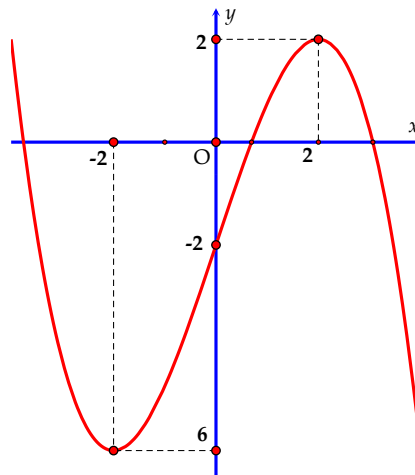
Ta có bảng xét dấu cho $f'(x)$ như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		+	0	-	0	+		+	
$(x - 3)^3$		-		-		-	0	+	
$2^x - 8$		-		-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta thấy rằng $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị hàm số như hình bên. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(2-x) + 3$ là



A. $(0; 5)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(5; -6)$.

D. $(5; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$.

Ta có $y' = -f'(2-x)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = -2 \\ 2-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Giả sử $y' > 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 2 \\ 2-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 0 \end{cases}$.

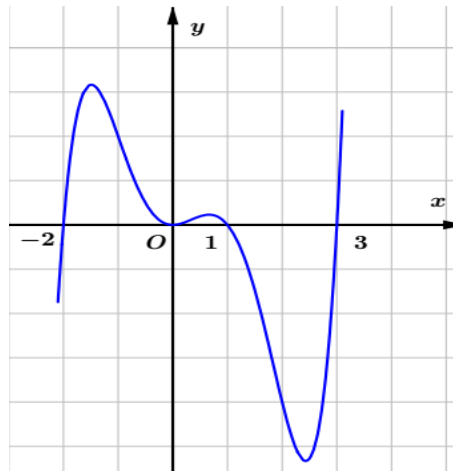
Do đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$y(0)$		$y(4)$		$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(2-x) + 3$ đạt cực trị tại $x = 0$ khi $y(0) = f(2) + 3 = 2 + 3 = 5$.

Vậy tọa độ điểm cực đại là $(0; 5)$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } g'(x) = [f(x^2)]' = 2xf'(x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x^2)$	+	0	-	0	+	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = |f(x-2017) + 2018|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $u(x) = f(x - 2017) + 2018$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị. Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$.

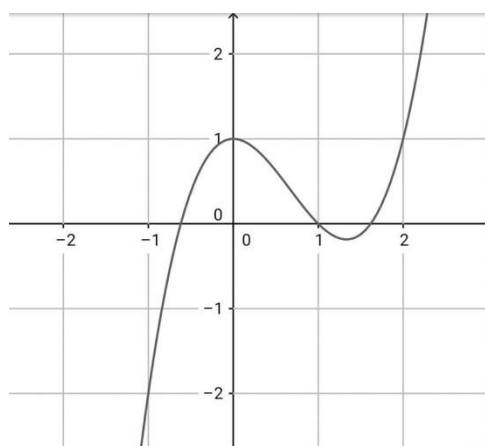
x	$-\infty$	2016		2020		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	0	+
$u(x)$	$-\infty$	↗ 4036		↘ 0		↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $u(x) = f(x - 2017) + 2018$ ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |u(x)|$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	x_1			2016		2020		$+\infty$					
$u'(x)$		-	0	+	0	-	0	+						
$ u(x) $	$+\infty$				0			4036			0			$+\infty$

Từ BBT của hàm số $g(x) = |u(x)|$ ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x = 2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 0$.

Lời giải

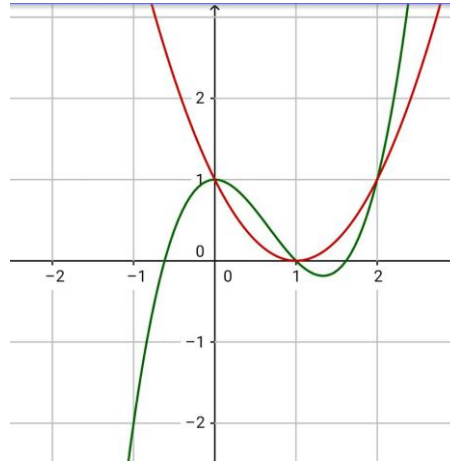
Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - (x - 1)^2$

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x - 1)^2$

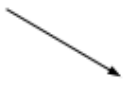
Đây là phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 2x + 1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



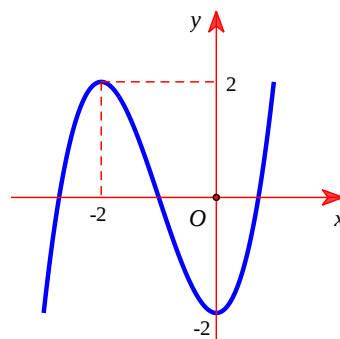
$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

BBT của hàm số $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = g(x)$ có điểm cực đại $x = 1$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$ là



A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g'(x) = (-4x + 4) \cdot f'(-2x^2 + 4x)$$

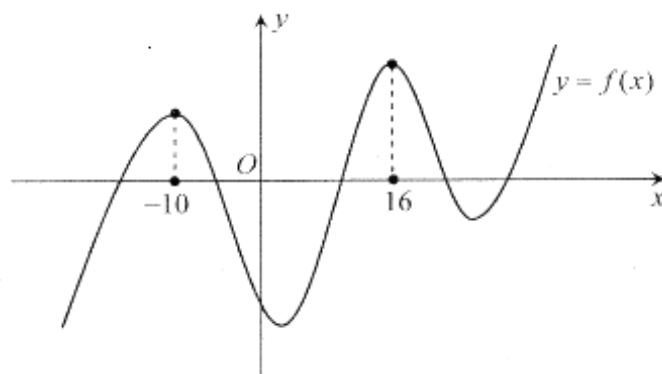
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ f'(-2x^2 + 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(-2x^2 + 4x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f'(-2x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 4x = -2 \\ -2x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y = f(x^3 - 12x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 11.

B. 10.

C. 12.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

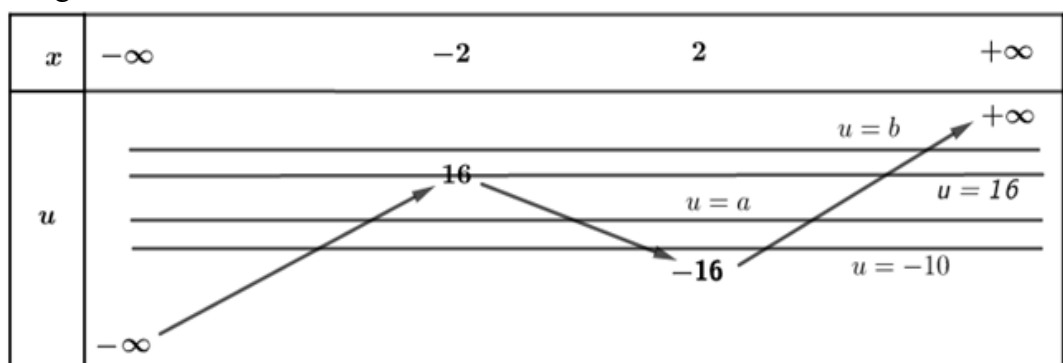
Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = -10$; $x = a \in (0; 16)$; $x = 16$; $x = b > 16$

Xét hàm số $g(x) = f(u) = f(x^3 - 12x)$ với $u = x^3 - 12x$

Công thức đếm nhanh SĐCT của một hàm hợp:

$$\text{SĐCT} \{f(u)\} = \text{SĐCT} \{u\} + \text{SNBL} \left\{ \begin{array}{l} u = b \\ u = 16 \\ u = a \\ u = -10 \end{array} \right\}$$

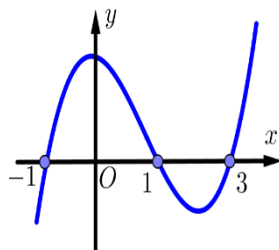
Ta có bảng biến thiên của $u = x^3 - 12x$



Suy ra: $\text{SDCT}\{u\} = 2$ và có: $\text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=b \\ u=16 \\ u=a \\ u=-10 \end{matrix}\right\} = 8$

Suy ra: $\text{SDCT}\{f(u)\} = \text{SDCT}\{u\} + \text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=b \\ u=16 \\ u=a \\ u=-10 \end{matrix}\right\} = 2 + 8 = 10.$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(xe^x)$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (f(xe^x))' = (xe^x)' \cdot f'(xe^x) = e^x \cdot (x+1) \cdot f'(xe^x).$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x+1) \cdot f'(xe^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ xe^x = -1(VN) \\ xe^x = 1 \\ xe^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0,567... \\ x = 1,049... \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$0,567\dots$	$1,049\dots$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Vậy hàm số $y = f(xe^x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4.$

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4 = \left[\frac{f(x) - 1}{x} \right]^4.$$

$$\text{Đặt } f(x) = ax^4 + bx^2 + c.$$

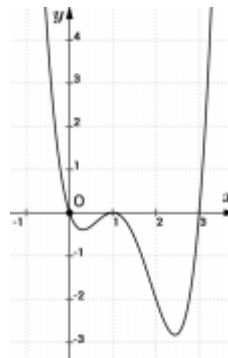
$$\text{Dựa vào bảng biến thiên, ta có hệ } \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1.$$

$$\text{Khi đó } y = \left[\frac{f(x) - 1}{x} \right]^4 = \left(\frac{2x^4 - 4x^2}{x} \right)^4 = (2x^3 - 4x)^4.$$

$$\text{Suy ra } y' = 8(3x^2 - 2) \cdot (2x^3 - 4x)^3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \\ x = 0 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Các nghiệm trên đều là các nghiệm bội lẻ nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 3).$$

$$\text{Ta có } y' = (f(x^2))' = 2x \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

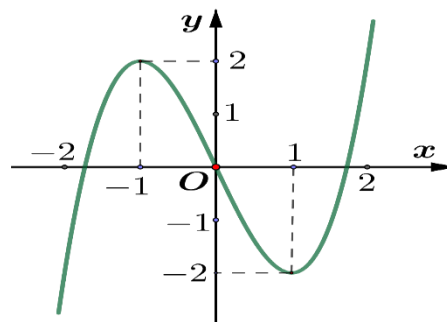
$$f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 0 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x^2)$	+	0	-	0	-	0	+
$2xf'(x^2)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x^2)$							

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $g'(x) = 2xf'(x^2 - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-

Ta có bảng xét dấu :

Từ BXD ta thấy hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại 2 điểm $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y' = f'(x) = x^2 - 4x - 5$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x^3 - 3x^2)$ là

A. 2.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$, trong đó $x = -1$ là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm số $y = f(x^3 - 3x^2) \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \cdot f'(x^3 - 3x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ f'(x^3 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 = -1 & 1. \\ x^3 - 3x^2 = 1 & 2. \\ x^3 - 3x^2 = 5 & 3. \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

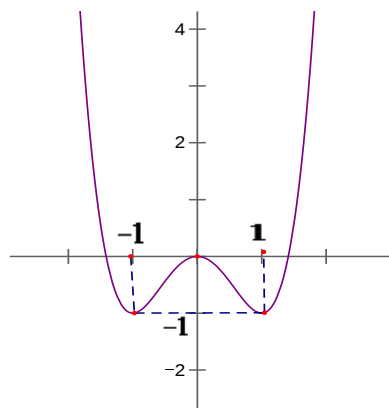
Từ bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ suy ra phương trình 2 ; 3 có nghiệm duy nhất.

Và vì $x = -1$ là nghiệm kép của phương trình $f'(x) = 0$ nên các nghiệm ở phương trình 1 đều là nghiệm bội chẵn.

Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x^3 - 3x^2)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là



A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = [3x^2 + f'(x)] f'(x^3 + f(x))$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow [3x^2 + f'(x)] f'(x^3 + f(x)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + f'(x) = 0 & (1) \\ f'(x^3 + f(x)) = 0 & (2) \end{cases}$$

+) Xét phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 3x + 2b = 0 & (3) \end{cases}$$

Vì hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow \Delta_{(3)} = 9 - 32ab > 0 \Rightarrow (3)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

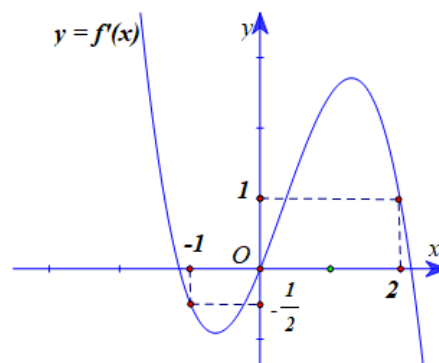
$$+) \text{ Xét phương trình (2): } f'(x^3 + f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + f(x) = -1 & (2a) \\ x^3 + f(x) = 0 & (2b) \\ x^3 + f(x) = 1 & (2c) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + f(x)$; hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị và hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ với $h(0) = 0 + f(0) = 0$, do đó:

Phương trình (2a) có 2 nghiệm, (2b) có 2 nghiệm khác 0 và 1 nghiệm kép $x = 0$, (2c) có 2 nghiệm.)

