Tuyển tập một số vấn đề chọn lọc

www.diendantoanhoc.net

05 - 08 - 2006

Lời nói đầu

Cuốn sách nhỏ "Tuyển tập một số bài toán sơ cấp chọn lọc trên www.diendantoanhoc.net" là món quà đặc biệt mà BTC kỳ thi VMEO II dành tặng cho các bạn thành viên đã tham gia và đoạt giải. Đây cũng là một món quà mùa hè mà Nhóm Quản Lý muốn dành tặng cho tất cả các bạn học sinh chuyên toán nói riêng và các bạn yêu thích toán sơ cấp nói chung.

Trong cuốn sách này chúng tôi giới thiệu với các bạn 250 bài toán thuộc 5 chủ đề lớn của toán phổ thông bao gồm Số Học, Tổ Hợp, Hình Học, Giải Tích và Đại Số. Kèm theo các đề toán là khoảng 20 bài viết chuyên đề nhỏ xoay quanh các bài toán Số Học, Tổ Hợp. Trong mỗi bài viết chúng tôi đã cố gắng thể hiện đầy đủ những thảo luận của các bạn trên diễn đàn về những bài toán đó. Một số bài viết chưa được post lên diễn đàn mà mới chỉ là những trao đổi riêng giữa các thành viên cũng được giới thiệu trong tài liệu này. Chúng tôi rất vui mừng vì biết được rằng, những trao đổi riêng như thế là khá phổ biến giữa các bạn thành viên. Đây thực sự là một mong muốn lớn nhất của những người điều hành diễn đàn như chúng tôi.

Số Học và Tổ Hợp đều là những chủ đề thú vị và đẹp đẽ của toán sơ cấp. Tuy nhiên để viết một tài liệu về hai chủ đề này là điều không dễ. Đối với Số Học chúng tôi lựa chọn nhiều chủ để nhỏ dựa trên bộ khung là các bài toán đã có trên diễn đàn, và các kiến thức cơ bản nhất của Số Học lần lượt được đưa vào các bài viết nhỏ, các bạn có thể đọc qua các bài viết này và tìm hiểu kỹ hơn về lý thuyết số sơ cấp trong các cuốn sách chuyên khảo hơn, chúng tôi giới thiệu hai cuốn sách: An introduction to the theory of number của G.H.Hardy & E.M.Wright và Elementary theory of number của Sierpinsky. Bản điện tử của hai cuốn sách này đều đã được giới thiệu trên diễn đàn. Về Tổ Hợp, chúng tôi chủ trương lựa chọn các chủ đề một cách tương đối rời rạc, vì cho rằng *không nên* khiến các bạn phải tiếp thu các kiến thức tổ hợp một cách quá giáo khoa. Đối với các bài toán tổ hợp chúng tôi cho rằng vẻ đẹp của từng bài toán có ý nghĩa cao hơn tới việc nhận thức của mỗi người. Do đó chúng tôi cố gắng lựa chọn những bài toán tổ hợp đẹp đẽ để kích thích tính tìm tòi của các bạn đọc. Hai cuốn sách sơ cấp về tổ hợp không nên bỏ qua là 102 combinatorial problem của Titu Andrecscu & Zuming Feng và Extrenal combinatorics của Stasys Jukna.

Tất nhiên các chủ đề về Hình Học, Giải Tích và Đại Số cũng rất thú vị, nhưng đó sẽ là nội dung của các ấn phẩm tiếp theo của diễn đàn. Và bởi vì các ấn phẩm của diễn đàn chủ yếu được xây dựng dựa trên những thảo luận của chính các bạn nên hi vọng trong thời gian tới chúng ta sẽ còn có nhiều chủ đề thú vị và chất lượng ngày càng cao.

Cuốn sách nhỏ này ra đời dựa trên sự cộng tác của rất nhiều bạn thành viên. Đó là các bạn K09, TuanTS, lehoan, NDTPX, clmt, anhminh, neverstop, bk2004, chuyentoan, camum, hungkhtn và lovepearl_maytrang. Bạn camum lựa chọn hầu hết các bài toán giải tích, mục tổ hợp do lehoan tuyển chọn với sự cộng tác của NDTPX, các bài toán hình học do MrMATH soạn cùng với sự giúp đỡ nhiệt tình của bk2004, chuyentoan và đã nhận được nhiều ý kiến của bạn neverstop. Cuối cùng các bài toán số học được lựa chọn bởi K09 và lehoan, sau đó TuanTS và MrMATH đã có nhiều thảo luận để hoàn thiện bản thảo. Trong quá trình tuyển chọn chúng tôi nhận ra rằng có rất nhiều bài toán được sáng tạo bởi chính các bạn thành viên. Trong thời gian tới mong rằng điều này sẽ được phát huy hơn nữa.

Cuốn sách này được soạn bằng phần mềm PCTEX version 5.0, gói vntex được giới thiệu bởi bạn tamnd. File cài đặt chương trình và gói lệnh các bạn có thể dowload trên mạng không quá khó khăn. Nếu có thắc mắc về việc sử dụng TEX các bạn có thể giải quyết bằng các tham khảo các cuốn sách của tác giả Nguyễn Hữu Điển (sách cho Viện Toán Học ấn hành), ngoài ra các bạn có thể tham gia các diễn đàn về TEX như *www.viettug.com* hoặc trao đổi với các thành viên có kinh nghiệm soạn thảo trên diễn đàn.

Mặc dù đã cố gắng trong việc kiểm tra bản thảo, nhưng rất có thể chúng tôi vẫn bỏ sót một số lỗi. Mọi ý kiến đóng góp cả về nội dung lần hình thức xin gửi về địa chỉ mail *nqk_mrmath@yahoo.com*. Chúng tôi xin chân thành cám ơn và hứa sẽ cố gắng hơn trong việc thiết kế các ấn phẩm tiếp theo.

Thay mặt Ban Biên Tập

MrMATH
www.diendantoanhoc.net
Nguyễn Quốc Khánh SV K9 Hệ Đào Tạo CNKHTN ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội

Cộng tác viên

Trong thời gian hoàn thành bản thảo, thực ra những gì được giới thiệu trong cuốn sách nhỏ không hoàn toàn là tất cả những gì nhóm CTV làm được. Trên thực tế nhóm CTV đã hoàn thiện được hầu hết các đề mục cho ba nội dung Hình Học, Giải Tích và Đại Số. Tuy nhiên việc giới thiệu đồng thời tất cả 5 chủ đề có lẽ là không phù hợp lắm với mục đích chính. Bản liệt kê dưới đây không nêu lên hết được các CTV và công việc của họ, nhưng dù sao cũng là một tra cứu đủ dùng cho các bạn đọc.Trong ấn phẩm tiếp nối của cuốn sách nhỏ này, công việc của các CTV sẽ được giới thiệu một các đầy đủ và chi tiết hơn.

1. Trần Nam Dũng (namdung) GV ĐHKHTN ĐHQG TP Hồ Chí Minh: [1].

2. Trần Quốc Hoàn (K09) SV K50 CA Đại Học Công Nghệ Hà Nội: [2], [3.6], [3.8].

3. Trần Mạnh Tuấn (TuanTS) SV K9 CNTN ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội: [2], [3.2], [3.3],[3.4].

4. Lê Hồng Quý (lehoan) HS lớp 12 chuyên toán ĐHSP Vinh: [6], [7.2], [7.3], [7.7].

5. Trần Đức Anh (camum) SV năm nhất hệ CLC ĐHSP Hà Nội: [10].

Mục lục

Phần I

Một số chủ đề Số Học

Chương 1

Tổng hai bình phương

Trần Nam Dũng

Giới thiệu. *Định lý Fermat Euler là một viên ngọc tuyệt vời của Toán Học thế kỷ* $17-18$. *Từ thời phổ thông khi đọc được chứng minh (của Lagrange) dưới đây, tôi đã từng ngây ngất trước vẻ đẹp của nó. Nhiều năm nay đọc lại bài viết của GS.Tikhomirov trên tạp chí Kvant, tôi lại tiếp tục bất ngờ với những chứng minh mới của một kết quả cũ. Quá thích thú với bài báo, tôi đã dịch ra Tiếng Việt và nhiều lần truyền vẻ đẹp của các phép chứng minh thần diệu trong bài đến các thế hệ học sinh của tôi. Hôm nay, tôi xin dành tặng các bạn thành viên diễn đàn www.diendantoanhoc.net bản dịch này.*

Các bạn hãy để ý xem những số nguyên tố đầu tiên $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Các số $5, 13$ và 17 có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương:

$$5 = 1^2 + 2^2 \qquad 13 = 2^2 + 3^2 \qquad 17 = 1^2 + 4^2.$$

Còn các số còn lại $3, 7, 11, 19$ thì không thể biểu diễn như vậy được. Có thể bằng cách nào đó giải thích điều đó hay không? Có, và đúng hơn là ta có định lý sau đây:

Định lý *Fermat Euler***.** Điều kiện cần và đủ để một số nguyên tố lẻ có thể biểu diễn được dưới dạng tổng hai bình phương là số dư trong phép chia số ấy cho 4 là 1.

