CHỦ ĐỀ 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm số xác định trên D

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất (**GTLN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \le M;\ \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f(x_o) = M \end{cases},\ \text{ta kí hiệu } M = \max_{x \in D} f(x)$$

Chú ý: Nếu $f(x) \le M;\ \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $M = \max_{x \in D} f(x)$

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (**GTNN**) của hàm số $y = f(\mathrm{x})$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \ge M;\ \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f(x_o) = M \end{cases},\ \text{ta kí hiệu } M = \min_{x \in D} f(x)$$

Chú ý: Nếu $f(x) \ge M;\ \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $M = \min_{x \in D} f(x)$

2. Các phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

<u>Phương pháp chung:</u>

Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên *D*, ta tính *y'*, tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại và lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên ta suy ta GTLN, GTNN của hàm số.

❖ ***Chú ý***:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc giảm trên [*a;b*].

Thì ta có $\max_{[a;b]} f(x) = \{f(a); f(b)\}$ và $\min_{[a;b]} f(x) = \{f(a); f(b)\}$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên [*a;b*] thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau:

- Tính *y'* và tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ mà tại đó *y'* triệt tiêu hoặc không tồn tại.
- Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$. Khi đó

+) $\max_{[a;b]} f(x) = \{f(x_1); f(x_2); .... f(x_n); f(a); f(b)\}$

+) $\min_{[a;b]} f(x) = \{f(x_1); f(x_2); .... f(x_n); f(a); f(b)\}$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn trên chu kỳ *T* để tìm GTLN, GTNN của nó trên *D* ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn thuộc *D* có độ dài bằng *T*.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên *D*. Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta tìm được $t \in E$ với $\forall x \in D$, ta có $y = g(t)$ thì *Max, Min* của hàm f trên *D* chính là *Max, Min* của hàm *g* trên *E*.
- Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.
- Ngoài phương pháp khảo sát để tìm *Max, Min* ta có thể dùng phương pháp miền giá trị hoặc bất đẳng thức để tìm *Max, Min*

❖ ***Ta cần phân biệt hai khái niệm cơ bản***

- Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên *D* với cực đại của hàm số.
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên *D* với cực tiểu của hàm số.

3. Tìm tập giá trị của hàm số

Phương pháp chung:

Việc tìm tập giá trị của hàm số chính là việc đi tìm giá trị nhỏ nhất, kí hiệu là *m* và giá trị lớn nhất, kí hiệu là *M*. Khi đó, tập giá trị của hàm số là $T = [m; M]$.

4. Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số hai biến (bài toán cực trị)

Các bài toán hai biến (yêu cầu: tìm GTLN, GTNN hoặc tìm tập giá trị).

- Sử dụng phương pháp thế $y = h(x)$ từ giả thiết vào biểu thức *P* cần tìm cực trị, khi đó $P = f(x)$ với $x \in [a; b] \rightarrow$ đưa về tìm GTLN, GTNN của bài toán một biến.
- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản (có thể dùng để giải quyết các bài toán một biến)
- Bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực không âm

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho các số thực *a, b, c, d*

$$(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2).\text{ Dấu "=" xảy ra khi } \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$$

Một số bổ đề cơ bản dùng trong các bài toán hai biến

- $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{(x^2+y^2)}{2}$ và $x^2+xy+y^2 \ge \frac{3}{4}(x+y)^2$
- $x^3+y^3 \ge \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{2} \ge \frac{(x+y)^3}{4} \ge xy(x+y)$
- Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân số $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$

DẠNG 1: TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT – GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn [0;2] là

A. 0. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

<u>Lời giải</u>

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+5$ trên [0;2], có $f'(x)=3x^2-3$

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 3x^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Tính $f(0)=5; f(1)=3; f(2)=7.$ **Vậy** $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=3$.

Ví dụ 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+1$ trên đoạn [0;2] là

A. 64. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 9.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+1$ trên [0;2], có $f'(x)=4x^3-4x$

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 4x^3-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Tính $f(0)=1; f(1)=0; f(2)=9.$ Vậy $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=9.$

Ví dụ 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn [2;4] là

A. 7. **B.** 6. **C.** $\frac{19}{3}$ **D.** $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Cần nhớ công thức đạo hàm:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên [2;4], có $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Tính $f(2) = 7; f(3) = 6; f(4) = \dfrac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 6$.

Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE (MODE 7)**

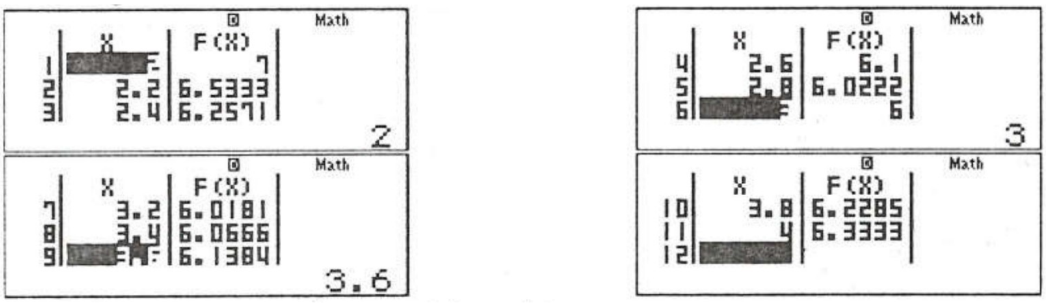
Bước 1: Bấm tổ hợp phím MODE 7

Bước 2: Nhập $f(X) = \dfrac{X^2+3}{X-1}$

Sau đó ấn phím = (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím =) sau đó nhập $\begin{cases} Star = 2 \\ End = 4 \\ Step = 0.2 \end{cases}$

(**Chú ý:** Thường ta chọn $Step = \dfrac{End - Start}{10}$)

Bước 3: Tra bảng nhận được và tìm GTNN:



Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 6$.