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



A. 3.

B. 5.

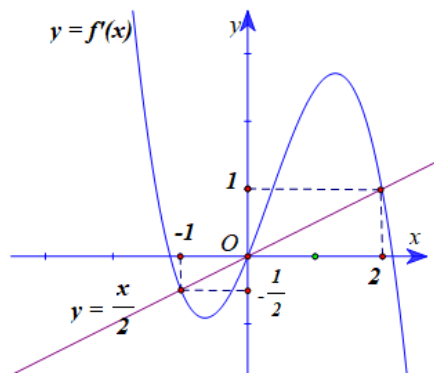
C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = 4f(x) - x^2$. Ta có $g'(x) = 4f'(x) - 2x = 2(2f'(x) - x)$.



Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{2}$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = \frac{x}{2}$ suy ra

$$f'(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Theo hình vẽ ta có $a < 0$, mà $ae < 0 \Rightarrow e > 0$ suy ra $g(0) = 4f(0) = 4e > 0$.

Bảng biến thiên của $y = |g(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(2)$	$-\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	0	$g(0)$	0	$+\infty$

Dựa vào đồ thị $y = |g(x)|$ suy ra hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 4 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 f'(x^4) = 1 (*)$.

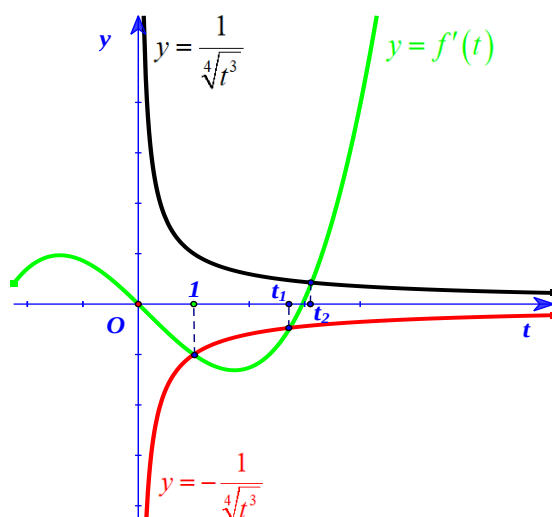
Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình (*) nên chia 2 vế cho x^3 , ta được

$$f'(x^4) = \frac{1}{x^3}$$

Đặt $t = x^4; (t > 0) \Rightarrow x^3 = \begin{cases} \sqrt[4]{t^3}, x > 0 \\ -\sqrt[4]{t^3}, x < 0 \end{cases}$. Khi đó ta có
$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}, & (\text{khi } x > 0) \\ f'(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}, & (\text{khi } x < 0) \end{cases} \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ tương ứng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và hai đồ thị hàm số $y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t > 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$, ta vẽ mô phỏng đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}, y = -\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t > 0$ như sau:



$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=t_1, t_1 > 1 \\ t=t_2, t_2 > t_1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4=1, x < 0 \\ x^4=t_1, x < 0 \\ x^4=t_2, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\sqrt[4]{t_1} \\ x=\sqrt[4]{t_2} \end{cases}$$

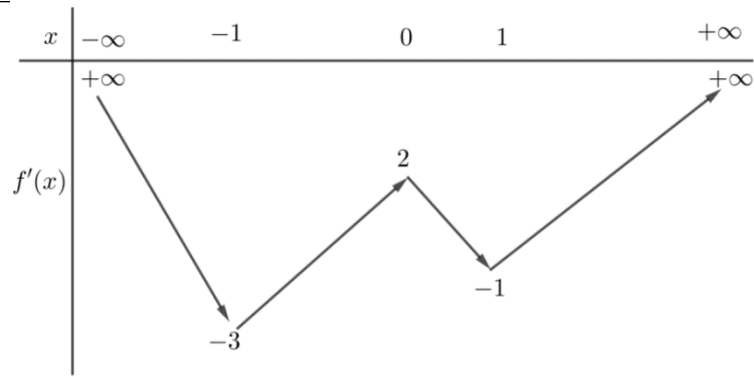
Để thấy $x > \sqrt[4]{t_2}$ thì $g'(x) = f'(x^4) - \frac{1}{x^3} > 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{t_1}$	-1	$\sqrt[4]{t_2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau



Hỏi hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 9

B. 4

C. 7

D. 5

Lời giải

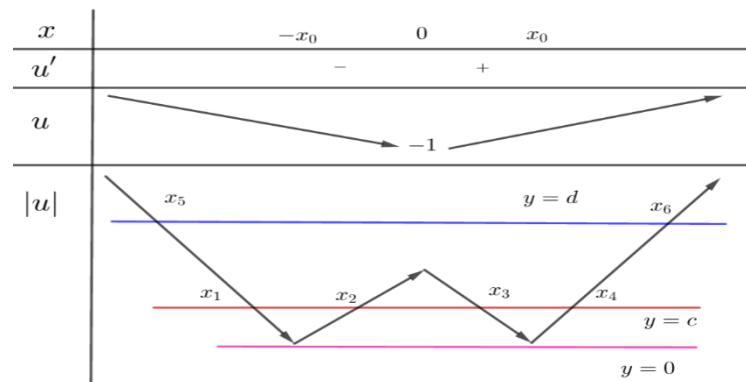
Chọn D

Đặt $u = \frac{\ln(x^2+1)-2}{2} \Rightarrow u' = \frac{x}{x^2+1}; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dựa theo bảng biến thiên đề bài ta có

$$f'(|u|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |u| = a \in (-\infty; -1) \\ |u| = b \in (-1; 0) \\ |u| = c \in (0; 1) \\ |u| = d > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u| = c \in (0; 1) \\ |u| = d > 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Với $|x_0| = \sqrt{e^2 - 1}$ thì $|u|$ có 3 cực trị, trong đó 1 cực đại, 2 cực tiểu. Bảng biến thiên mới theo biến u là

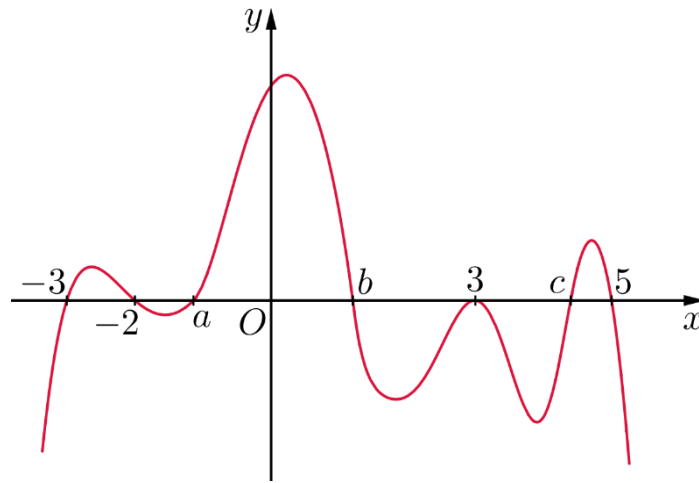


Hai phương trình lần lượt có 4 và 2 nghiệm như sau

$$\text{Giải } |u| = c \in (0; 1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 < -x_0 \\ x_2 \in (-x_0; 0) \\ x_3 \in (0; x_0) \\ x_4 \in (x_0; +\infty) \end{cases} \text{ và giải } |u| = d > 1 \Rightarrow \begin{cases} x_5 < x_1 \\ x_6 > x_4 \end{cases}$$

Chú ý c là điểm cực đại và d là điểm cực tiểu nên từ thu được 2 cực tiểu, từ thu được 1 cực tiểu. Kết luận tổng cộng 5 điểm cực tiểu.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với $-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ Ta có: $h'(x) = 2f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow f'(2x + m - 3) = 0$ Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + m - 3 = k \Leftrightarrow x = \frac{k + 3 - m}{2}$ với $k \in \{-3; -2; a; b; 3; c; 5\}$ ($-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$)

Hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có 3 cực trị có hoành độ dương, mà 3 là nghiệm bội chẵn của $f'(x)$ nên hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có 3 cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ phương trình $h'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khác $\frac{6-m}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+3-m}{2} < 0 \\ \frac{b+3-m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3-m < 0 \\ b+3-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > a+3 \\ m < b+3 \end{cases} \Leftrightarrow a+3 < m < b+3$$

Do $-\frac{4}{3} < a < -1$ và $1 < b < \frac{4}{3}$ nên $-1+3 \leq m \leq 1+3$ hay $2 \leq m \leq 4$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2; 3; 4.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

A. $x = 3$.B. $x = 0$.C. $x = 1$.D. $x = -1$.

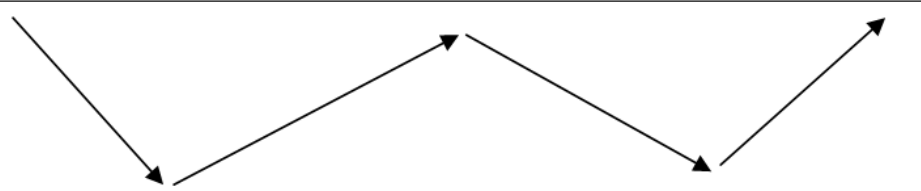
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x^2 - 2x)^2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \quad (\text{v« nghiÖm}) \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \text{ (kĐp)} \\ x = 2 \text{ (kĐp)} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Vậy điểm cực đại của hàm số là $x = 1$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2 + 1) - 2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 9.

C. 11.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $t(x) = \frac{\ln(x^2 + 1) - 2}{2}$, ta có bảng giá trị của $|t(x)|$

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$ t(x) $	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

Ta có $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2 + 1) - 2}{2}\right|\right) = f(|t(x)|)$

Hàm số không có đạo hàm tại hai điểm $x = \pm\sqrt{e^2 - 1}$.

Tại mọi điểm $x \neq \pm\sqrt{e^2 - 1}$, ta có:

$$g'(x) = f'(|t(x)|) \cdot (|t(x)|)' = \begin{cases} \frac{f'(|t(x)|) \cdot x}{x^2 + 1} & \text{khi } x \in (-\infty; -\sqrt{e^2 - 1}) \cup (\sqrt{e^2 - 1}; +\infty) \\ -\frac{f'(|t(x)|) \cdot x}{x^2 + 1} & \text{khi } x \in (-\sqrt{e^2 - 1}; \sqrt{e^2 - 1}) \end{cases} \quad (*)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |t(x)| = t_1 & (t_1 < -1) \quad (1) \\ |t(x)| = t_2 & (-1 < t_2 < 0) \quad (2) \\ |t(x)| = t_3 & (0 < t_3 < 1) \quad (3) \\ |t(x)| = t_4 & (t_4 > 1) \quad (4) \end{cases}$$

Dựa vào bảng giá trị hàm $|t|$, suy ra:

+) Phương trình (1), (2) vô nghiệm.

+) Phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

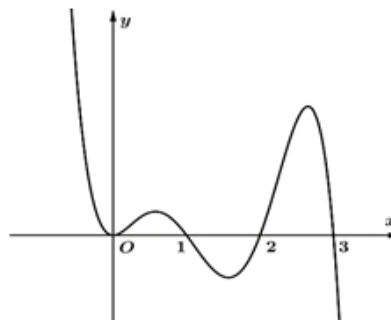
+) Phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (3).

$\Rightarrow g'(x) = 0$ có 7 nghiệm và qua các nghiệm này $g'(x)$ đều đổi dấu.

Từ (*), ta thấy $g'(x)$ cũng đổi dấu khi x đi qua 2 điểm $-\sqrt{e^2 - 1}, \sqrt{e^2 - 1}$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 51: Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị của $m \in [0; 6]; 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x - 1| - 2x + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{2(x-1)(|x-1|-1)}{|x-1|} f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số

$$f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 1 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 2 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x-1| - 2x = 1 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 2 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 3 - m \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2|x-1| - 2x$. Ta có

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+		-	0	+	
y	$+\infty$				-1				$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -2 -2

Đề hàm số có 9 cực trị thì

TH1: $-2 < 2 - m < -1 \Leftrightarrow 3 < m < 4$

TH2: $1 - m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vậy có ba giá trị của m .

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$				5				$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 1 -1

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = g(x) = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$

Ta có: $g'(x) = f'(x)(2021^{f(x)} \ln 2021 - 2020^{f(x)} \ln 2020)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2 \\ \log 2021^{f(x)} \ln 2021 - 2020^{f(x)} \ln 2020 = 0(*) \end{cases}$$

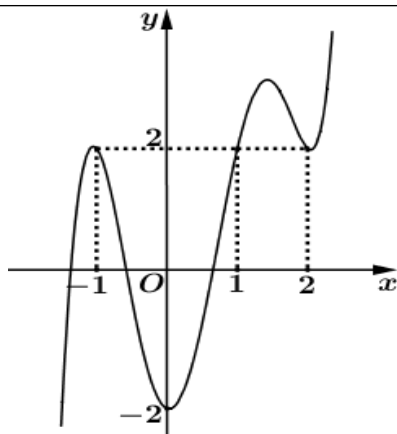
$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2020}\right)^{f(x)} = \log_{2021} 2020 \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{2021}{2020}} (\log_{2021} 2020) \Rightarrow \begin{cases} x = a \in (0; 2) \\ x = b \in (2; +\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		a		2		b		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				$f(0)$				$f(2)$				

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 $f(-2)$ $f(a)$ $f(b)$

Vậy, từ bảng xét dấu ta thấy số điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$ là 3.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x-1)$ như hình vẽ



Khi đó hàm số $y = e^{f(x)+2x}$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x_0 \in (-1; 0)$. B. $x_0 \in (-4; -2)$. C. $x_0 \in (0; 1)$. D. $x_0 \in (-2; -1)$.