Trong các trường hợp ban đầu của p có thể kiểm tra tính đúng đắn của định lý này $5 = 4.1+1$, $13 = 4.3 + 1$, $17 = 4.4 + 1$ còn $3 = 4.0 + 3$, $7 = 4.1 + 3$, $11 = 4.2 + 3$ và $19 = 4.4 + 3$.

Đôi chút về lịch sử định lý. Ai là người đầu tiên phát hiện ra điều này, và khi nào? Vào dịp Noel năm 1640 (trong thư đề ngày 25.12.1640) nhà toán học vĩ đại *Pierre de Fermat* (1601-1665) đã thông báo cho *Mersenne*, bạn thân của *Descartes* và là "liên lạc viên" chính của các nhà bác học đương thời rằng "Mọi số nguyên tố có số dư trong phép chia cho 4 bằng 1 đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của hai bình phương". Thời đó chưa có các tạp chí toán học, tin tức được trao đổi qua các lá thư và các kết quả thông thường chỉ được thông báo mà không kèm theo chứng minh.

Thực ra thì sau gần 20 năm sau bức thư đó, trong bức thư gửi cho *Carcavi*, được gửi vào tháng 8 năm 1659, *Fermat* đã tiết lộ ý tưởng của phép chứng minh định lý trên. Ông viết rằng ý tưởng chính của phép chứng minh là dùng phương pháp xuống thang, cho phép từ giả thiết rằng định lý không đúng với $p = 4k + 1$, suy ra nó không đúng với một số nhỏ hơn, cuối cùng ta sẽ đi đến số 5, mà khi đó rõ ràng là mâu thuẫn.

Những cách chứng minh đầu tiên được *Euler* (1707-1783) tìm ra trong khoảng 1742-1747. Hơn nữa, để tỏ rõ vị trí của *Fermat*, người mà ông hết sức kính trọng, *Euler* đã tìm ra phép chứng minh dựa theo đúng ý tưởng trên đây của *Fermat*. Vì vậy, ta gọi định lý này là định lý *Fermat Euler*.

Những kết quả toán học thường có một tính chất chung ta có thể đến được bằng nhiều con đường khác nhau, có thể tấn công chúng từ nhiều hướng, và mỗi một con đường như vậy sẽ đem đến cho những người không biết sợ khó khăn những khoái cảm tuyệt vời.

Tôi muốn chứng tỏ điều này trên ví dụ định lý *Fermat Euler*.

Ta sẽ đi đến đỉnh cao, được phát minh vào thế kỷ XVII bằng ba con đường khác nhau. Một trong chúng được tìm ra vào thế kỷ XVIII, con đường khác - thế kỷ XIX và con đường thứ ba - ở thế kỷ XX.

1. Cách chứng minh của ***Lagrange*****.** Cách chứng minh này (có thay đổi đôi chút) hiện nay được trình bày trong hầu hết các cuốn sách về lý thuyết số. Nó dựa trên bổ để *Wilson* nói rằng nếu p là số nguyên tố thì số $(p-)! + 1$ chia hết cho p.

Để không quá đi sâu vào chứng minh kết quả phụ này ta chỉ tường minh ý tưởng chính của phép chứng minh trên ví dụ số 13. Với một số nằm giữa 2 và 11 (kể cả những số này) ta tìm một số mà tích của chúng khi chia cho 13 dư 1. Ta có:

$$(13-1)! = 12! = (2.7).(3.9).(4.10).(5.8).(6.11).12.$$

Rõ ràng từng cặp hai số trong dấu ngoặc đơn có tích chia 13 dư 1. Từ đó suy ra 12! khi chia cho 13 có số dư là 12, nghĩa là $12! + 1$ chia hết cho 13. Trường hợp tổng quát cũng có thể chứng minh tương tự như vậy.

Từ bổ đề *Wilson* ta rút ra hệ quả là nếu $p = 4n+1$ là một số nguyên tố thì $((2n)!)^2 + 1$ chia hết cho p. Thật vậy, bởi vì (bổ đề *Wilson*) $(4n)! + 1$ chia hết cho p, bằng những phép biến đổi cơ bản ta thu được:

$$\begin{aligned}(4n)! + 1 &= 1.2.3.....(2n).(2n+1).....(4n) + 1\\ &= 1.2.....(2n).(p-2n).(p-2n+1).....(p-1) + 1\\ &= (2n)!.(-1)^{2n}.(2n)! \equiv ((2n)!)^2 + 1 \mod p.\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. Đặt $N = (2n)!$, ta đã chứng minh $N^2 \equiv -1 \mod p$. Bây giờ ta phải vượt qua khó khăn chính, xét tất cả các cặp số nguyên (m, s) sao cho $0 \leq m, s \leq [\sqrt{p}]$ (ở đây $[x]$ chỉ phần nguyên của x). Số các cặp như vậy bằng $([\sqrt{p}] + 1)^2 > p$.

Do đó với ít nhất hai cặp số (m_1, s_1) và (m_2, s_2) số dư trong phép chia $m_1 + Ns_1$ và $m_2 + Ns_2$ cho p sẽ giống nhau, nghĩa là số $a + Nb$ trong đó $a = m_1 - m_2$ và $b = s_1 - s_2$ sẽ chia hết cho p. Nhưng khi đó $a^2 - N^2b^2 = (a + Nb)(a - Nb)$ chia hết cho p và chú ý rằng $N^2 \equiv -1 \mod p$ ta thu được $a^2 + b^2$ chia hết p, nghĩa là $a^2 + b^2 = rp$ với r nguyên dương. Mặt khác $a^2 + b^2 < 2p$ suy ra $r = 1$ và như thế $a^2 + b^2 = p$. Định lý được chứng minh.

2. Chứng minh của $D.Tsagir$**.** Phép chứng minh của nhà toán học đương đại $D.Tsagir$ làm tôi hoàn toàn bất ngờ, đây là một điều kỳ diệu khi mà kết quả thu được tưởng chừng như không từ cái gì cả. Sau đây là cách chứng minh đó.

Ta hãy xét phép biến đổi mà mỗi bộ ba số nguyên dương (x, y, z) được đặt tương ứng với ba số (x', y', z') theo quy tắc:

$$\begin{cases} x' = x + 2z, y' = z, z' = y - x - z & \text{nếu } x < y - z \\ x' = 2y - x, y' = y, z' = x - y + z & \text{nếu } y - z \leq x \leq 2y \\ x' = x - 2y, y' = x - y + z, z' = y & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Ta ký hiệu phép biến đổi này là $B : B(x, y, z) = (x', y', z')$. Rất dễ dàng chứng minh rằng phép biến đổi B giữ nguyên dạng của $x^2 + 4yz$. Ta chứng minh điều này, chẳng hạn cho trường hợp thứ nhất trong cách xác định trên. Ta có:

$$x'^2 + 4y'z' = (x + 2z)^2 + 4z(y - z - x) = x^2 + 4xz + 4z^2 + 4yz - 4xz - 4z^2 = x^2 + 4yz.$$

Trong các trường hợp còn lại việc kiểm tra cũng đơn giản như vậy. Có nghĩa là nếu như đối với một số p nào đó ta có đẳng thức $x^2 + 4yz = p$ thì đẳng thức đó giữ nguyên sau phép biến đổi B.

Ta kiểm chứng rằng phép biến đổi B là xoắn, có nghĩa là nếu áp dụng B hai lần thì chúng ta sẽ quay trở lại vị trí ban đầu. Ta lại làm điều này cho công thức thứ nhất ở trên, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Với $x < y - z$ khi đó $x' = 2z + x, y' = z, z' = y - z - x$ từ đó $x' > 2y'$ và nghĩa là phải tính $B(x', y', z')$ theo công thức thứ ba. Nghĩa là:

$$\begin{cases} x'' = x' - 2y' = x + 2z - 2z = x \\ y'' = x' - y' + z' = x + 2z - z + y - x - z = y \\ z'' = y' = z. \end{cases}$$

Bây giờ ta giả sử rằng p là số nguyên tố có dạng $4n + 1$. Khi đó, thứ nhất phương trình $x^2 + 4yz = p$ có ít nhất hai nghiệm $(x = 1, y = n, z = 1)$ và $(x = 1, y = 1, z = n)$. Và thứ hai là phương trình này có hữu hạn nghiệm (nguyên dương). Nếu như giả sử rằng trong các nghiệm của phương trình này không có nghiệm mà $y = z$ (nếu như có nghiệm như vậy thì $p = x^2 + (2y)^2$ và định lý được chứng minh), ta thu được rằng phép biến đổi B chia tất cả các nghiệm thành các cặp $((x, y, z), B((x, y, z)))$, nếu như, tất nhiên $(x, y, z) \neq B((x, y, z))$. Ta thử tìm xem có những cặp như vậy không, hay như người ta thường nói, tồn tại chăng những điểm bất động của phép biến đổi B.

Nếu nhìn vào công thức xác định B ta sẽ dễ dàng nhận thấy rằng những điểm bất động của B là những điểm mà $x = y$. Nhưng khi $x = y > 1$ thì phương trình $x^2 + 4yz = p$ không có nghiệm (vì p không chia hết cho y). Nghĩa là chỉ có một điểm bất động duy nhất $(1, 1, n)$. Từ tất cả các lý luận trên ta suy ra rằng số nghiệm của phương trình $x^2 + 4yz = p$ là số lẻ và có một điểm bất động $(1, 1, n)$ còn tất cả các nghiệm khác được chia thành từng cặp.

