**ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH 11 – CHƯƠNG 4**

**§3. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**

Facebook GV1 soạn bài: maiphuongthieu

Facebook GV3 phản biện lần 1: maiphuongthieu

Facebook GV chuẩn hóa word: Nguyễn Tấn Linh.

**TIẾT 51, 52**

**I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ**

**1. Các giới hạn đặc biệt**

a.  với  nguyên dương.

b.  nếu .

c. Nếu  ( là hằng số) thì .

d.  với  nguyên dương.

e.  nếu .

**2. Tổng của cấp số nhận lùi vô hạn**

Cấp số nhân vô hạn  có công bội  với : .

**Các định lí về giới hạn**.

a) Nếu . Khi đó:

.



.

b) Nếu  và  thì  và 

c)  và   và .

**Định lí 2**

a) Nếu  thì .

b) Nếu ;  và  với mọi  thì .

c) Nếu   thì .

**CÁC DẠNG BÀI TẬP**

**Dạng 1: Tính giới hạn dãy số đa thức hoặc phân thức hữu tỉ**

Khi  (trong đó  và  là các là các đa thức của )

***Phương pháp giải****:* Chia tử và mẫu cho  với  là lũy thừa có số mũ cao nhất của  và , sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn  là đa thức bậc, ta đặt làm nhân tử chung, sau đó sử dụng định lí 2 về giới hạn.

1. Tính 

**A.** . **B.** . **C.** không tồn tại. **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

**=** .

1. Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** không tồn tại.

**Lời giải**

**Chọn C**

.

1. Tính 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** -3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chia cả tử và mẫu cho  ta có:



.

Vì  nên .

**Dạng 2: Tính giới hạn dãy số có chứa căn**.

**Hướng 1**: Đánh giá bậc của tử và mẫu. Sau đó, chia cả tử và mẫu cho  với *k* là số mũ lớn nhất của  và  (hoặc rút  là lũy thừa lớn nhất của và  ra làm nhân tử). Áp dụng các định lí về giới hạn để tìm giới hạn.

**Hướng 2:** Nhân với biểu thức liên hợp.

1. Tìm 

**A.** 0. **B.** . **C.** . **D.** 2

**Lời giải**

**Chọn C**

= = .

1. Tính 

**A.** . **B.** . **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

= 

Vì 

và 

**Chú ý:** Có thể kết luận kết quả của các giới hạn sau:

1) 

2) .

1. Tính

**A.** . **B.** . **C.** 0. **D.** 

**Lời giải**

**Chọn A**



**=** **= - 2**.

1. bằng bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

**=**  **=** 

Vì  và .

1. Tính .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

=  không xác định được vì rơi vào giới hạn vô định dạng 

= 

=

= = 0

**Dạng 3: Tính giới hạn dãy số chứa lũy thừa.**

 (trong đó và  là các biểu thức chứa hàm mũ 

***Phương pháp giải:*** Chia cả tử và mẫu cho  trong đó *a* là cơ số lớn nhất.

1. Tìm 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

=  = .

1. Tìm: 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

= 

Vì = 1 > 0; = 0; > 0.

1.  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có 

Vì  và .

1.  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có 



**TIẾT 51**

Nên = .

1. Tính tổng của dãy số.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  là cấp số nhân lùi vô hạn với 

Nên tổng các số hạng của dãy số là .

**CHÚ Ý: MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI NHANH**

Quy ước: Trong máy tính không có biến *n* nên ta ghi *x* thay cho *n*.

Ghi nhớ cách nhập giá trị của *x*.

•  thì ta nhập  ( số )

•  thì ta nhập  ( số )

• Đề bài yêu cầu tính  thì ta hiểu rằng, biến .

**Ghi nhớ cách hiển thị kết quả**

• Gặp hằng số  (trong đó  là số nguyên âm, thông thường 

**MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1:**  là số rất nhỏ và gần bằng 0.

• Gặp hằng số  đọc là (dấu của *c*) nhân vô cực với *c* là hằng số (chú ý có thể lớn hơn 10).

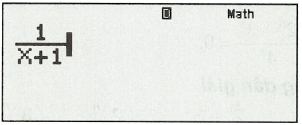
**Ví dụ 2:**  là âm vô cực, ghi là  là dương vô cực, ghi là .

**Ví dụ 3.** Tính giới hạn sau: 

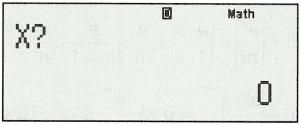
**Lời giải**

***Cách bấm máy:***

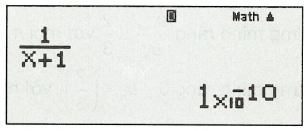
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Sau đó bấm CALC, màn hình sẽ xuất hiện như hình bên. Ta hiểu rằng “Bạn muốn gán *x* bằng bao nhiêu?”



• Nhập: , sau đó bấm “=”, ta được kết quả:



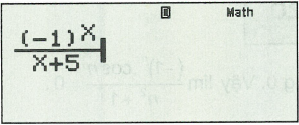
**Kết quả:**  là một giá trị rất rất nhỏ gần bằng 0. Vậy 

**Ví dụ 4.** Tính giới hạn sau: .

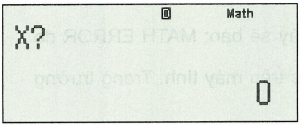
**Lời giải**

***Cách bấm máy:***

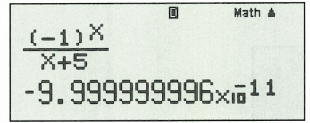
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Sau đó bấm CALC.