Ví dụ 4: Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn [0;2]. Giá trị của 3*M* + *m* bằng

A. 0. **B.** – 4. **C.** – 2. **D.** 1.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên [0;2] có $f'(x) = -\dfrac{8}{(x-3)^2} < 0$

Suy ra $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên (0;2) $\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = -5 \\ \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy $M=\frac{1}{3}\Rightarrow 3M=3; m=-5\rightarrow 3M+m=-2$

Ví dụ 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{3x-2x-x^2}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Cần nhớ công thức đạo hàm:

$$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Điều kiện xác định: $3-2x-x^2\geq 0\Leftrightarrow -3\leq x\leq 1$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ trên [-3;1], có $f'(x)=\frac{-2-2x}{2\sqrt{3-2x-x^2}}=-\frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<1\\ x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$

Tính $f(-3)=0; f(-1)=2; f(1)=0$. Vậy $\max\limits_{[-3;1]}f(x)=f(-1)=2$.

Ví dụ 6: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của $M-2m$ bằng

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Điều kiện xác định: $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ trên [-1;1], có $f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\ 1-2x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Tính $f(-1)=f(1)=0; f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Vậy $\begin{cases}m=\min\limits_{[-1;1]}f(x)=-\frac{1}{2}\\ M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow M-2m=\frac{1}{2}-2.\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

Ví dụ 7: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$. Giá trị của $M-2m^2$ bằng

A. – 2.	**B.** 2.	**C.** 0.	**D.** – 1.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ trên [-1;1], có $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$;

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Tính $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}; f(0) = 2$

Vậy $\begin{cases} m = \min\limits_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{2} \\ M = \max\limits_{[-1;1]} f(x) = 2 \end{cases} \to M - 2m^2 = 2 - 2.2 = -2$

Ví dụ 8: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - 2\sqrt{-x^2+4x-3}$ là

A. 0.	**B.** $-\sqrt{2}$.	**C.** $\sqrt{2}$.	**D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$, ta có $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}; t' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Tính $t(1) = t(3) = \sqrt{2}; t(2) = 2 \longrightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

Khi đó $t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} = 2 + 2\sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow 2\sqrt{-x^2+4x-3} = t^2 - 2$

Do đó $y = f(t) = t - (t^2 - 2) = -t^2 + t + 2$

Xét $f(t) = -t^2 + t + 2$ trên $\left[\sqrt{2}; 2\right] \longrightarrow \max\limits_{[\sqrt{2};2]} f(t) = \sqrt{2}$. Vậy $\max\limits_{[1;3]} y = \sqrt{2}$

Ví dụ 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^3 x - \dfrac{9}{2}\cos^2 x + 3\cos x + \dfrac{1}{2}$ là

A. – 9.	**B.** 1.	**C.** $-\dfrac{3}{2}$.	**D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Đặt $t = \cos x \in [-1;1]$, khi đó $y = f(t) = 2t^3 - \dfrac{9}{2}t^2 + 3t + \dfrac{1}{2}$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - \dfrac{9}{2}t^2 + 3t + \dfrac{1}{2}$ trên [-1;1], có $f'(t) = 8t^2 - 9t + 3 > 0, \forall t$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-1;1) \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = 1$.

Ví dụ 10: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^3 x + \cos 2x + \sin x + 3$ là

A. 0. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\dfrac{112}{27}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Cần nhớ công thức lượng giác:

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$$

Ta có $y = \sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin x + 3 = \sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x + 4$

Đặt $t = \sin x \in [-1;1]$, khi đó $y = f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 4$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 4$ trên [-1;1], có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1$;

Phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le t \le 1 \\ 3t^2 - 4t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Tính $f(-1) = 0; f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{112}{27}; f(1) = 4$. Vậy $y_{\max} = \dfrac{112}{27}$.

Ví dụ 11: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \left|-x^2 - 4x + 5\right|$ trên đoạn [-6;6]

A. 110. **B.** 9. **C.** 55. **D.** 7.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = -x^2 - 4x + 5$ liên tục trên đoạn [-6;6]

Đạo hàm $g'(x) = -2x - 4 \to g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in [-6;6]$

Lại có $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-6;6] \\ x = -5 \in [-6;6] \end{array}\right.$

Tính $\begin{cases} g(-6) = -7 \\ g(-2) = 9 \\ g(6) = -55 \\ g(1) = g(-5) = 0 \end{cases} \to \max\limits_{[-6;6]} f(x) = \max\limits_{[-6;6]} \left\{ |g(-6)|; |g(-2)|; |g(6)|; |g(1)|; |g(-5)| \right\} = 55.$

Nhận xét: bài này rất dễ sai lầm vì không để ý hàm trị tuyệt đối không âm.

Ví dụ 12: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right| - x$ trên đoạn [-4;4]

A. 2. **B.** 17. **C.** 34. **D.** 68.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn [-4;4]

- Nếu $x\in[1;2]$ thì $x^2-3x+2\le 0$ nên suy ra $f(x)=-x^2+2x-2$

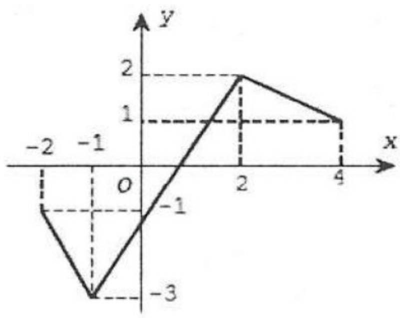
Đạo hàm $f'(x)=-2x+2\to f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[1;2]$. Ta có $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=-2 \end{cases}$

- Nếu $x\in[-4;1]\cup[2;4]$ thì $x^2-3x+2\ge 0$ nên suy ra $f(x)=x^2-4x+2$

Đạo hàm $f'(x)=2x-4\to f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[-4;1]\cup[2;4]$. Ta có $\begin{cases} f(-4)=34 \\ f(1)=-1 \\ f(2)=-2 \\ f(4)=2 \end{cases}$

So sánh hai trường hợp, ta được $\max\limits_{[-4;4]} f(x)=f(-4)=34$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn [-2;4] như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn [-2;4]?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $|f(0)|$.