Nhưng, ta lại có một phép biến đổi nữa, ký hiệu là J, J thay đổi chỗ của y và z nghĩa là $J(x, y, z) = (x, z, y)$. Phép biến đổi này tất nhiên cũng giữ nguyên dạng $x^2 + 4yz$ và cũng xoắn. Ta thử xem, những bộ ba số nào trong những nghiệm của phương trình $x^2 + 4yz = p$ được J giữ nguyên. tức là những bộ nào mà $J(x, y, z) = (x, y, z)$.

Ta đã giả sử từ trước là $y \neq z$. Nhưng khi đó thì không thể có điểm bất động. Tất cả các nghiệm được chia thành từng cặp. Như vậy số các nghiệm là chẵn. Nhưng ta vừa khẳng định rằng số nghiệm này là lẻ. Mâu thuẫn. Vậy phải tồn tại nghiệm của phương trình $x^2 + 4yz = p$ mà $y = z$, như thế p là tổng của hai bình phương. Định lý được chứng minh.

3. Cách chứng minh thứ ba. Cách chứng minh của *Minkowsky* được sửa đổi đôi chút mà chúng ta sẽ nói đến bây giờ, sẽ còn làm chúng ta ngạc nhiên gấp bội. Đáng tiếc là cách chứng minh này không sơ cấp lắm, cụ thể là ta cần thế nào là *elippse* và công thức tính diện tích của nó.

Tất cả bắt đầu từ một kết quả của *Minkowsky* mà tưởng chừng không có liên hệ gì với định lý *Fermat Euler* mà chúng ta đang quan tâm.

Định lý. Cho a, b, c là các số nguyên, $a > 0$ và $ac - b^2 = 1$. Khi đó phương trình

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

có nghiệm nguyên.

Chứng minh. Ta xét hệ tọa độ *Descartes* vuông góc và cho trên đó tích vô hướng bằng công thức:

$$((x, y), (x', y')) = axx' + byy' + czz'.$$

Tích vô hướng này cho ta khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm (x, y) là:

$$d((0, 0), (x, y)) = \sqrt{((x, x), (y, y))} = \sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2}.$$

Ta tìm khoảng cách ngắn nhất từ gốc tọa độ đến một điểm khác nó của lưới nguyên (m, n) $(m, n$ là những số nguyên). Gọi khoảng cách này là d^* và đạt được tại điểm (m^*, n^*), như thế:

$$am^{*^2} + 2bm^*n^* + cn^{*^2} = d^{*^2}.$$

Tập hợp tất cả những điểm (x, y) của mặt phẳng thỏa mãn bất đẳng thức:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq d^{*^2}$$

là một *ellipse*. Từ cách xây dựng của ta suy ra rằng nếu vị tự *ellipse* này theo tỷ số 1/2 rồi đưa *ellipse* "co" này đến các tâm nằm trên các điểm nguyên (tịnh tiến) thì tất cả các *ellipse* thu được nếu có cắt nhau thì chỉ cắt nhau theo những điểm biên.

Dễ thấy rằng diện tích phần giao của các *ellipse* với tam giác có đỉnh ở $(0,0),(1,0),(1,1)$ bằng nửa diện tích của toàn *ellipse*. Mà diện tích này thì bằng (chỗ không sơ cấp duy nhất):

$$\frac{\pi {d^*}^2}{4} \cdot (ac - b^2) = \frac{\pi {d^*}^2}{4}.$$

Như vậy diện tích phần mà các *ellipse* chiếm trong tam giác bằng $\frac{\pi {d^*}^2}{8}$ và đây chỉ là một nửa diện tích tam giác, nghĩa là:

$$\frac{\pi {d^*}^2}{4} < \frac{1}{2} \Longrightarrow {d^*}^2 < \frac{4}{\pi}.$$

Bởi vì ${d^*}^2$ là số nguyên dương, cho nên $d^* = 1$. Định lý *Minkowsky* được chứng minh.

Nhưng kết quả tuyệt vời này thì có liên quan gì đến định lý *Fermat Euler*? Liên quan trực tiếp đấy! Ta biết từ bổ đề *Wilson* rằng số b^2+1 trong đó chia hết cho p, đúng không?!

Bây giờ áp dụng định lý *Minkowsky* cho các số $a = p$ và $c = \frac{b^2+1}{a}$. Ta thu được rằng tồn tại những số nguyên m và n sao cho:

$$1 = am^2 + 2bmn + cn^2$$

$$\Longrightarrow a = a^2m^2 + 2abmn + (b^2+1)n^2 = (am+bn)^2 + n^2.$$

Như thế (nhớ lại rằng $a = p$) ta có $p = (am+bn)^2 + n^2$ nghĩa là p là tổng của hai bình phương. Một lần nữa, định lý lại được chứng minh.

namdung
www.diendantoanhoc.net
Trần Nam Dũng Giảng Viên Đại Học KHTN ĐHQG TP Hồ Chí Minh

Phụ lục. Chúng tôi xin dẫn ra đây một cách chứng minh sơ cấp của định lý *Minkowsky*. Giả sử $b \geq 0$ và chứng minh quy nạp theo b. Với $b = 0$ mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đã đúng với $0, 1, .., b-1$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với b. Sử dụng phép đổi biến $(x = X - Y, y = Y)$

$$\Longrightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 = aX^2 + (2b-a)XY + (c+a-2b)Y^2 = AX^2 + 2BXY + CY^2.$$

Trong đó $A = a$, $B = b - a$ và $C = c + a - 2b$. Suy ra $B^2 = AC + 1$ và $A > 0$, $0 \leq B \leq b - 1$. Sử dụng giả thiết quy nạp ta suy ra mệnh đề đúng với b và do đó định lý được chứng minh.

K09
www.diendantoanhoc.net
Trần Quốc Hoàn K50 CA Đại Học Công Nghệ Hà Nội

Chương 2

Các đề toán số học chọn lọc

Bài toán 2.1. *Tìm tất cả các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với mọi phần tử của dãy:*

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad n \geq 1.$$

Bài toán 2.2. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương* $x^2 - (a^2 + b^2) \cdot y^4 = 1$.

Bài toán 2.3. *Cho* k *số tự nhiên* $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq n$ *thỏa mãn* $[a_i, a_j] > n$ *với mọi* $1 \leq i \leq j \leq k$. *Chứng minh rằng:*

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{3}{2} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{6}{5}.$$

Bài toán 2.4. *Hãy tìm tất cả các số nguyên dương* n *sao cho tồn tại hoán vị* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *của* $\{1, 2, ..., n\}$ *thoả mãn tính chất một trong hai tập hợp sau đây:*

$$(i) \quad \{a_1, a_1a_2, ..., a_1a_2...a_n\}$$
$$(ii) \quad \{a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n\}$$

lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modun n.

Bài toán 2.5. *Tìm số nguyên dương* k *lớn nhất để tồn tại* $2k$ *số nguyên dương đôi một phân biệt* $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ *mà* k *tổng* $a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_k + b_k$ *đôi một khác nhau và nhỏ hơn* 2005.

Bài toán 2.6. *Giả sử* p *là một số nguyên tố. Chứng minh rằng trong* $2p - 1$ *số nguyên bất kì đều tồn tại* p *số có tổng là bội số của* p. *Kết luận của bài toán thay đổi như thế nào nếu bỏ đi giả thiết* p *nguyên tố.*

Bài toán 2.7. *Chứng minh rằng số các hợp số thuộc một trong hai dạng sau đều là vô hạn:*

$$(i) \quad 2^{2^n} + 1 \qquad\qquad (ii) \quad 6^{2^n} + 1.$$

Bài toán 2.8. *Giả sử* a, b, c *là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau sao cho đẳng thức* $a^n = b^2 + c^2$ *đúng với số nguyên* $n > 1$ *nào đó. Chứng minh rằng* a *có thể viết thành tổng của hai số chính phương.*

Bài toán 2.9. *Một số tự nhiên là bập bênh nếu khi đem nó nhân với 9 ta được chính số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại của các chữ số. Chẳng hạn số 1089 là một số bập bênh có 4 chữ số bởi vì $1089.9 = 9801$. Vấn đề của chúng ta là tìm tất cả các số bập bênh có n chữ số. Hơn nữa hãy tính số tất cả các số bập bênh có n chữ số.*

Bài toán 2.10. *Chứng minh rằng với số tự nhiên n bất kỳ đều tồn tại hai số nguyên x, y thoả mãn $n|x^2 - 34y^2 + 1$.*

Bài toán 2.11. *Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho tồn tại số thực dương c_k thoã mãn:*

$$\frac{S(kn)}{S(n)} \geq c_k \quad \forall n \in N.$$

Bài toán 2.12. *Tìm tập giá trị của N để phương trình sau có nghiệm nguyên dương:*

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = N(x_1x_2...x_n - 1).$$

Bài toán 2.13. *Dãy số $p_1.p_2, ..., p_n, ...$ là dãy tất cả các số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại ba số hạng liên tiếp trong dãy trên thoả mãn tính chất mỗi số trong chúng đều lớn hơn bình phương chỉ số của chính số đó.*