• Nhập , sau đó bấm “=”, ta được kết quả:



**Kết quả:**  là một giá trị rất nhỏ gần bằng 0.

Vậy 

**Ví dụ 5.** Tính giới hạn sau: 

• Nếu ta nhập , sau đó CALC như trên máy sẽ báo: MATH ERROR.

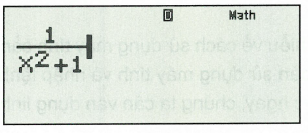
**Lời giải**

Vận dụng định lí 1 nếu  với mọi *n* và  thì 

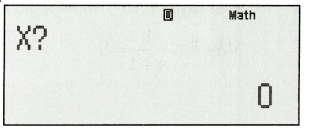
Ta có đánh giá sau: , ta chỉ cần ghi  vào máy tính là sẽ tính được.

***Cách bấm máy:***

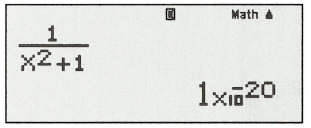
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Sau đó bấm CALC.



• Nhập: , sau đó bấm “=”, ta được kết quả:



**Kết quả:**  là một giá trị rất rất nhỏ gần bằng 0. Vậy 

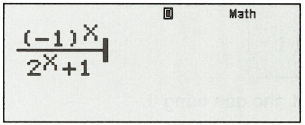
**Ví dụ 6.** Tính giới hạn sau 

• Nếu ta nhập , sau đó CALC như trên máy sẽ báo: MATH ERROR do hàm số mũ tăng rất nhanh nên sẽ không tính được trên máy tính. Trong trường hợp này ta sẽ xử lý như sau:

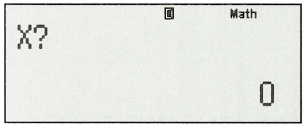
**Lời giải**

***Cách bấm máy:***

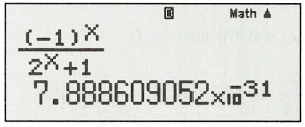
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Bấm CALC.



• Nhâp: , sau đó bấm “=”, ta được kết quả:



**Kết quả:**  là một giá trị rất rất nhỏ gần bằng 0.

Vậy 

**NHẬN XÉT:** Qua 4 ví dụ trên, phần nfao bạn đọc đã hiểu về cách sử dụng máy tính cầm tay (MTCT) để giải các bài toán về dãy số có giới hạn là 0. Có những bài toán sử dụng máy tính và nhập lệnh CALC  sẽ ra luôn kết quả, có những bài toán không ra được ngay, chúng ta cần vận dụng linh hoạt các cách đánh giá cũng như đổi cách bấm máy để ra được kết quả bài toán. Qua đây, đòi hỏi chúng ta cần có kiến thức khá chắc chắn về định nghĩa giới hạn dãy số để có thể vận dụng làm các bài tập cho tốt hơn.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1.  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: .

Vì  và nên theo quy tắc 2, 

1.  bằng

**A.**  **B.**  **C.** . **D.** 

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có 

Vì  và  nên (theo quy tắc 2).

***Tổng quát:*** Cho  là một số nguyên dương.

a)  nếu 

b)  nếu 

Chẳng hạn:  vì ;  vì .

1. , với  bằng:

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

**Chọn B**

Ta có: .

1.  với  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

**Chọn C**

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho  ( là lũy thừa bậc cao nhất của  trong phân thức), ta được: . Vì  và  nên .

1. Giới hạn của dãy số  với  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

**Chọn B**

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho  ( là bậc cao nhất của  trong phân thức), ta được

.

1. Giới hạn của dãy số  với , bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

**Chọn C**

Chia cả tử và mẫu cho  ( là lũy thừa bậc cao nhất của  trong **mẫu thức**), ta được  Vậy 

1.  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải***

**Chọn D**

Ta có  mà  nên suy ra 

1. Cho dãy số  được xác định bởi  với mọi . Tìm giới hạn của .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

**Chọn C**

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được  với mọi 

Đề bài không cho biết dãy số  có giới hạn hữu hạn hay không, tuy nhiên các đáp án đề bài cho đều là các giới hạn hữu hạn. Do đó có thể khẳng định được dãy số  có giới hạn hữu hạn. Đặt 



Hay 

Vậy 

(loại trường hợp ). Vậy .

1. Tổng  bằng:

**A.**. **B.** . **C.** . **D.** .

**Chọn B**

**Lời giải**

 là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có  và .

Do đó .

1. Tính  bằng:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** . **D.** .

**Chọn C**

**Lời giải**

Ta có: 

Vậy .

1. Biết . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: . Vì  nên , .

Vậy .

1.  bằng bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Bậc của tử và mẫu thức đều bằng  nên dãy có giới hạn hữu hạn. Hệ số của  trên tử bằng , hệ số của  dưới mẫu bằng  nên giới hạn là .

1. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là ?

**A. **. **C. **. **B. **. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phân thức  có bậc của tử thức cao hơn bậc của mẫu thức, đồng thời hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử thức và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của mẫu thức đều dương nên suy ra giới hạn của dãy số tương ứng bằng .

(Phân thức  có bậc tử bằng bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng . Phân thức  có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng . Phân thức  có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nhưng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới mẫu trái dấu nhau nên giới hạn dãy số tương ứng bằng ).

1.  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Lời giải***

**Chọn A**



1.  bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

.