Lời giải

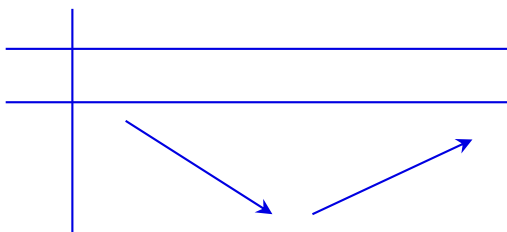
Chọn A

Ta có: $y' = e^{f(x)+2x} \cdot f'(x) + 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2$$

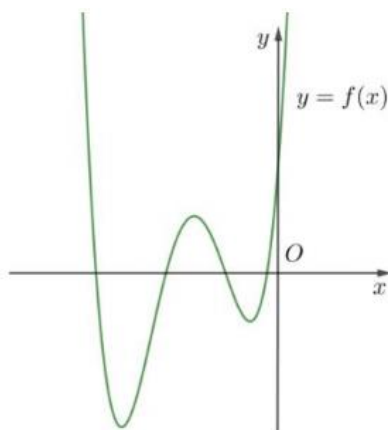
Đồ thị $y = f'(x) - 1$ dời sang phải 1 đơn vị theo trục Ox ta được đồ thị $y = f'(x)$. Khi đó đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 2 điểm có hoành độ là 1 và a với $-1 < a < 0$ nên phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm là 1 và $-1 < a < 0$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đạt tiểu tại điểm $x_0 = a \in (-1; 0)$.

Câu 54: Cho hàm số $F(x)$ có $F(0) = 0$. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $G(x) = |F(x^6) - x^3|$ là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

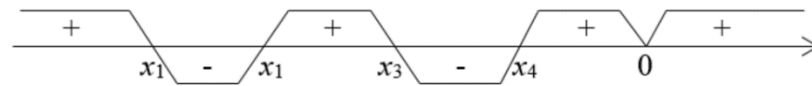
Chọn D

♦ Xét $g(x) = F(x^6) - x^3 \Rightarrow g'(x) = 6x^5 F'(x^6) - 3x^2 = 3x^2 [2x^3 f(x^6) - 1]$.

♦ Xét hàm số

$$h(x) = 2x^3 f(x^6) - 1 \Rightarrow h'(x) = 6x^2 f(x^6) + 12x^8 \cdot f'(x^6) = 3x^2 [2f(x^6) + 4x^6 \cdot f'(x^6)].$$

Từ đồ thị của $y = f(x)$ suy ra dấu của $f'(x)$



nên $\begin{cases} f(x^6) > 0 \\ f'(x^6) > 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) > 0 \quad \forall x$ nên hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và vì

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \pm\infty$ nên phương trình $h(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất x_0 và $y = h(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 . Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 nên x_0 là điểm cực tiểu.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			
$G(x)$			

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = G(x)$ có 3 cực trị.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2			2		

Diagram illustrating the intervals of x and the corresponding values of y for the function $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. The intervals are defined by the critical points $x = -3, -1, 1, 3$. The values of y at these points are $2, 0, -3, 2$ respectively. The intervals are labeled with $-\infty$ and $+\infty$.

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left| f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3) \right|$ là

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	↘			$+\infty$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x^3) - 3x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t} \text{ thế vào phương trình trên ta được } f'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y = 0.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	$-$	
y	0	$+\infty$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có một nghiệm $t = a > 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$f(a) - 3\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$g(x) = h(x) $	$+\infty$	0	$3\sqrt[3]{a} - f(a)$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 cực trị.

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^2(x^2-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Góii S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154.

B. 17.

C. 213.

D. 153.

Lời giải**Chọn D**

Ta có. Với $x = 2$ là nghiệm kép, $x = 0, x = 1$ là nghiệm đơn. Đó đó hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 0, x = 1$.

$$\text{Đặt } g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right) \Rightarrow g'(x) = (x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right).$$

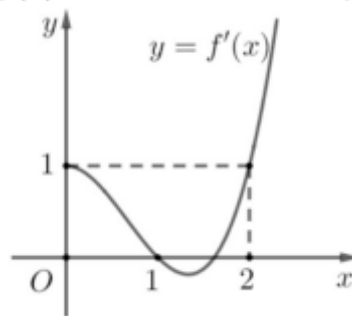
$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 0(1) \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 1(2) \end{cases}$$

Để hàm số có 5 điểm cực trị thì (1) & (2) có hai nghiệm phân biệt không trùng nhau và khác 6

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - \frac{m}{2} > 0 \\ 9 - \left(\frac{m-1}{2}\right) > 0 \\ m \neq 18, m \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m < 18 \Rightarrow m \in \{1, 2, \dots, 17\}.$$

Vậy Tổng các giá trị của m là $1 + 2 + \dots + 17 = 153$.

Câu 58: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như hình vẽ bên



Biết rằng $f(0) = -1$; $f(1) = 1$. Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $g(x) = \left| 3f(x) - \sqrt{2x^3} + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

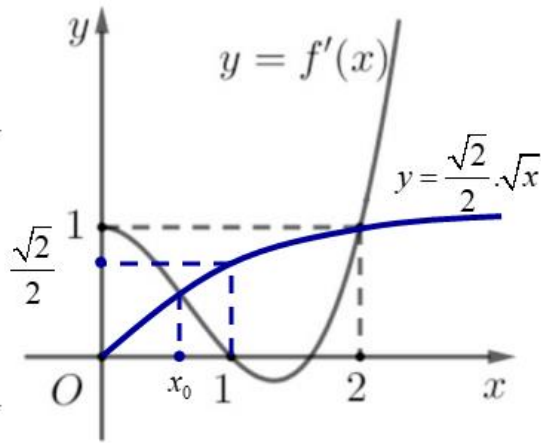
A. 7.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải**Chọn D**



Xét hàm số $y = h(x) = 3f(x) - \sqrt{2x^3} + 1$ ta có: $h'(x) = 3f'(x) - \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = 3\left(f'(x) - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	0	x_0	1	2	$+\infty$	
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$	-2	$h(x_0)$	$h(1)$	$h(2)$	$+\infty$	

Ta thấy hàm số $y = h(x)$ có 2 điểm cực trị.

Ta có $f(0) = -1 \Rightarrow h(0) = -2$; $f(1) = 1 \Rightarrow h(1) = 4 - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow h(x_0) > 0$.

Dựa vào đồ thị bên trên ta có

$$\int_0^{x_0} |h'(x)| dx < \int_{x_0}^2 |h'(x)| dx \Rightarrow h(x_0) - h(0) < -[h(2) - h(x_0)] \Leftrightarrow h(0) > h(2) \Rightarrow h(2) < 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 59: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$							

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x-1)]^4$ là

A. 7.

B. 8.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $g(x)$ liên tục và có đạo hàm là

$$g'(x) = 2x [f(x-1)]^4 + 4x^2 \cdot f'(x-1) \cdot [f(x-1)]^3 = 2x [f(x-1)]^3 \cdot (f(x-1) + 2xf'(x-1))$$

$$\text{Cho } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = 0 \\ f(x-1) = 0 \\ f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0 \end{cases}.$$

Với phương trình $f(x-1) = 0$.

Vì $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như trên ta thấy phương trình $f(x-1) = 0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt x_2, x_3, x_4, x_5 khác x_1 .

Với phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$

Ta thấy phương trình không nhận các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 làm nghiệm.

Gọi $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, vì $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $-1; 0; 1$ và $f(0) = -1, f(1) = 3$ nên $c = -1, a = -4, b = 8$, suy ra $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$.

Đặt $t = x - 1$, phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$ trở thành $f(t) + 2(t+1)f'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4t^4 + 8t^2 - 1 + 2(t+1)(-16t^3 + 16t) = 0 \Leftrightarrow -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1 = 0.$$

Xét hàm số $h(t) = -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1$ có $h'(t) = -144t^3 - 96t^2 + 80t + 32$, cho

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1; t = -\frac{1}{3}; t = \frac{2}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\frac{175}{27}$	$\frac{581}{27}$	$-\infty$		

Do đó phương trình $h(t) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt hay phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_6, x_7, x_8, x_9 . Hay hàm số $g(x)$ có 9 điểm

cực trị là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$.

Câu 60: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-2	3	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x+1)]^4$ là

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 5.

Lời giải

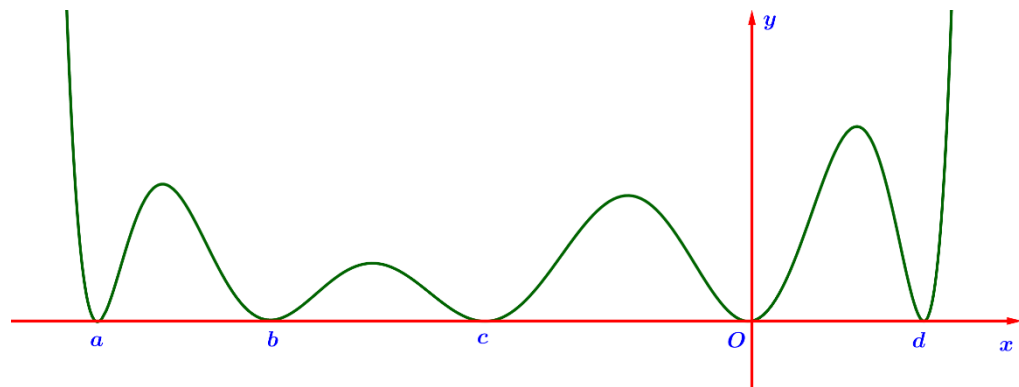
Chọn C

Nhận xét $\begin{cases} g(x) \geq 0, \forall x \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$,

$$\text{Cho } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ [f(x+1)]^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x+1) = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang trái 1 đơn vị ta thu được đồ thị của $f(x+1)$

$$\text{Do đó } f(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, a < -2 \\ x = b, -2 < b < -1 \\ x = c, -1 < c < 0 \\ x = d, d > 0 \end{cases}$$



Vì thế $g(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hay đồ thị $g(x)$ có 5 điểm tiếp xúc với trục hoành

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$g(x)$	$+\infty$	2	1	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$; $g'(x) = 2f(2x^2 + x) \cdot f'(2x^2 + x) \cdot 4x + 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 1 = 0 \\ f(2x^2 + x) = 0 \\ f'(2x^2 + x) = 0 \end{cases}$$

$$4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có: } f'(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x = -2 \text{ VN} \\ 2x^2 + x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0 > 1$. Khi đó

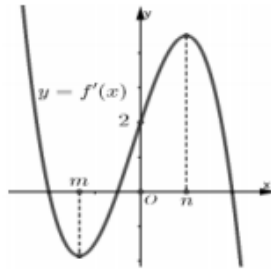
$$f(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ ta có số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là 2.

Câu 62: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a \neq 0$) có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $e > n$



Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là

A. 7.

B. 6.

C. 10

D. 14.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } y = f'(f(x) - 2x) \Rightarrow y' = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

Với $f'(x) = 2$. Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

$$\text{Với } f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m, (m < 0) & (1) \\ f(x) - 2x = n, (n < e) & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) - 2x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2.$$

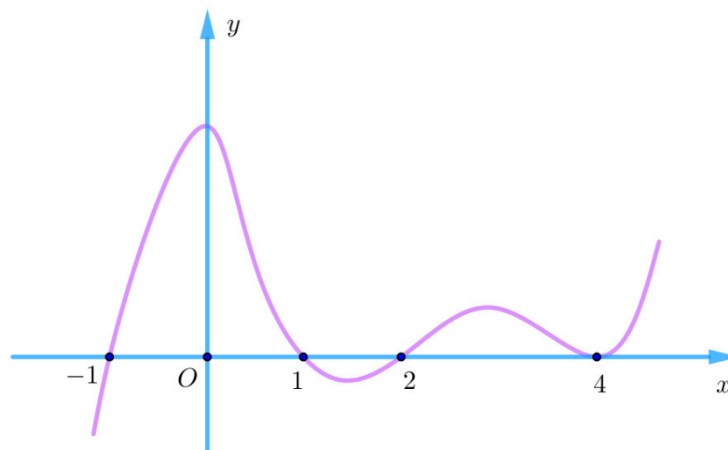
Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$h'(x)$		0	0	0	
$h(x)$					

$h(0) = e > n > m$

Vậy các phương trình (1) và (2) cho 4 nghiệm phân biệt.