Bài toán 2.14. *Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n để số $2^n + 3^n$ có đúng 23 ước số nguyên tố.*

Bài toán 2.15. *Cho dãy tăng các số tự nhiên $\{a_n\}$ có tính chất tồn tại hằng số M sao cho $a_{n+1} - a_n < M$ với mọi $n \in N$. Chứng minh rằng tập ước số nguyên tố của dãy trên là vô hạn.*

Bài toán 2.16. *Xét $M = n(n-1)...(n-k+1)$ với $n \geq 2k$. Chứng minh rằng M có ước số nguyên tố lớn hơn k.*

Bài toán 2.17. *Giả sử p là một số nguyên tố có dạng $4k+3$. Chứng minh khi đó $p-1$ số tự nhiên liên tiếp không thể chia làm hai nhóm có tích các thừa số trong mỗi nhóm bằng nhau.*

Bài toán 2.18. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sau cho $n^2 - n + 11$ là tích của bốn số nguyên tố (không cần phân biệt).*

Bài toán 2.19. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) với z bé nhất có thể sao cho tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d có các tính chất:*

$$\begin{cases} x^y = z^b = c^d, x > a > c \\ z = ab = cd \\ x + y = a + b. \end{cases}$$

Bài toán 2.20. *Cho các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ trong đó $a_i \geq 2 \ \forall i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các bộ số nguyên $(c_1, c_2, ..., c_n)$ sao cho ta có tính chất sau:*

$$b_1c_1 + b_2c_2 + ...b_nc_n | c_1^{a_1} + c_2^{a_2} + ... + c_n^{a_n}.$$

Bài toán 2.21. *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho nếu với mọi hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của $\{1, 2, ..., n\}$ thì ta luôn tìm được chỉ số i mà $a_1 + a_2 + ... + a_i$ là một số chính phương.*

Bài toán 2.22. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^3 - 1$ là số chính phương.*

Bài toán 2.23. *Chứng minh rằng với hai số nguyên dương s, a (s) không chia hết cho 3) luôn tồn tại số tự nhiên n thoả mãn $S(ns) = a$ với $S(x)$ là tổng các chữ số của x.*

Bài toán 2.24. *Cho số nguyên dương $n > 1$. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất không có dạng $\dfrac{n^a - n^b}{n^c - n^d}$ với bất kỳ các số nguyên dương a, b, c, d nào đó.*

Bài toán 2.25. *Cho số nguyên không âm a và số nguyên dương d. Chứng minh rằng trong 73 số $a, a+d, ..., a+72d$ có ít nhất một số mà trong biểu diễn thập phân của nó có chữ số 9.*

Bài toán 2.26. *Chứng minh rằng với mọi số thực $\delta \in [0,1]$ và với mọi $\varepsilon > 0$ bất đẳng thức:*

$$\left|\frac{\varphi(n)}{n} - \delta\right| < \varepsilon$$

đúng với số tự nhiên n nào đó.

Bài toán 2.27. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}.$$

Với các giá trị tự nhiên của $a_1, a_2, ..., a_n$ biết rằng $S < 1$.

Bài toán 2.28. *Cho số nguyên tố $p = 4k + 1$. Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho số $[n.\sqrt{p}]$ là một số chính phương.*

Bài toán 2.29. *Tìm tất cả các số nguyên dương m và n sao cho với mọi số dương a thoả mãn a^m, a^n là các số nguyên thì suy ra a cũng là số nguyên.*

Bài toán 2.30. *Cho trước số nguyên dương N. Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho với các số nguyên a, b, c, d tuỳ ý mà $N^2 \le a < b \le c < d \le N^2 + k$ thì $ad \ne bc$.*

Bài toán 2.31. *Tìm mọi nghiệm nguyên dương của phương trình:*

$$t^2 = 4zyz - x - y.$$

Bài toán 2.32. *Giả sử A là tập hợp N thặng dư mod N^2. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp B gồm N thặng dư mod N^2 thoả mãn tập hợp:*

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

chứa ít nhất một nửa hệ thặng dư mod N^2.

Bài toán 2.33. *Cho số tự nhiên $n > 2$. Chứng minh rằng:*

$$1989 | n^{n^{n^n}} - n^{n^n}.$$

Bài toán 2.34. *Sắp xếp dãy các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần $p_1, p_2, \ldots$. Chứng minh rằng*

$$\frac{p_n!}{p_n(p_n+1)(p_n+2)\ldots(p_{n+1}-1)} \in Z \quad \forall n \in N \quad n > 2.$$

Bài toán 2.35. *Giả sử S là tập hợp tất cả các số nguyên tố bé hơn 40. Tìm số k nhỏ nhất sao cho với mọi tập con k phần tử của S đều tồn tại 3 phần tử đôi một phân biệt a, b, c sao cho $a+b+c$ cũng là một số nguyên tố.*

Bài toán 2.36. *Số nguyên dương n được gọi là đáng ghét nếu tồn tại số nguyên dương m mà trong tập hợp $\{1, 2, \ldots, 28011980\}$ có đúng n số $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ không đồng dư với nhau theo mod n. Nếu điều này không xảy ra thì n được gọi là đáng yêu. Xác định số nguyên dương đáng yêu bé nhất.*

Bài toán 2.37. *Cho các số nguyên dương a, b. Chứng minh rằng tồn tại bộ số nguyên dương $(n_1, n_2, .., n_k)$ thoả mãn tính chất $n_i + n_{i+1} | n_i n_{i+1}$ $\forall i = \overline{0, k}$ trong đó quy ước $n_0 = a, n_{k+1} = b$.*

Bài toán 2.38. *Chứng minh rằng mọi số nguyên lớn hơn 17 đều có thể biểu diễn thành tổng của 3 số nguyên lớn hơn 1 đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh tính chất đó không đúng với 17.*

Bài toán 2.39. *Cho số nguyên tố $p \geq 3$ và $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ là các số tự nhiên sao cho p không chia hết a_k và $a_k^k - 1$ với mọi k. Chứng minh rằng có thể chọn ra một số để tích các số đó có số dư là 2 khi chia cho p.*

Bài toán 2.40. *Với số nguyên dương n gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n. Chứng minh rằng tồn tại k số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sao cho:*

$$a_n + S(a_n) = a_m + S(a_m) \quad \forall \; 1 \leq n, m \leq k$$

Bài toán 2.41. *Chứng minh rằng phương trình $x^3 + y^3 + z^3 - t^3 = 42$ có vô hạn nghiệm nguyên. Số nghiệm nguyên dương của phương trình này là bao nhiêu, hữu hạn hay vô hạn?*

Bài toán 2.42. *Giả sử n, a, b, c, d là các số tự nhiên $(n \geq 2)$ thoả mãn $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} < 1$ và $a + c < n$. Cố định n, tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$.*

Bài toán 2.43. *Tập hợp S gồm $k + m - 1$ số nguyên bất kỳ, $m \geq k \geq 2, k|m$. Chứng minh rằng tồn tại m số trong các số đó có tổng chia hết cho k.*

Bài toán 2.44. *Giả sử rằng biểu diễn thập phân của $\sqrt{5}$ có dạng*

$$\sqrt{5} = \overline{2, a_1 a_2 \ldots a_n \underbrace{bbb \ldots bbb}_{m \text{ số } b} a_{n+1} \ldots}.$$

Biết rằng $b \neq a_n, b \neq a_{n+1}$. Chứng minh rằng $n \geq m - 2$.

Bài toán 2.45 (Open Question). *Giả sử P là một tập con khác rỗng của tập các số nguyên tố sao cho với mọi $p_1, p_2, \ldots, p_k \in P$ (không nhất thiết phân biệt) thì mọi ước số nguyên tố của số $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ cũng thuộc vào P. Hỏi tập hợp P có trùng với tập hợp tất cả các số nguyên tố hay không.*

Bài toán 2.46. *Tìm tất cả các hàm số $f : Z \to Z$ thoả mãn đẳng thức:*

$$f(x^3) + f(y^3) + f(z^3) = (f(x))^3 + (f(y))^3 + (f(z))^3 \quad \forall x, y, z \in Z.$$

Bài toán 2.47. *Giả sử m là một số nguyên dương lớn hơn 1 cho trước. Tìm hằng số C lớn nhất sao cho:*

$$\sum_{1 \le k \le n, (k,m)=1} \frac{1}{k} \ge C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \forall n \in N.$$

Bài toán 2.48. *Chứng minh hai mệnh dề sau đây:*

i) Nếu $n > 49$ thì tồn tại hai số nguyên $a, b > 1$ sao cho $a + b = n$ và:

$$\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(b)}{b} < 1.$$

ii) Nếu $n > 4$ thì tồn tại hai số nguyên $a, b > 1$ sao cho $a + b = n$ và:

$$\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(b)}{b} > 1.$$

Bài toán 2.49. *Với mỗi số tự nhiên $n = \overline{a_t ... a_2 a_1}$ xét hàm số:*