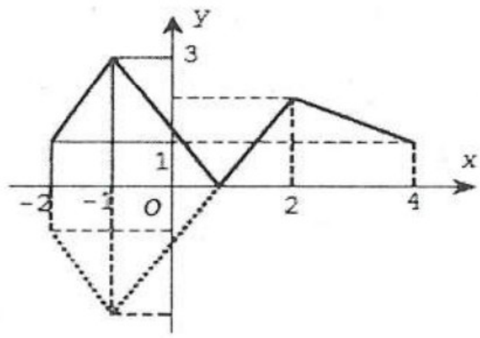
Lời giải

Đáp án: Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn [-2;4]

Ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ trên [-2;4] như hình vẽ.

Do đó $\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=3$ tại $x=-1$



Ví dụ 14: Cho $(P): y=x^2$ và $A\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. Gọi M là điểm bất kì thuộc *(P)*. Khoảng cách MA bé nhất là

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Vì M thuộc parabol *(P)* $\Rightarrow M(m;m^2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(m+2; m^2 - \frac{1}{2}\right)$

Suy ra $MA^2 = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = (m+2)^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = m^4 + 4m + \frac{17}{4}$

Xét hàm số $f(m) = m^4 + 4m + \frac{17}{4}$, có $f'(m) = 4m^3 + 4; f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Do đó $\min f(m) = f(-1) = 1 - 4 + \frac{17}{4} = \frac{5}{4} \to MA_{\min} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 15: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn [-1;1] thỏa mãn $f(x) > 0, g(x) > 0, \forall x \in [-1;1]$ và $f'(x) \ge g'(x) \ge 0, \forall x \in [-1;1]$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất trên đoạn [-1;1] của hàm số $h(x) = 2f(x).g(x) - g^2(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m = h(-1)$. **B.** $m = h(0)$. **C.** $m = \frac{h(-1)+h(1)}{2}$. **D.** $m = h(1)$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có $h'(x) = 2.\left[f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\right] - 2g'(x).g(x);\ \forall x \in [-1;1]$

Suy ra $h(x) = 2.g(x).\left[f'(x) - g'(x)\right] + 2f(x).g'(x) \ge 0$ vì $f'(x) - g'(x) \ge 0$

Do đó $h(x)$ là hàm số đồng biến trên [-1;1] $\Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} h(x) = h(-1)$.

DẠNG 2: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn [-1;3] bằng 10.

A. $m = 3$. **B.** $m = -6$. **C.** $m = -7$. **D.** $m = -8$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ trên [-1;3], có $f'(x) = -2x + 4$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ -2x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Tính $f(-1) = -5 - m; f(2) = 4 - m; f(3) = 3 - m$

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2) = 4 - m = 10 \Rightarrow m = -6$

Ví dụ 2: Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn [-1;1] bằng 0.

A. $a = 2$. **B.** $a = 6$. **C.** $a = 0$. **D.** $a = 4$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+a$ trên [-1;1], có $f'(x)=-3x^2-6x$

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -3x^2-6x=0\end{cases}\Rightarrow x=0$

Tính $f(-1)=-2+a; f(0)=a; f(1)=-4+a$

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=-4+a=0\Rightarrow a=4.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-(m^2+m+1)x$. Gọi *S* là tập hợp các giá trị thực của tham số *m* sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [-1;1] bằng – 6. Tính tổng các phần tử của *S*.

A. 0. **B.** 4. **C.** – 4. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có $f'(x)=-3x^2+2mx-m^2-m-1; \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $\Delta'=-2m^2-3m-3<0; \forall m\in\mathbb{R}$

Suy ra $y'<0; \forall x\in[-1;1]$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)\Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} y=y(1)=-6$

Lại có $y(1)=-2-m^2\rightarrow -2-m^2=-6\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.$. Vậy $\sum m=0.$

Ví dụ 4: Biết hàm số $y=(x+m)^3+(x+n)^3-x^3$ với *m, n* là tham số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(m^2+n^2)-m-n$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** – 16. **D.** $-\frac{1}{16}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Ta có $y'=3(x+m)^2+3(x+n)^2-3x^2=3\left[x^2+2(m+n)x+m^2+n^2\right]$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0; \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=(m+n)^2-m^2-n^2\le 0\Leftrightarrow mn\le 0$

Lại có $P=4\left(m^2+n^2\right)-(m+n)=4(m+n)^2-8mn-(m+n)\ge 4(m+n)^2-(m+n)$

$$=4(m+n)^2-2.2(m+n).\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\left[2(m+n)-\frac{1}{4}\right]^2-\frac{1}{16}\ge-\frac{1}{16}\Rightarrow P_{\min}=-\frac{1}{16}$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{x-m^2}{x+8}$ với *m* là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của *m* để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn [0;3] bằng – 2.

A. $m=-4$. **B.** $m=5$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\frac{x-m^2}{x+8}$ trên [0;3], có $f'(x)=\frac{8+m^2}{(x+8)^2}>0; \forall x\in[0;3]$

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0;3) \to \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = -\frac{m^2}{8}$

Theo bài ta, ta có $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{8} = -2 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m_{\max} = 4$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (với *m* là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0 < m \le 2$. **B.** $2 < m \le 4$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m > 4$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Xét hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên [1;2], có $f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}; \forall x \in [1;2]$

Do đó $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = f(1) + f(2) = \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 5$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+2}$ (với *m* là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên *m* thuộc đoạn [-10;10] thỏa mãn $\max\limits_{[0;1]} y \ge 2 \min\limits_{[0;1]} y$?