Câu 63: Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Lời giải**Chọn D**

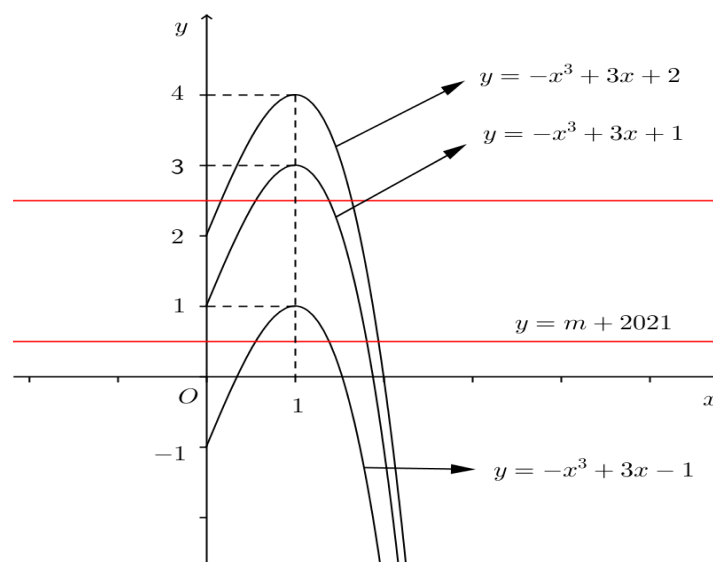
Xét $x > 0$: Hàm số có dạng $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$

$$y' = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + m + 2021)$$

Do nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m + 2021 = 4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y' = 0$ nên ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ x^3 - 3x + m + 2021 = -1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ m + 2021 = -x^3 + 3x - 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 2 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ với $x > 0$ trên cùng một hệ trục.



Hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương khác 1

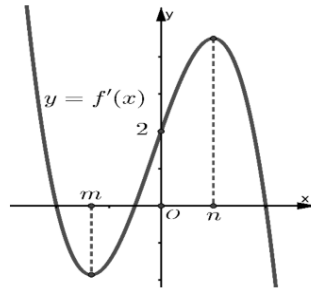
$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m + 2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m + 2021 < 1 \\ 2 < m + 2021 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2022 < m < -2020 \\ -2019 < m < -2018 \end{cases}$$

Do m nguyên nên $m = -2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a \neq 0$) có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

A. 7.

B. 10.

C. 14.

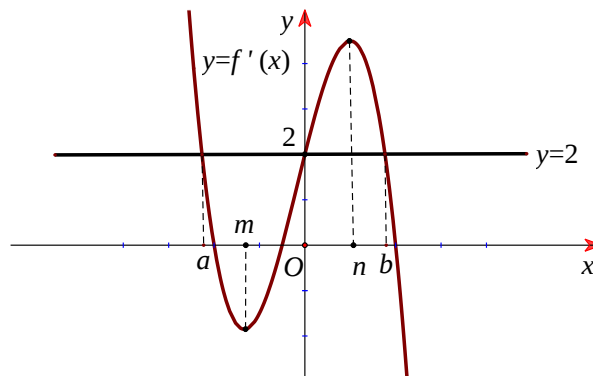
D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$g(x) = f'(f(x) - 2x) \Rightarrow g'(x) = [f'(x) - 2] \cdot f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < m \\ x = 0 \\ x = b > n \end{cases},$$



$$+ \text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x) \text{ ta suy ra } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = n \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m, (1) \\ f(x) - 2x = n, (2) \end{cases}$$

Lập BBT cho hàm số $h(x) = f(x) - 2x$, với $h'(x) = f'(x) - 2$.

Ta có $h(0) = f(0) = e$, $e > n > m$

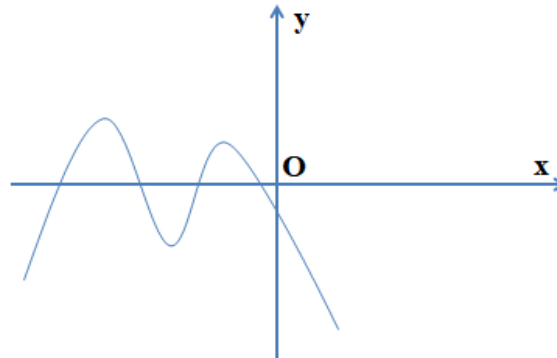
x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$					

Do đó phương trình (1) và (2) có 4 nghiệm đơn.

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm đơn

nên hàm số $g(x) = f'(f(x) - 2x)$ có 7 cực trị.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) + x^2|$ là

A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) + x^2 \Rightarrow h'(x) = 2x(2x^2 \cdot f'(x^4) + 1)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 f'(x^4) + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

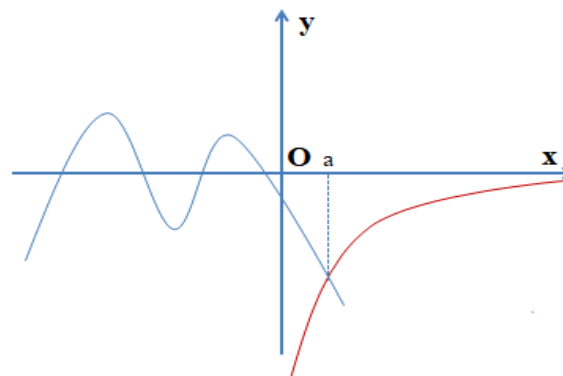
Giải phương trình (1)

Đặt $x^4 = t (t \geq 0)$, ta có phương trình $2\sqrt{t} f'(t) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (2)$

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đồ thị

hàm số $y = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$

Ta có các đồ thị như sau



Căn cứ đồ thị, suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{a}$

Căn cứ đồ thị hàm số $y = f'(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (f'(t)) = -\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (2\sqrt{t} f'(t) + 1) = -\infty$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ và $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$	0	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$					
$g(x)$					

- Câu 66:** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 16)(x + 1)(x^2 - 4x + m - 4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021; 2021]$ sao cho hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?
- A. 2025. B. 2026. C. 2021. D. 4043.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) = 2x(x^4 - 16)(x^2 + 1)(x^4 - 4x^2 + m - 4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^4 - 16 = 0 \\ x^4 - 4x^2 + m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x^4 - 4x^2 + m - 4 = 0 (*) \end{cases}.$$

TH1: Phương trình có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$.

Thay $m = 4$ vào phương trình ta có: $x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Khi đó $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội chẵn nên hàm số $g(x)$ không thể có 5 điểm cực trị nên $m = 4$ loại.

TH2: Phương trình có nghiệm $x = \pm 2 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$.

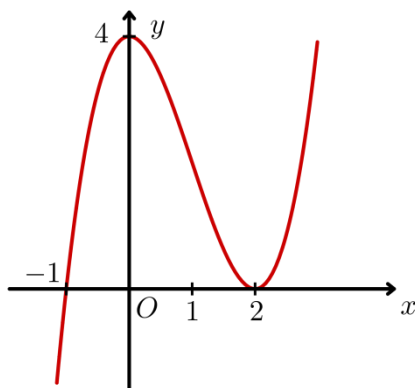
TH3: Phương trình có 2 nghiệm đơn phân biệt, khác 0 và khác ± 2 hay

$t^2 - 4t + m - 4 = 0$ phải có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Kết hợp điều kiện m thuộc $[-2021; 2021]$ suy ra $-2021 \leq m < 4, m \in \mathbb{Z}$ nên có 2025 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f(f'(x))$, $h(x) = f'(f(x))$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

A. 12.

B. 11.

C. 8.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} f'(0) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ -1 + 3a - 2b + 4 = 0 \\ 8 + 12a + 4b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 3a - 2b = -3 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

hay $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x$, $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow f''(x) = 3x^2 - 6x$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Tìm số cực trị của hàm số: $g(x) = f(f'(x))$

$$\text{Ta có: } g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x) = -1 \\ f'(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

với x_1 là nghiệm của phương trình $f'(x) = -1$

và x_2, x_3, x_4 là ba nghiệm của phương trình $f'(x) = 2$, $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$

Bảng xét dấu $y = g'(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$			
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+	0	+

nhìn vào bảng trên, hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 3 cực trị

Tìm số cực trị của hàm số $h(x) = f'(f(x))$

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{11}{4}$		4		$+\infty$

Ta có: $h'(x) = f'(x) \cdot f''(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ và $x_3 < x_1 < -1 < x_2 < x_4 < 2$

Bảng xét dấu $y = h'(x)$

x	$-\infty$	x_3	x_1	-1	x_2	x_4	2	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $h(x) = f'(f(x))$ có 5 cực trị

Vậy tổng có 8 cực trị.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

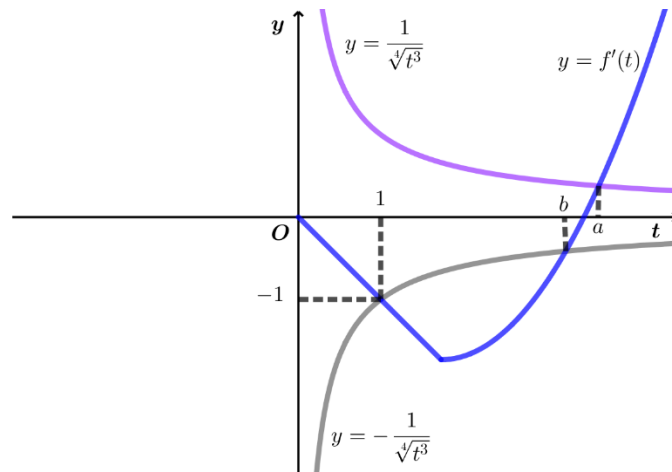
Có $g'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 f'(x^4) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x^4) = \frac{1}{x^3} \quad (x \neq 0) \quad (1).$

Đặt $t = x^4 > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{t}$ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}} & (2) \\ f'(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}} & (3) \end{cases}$$

Mô phỏng bằng đồ thị



Dựa vào đồ thị ta có:

(2) có nghiệm $t = a \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$

(3) có nghiệm $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = -1 \\ t = b \Rightarrow x = -\sqrt[4]{b} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{b}$	-1	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 69: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(1) \leq 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	$+\infty$

Hàm số $g(x) = \left| f(\sqrt{x^2+1}) + x^2 \right|$ có mấy điểm cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f''(x) = a(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax + C$

$$\begin{cases} f'(-1) = -1 \\ f'(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$$

Xét hàm số $u = \sqrt{x^2 + 1}$ có $u' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'		$-$	$+$
u	$+\infty$	1	$+\infty$

Xét hàm số $h(u) = f(u) + u^2 - 1$ có $h'(u) = u'f'(u) + 2u.u' = u'[f'(u) + 2u]$

$$h'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = -2u \end{cases}$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

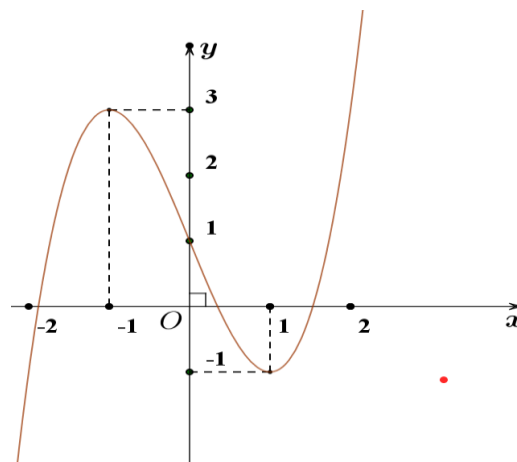
$f'(u) = -2u \Leftrightarrow u = a \in (1; 2) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = a$ có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2

Do $f(1) \leq 0$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$h'(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(u)$	$+\infty$		1		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?

A. 20.

B. 16.

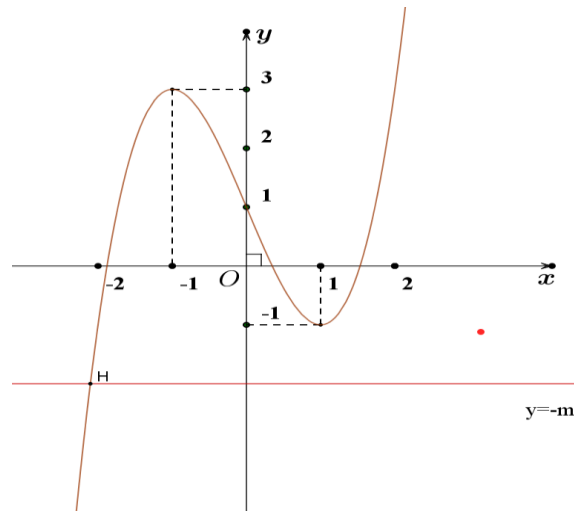
C. 15.

D. 18.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $g'(x) = f'(x) + m \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -m$ (1)

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường $d: y = -m$



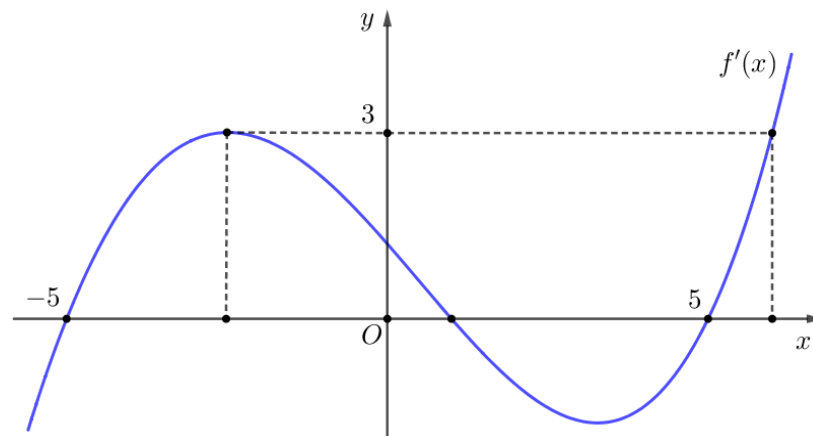
Dựa vào đồ thị trên. Để $g(x)$ có đúng 1 cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} m \in [-10, 10] \\ m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$$

Số giá trị của m là 16.