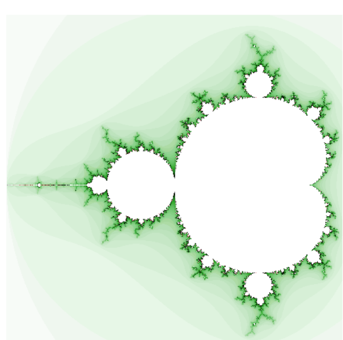
$$T(n) = 10 \sum_{i \text{ chẵn}} a_i + \sum_{i \text{ lẻ}} a_i.$$

Hãy tìm số nguyên dương A nhỏ nhất sao cho tồn tại các số tự nhiên $n_1, n_2, .., n_{148}$ và $m_1, m_2, ..., m_{149}$ thoả mãn hai điều kiện:

$$\begin{cases} A = n_1 + n_2 + ... + n_{148} = m_1 + m_2 + ... m_{149} \\ T(n_1) = T(n_2) = ... = T(n_{148}) \\ T(m_1) = T(m_2) = ... = T(m_{149}). \end{cases}$$

Bài toán 2.50. *Ký hiệu $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n và $\pi(n)$ là số các số nguyên tố không vượt quá n. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ ta có:*

$$\varphi(n) \ge \frac{\pi(n)}{2}.$$



Chương 3

Một số chủ đề số học chọn lọc

3.1 Số bập bênh

Bài toán 3.1.1 (Số bập bênh). *Một số tự nhiên là bập bênh nếu khi đem nó nhân với* 9 *ta được chính số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại của các chữ số. Chẳng hạn số* 1089 *là một số bập bênh có* 4 *chữ số bởi vì* 1089.9 = 9801. *Vấn đề của chúng ta là tìm tất cả các số bập bênh có n chữ số. Hơn nữa hãy tính số tất cả các số bập bênh có n chữ số.*

LỜI GIẢI. Xét dãy số *Fibonaci* $\{f_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi sau $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ \forall n \in N$. Ngoài ra gọi số các số bập bênh có n chữ số là S_n. Ta sẽ chứng minh rằng số có 4 chữ số 1089 là số bập bênh nhỏ nhất và với số tự nhiên $n \geq 4$ thì ta có:

$$S_n = f_{[n/2]-1}.$$

Thật vậy, kết luận thứ nhất là dễ dàng thu được khi ta xét trực tiếp khi $n = 1, 2, 3$. Xét $n \geq 4$. Giả sử $\overline{a_1a_2...a_n}$ là một số bập bênh có n chữ số, điều đó có nghĩa là:

$$9.\overline{a_1a_2...a_n} = \overline{a_n...a_2a_1}. \tag{3.1}$$

Suy ra $a_1 = 1, a_n = 9$. Thay lại vào (3.1) thì $80 + 9.\overline{a_2a_3...a_n0} = \overline{a_{n-1}...a_20} \Longrightarrow a_2 < 2$. Như vậy $a_2 = 0$ hoặc $a_2 = 1$, ta xét hai trường hợp này:

1. Nếu $a_2 = 1$ Từ (3.1) lấy theo *mod* 100 suy ra $a_{n-1} = 7$, lại thay lại vào (3.1) suy ra:

$$9.(11.10^{n-2} + 79 + \overline{a_3...a_{n-2}00}) = 97.10^{n-2} + 1 + \overline{a_{n-2}...a_300}.$$

Như vậy vế trái lớn hơn 99.10^{n-2} và như vậy rõ ràng lớn hơn vế phải. Loại.

2. Nếu $a_2 = 0$ Lấy (3.1) theo *mod* 100 suy ra $a_{n-1} = 8$. Thay lại vào (3.1) ta có:

$$9.(10^{n-1} + 89 + \overline{a_3...a_{n-2}00}) = 98.10^{n-2} + 1 + \overline{a_{n-2}...a_300} \Longrightarrow a_3 > 7.$$

Như vậy a_3 nhận 1 trong 2 giá trị 8 hoặc 9. Gọi số nghiệm trong hai trường hợp này lần lượt là K_n và T_n tương ứng. Khi đó rõ ràng ta có $S_n = K_n + T_n$.

2.1. Bước 1. **Tính** K_n**.** Dễ thấy $K_5 = K_6 = 0$. Xét $n \geq 7$. Ta có:

$$9.\overline{a_4 ... a_{n-3}} = 8.10^{n-6} + \overline{a_{n-3}....a_4}. \tag{3.2}$$

Suy ra $a_4 \geq 8$. Xét trực tiếp dễ thấy $a_4 \neq 8 \Longrightarrow a_4 = 9 \Longrightarrow K_7 = 0, K_8 = 1$ (số 108981089) . Xét $n > 9$, khi đó $9.\overline{a_5 ... a_{n-4}} = \overline{a_{n-4}....a_5}$. Đây chính là công thức xác định một số bập bênh có không quá $n - 8$ chữ số (theo (3.1)) nên:

$$K_n = \sum_{k=4}^{[n/2]} S_{n-2k}.$$

2.2. Bước 2. **Tính** T_n**.** Dễ thấy $T_5 = 1$ (số 10989). Xét $n \geq 6$, lấy (3.1) theo *mod* 1000 suy ra $a_{n-2} = 9$. Thay lại vào (3.1):

$$9.(109.10^{n-3} + 989 + \overline{a_4 ... a_{n-3}00}) = 901 + 989.10^{n-3} + \overline{a_{n-3} ... a_4 00}$$

$$\Longrightarrow 9.\overline{a_4 ... a_{n-3}} = 8.10^{n-6} - 8 + \overline{a_{n-3} ... a_4}. \tag{3.3}$$

$T_6 = 1$ (số 109909). Xét $n \geq 7$ suy ra $a_4 \geq 8$, lại xét hai trường hợp. Nếu $a_4 = 8$, lấy (3.1) theo *mod* 1000 thu được $a_{n-3} = 0$, thay lại vào (3.1) ta có $9.\overline{a_5 ... a_{n-4}} = 8.10^{n-8} + \overline{a_{n-4} ... a_5}$. Theo (3.2) thì số nghiệm của phương trình này là K_{n-2}. Nếu $a_4 = 9$ thay lại vào (3.1) suy ra $\overline{a_5 ... a_{n-4}} = 8.10^{n-8} - 8 + \overline{a_{n-4}....a_5}$. Theo (3.3) thì số nghiệm của phương trình này là T_{n-2}. Vậy ta có:

$$T_n = K_{n-2} + T_{n-2} = S_{n-2}.$$

Tóm lại chúng ta đã chứng minh được công thức sau đây của dãy các số S_n:

$$S_n = K_n + T_n = S_{n-2} + \sum_{k=4}^{[n/2]} S_{n-2k}.$$

Đặc biệt là với các xác định như đã nói ở trên thì dãy các số *Fibonaci* cũng thoả mãn:

$$f_n = f_{n-2} + \sum_{k=4}^{[n/2]} f_{n-2k}.$$

Việc chứng minh công thức này không quá khó khăn và dành cho bạn đọc như một bài tập nhỏ. Bây giờ để ý rằng các giá trị ban đầu của hai dãy $\{S_n\}$ và $\{f_{[n/2]-1}\}$ là hoàn toàn trùng nhau. Và do đó ta có thể kết luận rằng $S_n = f_{[n/2]-1}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 4$. Đây chính là điều ta cần chứng minh.

Xét dãy các số bập bênh dạng đặc biệt sau đây:

$$\begin{cases} p_1 = 1089 \\ p_2 = 10989 \\ p_n = 10\underbrace{999...999}_{n-1 \text{ số } 9}89 \quad n \text{ là số tự nhiên bất kì.} \end{cases}$$

Khi đó với sơ đồ chứng minh như trên chúng ta dễ dàng thu được dạng tổng quát như sau của tất cả các số bập bênh:

$$\overline{p_{m_1}p_{m_2}\dots p_{m_n}p_{m_{n+1}}p_{m_n}\dots p_{m_2}p_{m_1}}.$$

Trong đó $m_1, m_2, ..., , m_n$ và m_{n+1} là các số tự nhiên tuỳ ý.

Lời Bình. Đây là một bài toán hay, vấn đề đặt ra là khảo sát một loại số đặc biệt. điều thú vị là xuất xứ của từ bập bênh. Có thể thấy rõ qua công thức tổng quát xác định một số bập bênh bất kỳ nêu trên, cấu trúc của các số có tính chất (3.1) có thể chính là nguồn gốc của tên gọi thú vị này. Một điểm đặc biệt nữa là trong chứng minh trên chúng ta đã dựa vào (3.2), (3.3) để thu được công thức truy hồi đặc biệt của dãy $\{S_n\}$. Cần phải quan sát một cách tỉnh táo thì mới tránh được những suy luận thừa, không cần thiết và có thể lạc đề.

Để cho chính xác ta có thể gọi các số bập bênh kiểu này là các số $9-$ bập bênh. Một vấn đề nữa là có các số bập bênh kiểu khác không, tức là với số a như thế nào thì tồn tại số $a-$ bập bênh, với giả thiết là số $a-$ bập bênh là số mà khi đem nhân nó với a ta được chính số đó nhưng viết theo thứ tự các chữ số ngược lại. Đây là một bài toán không quá khó, thậm chí rất cũ nhưng cần phải xét tất cả các trường hợp a là chữ số. Kết quả là a chỉ có thể là $1, 9$ hoặc 4. Đặc biệt nếu $a = 4$ thì kết quả vẫn rất tương tự, sự khác biệt có chăng chỉ là ở cách xác định dãy $\{p_n\}$. Khi $a = 4$ vai trò của số 2178 sẽ thay thế vai trò của số 1089 (chú ý là 2178.4 = 8712). Chính xác hơn chúng ta có kết quả sau đây:

Bài toán 3.1.2. *Chứng minh rằng có bao nhiêu số $4-$ bập bênh thì cũng có bấy nhiêu số $9-$ bập bênh.*

Chứng minh trực tiếp kết quả này thực sự là một việc rất khó (!!)