A. 5. **B.** 11. **C.** 16. **D.** 6.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+2}$ trên [0;1]. Có $f'(x) = \frac{m+2}{(x+2)^2}; \forall x \in [0;1]$

- **TH1.** Với $m > -2$ suy ra $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0;1)$

Do đó $\max\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = \frac{1-m}{3}; \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = -\frac{m}{2}$

Theo bài ra, ta có $\frac{1-m}{3} \ge 2\left(-\frac{m}{2}\right) \Leftrightarrow 1-m \ge -3m \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$

Kết hợp với $m \in [-10;10]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 11 giá trị nguyên *m*

- **TH2.** Với $m < -2$ suy ra $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

Do đó $\max\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = -\frac{m}{2}; \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = \frac{1-m}{3}$

Theo bài ra, ta có $-\frac{m}{2} \ge 2.\left(\frac{1-m}{3}\right) \Leftrightarrow -3m \ge 4-4m \Leftrightarrow m \ge 4$ (vô lý)

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên *m* thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 8: Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - m^2 - 2}{x-m}$ trên đoạn [0;4] bằng – 1.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{1.(-m)-1.(-m^2-2)}{(x-m)^2}=\dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2}>0;\ \forall x\neq m$

Với $x=m\notin[0;4]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>4\\m<0\end{array}\right.$, ta được $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0;4)$

Suy ra $\max\limits_{[0;4]}f(x)=f(4)=\dfrac{2-m^2}{4-m}$. Theo bài ra, ta có $\dfrac{2-m^2}{4-m}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-3\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện: $\left[\begin{array}{l}m>4\\m<0\end{array}\right.\to m=-3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=ax^3+cx+d,a\neq0$ có $\min\limits_{(-\infty;0)}f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn [1;3] bằng

A. $8a+d$. **B.** $d-16a$. **C.** $d-11a$. **D.** $2a+d$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Ta có $\min\limits_{(-\infty;0)}f(x)=f(-2)\longrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow$ a < 0

Lại có $f'(x)=3ax^2+c$ mà $\min\limits_{(-\infty;0)}f(x)=f(-2)\Rightarrow f'(-2)=0\Leftrightarrow 12a+c=0$

Do đó $f(x)=ax^3+cx+d=ax^3-12ax+d$

Xét hàm số $f(x)=ax^3-12ax+d$ trên [1;3], có $f'(x)=3ax^2-12a$;

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le3\\3ax^2-12a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le3\\x^2-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Tính $f(1)=d-11a;f(2)=d-16a;f(3)=d-9a$. Vậy $\max\limits_{[1;3]}f(x)=d-16a$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c,a\neq0$ có $\min\limits_{(-\infty;0)}f(x)=f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ bằng

A. $8a+c$. **B.** $c-\dfrac{7a}{16}$. **C.** $c+\dfrac{9a}{16}$. **D.** $c-a$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Ta có $\min\limits_{(-\infty;0)}f(x)=f(-1)\longrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow a>0$

Lại có $f'(x)=4ax^3+2bx$ mà $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1) \Rightarrow f'(-1)=0 \Leftrightarrow b=-2a$

Do đó $f(x)=ax^4+bx^2+c=ax^4-2ax^2+c$

Xét hàm số $f(x)=ax^4-2ax^2+c$ trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ có $f'(x)=4ax^3-4ax$

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ 4ax^3-4ax=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ x(x^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Tính $f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{7a}{16}; f(1)=c-a; f(2)=8a+2.$ Vậy $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(1)=c-a.$

Ví dụ 11: Hỏi tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^4-2x^2+m\right|$ trên đoạn [0;2] bằng 5?

A. $(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)$. **B.** $(-5;-2)$. **C.** $(-4;-1)\cup(5;+\infty)$. **D.** $(-4;-3)$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+m$ trên [0;2], có $f'(x)=4x^3-4x; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Tính $|f(0)|=|m|;|f(1)|=|m-1|;|f(2)|=|m+8|$ suy ra $\max\limits_{[1;2]} y=\{|m-1|;|m+8|\}$

- **TH1.** Nếu $\max\limits_{[1;2]} y=|m-1| \longrightarrow \begin{cases} |m-1|=5 \\ |m-1| \ge |m+8| \end{cases} \Leftrightarrow m=-4$
- **TH2.** Nếu $\max\limits_{[1;2]} y=|m+8| \longrightarrow \begin{cases} |m+8|=5 \\ |m+8| \ge |m-1| \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$

Vậy có 2 giá trị m cần tìm và thuộc khoảng $(-5;-2)$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\left|2x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để $\min\limits_{[-1;3]} f(x) \le 3$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 39.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=2x^3-3x^2+m$ trên [-1;3], có $g'(x)=6x^2-6x; g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Tính $\begin{cases} f(-1)=|m-5|; f(0)=|m| \\ f(1)=|m-1|; f(3)=|m+27| \end{cases}$. Khi đó $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=\{|m-5|;|m+27|\}$

- **TH1.** Nếu $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=|m-5| \Leftrightarrow |m-5| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le m-5 \le 3 \Leftrightarrow 2 \le m \le 8$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = \{2;3;4;...;8\}$. Thử lại $\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên âm m cần tìm.

- **TH2.** Nếu $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = |m+27| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+27| \le \{|m-5|;|m|;|m-1|\} \\ |m+27| \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow -30 \le m \le -24$

Kết hợp $f(1) = |m-1|; f(3) = |m+27|$ suy ra có 7 giá trị nguyên m cần tìm.