----- HẾT -----

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(10) = 30$, $f(-6) = 30$, $f(5) = 30$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f[f(x) - 3x + 9]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7.

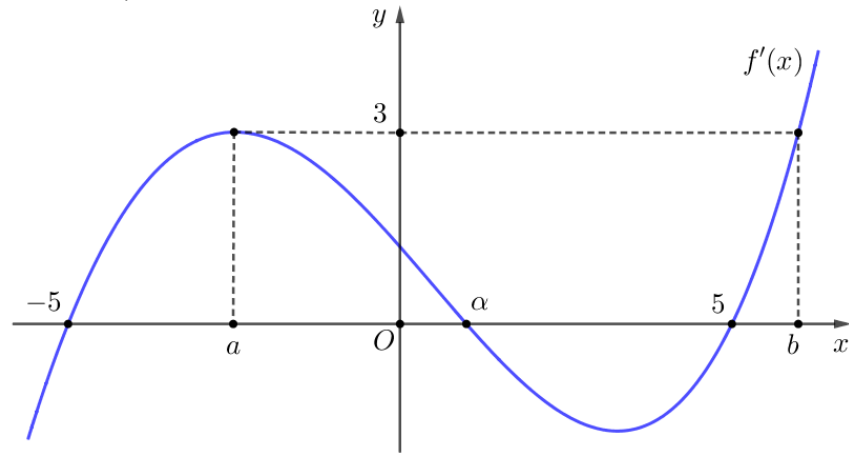
B. 9.

C. 5.

D. 3.

Lời giải**Chọn A**

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số



Ta có: $y' = [f'(x) - 3] f'[f(x) - 3x + 9] = 0$

Trường hợp 1: $f'(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ (nghieãm keùp)} \\ x = b \end{cases}$.

Trường hợp 2: $f'[f(x) - 3x + 9] = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 0$

Với $u = f(x) - 3x + 9 \Rightarrow u' = f'(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ (nghieãm keùp)} \\ x = b \end{cases}$.

Từ điều kiện suy ra $1 = f(5) < f(6)$

Bảng biến thiên của u :

x	$-\infty$	-6	-5	a	5	b	10	$+\infty$
u'		$-$		0	$-$	0	$+$	
u			28		-5		9	

$u(b) = f(b) - 9$

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \{-5; 1; 5\}$$

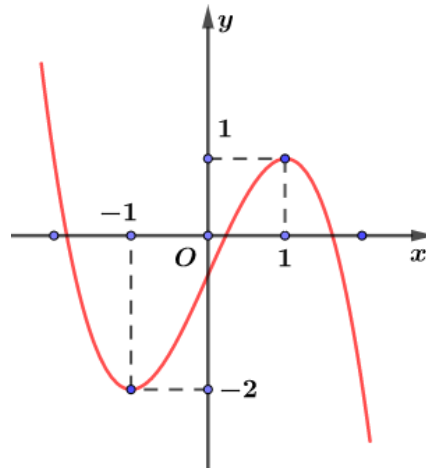
$u = -5$ có hai nghiệm bội lẻ.

$u = 1$ có hai nghiệm bội lẻ.

$u = 5$ có hai nghiệm bội lẻ.

Vậy có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(e^{f(x)} - \frac{1}{2} f(x)^2 - f(x)\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$y' = f' \left[e^{f(x)} - \frac{1}{2} f(x)^2 - f(x) \right] \cdot f'(x) \cdot [e^{f(x)} - f(x) - 1]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ e^{f(x)} - f(x) - 1 = 0 \quad (1) \\ f' \left[e^{f(x)} - \frac{1}{2} f(x)^2 - f(x) \right] = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Đặt $t = f(x)$.

$$\text{Giải 1: } e^t - t - 1 = 0.$$

$$\text{Xét } h(t) = e^t - t - 1 \Rightarrow h'(t) = e^t - 1.$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

BBT:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$		0	

Do đó $h(t) \geq 0 \forall t \Rightarrow h(t)$ tiếp xúc với trục Ox. Pt 1 có nghiệm kép, nghiệm này không là cực trị.

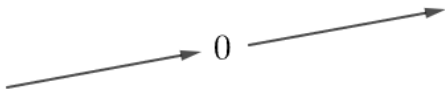
$$\text{Giải 2: } \begin{cases} e^t - \frac{1}{2}t^2 - t = 1 & (3) \\ e^t - \frac{1}{2}t^2 - t = -1 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Giải 3: } e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 = 0.$$

$$\text{Xét } k(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \Rightarrow k'(t) = e^t - t - 1 \geq 0 \forall t.$$

$$\Rightarrow k'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

BBT:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(t)$	+	0	+
$k(t)$			

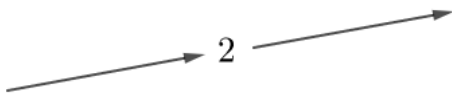
Pt 3 có nghiệm $t = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Pt 3 có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < -1, x_2 \in (0; 1), x_3 > 1$.

Giải 4 : $e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1 = 0$.

$$\text{Xét } l(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \Rightarrow l'(t) = e^t - t - 1 \geq 0 \forall t.$$

$$\Rightarrow l'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

BBT:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$l'(t)$	+	0	+
$l(t)$			

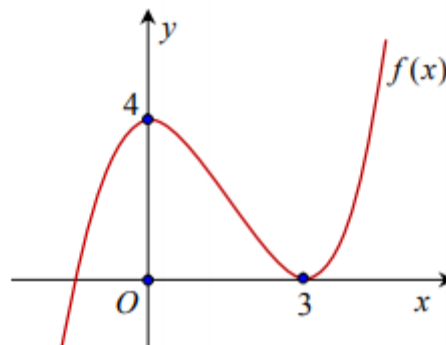
Nhận xét: $l(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1$ có $l(-2) = l(-3) < 0 \Rightarrow l(t) = 0$ có 1 nghiệm

$t = t_1 \in (-3; -2) \Rightarrow f(x) = t_1$ có 1 nghiệm Pt 4 có 1 nghiệm.

Vậy $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Do vậy hàm số có 6 cực trị.

Câu 73: Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(3f(x) - m)$ có đúng 6 điểm cực trị?



A. 7.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } g(x) = f(3f(x) - m).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 3f'(x) \cdot f'(3f(x) - m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x) \cdot f'(3f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(3f(x) - m) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đồ thị ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Do } f'(3f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3f(x) - m = 0 \\ 3f(x) - m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{m}{3} \\ f(x) = \frac{m}{3} + 1 \end{cases}$$

Từ (1) và dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ điều kiện để hàm số $f(3f(x) - m)$ có đúng 6 điểm cực trị là số nghiệm của phương trình $f(x) = \frac{m}{3}$ và phương trình $f(x) = \frac{m}{3} + 1$ cùng với 2 nghiệm ở (1) thỏa mãn $g'(x)$ đảo dấu 6 lần. Khi đó xảy ra các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} 0 < \frac{m}{3} < 4 \\ \frac{m}{3} + 1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 12 \\ m \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9 \leq m < 12. \text{ Do } m \text{ nguyên nên } m \in \{9; 10; 11\}.$$

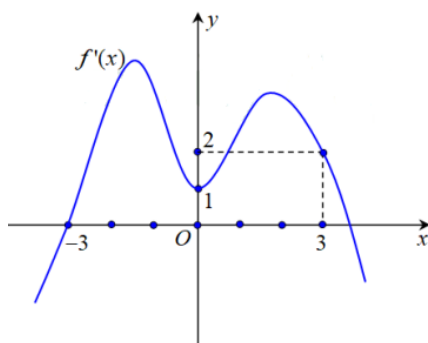
$$\text{TH2: } \begin{cases} \frac{m}{3} \leq 0 \\ 0 < \frac{m}{3} + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 9 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m \leq 0. \text{ Do } m \text{ nguyên nên } m \in \{-2; -1; 0\}.$$

Vậy có 6 giá trị của m .

Câu 74: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f'(x)$ đạt cực tiểu tại

$x = 0$; có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - \left(\frac{x^2 + 6x}{3}\right) \cdot f(x) + \left(\frac{x^2 + 6x}{6}\right)^2$ có đúng 5

điểm cực trị. Giá trị $\min\left(\min_{x \in (-\infty; 3]} f(x)\right)$ bằng



A. 0.

B. $\frac{9}{2}$.

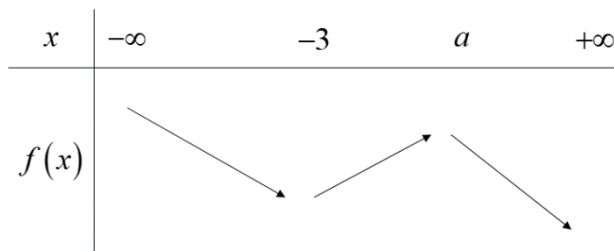
C. $\frac{11}{4}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ với $a > 3$



Ta có: $g(x) = \left(f(x) - \frac{x^2 + 6x}{6} \right)^2 \Rightarrow g'(x) = \left(f'(x) - \frac{x}{3} - 1 \right) \cdot \left(f(x) - \frac{x^2 + 6x}{6} \right).$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{x}{3} + 1 \\ f(x) = \frac{x^2 + 6x}{6} \end{cases}.$

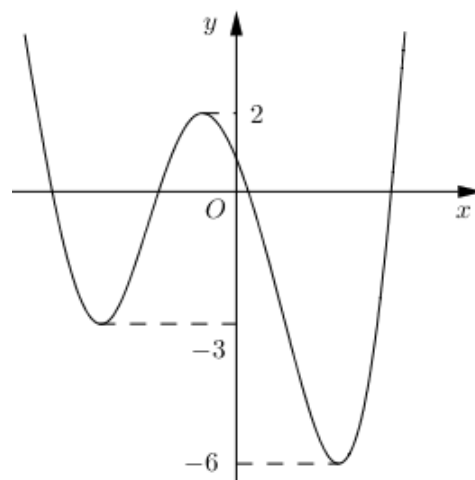
Xét $f'(x) = \frac{x}{3} + 1$ có 3 nghiệm lần lượt là $\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}.$

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{x^2 + 6x}{6}$ đều đạt cực tiểu tại $x = -3$.

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực tiểu thì phương trình $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{6}$ phải có nghiệm kép $x = -3$.

Nên $f(x) = f(-3) = \frac{-3}{2}.$

Câu 75: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 12.

B. 14.

C. 15.

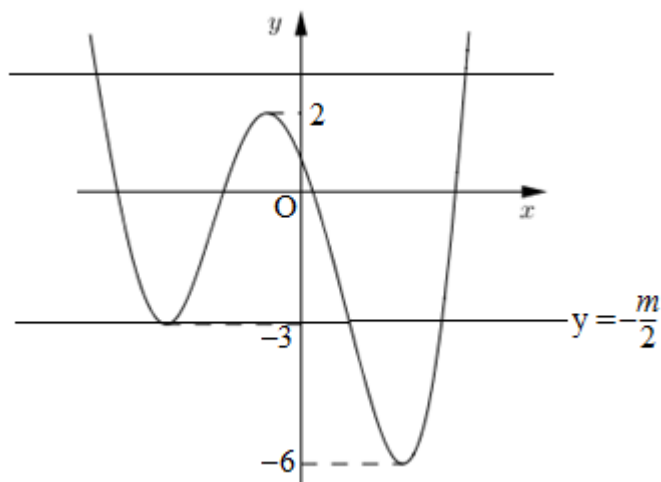
D. 13.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-1)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định $\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị



Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

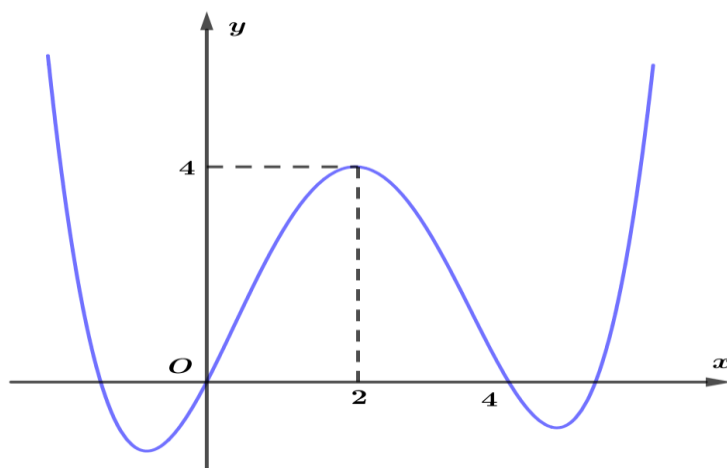
$\Leftrightarrow 2f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt hoặc 3 nghiệm trong đó có 1 nghiệm bội chẵn và 2 nghiệm đơn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2} \geq 2 \\ -6 < -\frac{m}{2} \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases}$$

Mà m là giá trị nguyên thuộc $[-12; 12]$ nên $m \in \{-12; -11; \dots; -4; 6; 7; \dots; 11\}$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 76: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$ là



A. 7.

B. 10.

C. 5.

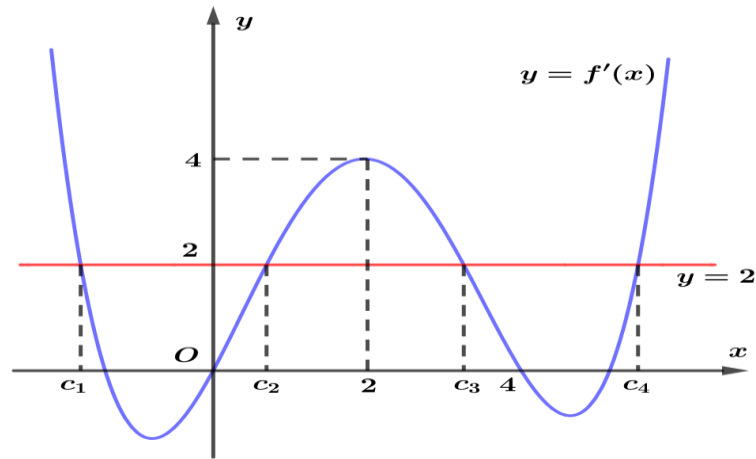
D. 11.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x)f'(x^3 + 3x^2) - 6x^2 - 12x = 3x(x+2)[f'(x^3 + 3x^2) - 2]$.