Thay cho lời kết. Trong số học còn vô vàn những loại số đáng chú ý khác và chúng ta sẽ sớm trở lại chủ đề này với những khảo sát chi tiết hơn. Dưới đây là một số bài toán về các loại số đặc biệt khác đã xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi gần đây và trước kia:

Bài toán 3.1.3 (Số đong đưa). *Một số nguyên dương được gọi là đong đưa nếu trong biểu diễn thập phân của nó, hai chữ số bất kỳ đứng cạnh nhau có một số bằng 0 và một số khác 0, chữ số hàng đơn vị khác 0. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n không có bội số nào là số đong đưa.*

Bài toán 3.1.4 (Số luân phiên). *Một số nguyên dương được gọi là luân phiên nếu trong biểu diễn thập phân của nó, hai chữ số bất kỳ đứng cạnh nhau có một số chẵn và một số lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho nó không có bội số luân phiên nào cả.*

Bài toán 3.1.5 (Số bướng bỉnh). *Cho các số tự nhiên đôi một nguyên tố cùng nhau a, b, c. Một số tự nhiên gọi là bướng bỉnh nếu nó không biểu diễn được dưới dạng $xab + ybc + zca$ với các số tự nhiên x, y, z. Hỏi có bao nhiêu số bướng bỉnh.*

Bài toán 3.1.6 (Số kim cương). *Một số nguyên dương được gọi là kim cương 2005 nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2005 chữ số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Dãy $\{a_n\}$ tăng ngặt các số nguyên dương thoả mãn $a_n < nC$ với hằng số thực dương C nào đó. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ chứa vô hạn các số kim cương 2005.*

3.2 Định lý *Fermat* nhỏ và một ứng dụng đẹp

Bài toán 3.2.1 (Định lý *Fermat* **nhỏ).** *Với số nguyên tố p cho trước và số tự nhiên n tuỳ ý thì $n^p - n$ chia hết cho p.*

Định lý này đã quá quen thuộc với các bạn, cách chứng minh truyền thống là sử dụng phép ghép cặp và hệ thặng dư. Tuy nhiên chúng tôi muốn mời các bạn thưởng thức lại một cách chứng minh tuyệt đẹp của bài toán (3.2.1). Cách chứng minh này khác với cách chứng minh thông thưởng sử dụng hệ thặng dư, mặc dù trong hai cách thì cách thứ hai có thể mở rộng để chứng minh kết quả mạnh hơn của định lý *Fermat* (định lý *Euler*) dễ dàng hơn.

Chứng minh bài toán (3.2.1)**.** Sử dụng phép đếm. Ta chia một vòng tròn thành p phần đều nhau $1, 2, .., p$ và tô các phần đó bằng 1 trong n màu cho trước. Hai cách tô được gọi là đồng dạng nếu qua một phép quay chúng trở thành một hình duy nhất. Đếm số các lớp mà mỗi lớp bao gồm tất cả các cách tô đồng dạng với nhau.

Ta có số cách tô là n^p, nếu trong một lớp các cách tô đồng dạng với nhau có 2 cách tô khác nhau thì lớp đó có đúng p phần tử (nghĩa là p cách tô sai khác nhau một phép quay). Chỉ có đúng p lớp mà mỗi lớp chứa đúng n phần tử giống hệt nhau (tương ứng với n cách tô toàn bộ vòng tròn bằng một màu duy nhất). Vậy số lớp sẽ là:

$$\frac{n^p - n}{p}.$$

Biểu thức này dĩ nhiên phải là một số nguyên. Điều đó chứng tỏ $n^p - n$ chia hết cho p.

Về tầm quan trọng của định lý này có lẽ nên dành hẳn một chuyên khảo để viết về nó, tuy nhiên trong bài viết này chúng tôi chỉ muốn giới thiệu một bài toán "nhỏ" và khá thú vị, có thể chứng minh trực tiếp đẹp mắt bằng định lý này nhờ kết hợp với đẳng thức thú vị:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}. \tag{3.4}$$

Bài toán 3.2.2 (IMO 2005). *Tìm tất cả các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với mọi phần tử của dãy:*

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad n \geq 1.$$

Chứng minh bài toán (3.2.2)**.** Ta sẽ chứng minh rằng với số nguyên tố p bất kì đều tồn tại bội số của p là phần tử của dãy $\{a_n\}$. Thật vậy, rõ ràng là $2|a_1 = 10$ và $3|a_2 = 48$, xét một số nguyên tố $p > 3$ bất kì. Sử dụng định lý *Fermat* nhỏ ta có biến đổi sau:

$$\begin{aligned} a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 &= \frac{2^{p-1}}{2} + \frac{3^{p-1}}{3} + \frac{6^{p-1}}{6} - 1 \\ &\equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 \mod p \equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$

Biến đổi thứ 3 đúng vì chúng ta có đẳng thức (3.4). Đây là một đẳng thức rất đơn giản nhưng nó lại có nhiều ứng dụng rất thú vị, không chỉ riêng trong bài toán này.

3.3 Một số tính chất của hàm tổng các chữ số

Đối với số tự nhiên $n = \overline{a_1a_2...a_n}$ ta xét $S(n) = a_1 + a_2 + ... + a_n$ và gọi S là hàm tổng các chữ số. Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày một số tính chất của hàm số này.

Bài toán 3.3.1. *Chứng minh 3 tính chất cơ bản của hàm $S(n)$:*

$$\begin{array}{lll} (1) & S(a) \le a & \text{với mọi số tự nhiên } a \\ (2) & S(a+b) \le S(a) + S(b) & \text{với mọi số tự nhiên } a,b \\ (3) & S(ab) \le S(a)S(b) & \text{với mọi số tự nhiên } a,b. \end{array}$$

Ba tính chất này là những hiểu biết ban đầu về hàm $S(n)$, mặc dù đơn giản nhưng đều rất quan trọng. Chứng minh không quá khó khăn vì vậy các bạn hãy tự chứng minh chúng.

Bây giờ mời các bạn đến với 2 kết quả đẹp đẽ sau đây:

Bài toán 3.3.2. *Giả sử $10^k - 1|M$ với $k \in N$ khi đó $S(M) \ge 9k$.*

LỜI GIẢI. Đặt $M = \overline{a_t...a_1a_0}$. Với mọi $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ ký hiệu:

$$S_i = \sum_{j \equiv i \mod k} a_j.$$

Theo giả thiết $10^k - 1|M \Longrightarrow 10^k - 1|10^lM$ với mọi $l = 0, 1, ..., k-1$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} S_{k-1}10^{k-1} + S_{k-2}10^{k-2} + ... + S_1 10^1 + S_0 10^0 \text{ chia hết cho } 10^k - 1 \\ S_{k-1}10^0 \quad + S_{k-2}10^{k-1} + ... + S_1 10^2 + S_0 10^1 \text{ chia hết cho } 10^k - 1 \\ .... \\ S_{k-1}10^{k-2} + S_{k-2}10^{k-3} + ... + S_1 10^0 + S_0 10^1 \text{ chia hết cho } 10^k - 1. \end{cases}$$

Suy ra $(S_{k-1} + ... + S_0)(10^{k-1} + ... + 10 + 1) \ge k(10^k - 1) \Longrightarrow S(M) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} S_i \ge 9k$.

Bài toán 3.3.3. $S((10^k - 1)m) = 9k$ *với mọi* $1 \le m \le 10^k$.

LỜI GIẢI. Đặt $m = \overline{a_1a_2...a_s}10^t$ với $a_s \ne 0, s \le k$. Ta có:

$$\begin{aligned} S((10^k-1)m) &= S(\overline{a_1a_2...a_{s-1}\underbrace{99...9}_{k-s \text{ số } 9}(9-a_1)...(9-a_{s-1})(10-a_s)}) \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} a_i + \underbrace{9+9+...+9}_{k-s \text{ số } 9} + \sum_{i=1}^{s-1}(9-a_i) + (10-a_s) \\ &= 9k \quad \text{Điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

LỜI BÌNH. Hai kết quả trên là những tính chất đẹp của hàm $S(n)$, trong đó đẳng thức ở bài toán (3.3.3) là một đẳng thức tuyệt vời. Với hai kết quả này, ta có thể giải quyết một loạt các bài toán, trong đó có một bài toán đẹp đẽ sau:

Bài toán 3.3.4 (USAMO 2005). *Đặt* $A = \{1, 2, ..., n\}$. *Gọi* $f(n)$ *là giá trị nhỏ nhất của số tự nhiên* k *có tính chất tồn tại* n *số nguyên dương phân biệt* $x_1, x_2, .., x_n$ *thoả mãn:*

$$S\left(\sum_{i \in I} x_i\right) = k \quad \text{với mọi } I \in A, I \neq \phi.$$

Chứng minh rằng tồn tại $0 < c_1 < c_2$ *thoả mãn* $c_1 \log_{10} n \leq f(n) \leq c_2 \log_{10} n$ *với mọi* n.