Vậy có tất cả 13 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max\limits_{[1;2]} y$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ trên [1;2], có $f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Tính $|f(0)| = |m|; |f(1)| = |m-2|; |f(2)| = |m-4|$ suy ra $\max\limits_{[1;2]} y = \{|m|;|m-4|\}$

- **TH1.** Nếu $\max\limits_{[1;2]} y = |m| \longrightarrow |m| \ge |m-4| \Leftrightarrow m \ge 2 \longrightarrow |m| \ge 2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$

- **TH2.** Nếu $\max\limits_{[1;2]} y = |m-4| \longrightarrow |m-4| \le |m| \Leftrightarrow m \le 2 \longrightarrow m - 4 \le -2 \Leftrightarrow |m-4| \ge 2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$. Vậy $\max\limits_{[1;2]} y$ có giá trị nhỏ nhất là 2.

Ví dụ 14: Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có giá trị lớn nhất trên [-3;2] bằng 150?

A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Xét hàm số $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^3 + m$ trên [-3;2] có $g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Tính $\begin{cases} f(-1) = |m-5|; f(0) = |m| \\ f(-3) = |m+243|; f(2) = |m-32| \end{cases}$. Khi đó $\max\limits_{[-3;2]} f(x) = \{|m-32|;|m+243|\}$

- **TH1.** Nếu $\max\limits_{[-3;2]} f(x) = |m+243| \Leftrightarrow \begin{cases} |m-32| \le |m+243| \\ |m+243| = 150 \end{cases} \Leftrightarrow m = -93$

- **TH2.** Nếu $\max\limits_{[-3;2]} f(x) = |m-32| \Leftrightarrow \begin{cases} |m-32| \ge |m+243| \\ |m-32| = 150 \end{cases} \Leftrightarrow m = -118$

Vậy có tất cả 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 15: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [0;2]. Có bao nhiêu số nguyên $a\in[-3;3]$ sao cho $M\le 2m$

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $u(x)=x^4-4x^3+4x^2$ trên [0;2], có $u'(x)=4x^3-12x^2+8x$

Phương trình $u'(x)=0\Leftrightarrow x\{0;1;2\}$. Khi đó $u(0)=u(2)=a;u(1)=\mathrm{a}+1$

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(x)=\{|a|;|a+1|\}$ và $\min\limits_{[0;2]} f(x)=\{|a|;|a+1|\}$

- **TH1.** Với $a=0$, ta thấy $\begin{cases}\min\limits_{[0;2]} f(x)=0\\ \max\limits_{[0;2]} f(x)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M=1\\ m=0\end{cases}$ (không TMĐK)

- **TH2.** Với $a>0$, ta có $\begin{cases}\min\limits_{[0;2]} f(x)=|a|\\ \max\limits_{[0;2]} f(x)=|a+1|\end{cases}$ mà $M\le 2m\Rightarrow |a+1|\le 2|a|\Leftrightarrow a\ge 1$

Kết hợp với điều kiện $a\in[-3;3]$ và $a\in\mathbb{Z}\longrightarrow\{1;2;3\}$

- **TH3.** Với $a<0$, ta có $\begin{cases}\min\limits_{[0;2]} f(x)=|a+1|\\ \max\limits_{[0;2]} f(x)=|a|\end{cases}$ mà $M\le 2m\Rightarrow |a|\le 2|a+1|\Leftrightarrow a\ge -2$

Kết hợp $a\in[-3;3]$ và $a\in\mathbb{Z}\longrightarrow\{-3;-2\}$

Vậy có 5 giá trị nguyên của *a*.

Ví dụ 16*: Cho hàm số $f(x)=\left|x^3+ax^2+bx+c\right|$. Gọi *M* là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn [-1;3]. Khi *M* đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị của biểu thức $ab+bc+ca$

A. – 6. **B.** 0. **C.** – 12. **D.** – 18.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Đặt $t=\dfrac{x-1}{2}\in[-1;1]\Rightarrow \mathrm{t}=\cos x\Rightarrow x=2\cos x+1$

Khi đó $f(x)=\left|(2\cos x+1)^3+a.(2\cos x+1)^2+b.(2\cos x+1)+c\right|$

$$=\left|8\cos^3 x+(12+4a).\cos^2 x+(6+4a+2b).\cos x+a+b+c+1\right|$$

Suy ra $\dfrac{f(x)}{2}=\left|4\cos^3 x+(6+2a).\cos^2 x+(3+2a+b).\cos x+\dfrac{a+b+c+1}{2}\right|$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{2}\le\left|4\cos^3 x-3\cos x\right|=\left|\cos 3x\right|\le 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 6+2a=0 \\ 3+2a+b=-3 \\ a+b+c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \\ c=2 \end{cases}$

DẠNG 3: BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG MIN – MAX

Ví dụ 1: Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó được xác định theo công thức $C(t)=\dfrac{0,28t}{t^2+4}(0<t<24)$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó là cao nhất?

A. 24 giờ. **B.** 4 giờ. **C.** 2 giờ. **D.** 1 giờ.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Yêu cầu bài toán: Tìm giá trị của $t\in(0;24)$ để $C(t)=\dfrac{0,28t}{t^2+4}$ đạt giá trị lớn nhất

Xét hàm số $C(t)=\dfrac{0,28t}{t^2+4}$ trên $(0;24)$, có $C'(t)=\dfrac{0,28(t^2+4)-0,28t.2t}{(t^2+4)^2}=\dfrac{-0,28t^2+1,12}{(t^2+4)^2}$

Phương trình $C'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<t<24 \\ -0,28t^2+1,12=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2.$ Tính $C(2)=0,07$

Suy ra $\max\limits_{(0;24)} C(t)=C(2)=0,07.$ Vậy sau 2 giờ thì nồng độ hấp thu là cao nhất.

Ví dụ 2: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau ít phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3\ (0\le t\le 30)$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

A. 10 phút. **B.** 20 phút. **C.** 30 phút. **D.** 15 phút.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Yêu cầu bài toán: *Tìm giá trị của* $t\in[0;30]$ *để* $N(t)=1000+30t^2-t^3$ *đạt giá trị lớn nhất*

Xét hàm số $N(t)=1000+30t^2-t^3$ trên [0;3], có $N'(t)=60t-3t^2$

Phương trình $N'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 30 \\ 60t-3t^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=20$. Tính $\begin{cases} N(0)=\mathrm{N}(30)=1000 \\ N(20)=5000 \end{cases}$

Suy ra $\max\limits_{[0;30]} N(t)=N(20)=5000.$ Vậy sau 20 phút thì số vi khuẩn là lớn nhất.