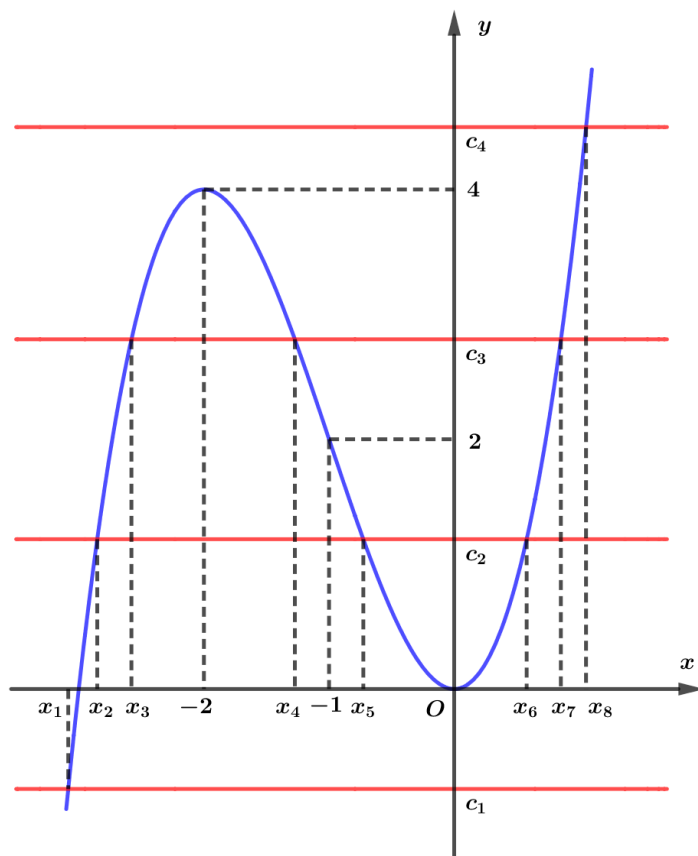
$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = c_1 \ (c_1 < 0) \quad (1) \\ x^3 + 3x^2 = c_2 \ (0 < c_2 < 2) \quad (2) \\ x^3 + 3x^2 = c_3 \ (2 < c_3 < 4) \quad (3) \\ x^3 + 3x^2 = c_4 \ (c_4 > 4) \quad (4) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = 3x^2 + 6x$.

Bảng biến thiên $h(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = h(x)$, $y = c_1$, $y = c_2$, $y = c_3$, $y = c_4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ ta được



$$(1) \Leftrightarrow x = x_1; (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ x = x_5 \\ x = x_6 \end{cases}; (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \\ x = x_4 \\ x = x_7 \end{cases}; (4) \Leftrightarrow x = x_8$$

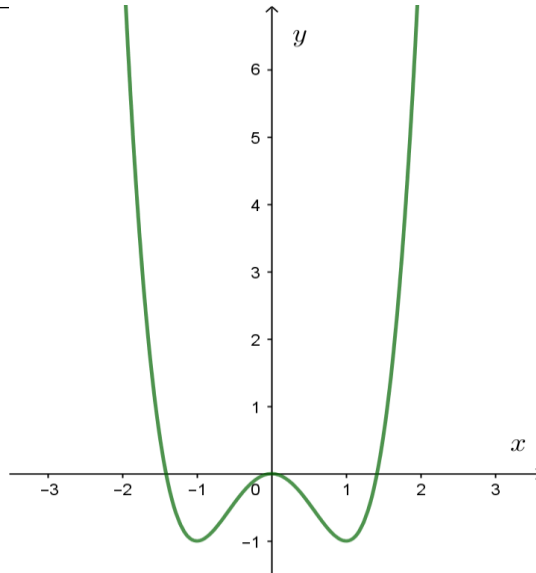
Trong đó $x_1 < x_2 < x_3 < -2 < x_4 < x_5 < 0 < x_6 < x_7 < x_8$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	-2	x_4	x_5	0	x_6	x_7	x_8	$+\infty$		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta kết luận được hàm số $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số trên có phương trình là $y = x^4 - 2x^2$. Vậy ta có:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \text{ và } f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$g'(x) = (f(x^3 + f(x)))' = (x^3 + f(x))' f'(x^3 + f(x)) = (3x^2 + f'(x)) f'(x^3 + f(x)).$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = (3x^2 + f'(x)) f'(x^3 + f(x)) = (3x^2 + 4x^3 - 4x) f'(x^3 + x^4 - 2x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 4x^3 - 4x) f'(x^3 + x^4 - 2x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 1 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = -1 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \approx 0,6930 \\ x \approx -1,4430 \\ x \approx 1,21195 \\ x \approx -2,0754 \\ x \approx -0,6710 \\ x \approx -1,9051 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 8 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội lẻ $x = 0$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 78: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	6	2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2} (f(x) - 6)^4$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ đi qua $A(-2; 2), B(0; 6), C(2; 2)$ và có ba điểm cực trị

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = 2 \\ c = 6 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6, f'(x) = x^3 - 4x$$

Ta có Hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2} (f(x) - 6)^4$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} (f(x) - 6)^4 + \frac{1}{x^2} \cdot 4(f(x) - 6)^3 \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(f(x) - 6)^3}{x^3} (4x \cdot f'(x) - 2f(x) + 12)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 6 = 0 & (1) \\ 4xf'(x) - 2f(x) + 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow 4x \cdot (x^3 - 4x) - 2\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6\right) + 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x^4 - 12x^2 = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } x \neq 0 \text{ nên có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7} \end{cases} \text{ và các nghiệm đó đều là nghiệm bội lẻ.}$$

Do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } g(x) = f(|f(x)|) \Rightarrow g'(x) = f'(|f(x)|) \cdot \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

Do đó $g'(x)$ không xác định khi $f(x) = 0$ hay $x = 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(|f(x)|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ |f(x)| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f(x) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có: $|f(x)| \in [0; 1], \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Từ bảng biến thiên suy ra số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là 2..

Câu 80: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$					

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) - 3x$.

$$h'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3) - 3.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 \cdot f'(x^3) - 3 = 0.$$

$$\text{Để thấy } x = 0 \text{ không là nghiệm của nên } (1) \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \text{ thì } (2) \text{ trở thành } f'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \quad (t \neq 0).$$

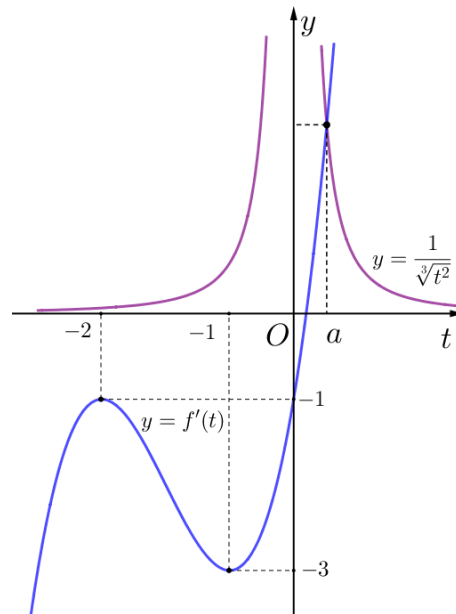
$$\text{Xét hàm số } y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$$

$$+ t > 0 \text{ thì } y = t^{-\frac{2}{3}} \text{ là hàm số lũy thừa, } y' = -\frac{2}{3} t^{-\frac{5}{3}} < 0 \text{ nên } y \text{ nghịch biến trên } (0; +\infty) \text{ và đồ}$$

thị của y nhận hai trục tọa độ làm hai tiệm cận.

$$+ y(t) = y(-t) \text{ nên } y \text{ là hàm số chẵn. Do đó đồ thị của } y \text{ nhận } Oy \text{ làm trục đối xứng.}$$

Vẽ đồ thị của $f'(t)$ và $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ ta có:



Từ đồ thị ta có $(3) \Leftrightarrow t = a > 0$. Suy ra $x = \sqrt[3]{a} > 0$

Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(0)$	$h(\sqrt[3]{a})$	$+\infty$

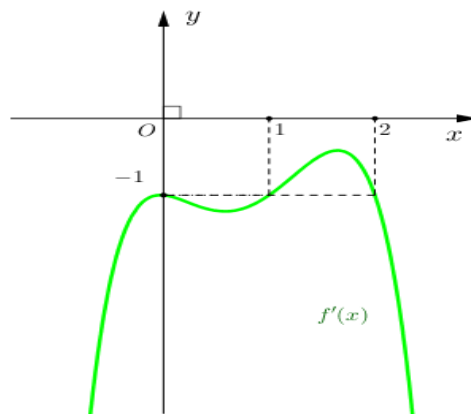
Ta thấy hàm số $g(x) = h(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của $g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng.

Do đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$g(0)$		$+\infty$	
		$g(\sqrt[3]{a})$		$g(\sqrt[3]{a})$		

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$ là



A. 1.

B. 2.

C. 3.

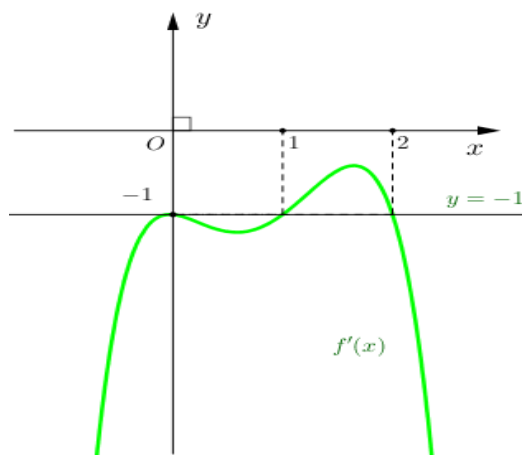
D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 (*)$.

Phương trình chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



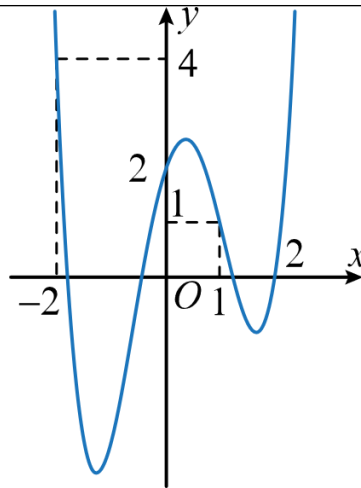
Dựa vào đồ thị, ta thấy có nghiệm $x = 0$, $x = 1$ và $x = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Dựa vào BBT, hàm số $g(x) = f(x) + x$ có một điểm cực tiểu $x = 1$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4$ là

A. 7.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

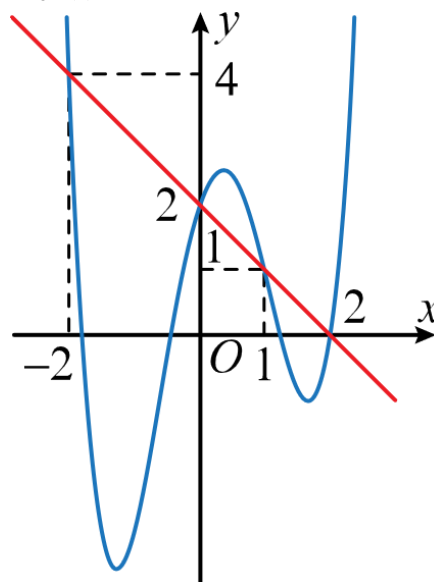
Ta có:

$$g'(x) = (2x-4)f'(x^2-4x+3) - 6(x-2) + 2(x-2)^3 = (2x-4) \left[f'(x^2-4x+3) - 3 + (x-2)^2 \right]$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ f'(x^2-4x+3) - 3 + (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f'(x^2-4x+3) = 2 - (x^2-4x+3) \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $x^2 - 4x + 3 = t$, ta có: $(*) \Leftrightarrow f'(t) = 2 - t$.



Từ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = 2 - t$ ta có:

$$f'(t) = 2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$ như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	1	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$											

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

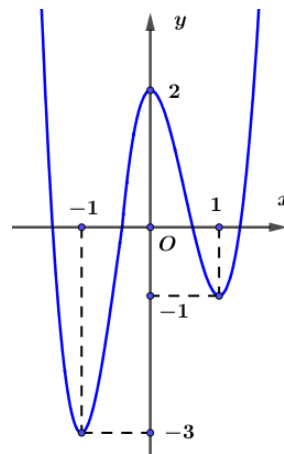
Chọn B

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (bội chẵn)} \\ x = m \text{ (bội lẻ)} \\ x = -3 \text{ (bội lẻ)} \end{cases}. \text{ Vậy hàm số } y = f(x) \text{ đạt cực trị tại } x = -3 < 0; x = m.$$

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ phải có đúng 1 cực trị dương, nghĩa là $m > 0$.