LỜI GIẢI. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại của c_1. Đặt $m = [\log_{10} n] \Longrightarrow 10^m - 1 < n$. Xét n số $a_1 = x_1$, $a_2 = x_1 + x_2$,..., $a_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Theo nguyên lý *Dirichlet* tồn tại $1 \leq i < j \leq n$ sao cho $a_i \equiv a_j \ mod\ (10^m - 1)$. Từ đó suy ra $a_{i+1} + ... + a_j \equiv 0\ mod\ (10^m - 1)$. Mặt khác áp dụng bài toán (3.3.2) ta có $f(n) = S(a_{i+1} + ... + a_j) \geq 9m = 9[\log_{10} n]$.

Ta chứng minh sự tồn tại của c_2. Chọn $x_1 = 10^k - 1$, ..., $x_n = (10^k - 1)n$. Với $k = [2\log_{10} n + 1.]$. Sử dụng bài toán (3.3.3) suy ra $S(\sum_{i \in I} x_i) = 9k$ với mọi $I \in A$, $I \neq \phi$

$$\Longrightarrow f(n) \leq 9k \leq 9[2\log_{10} n + 1].$$

Bài toán đã được chứng minh.

Một vấn đề khác là khảo sát tính chất của dãy $\{S(a^n)\}$ với a là số tự nhiên cố định. Riêng với $a = 2$ thì $\lim_{n \to \infty} S(2^n) = \infty$. Đây đã là một bài toán khó, các bạn có thể chứng minh rằng $S(2^n) \geq \dfrac{1}{2}\log_2 n$ và từ đó dễ dàng suy ra kết quả bài toán. Chúng ta sẽ không bàn quá sâu về bài toán này mà sẽ giải quyết một bài toán tương tự sau đây:

Bài toán 3.3.5. *Tìm tất cả các số tự nhiên* k *có tính chất tồn tại số thực dương* c_k *sao cho:*

$$\frac{S(kN)}{S(N)} \geq c_k \quad \text{với số tự nhiên } N \text{ bất kì.}$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh rằng số tự nhiên k thoả mãn điều kiện bài toán khi và chỉ khi trong phân tích chính tắc của k không có các thừa số nguyên tố khác 2 và 5. Thật vậy, nếu $k = 2^p.5^q$ thì ta có:

$$S(2^p.5^q.N) \geq \frac{S(10^{p+q}.N)}{S(5^p.2^q)} \Longrightarrow \frac{S(2^p.5^q.N)}{S(N)} \geq c_k = S(5^p.2^q).$$

Ngược lại, nếu $k = 2^p.5^q.t$ với số tự nhiên $t > 1$ và nguyên tố cùng nhau với 10. Rõ ràng nếu k thoả mãn bài toán thì t cũng vậy. Sử dụng định lý Euler ta có:

$$t | 10^{\varphi(t)} - 1 \Longrightarrow \frac{10^{\varphi(t)} - 1}{t} = \overline{a_1 a_2 ... a_{\varphi(t)}}.$$

Trong cách viết trên các chữ số a_i có thể bằng 0. Ta lại có:

$$\begin{aligned}
B_m &= \frac{10^{m\varphi(t)}-1}{t}\\
&= \frac{10^{\varphi(t)}-1}{t}\Big((10^{\varphi(t)})^{m-1}+....+10^{\varphi(t)}+1\Big)\\
&= \underbrace{\overline{B_1B_1...B_1}}_{m}\\
\Longrightarrow B_m+1 = \frac{10^{m\varphi(t)}+t-1}{t} &= \underbrace{\overline{B_1B_1...B_1}}_{m}+1.
\end{aligned}$$

Vì $t>1$ nên $\overline{a_1a_2...a_{\varphi(t)}} < \underbrace{99\ ...\ 99}_{\varphi(t) \text{ số } 9}$. Do đó ta có $\overline{B_1B_1...B_1}+1 = \overline{B_1B_1...(B_1+1)}$

$$\Longrightarrow S\Bigg(\frac{10^{m\varphi(t)}+t-1}{t}\Bigg) \geq m-1. \tag{3.5}$$

Chọn m đủ lớn để $10^{m\varphi(t)} > t-1$ ta có ngay:

$$S(10^{m\varphi(t)}+t-1) = 1+S(t-1). \tag{3.6}$$

Tóm lại ta đã xét dãy các số tự nhiên sau đây $A_m = \dfrac{10^{m\varphi(t)}+t-1}{t}$.

Giả sử phản chứng, từ (3.5) và (3.6) ta suy ra $c_t \leq \dfrac{S(tA_m)}{S(A_m)} \leq \dfrac{1+S(t-1)}{m-1}$. Cho $m\to\infty$ suy ra $c_t=0$. Mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh. Một câu hỏi mở là đánh giá:

$$\inf\ \left\{\frac{S(kN)}{S(N)}\mid k\in N\right\}.$$

Bài toán 3.3.6. *Chứng minh rằng tồn tại k số tự nhiên $a_1,a_2,...,a_k$ sao cho:*

$$a_n+S(a_n) = a_m+S(a_m)\quad \forall 1\leq n,m\leq k.$$

LỜI GIẢI. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n rằng tồn tại n số tự nhiên khác nhau đôi một $a_1,a_2,...,a_n$ thoả mãn $a_1+S(a_1)=a_2+S(a_2)=...=a_n+S(a_n)$. Thật vậy, với $n=2$ chọn $a_1=98$, $a_2=107$ thì $98+S(98)=115=107+S(107)$. Giả sử rằng khẳng định đã đúng tới n và $a_1+S(a_1)=a_2+S(a_2)=...=a_n+S(a_n)=ls$. Rõ ràng tồn tại $l\in\{1,2,...,9\}$ để $9|s+2l$, đặt $s+2l=9m$. Dễ thấy m lớn hơn số chữ số của các số a_i, $i=1,2,...,n$. Xét các số sau đây:

$$\begin{cases} a'_i = 10^m+a_i \quad i=1,2,...,n\\ a'_{n+1} = 10^m-l.\end{cases}$$

Khi đó $a'_i+S(a'_i)=10^m+1+s$ với $i=1,2,..,n+1$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Các tính chất về hàm tổng các chữ số còn nhiều, nhưng chúng tôi tạm kết thúc bài viết bằng hai bài toán. Một bài là đề thi của Nga, còn bài kia là một bài toán "mới":

Bài toán 3.3.7. *Giả sử a, b, c là các số tự nhiên thoả mãn $S(a+b), S(b+c), S(c+a)$ đều nhỏ hơn 5. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $S(a+b+c)$.*

Bài toán 3.3.8. *Với mỗi số tự nhiên $n = \overline{a_t...a_2a_1}$ xét hàm số*

$$T(n) = 10\sum_{i \text{ chẵn}} a_i + \sum_{i \text{ lẻ}} a_i.$$

Hãy tìm số nguyên dương A nhỏ nhất sao cho tồn tại các số tự nhiên $n_1, n_2, .., n_{148}$ và $m_1, m_2, ..., m_{149}$ thoả mãn ba điều kiện:

$$\begin{cases} A = n_1 + n_2 + ... + n_{148} = m_1 + m_2 + ...m_{149} \\ T(n_1) = T(n_2) = ... = T(n_{148}) \\ T(m_1) = T(m_2) = ... = T(m_{149}). \end{cases}$$

3.4 Hai ứng dụng của phương trình *Pell*

Phương trình *Pell* cổ điễn là phương trình có dạng $x^2 - Dy^2 = 1$ trong đó D là số nguyên dương không là bình phương của một số tự nhiên. Bằng cách sử dụng lý thuyết liên phân số, dùng bổ đề *Dirichlet* hay phương pháp hình học với các đường *hypecbol* người ta đã chứng minh được rằng phương trình *Pell* luôn có ít nhất một nghiệm.

Từ việc có nghiệm ta có thể thấy ngay rằng phương trình *Pell* có vô hạn nghiệm. Thật vậy, nếu (x, y) là một nghiệm thì $(2x^2 - 1, 2xy)$ cũng là một nghiệm, các bạn có thể kiểm tra điều này bằng các phép biến đổi tương đối đơn giản. Vấn đề là tìm công thức tổng quát của tất cả các nghiệm. Để làm điều đó cần đến khái niệm nghiệm cơ sở.

Trong số các nghiệm, ta lấy ra một nghiệm (x_0, y_0) có tổng $x_0 + y_0$ nhỏ nhất có thể, khi đó (x_0, y_0) gọi là một nghiệm cơ sở. Khi đó tất cả các nghiệm của phương trình *Pell* sẽ là:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{(a+b\sqrt{D})^n + (a-b\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}} \\ y_n = \dfrac{(a+b\sqrt{D})^n - (a-b\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}. \end{cases}$$

Việc chứng minh chi tiết định lý này không thuộc phạm vi bài viết, các bạn có thể sử dụng phương pháp *gen* (sẽ được dẫn ra trong một ví dụ ở phần sau) để thực hiện công việc này.