Ví dụ 3: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng 100m^2 để làm khu vườn. Hỏi người đó phải mua mảnh đất có kích thước như thế nào để chi phí xây dựng bờ rào là ít tốn kém nhất?

A. 10m x 10m. **B.** 4m x 25m. **C.** 5m x 20m. **D.** 25m x 8m.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Yêu cầu bài toán: Cho diện tích và tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi hình chữ nhật

Gọi *x, y* lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật

Diện tích hình chữ nhật là $S = xy = 100 \Leftrightarrow y = \dfrac{100}{x}$

Chu vi hình chữ nhật (bờ rào mảnh đất) là $C = 2x + 2y = 2x + \dfrac{200}{x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi, ta có $2x + \dfrac{200}{x} \geq 2\sqrt{2.\dfrac{200}{x}} = 40 \Rightarrow C_{\min} = 40$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2x = \dfrac{200}{x} \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$

Ví dụ 4: Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông sao cho thể tích khối hộp được tạo thành là 8dm^3 và diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài cạnh đáy của mỗi hộp muốn thiết kế là

A. $2\sqrt[3]{2}dm.$ **B.** $2dm.$ **C.** $4dm.$ **D.** $2\sqrt{2}dm.$

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Gọi *h, x* lần lượt là chiều cao và độ dài cạnh đáy của hình hợp chữ nhật

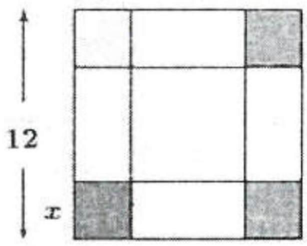
Thể tích khối hộp chữ nhật là $V = Bh = x^2h = 8 \Leftrightarrow h = \dfrac{8}{x^2}$

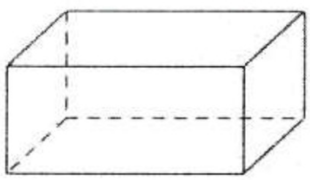
Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 4hx + 2x^2 = 2x^2 + \dfrac{32}{x}$

Ta có $2x^2 + \dfrac{32}{x} = 2x^2 + \dfrac{16}{x} + \dfrac{16}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2.\dfrac{16}{x}.\dfrac{16}{x}} = 24 \Rightarrow S_{\min} = 24$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \dfrac{16}{x} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 5: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12cm.$ Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh *x cm*, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm *x* để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





A. $x = 4.$ **B.** $x = 3.$ **C.** $x = 2.$ **D.** $x = 1.$

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Khi cắt và gấp tấm nhôm, ta được hình hộp chữ nhật có chiều cao *x*; đáy là hình vuông cạnh

$12-2x\Rightarrow$ Thể tích khối hộp chữ nhật là $V=Bh=x.(12-2x)(12-2x)$

Cách 1. Khảo sát hàm số $f(x)=x.(12-2x).(12-2x)$ trên $(0;6)\longrightarrow \max\limits_{(0;6)} f(x)$

Cách 2. Ta có $4x(12-2x).(12-2x)\le\dfrac{(4x+12-2x+12-2x)^3}{27}=512\Rightarrow V\le 128$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $4x=12-2x\Leftrightarrow 6x=12\Leftrightarrow x=2.$

Ví dụ 6: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp là ít nhất (diện tích toàn phần của lon là nhỏ nhất). Bán kính đáy vỏ lon là bao nhiêu khi ta muốn có thể tích lon là 314 cm^3 ?

A. $R=\sqrt[3]{\dfrac{314}{\pi}}.$ **B.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{628}{\pi}}.$ **C.** $R=942\sqrt[3]{2\pi}.$ **D.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{314}{2\pi}}.$

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Gọi *R, h* lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của lon sữa

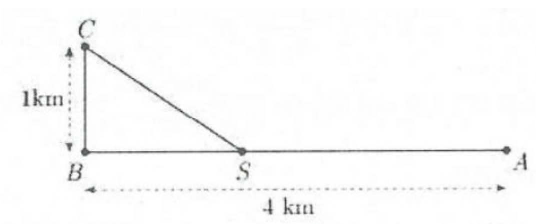
Thể tích của lon sữa hình trụ là $V=\pi R^2h=314\Leftrightarrow h=\dfrac{314}{\pi R^2}$

Diện tích nguyên liệu làm vỏ hộp (S_{tp} hình trụ) là $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi R^2+\dfrac{628}{R}$

Ta có $2\pi R^2+\dfrac{628}{R}=2\pi R^2+\dfrac{314}{R}+\dfrac{314}{R}\ge 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{314}{R}.\dfrac{314}{R}}=3\sqrt[3]{2.(314)^2\pi}$

Dấu bằng xảy ra khi $2\pi R^2=\dfrac{314}{R}\Leftrightarrow R^3=\dfrac{314}{2\pi}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{314}{2\pi}}$

Ví dụ 7: Một đường dây điện được nối từ nhà máy điện trên đất liền ở vị trí A đến vị trí C một hòn đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến đất liền là $BC=1km$, khoảng cách từ A đến B là 4 *km*. Người ta chọn một vị trí điểm *S* nằm giữa *A* và *B* để mắc đường dây điện đi từ A đến *S*, rồi từ *S* đến *C* như hình vẽ dưới đây. Chi phí mỗi *km* dây điện trên đất liền là 3000 USD, mỗi *km* trên điện đặt ngầm dưới biển mất 5000 USD, Hỏi điểm S phải cách A bao nhiên *km* để chi phí mắc đường dây điện ít nhất?