Vì $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 5 giá trị.

Câu 84: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ là



A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 4(2x-1)f'(4x^2-4x) - 4(2x-1)(x-1)$$

$$\Rightarrow y' = 4(2x-1)[f'(4x^2-4x) - (x-1)].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y' = 4(2x-1)[f'(4x^2-4x) - (x-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ f'(4x^2-4x) = x-1 \end{cases}$$

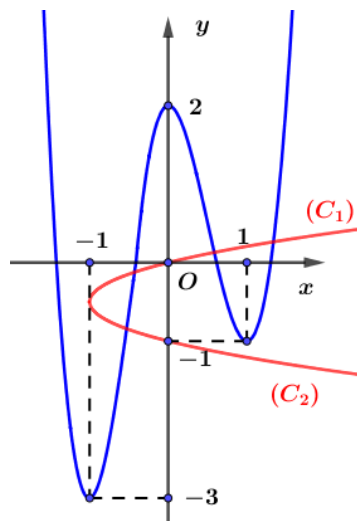
$$\text{Xét phương trình: } f'(4x^2-4x) = x-1 \quad (1)$$

Đặt $t = 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 4x - t = 0 \quad \Delta' = 4 + 4t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1$.

$$\text{Khi đó: } 4x^2 - 4x - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{1+t}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{1+t}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-1 - \sqrt{1+t}}{2} \\ x-1 = \frac{-1 + \sqrt{1+t}}{2} \end{cases}$$

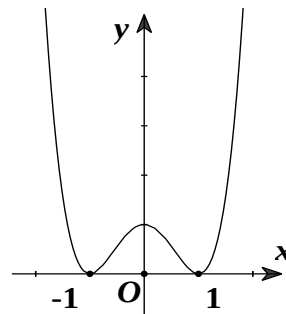
$$\text{Phương trình (1) trở thành: } \begin{cases} f'(t) = \frac{-1 - \sqrt{1+t}}{2} \\ f'(t) = \frac{-1 + \sqrt{1+t}}{2} \end{cases}$$

Vẽ đồ thị 3 hàm số $y = f'(x)$, $y = \frac{-1 - \sqrt{1+x}}{2} (C_1)$, $y = \frac{-1 + \sqrt{1+x}}{2} (C_2)$ trên cùng hệ trục tọa độ ta thấy đồ thị (C_1) cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 3 điểm, đồ thị (C_2) cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 1 điểm.



Với mỗi nhánh, mỗi giao điểm t sẽ tương ứng với một giá trị duy nhất của x khác $\frac{1}{2}$.

Câu 85: Vậy hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ có 5 điểm cực trị. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin^2 x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$?

A. 15.

B. 11.

C. 9.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm nên $f'(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn.

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Dựa vào đồ thị hình vẽ ta nhận thấy $f'(x)$ có dạng $f'(x) = ax^4 + bx^2 + c$, đồ thị đi qua các điểm $A(0;1), B(1;0)$ và có điểm cực tiểu $x_{CT} = 1$. Từ đó ta có:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + c$$

$$\text{Do } f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin^2 x \right|, \text{ ta đặt } h(x) = f(\sin x) + \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin^2 x$$

Tìm số cực trị của hàm số $y = h(x)$.

$$h'(x) = \cos x \cdot f'(\sin x) + \sin^2 x \cdot \cos x - 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2 \sin x \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $\cos x = 0$ có 3 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (1)

$$+) \text{ Với } f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2 \sin x$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow f'(t) = -t^2 + 2t$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-t^2 + 2t = t^4 - 2t^2 + 1 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha \ (\alpha \approx 1,3864) \ (l) \\ t = \beta \ (\beta \approx 0,4257) \ (n) \end{cases}$$

Với $t = \beta \in (0; 1)$ thì $\sin x = \beta$, khi đó $f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2 \sin x$ có 4 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (2)

Từ (1), (2) suy ra hàm số $y = h(x)$ có 7 cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$

Tìm số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

$$t = \sin x \Rightarrow f(t) + \frac{1}{3}t^3 - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}t^3 - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{3}t^2 - t + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = a \ (a \approx 1,69) \ (l) \\ t = b \ (b \approx 0,86) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = b \ (b \approx 0,86) \end{cases}$$

+ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (3)

+ $\sin x = b \ (b \approx 0,86) \Rightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (4)

Từ (3), (4), suy ra $h(x) = 0$ có 6 nghiệm đơn trên khoảng $(0; 3\pi)$

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9.

B. 7.

C. 11.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 0$ tại $x_1; x_2; x_3; x_4$ trong đó $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$

Xét hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{2(e^{2x} - 1)(e^{2x} - 2x - 2)}{|e^{2x} - 2x - 2|} f'(|e^{2x} - 2x - 2|)$$

Với $e^{2x} - 2x - 2 \neq 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 1 = 0 \\ f'(|e^{2x} - 2x - 2|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |e^{2x} - 2x - 2| = x_3 \\ |e^{2x} - 2x - 2| = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{2x} - 2x - 2 = x_3 & (1) \\ e^{2x} - 2x - 2 = x_4 & (2) \\ e^{2x} - 2x - 2 = -x_3 & (3) \\ e^{2x} - 2x - 2 = -x_4 & (4) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = e^{2x} - 2x - 2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2e^{2x} - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

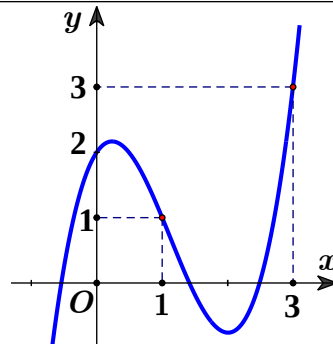
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có: phương trình, có hai nghiệm phân biệt khác 0, phương trình vô nghiệm vì vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Mặt khác hàm số đạt cực trị tại các điểm thỏa mãn: $e^{2x} - 2x - 2 = 0$ (5).

Dựa vào bảng biến thiên hàm $g(x)$ suy ra phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt khác 7 nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Vậy hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 87: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ là

A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

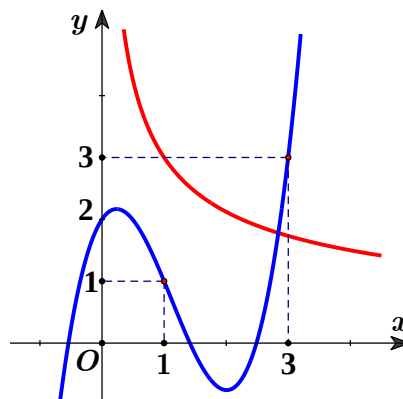
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) - 6x^2$ có $h'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 12x = 4x[x^2 f'(x^4) - 3]$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x[x^2 f'(x^4) - 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^4) = \frac{3}{x^2} \quad (x \neq 0) \end{cases} \quad (1)$$

Xét phương trình (1): đặt $t = x^4$ thì phương trình có dạng $f'(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t > 0$ (2).



Dựa vào đồ thị, phương trình (2) có một nghiệm duy nhất $a > 0$.

Khi đó ta được $x = \pm \sqrt[4]{a}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4) - 6x^2$

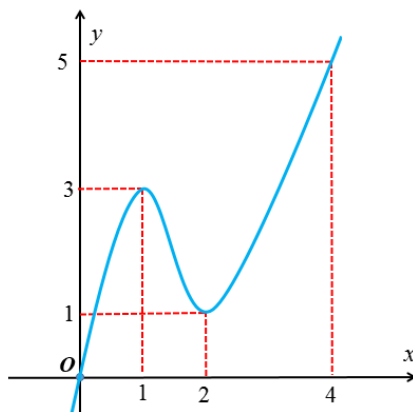
x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$	0	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$		
h'		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ bằng số điểm cực trị của hàm số

$h(x) = f(x^4) - 6x^2$ cộng với số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.

Do đó hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$.



A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } h(x) = f(x^2) - 2x \Rightarrow h'(x) = 2x \cdot f'(x^2) - 2.$$

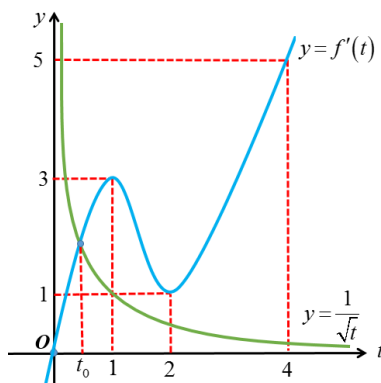
Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ đồ thị ta thấy $f'(x^2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $x \leq 0$ ta luôn có $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2) - 2 < 0$.

Với $x > 0$, ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x} \quad (*)$.

Đặt $t = x^2$, phương trình $(*)$ trở thành $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} (t > 0)$.

Xét sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ở hình vẽ dưới đây:



Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow t = t_0 \in (0;1)$. Khi đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{t_0}$.

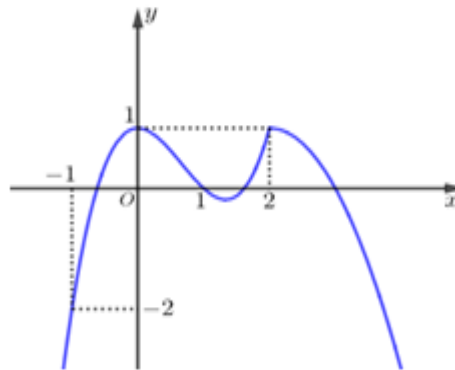
Mặt khác $h(0) = f(0) = 0$ và $h(2) = f(4) - 4 > 0$ nên ta có bảng biến thiên của hàm $y = h(x)$

x	$-\infty$	0	$\sqrt{t_0}$	2	$+\infty$		
$h'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	0	$h(\sqrt{t_0})$	$h(2)$	$+\infty$		

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = h(x)$ có một điểm cực trị và đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt $\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x) = |h(x)|$ có ba điểm cực trị trong đó có hai điểm cực tiểu.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

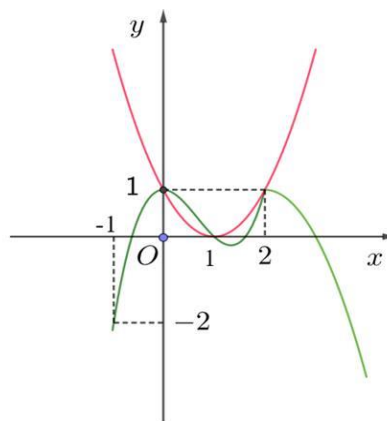
Chọn B

Ta có: $h(x) = f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2 \Rightarrow h'(x) = 2x \left[f'(x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1) \right]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f'(x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)}_{k(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 (*) \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình $(*)$ trở thành $f'(t) = t^2 - 2t + 1 (**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số $x^2 - 2x + 1$ trên đồ thị $f'(x)$ đề cho.



$$\text{Dựa vào đồ thị, } (**) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (bội ba)} \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Theo đồ thị ta thấy qua điểm $t = 2$, đồ thị màu đỏ vẫn nằm trên đường màu xanh hay nói cách khác, dấu của biểu thức không bị đổi qua điểm này.

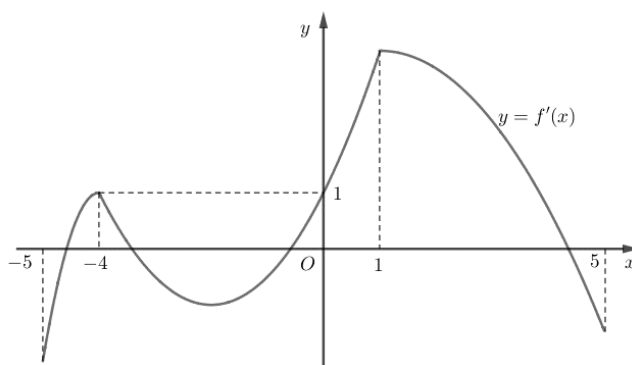
Vì vậy trong bảng biến thiên có thể bỏ qua xét tại hai điểm này.

Còn $x = 0$ trở thành nghiệm bội lẻ của phương trình $h'(x) = 0$, do đó ta vẫn xét.