A. $\dfrac{5}{2}km.$ **B.** 2 *km.* **C.** $\dfrac{13}{4}km.$ **D.** $\dfrac{7}{2}km$

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Đặt $SA=x\,(km;\ 0\le x\le 4)$, ta có $SA+SB=AB\Rightarrow SB=4-x\,(km)$

Tam giác *SBC* vuông tại *B*, có $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{1 + (4 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$

Do đó, số tiền để mắc dây điện trên đất liền là $T_1 = 3000$ x SA = 3000*x*

Số tiền để mắc dây điện ngầm dưới biển là $T_2 = 5000$ x $SC = 5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$

Suy ra tổng số tiền mắc dây điện là $T = T_1 + T_2 = 3000x + 5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$

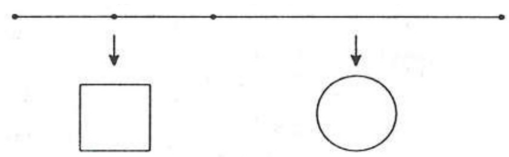
Xét hàm số $f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ trên [0;4], có $f'(x) = 3 + \dfrac{5x - 20}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 8x + 17} = 20 - 5x \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $\min\limits_{[0;4]} f(x) = f\left(\dfrac{13}{4}\right) = 16$

Vậy số tiền ít nhất là $T = 100.16 = 16000\,USD$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{13}{4}$

Ví dụ 8: Một sợi dây kim loại dài 60 *cm* được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh *a*, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính *r*. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Gọi *x* là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0 < x < 60)$

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} \longrightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi r^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$

Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\dfrac{60 - x}{4}\right)^2$

Tổng diện tích hai hình: $S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{60 - x}{4}\right)^2 = \dfrac{(4 + \pi)x^2 - 120\pi x + 3600\pi}{16\pi}$

Đạo hàm: $S' = \dfrac{(4 + \pi).x - 60\pi}{8\pi}; S' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{60\pi}{4 + \pi}; S'' = \dfrac{4 + \pi}{8\pi} > 0$

Suy ra hàm *S* chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \dfrac{60\pi}{4 + \pi}$

Do đó *S* đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \dfrac{60\pi}{4 + \pi}$

Với $x = \dfrac{60\pi}{4+\pi} \longrightarrow r = \dfrac{30}{(4+\pi)}$ và $a = \dfrac{240}{(4+\pi).4} \longrightarrow \dfrac{a}{r} = \dfrac{240}{120} = 2$

Ví dụ 9: Doanh nghiệp Alibaba cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Alibaba cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Tổng số tiền hai máy làm được là $T = T_A + T_B = x^3 - 27y^2 + 2x + 326y$

Theo bài ra, ta có $x + y = 10; y \le 6$ nên $y = 10 - x$ và $4 \le x \le 10$

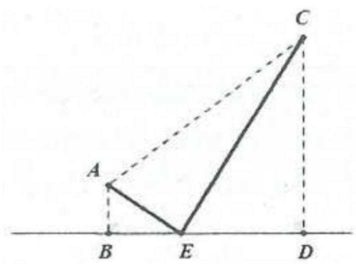
Suy ra $T = x^3 - 27(10-x)^2 + 2x + 326(10-x) = x^3 - 27x^2 + 216x + 560$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 27x^2 + 216x + 560$ trên [4;10], có $f'(x) = 3(x^2 - 18x + 72)$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \longrightarrow \max\limits_{[4;10]} f(x) = f(6) = 1100$

Vậy $x = 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 10: Có hai cây cột dựng đứng trên mặt đất lần lượt là $AB = 1m$, $CD = 4m$ và đỉnh của hai cột là hai điểm A và C cách nhau $5m$. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa *B, D*) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như mô hình bên. Tính độ dài ngắn nhất của đoạn dây?



A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{37}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

- **Cách 1:** Đặt $BE = x$ với $x > 0$. Ta có $BD = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = 4$ nên $ED = BD - BE = 4 - x$

Lại có $AE + EC = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(4-x)^2 + 16}$. Đặt $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}, x > 0$

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}; \forall x > 0$

Giải phương trình $f'(x) = 0,$ ta thu được $x = \dfrac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x) = \sqrt{41}$

- **Cách 2:** Gọi *H* là điểm đối xứng với *A* qua *B* và *K* là điểm đối xứng với *C* qua *D*

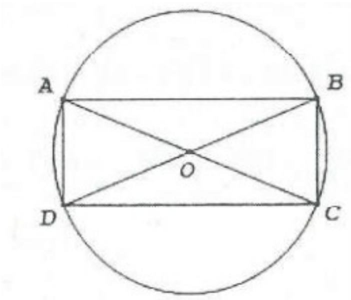
Và I là hình chiếu của A lên CD. Khi đó $AHKC$ là hình thang cân và $AG = \sqrt{AC^2 - GC^2} = 4$

Ta thấy $EC = EK$ nên $AE + EC = AE + EK$

Để $\{AE + EC\}_{\min}$ khi và chỉ khi $\{AE + EK\}_{\min}$ và điều đó có nghĩa là *A, E, K* thẳng hàng.

Vì thế $AK = \sqrt{KG^2 + AG^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ **. Hay độ dài ngắn nhất của đoạn dây chính bằng** $\sqrt{41}$

Ví dụ 11: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961 m^2, người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn. Biết tâm hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất được mở rộng



A. $S_{\min} = 961\pi - 961$. **B.** $S_{\min} = 1922\pi - 961$. **C.** $S_{\min} = 1892\pi - 946$. **D.** $S_{\min} = 480,5\pi - 961$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

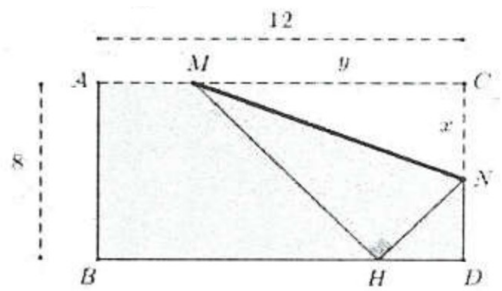
Gọi x (m), y (m) $(x>0, y>0)$ lần lượt là hai kích thước mảnh vườn hình chữ nhật;

R (m) là bán kính hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn $\longrightarrow R^2 = OB^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{4}$

Theo đề bài, ta có $xy = 961\ m^2$. Diện tích 4 phần đất mở rộng: $S = S_{tron} - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy$

$$= \pi.\frac{(x^2 + y^2)}{4} - xy \overset{Cosi}{\geq} \pi.\frac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961$$

Ví dụ 12: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài $12cm$ và chiều rộng $8cm$. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



A. 6. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Đặt $CN = x(cm)$ và $MC = y(cm)$

Độ dài đường gấp khúc cần tìm chính là độ dài đoạn thẳng $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dễ thấy $MHNC$ là hình thoi nên $MC = MH = y, NC = NH = x$

Gọi K là hình chiếu của M xuống $BD \Rightarrow MK = 8 \Rightarrow HK = \sqrt{y^2 - 64}$

Mà $HD = \sqrt{HN^2 - ND^2} = \sqrt{x^2 - (8-x)^2} = \sqrt{16x - 64} = 4\sqrt{x-4}$

$\Rightarrow KD = y = HK + HD = \sqrt{y^2 - 64} + 4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y - \sqrt{y^2 - 64} = 4\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{64}{y + \sqrt{y^2 - 64}} = 4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 64} = \dfrac{16}{\sqrt{x-4}}$

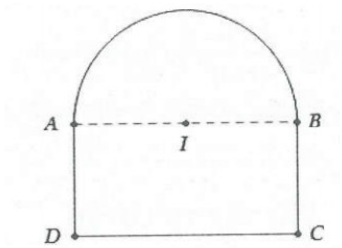
Khi đó $2y = \dfrac{16}{\sqrt{x-4}} + 4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y = \dfrac{8 + 2(x-4)}{\sqrt{x-4}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$

Do đó $MN^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \dfrac{4x^2}{x-4}$. Đặt $f(x) = x^2 + \dfrac{4x^2}{x-4}$ với $8 > x > 4$

Có $f'(x) = 2x + 4 - \dfrac{64}{(x-4)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4)^2 = 32 \Leftrightarrow x = 6$

Suy ra $\min\limits_{(4;8)} f(x) = f(6) = 108 \Rightarrow MN^2_{\min} = 108 \Rightarrow MN_{\min} = 6\sqrt{3}$

Ví dụ 13: Một cửa sổ có hình dạng như hình bên, bao gồm: một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có tâm nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng tổng độ dài đường viền cho phép của cửa sổ là $4m$. Hỏi ***diện tích lớn nhất*** của cửa sổ là bao nhiêu?



A. $S = \dfrac{4}{4+\pi}$. **B.** $S = \dfrac{8}{4+\pi}$. **C.** $S = \dfrac{4}{8+\pi}$. **D.** $S = \dfrac{8}{8+\pi}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Gọi $\begin{cases} AD = BC = x \\ AI = IB = R \end{cases} \Rightarrow C_{hcn} = CD + 2BC = 2(R + x); C_{hcn} = \pi R$

Suy ra $\pi R + 2(R + x) = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 - (\pi + 2)R}{2}$

Và $S_{hcn} = AB.BC = 2Rx; S_{hcn} = \dfrac{\pi R^2}{2}$

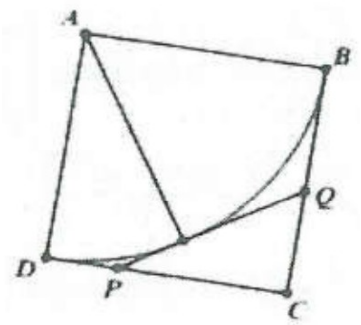
Tổng diện tích của cửa sổ là

$S = 2Rx + \dfrac{\pi R^2}{2} = 2R.\dfrac{4 - (\pi + 2)R}{2} + \dfrac{\pi R^2}{2} = R\left[4 - (\pi + 2)R\right] + \dfrac{\pi R^2}{2}$

$$=4R-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)R^2=\frac{8}{4+\pi}-\left(\sqrt{\frac{8}{4+\pi}}-R\sqrt{2+\frac{\pi}{2}}\right)^2\le\frac{8}{4+\pi}$$

Do đó diện tích lớn nhất của cửa sổ là $S=\dfrac{8}{4+\pi}$

Ví dụ 14: Cho hình vuông *ABCD* độ dài cạnh bằng 2*m* như hình vẽ. Lấy hai điểm *P, Q* (thay đổi) lần lượt nằm trên hai cạnh *DC, CB* sao cho *PQ* luôn tiếp xúc với đường tròn tâm *A* bán kính *AB*. Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài đoạn thẳng *PQ* (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



A. 1,08 *m*. **B.** 1,32 *m*. **C.** 1,66 *m*. **D.** 1,54 *m*.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Đặt $\widehat{DAP}=x$, ta có $\widehat{DAP}+\widehat{BAQ}=\frac{1}{2}\widehat{A}=45^o$ suy ra $\widehat{BAQ}=45^o-x$

Khi đó $PQ=AD\tan x+AB\tan(45^o-x)=2\left(\tan x+\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=2.\dfrac{\tan^2 x+1}{\tan x+1}$

Đặt $t=\tan x\,(0<t<1)$, ta được $PQ=\dfrac{2t^2+2}{t+1}$

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t+1}$ trên $(0;1)$, có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1+\sqrt{2}$

Suy ra hàm số $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=-1+\sqrt{2}$. Vậy $PQ_{\min}\approx 1,66.$