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$			$f(1)-\frac{1}{3}$	$f(0)$	$f(1)-\frac{1}{3}$				
$g(x)$			$f(1)-\frac{1}{3}$	$f(0)$	$f(1)-\frac{1}{3}$				

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x) - (2x + 4) = (2x + 4)[f'(x^2 + 4x) - 1].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x = -4 & (1) \\ x^2 + 4x = 0 & (2) \\ x^2 + 4x = a \in (-4; 5) & (3) \end{cases}$$

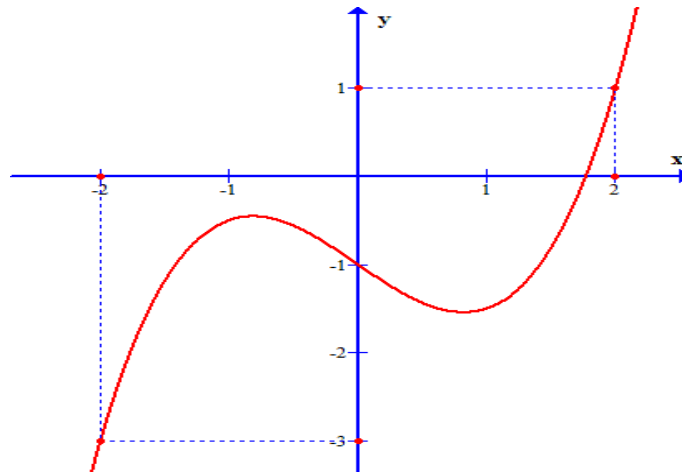
Xét phương trình $x^2 + 4x = a \in (-4; 5)$, ta có BBT của hàm số $y = x^2 + 4x$ trên $(-5; 1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		$-$	0	$+$	
y	5	0	-4	0	5

Suy ra có nghiệm kép $x = -2$, có 2 nghiệm phân biệt $x = -4; x = 0$, có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$ khác $-2; 0; -4$. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm trong đó có $x = -2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x = -4; x = 0; x = x_1; x = x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 91: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = \left| 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } h(x) = 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x = 2f(x^2 + x) - (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x).$$

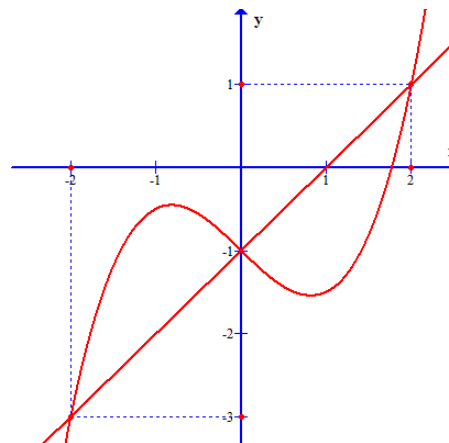
$$\Rightarrow h'(x) = 2(2x+1)f'(x^2 + x) - 2(2x+1)(x^2 + x) + 2(2x+1).$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2 + x) - (x^2 + x) + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 + x$. Khi đó phương trình trở thành $f'(t) - t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow f'(t) = t - 1$$

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) > t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t < 0 \\ t > 2 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} -2 < x^2 + x < 0 \\ x^2 + x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -2 \vee 1 < x \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$		
$2x+1$	$-$	$ $	$-$	$ $	0	$+$	$ $	$+$	
$f'(t)-t+1$	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$									
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^2) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x) = f(x^2) - x^2 \Rightarrow h(0) = 0$.

Ta có $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 1 \end{cases}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t = f'(x)$ ta có phương trình $f'(x) = 1$ có duy nhất một nghiệm và nghiệm đó dương. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 1$.

Suy ra $f'(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = x_0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{x_0}$.

Ta có $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.

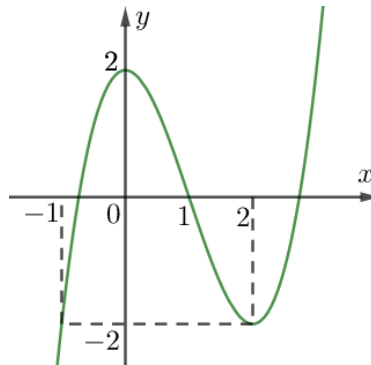
Khi đó $h(x) = f(x^2) - x^2$ là hàm bậc 8 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Lập bảng biến thiên của $h(x)$ ta có

x	$-\infty$	$-\sqrt{x_0}$	0	$\sqrt{x_0}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = |5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$?

A. 16.

B. 32.

C. 17.

D. 33.

Lời giải

Chọn D

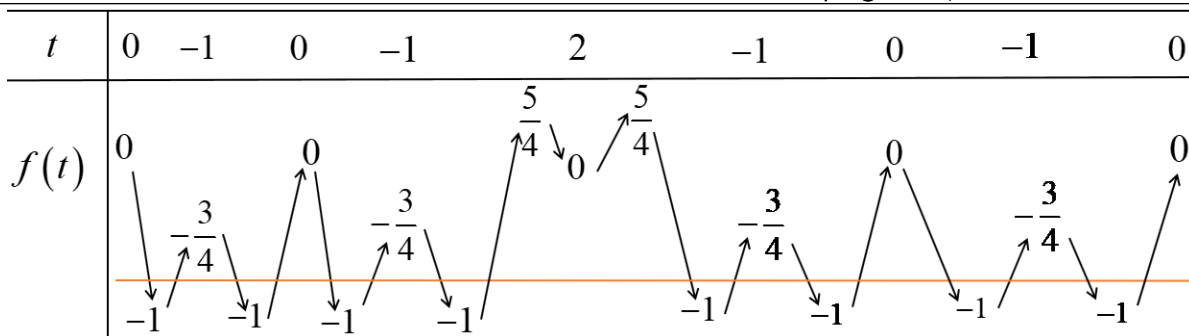
Ta có $f''(x) = ax(x-2) \Rightarrow f'(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) + c$ qua $(0; 2), (-1; -2)$.

Nên $\begin{cases} c = 2 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x$.

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{3}$	0	1	2	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{3}{4}$	-1	0	$\frac{5}{4}$	0	-1	$+\infty$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π
$2\sin x - 1$	-1		1		-3		1		-1
$ 2\sin x - 1 - 1$	$0 \rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 2$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(t)$ với $t = |2\sin x - 1| - 1$

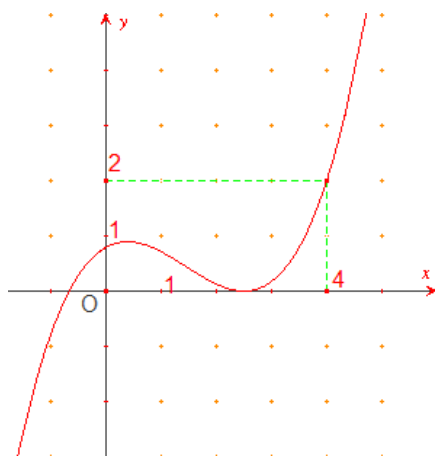


Suy ra phương trình có $f(|2\sin x - 1| - 1) = -\frac{4}{5}$ có 16 nghiệm trên đoạn $[0; 3\pi]$ và hàm số

$h(x) = 5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4$ có 17 điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$.

Vậy hàm số $g(x) = |5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4|$ có $16 + 17 = 33$ điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$.

Câu 94: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{2}{3}x^3 \right|$.

A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x) = f(x^2) - \frac{2}{3}x^3$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có: $h'(x) = f'(x^2) \cdot 2x - 2x^2 = 2x[f'(x^2) - x]$.

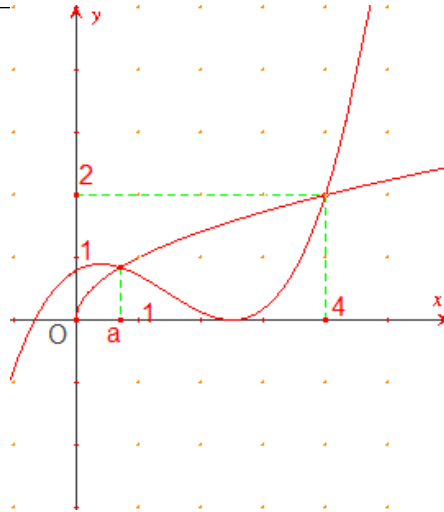
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) - x = 0 (*) \end{cases}$$

+ Nếu $x < 0$ thì $x^2 > 0$. Ta có: $f'(x^2) \geq 0$; $-x > 0$. Suy ra $(*)$ vô nghiệm.

+ Nếu $x \geq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) = \sqrt{t}$

Xét đồ thị hàm số $y = f'(t)$; $y = \sqrt{t}$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số



Ta thấy: $f'(t) = \sqrt{t}$ có 2 nghiệm dương phân biệt là 1 và 4.

Suy ra (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\sqrt{a}$; 2.

Do đó $h'(x)$ có 3 nghiệm phân biệt là 0; $\sqrt{a}$; 2.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty$, $h(0) = f(0) - 0 = 0$.

Nhìn vào lưới ô vuông và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox , Oy và đường thẳng $x = 4$ nhỏ hơn 4. Do đó ta có:

$$\int_0^4 f'(x)dx < 4 \Leftrightarrow f(4) - f(0) < 4 \Leftrightarrow f(4) < 4.$$

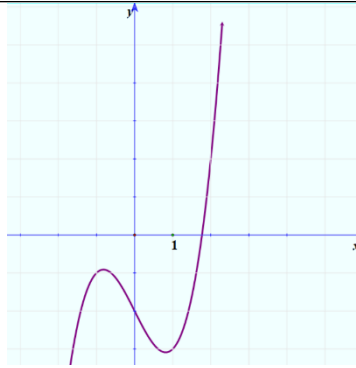
$$\text{Suy ra } h(2) = f(4) - \frac{16}{3} < 0.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	a	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$	$\searrow$ $h(2) < 0$	$\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y = h(x)$ có 3 điểm cực trị và phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 95: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(0) = 2021$ và đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y = |f(x^2) - 2|x| - 2021|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x) = f(x^2) - 2x - 2021$ với $x > 0$

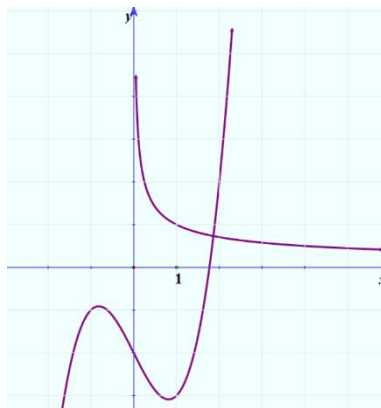
Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) - 2$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x},$$

Đặt $t = x^2$, do $x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2} = \sqrt{t}$

Do đó trở thành $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 1 nghiệm dương duy nhất $t = c$.

Từ đó có nghiệm dương duy nhất $x = \sqrt{c}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x^2) - 2x - 2021$ với $x > 0$

x	0	$\sqrt{c}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0		$+\infty$

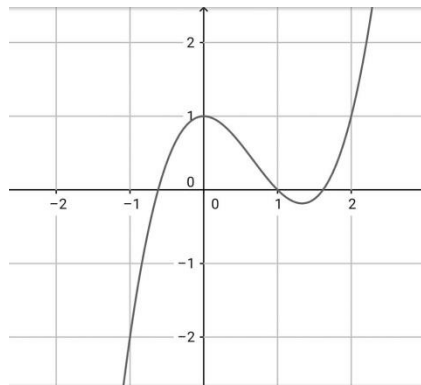
Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Do đó hàm số $y = g(|x|) = f(x^2) - 2|x| - 2021$ có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\sqrt{c}$	0	$\sqrt{c}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0		$+\infty$	

Vậy hàm số $y = |f(x^2) - 2|x| - 2021| = |g(|x|)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 96: Cho $f(x)$ là một hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(1) = -\frac{5}{3}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $g(x) = \left| f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

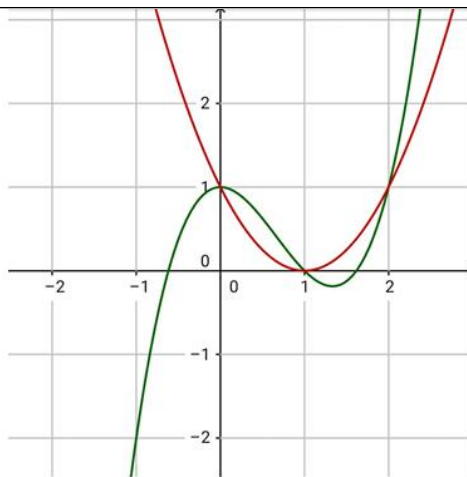
Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$

Ta có $h'(x) = f'(x) - (x-1)^2$

Điểm cực trị của hàm số $y = h(x)$ là nghiệm của phương trình $h'(x) = 0$ tức là nghiệm của phương trình $f'(x) = (x-1)^2$ suy ra điểm cực trị của hàm số $y = h(x)$ cũng là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$.

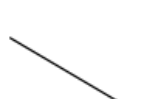
Vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có BBT của hàm số $y = h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$		-	+	-	+
$h(x)$					

Hơn nữa, vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn và $f(1) = -\frac{5}{3}$ nên $h(x)$ cũng là hàm số bậc bốn và $h(1) = 0$, do đó ta có BBT của hàm số $y = h(x)$ chi tiết hơn như sau:

x	$-\infty$	0			1		2		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$			a			0		
								b	$+\infty$
									

trong đó a, b là các số âm.

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm, tiếp xúc với trục hoành tại điểm cực đại và hai điểm cực tiểu nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = \left| 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } h(x) = 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 12(x+1)^5 - 12(x+1) - 3(-4x^3 - 12x^2 - 8x) \cdot f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$= 12(x+1)(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) + 12(x+1)(x^2 + 2x) \cdot f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$= 12(x+1)(x^2 + 2x) \left[x^2 + 2x + 2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right]$$

Mà $-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2 = -[x(x+2)]^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \geq 0$.

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x) = 12(x+1)(x^2 + 2x)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x = -2; x = -1; x = 0$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(-1) = -3f(-3) = 0$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ tiếp xúc Ox tại $x = -1$ và cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Vậy $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.