Mục đích của chúng tôi là trình bày với các bạn hai ứng dụng đặc sắc của những hiểu biết về phương trình *Pell* vào các bài toán số học.

Bài toán 3.4.1 (TST VMO 2005). *Tìm tất cả các hàm số $f : Z \to Z$ thoả mãn đồng nhất thức sau với các số nguyên x, y, z bất kỳ:*

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = (f(x))^3 + (f(y))^3 + (f(z))^3.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ tìm một đẳng thức dạng $a^3+b^3+c^3=d^3+e^3+f^3$ đúng với n bất kỳ, trong đó các biến a,b,c,d,e,f đều phụ thuộc n. Đây là ý tưởng chính và việc thực hiện nó sẽ dẫn ta tới với phương trình $Pell$. Thật vậy, ta có:

$$(x+l)^3-(x-l)^3=(y+h)^3-(y-h)^3+(z-t)^3-(z+t)^3 \Longleftrightarrow 3lx^2+l^3=3hy^2+h^3-3tz^2-t^3.$$

Vì mục đích của ta là tìm một công thức truy hồi có chứa n nên ta có thể chọn $x=n, l=1$ khi đó đẳng thức trên trở thành:

$$3n^2+1=3hy^2+h^3-3tz^2-t^3. \tag{3.7}$$

Từ (3.7) suy ra $h-t\equiv 1 \mod 3$, chọn $h=2, t=1$ vậy (3.7) tương đương với $3n^2+1=6y^2+8-3z^2-1 \Longleftrightarrow 3n^2-6=6y^2+8-3z^2-1 \Longleftrightarrow n^2-1=2y^2-z^2$. Ta lại có:

$$\begin{cases} 2.1^2-n^2=2-n^2 \\ 2.5^2-7^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow 2-n^2 &= (2.1^2-n^2)(2.5^2-7^2) \\
&= (\sqrt{2}.1-n)(\sqrt{2}.1+n)(\sqrt{2}.5-7)(\sqrt{2}.5+7) \\
&= [(\sqrt{2}.1-n)(\sqrt{2}.5-7)][(\sqrt{2}.1+n)(\sqrt{2}.5+7)] \\
&= [7n+10-\sqrt{2}(5n+7)][7n+10+\sqrt{2}(5n+2)] \\
&= (7n+10)^2-2(5n+7)^2.
\end{aligned}$$

Và như thế $2(5n+7)^2-(7n+10)^2=n^2-2$, ta có thể chọn $y=7n+10, z=5n+7$.Cuối cùng ta có đẳng thức:

$$(n+m)^3-(n-m)^3=(5n+9)^3-(5n+5m)^3+(7n+9m)^3-(7n+11m)^3.$$

Đến đây thì bằng phép quy nạp đơn giản (các bạn tự thực hiện) ta có:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{với mọi } x\in Z \text{ nếu } f(1)=0 \\ x & \text{với mọi } x\in Z \text{ nếu } f(1)=1 \\ -x & \text{với mọi } x\in Z \text{ nếu } f(1)=-1. \end{cases}$$

Bài toán 3.4.2 (TST VMO 2002). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số nguyên sao cho đa thức sau là bình phương của một đa thức hệ số nguyên:*

$$Q(x)=(x^2+6x+10)(P(x))^2-1.$$

LỜI GIẢI. Giả sử tồn tại đa thức hệ số nguyên $R(x)\in Z[x]$ thoả mãn $Q(x)=(R(x))^2$. Do $x^2+6x+10=(x+3)^2+1>0$ và $(R(x))^2\geq 0$ nên $P(x)\neq 0$ với mọi $x\in R$. Có thể giả sử $P(x)>0$ với mọi $x\in R$ và như thế bậc của P là chẵn, đặt $deg(P)=2n$.

Từ giả thiết ta có $(m^2+1)(P(m-3))^2-1$ là số chính phương với mọi giá trị m nguyên, nên theo định lý về phương trình $Pell$ suy ra tồn tại $f: N\to N$ sao cho với mọi $m\in N$ thì:

$$P(m-3)=\frac{1}{2\sqrt{m^2+1}}\left((m+\sqrt{m^2+1})^{2f(m)+1}-(m-\sqrt{m^2+1})^{2f(m)+1}\right).$$

Gọi a là hệ số bậc cao nhất của $P(x)$, $a \neq 0$ và vì $deg(P) = 2n$ nên $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{x^{2n}} = a \neq 0$. Từ đó suy ra tồn tại $2n+1$ số nguyên dương phân biệt $x_1, x_2, .., x_{2n+1}$ sao cho $2f(x_i) + 1 = 2n + 1$ với $1 \leq i \leq 2n+1$. Xét đa thức:

$$A(x) = P(x-3) - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\Big((x+\sqrt{x^2+1})^{2n+1} - (x-\sqrt{x^2+1})^{2n+1}\Big).$$

Ta có $deg(A) \leq 2n$ mà $A(x_i) = 0$ với mọi $i = \overline{1, 2n+1}$ suy ra $A(x) = 0$ (một đa thức bậc k không có quá k nghiệm)

$$\Longrightarrow P(x-3) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\Big((x+\sqrt{x^2+1})^{2n+1} - (x-\sqrt{x^2+1})^{2n+1}\Big).$$

Đổi biến, ta thu được:

$$P(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+6x+10}}\Big((x+3+\sqrt{x^2+6x+10})^{2n+1} - (x+3-\sqrt{x^2+6x+10})^{2n+1}\Big).$$

3.5 Định lý phần dư Trung Hoa

Bài toán Hàn Tín điểm binh là một bài toán nổi tiếng đến mức hầu như học sinh tiểu học nào cũng đã từng nghe nói đến. Đó cũng là xuất phát điểm cho định lý Trung Hoa về phần dư mà chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh ngay bây giờ.

Bài toán 3.5.1. *Xét hệ phương trình đồng dư bậc nhất một ẩn:*

$$(H) \quad \begin{cases} x \equiv b_1 \mod m_1 \\ x \equiv b_2 \mod m_2 \\ .... \\ x \equiv b_n \mod m_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng (H) *có nghiệm nếu và chỉ nếu* $(m_i, m_j) = d_{ij} | b_i - b_j$ *với* $1 \leq i < j \leq n$.

LỜI GIẢI. Ta chứng minh hai chiều của định lý. Chiều thuận làn hiển nhiên, vì ta có:

$$\begin{cases} x = t_i m_i + b_i \\ x = t_j m_j + b_j \end{cases}$$

$$\Longrightarrow d_{ij} = (m_i, m_j) | t_j m_j - t_i m_i = b_i - b_j.$$

Ngược lại, ta xét trường hợp $\{m_i\}$ đôi một nguyên tố cùng nhau (đây chính là định lý Trung Hoa). Ta đã biết với số nguyên x điều kiện cần đủ để tồn tại số nguyên y mà $xy \equiv 1 \mod n$ là $(x, n) = 1$. Thật vậy, nếu $(x, n) = 1$ thì theo định lý *Bezout* ta có tồn tại các số nguyên u, v sao cho $ux + vn = 1$ suy ra $ux \equiv 1 \mod n$. Chiều ngược lại là điều hiển nhiên.

Bây giờ đặt $M = \prod\limits_{i=1}^{n} m_i$ và $M_i = \dfrac{M}{m_i}$. Theo nhận xét thì với mỗi $i = 1, 2, .., n$ đều tồn tại c_i sao cho $M_ic_i \equiv 1 \mod m_i$. Lấy $x = \sum_{i=1}^{n} M_ib_ic_i$, đây rõ ràng là nghiệm của hệ (H).

Bây giờ xét trường hợp $(m_i, m_j) = d_{ij}|b_i - b_j$ với mọi $1 \le i < j \le n$. Đặt $m_c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_{ci}}$.
Khi đó hệ (H) có thể viết dưới dạng:

$$\text{Với mọi } 1 \le c \le n \quad \begin{cases} x \equiv b_c \mod p_1^{\beta_{c1}} \\ x \equiv b_c \mod p_2^{\beta_{c2}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv b_c \mod p_k^{\beta_{ck}} \end{cases}$$

Sắp xếp lại n hệ k phương trình này thành k hệ n phương trình như sau:

$$\text{Với mọi } 1 \le i \le k \quad \begin{cases} x \equiv b_1 \mod p_i^{\beta_{1i}} \\ x \equiv b_2 \mod p_i^{\beta_{2i}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv b_n \mod p_i^{\beta_{ni}}. \end{cases}$$

Các phương trình trong cùng một hệ trong k hệ này đều xét theo các *modun* của cùng một số nguyên tố, hơn nữa nếu $\beta_{ci} \ge \beta_{di}$ xét hệ:

$$\begin{cases} x \equiv b_c \mod p_i^{\beta_{ci}} \\ x \equiv b_d \mod p_i^{\beta_{di}}. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với một phương trình duy nhất $x \equiv b_c \mod p_i^{\beta_{ci}}$ (suy ra từ điều kiện $d_{ij}|b_i - b_j$). Nghĩa là ta đã đưa trường hợp tổng quát về trường hợp riêng của định lý Trung Hoa vừa được giải quyết ở trên. Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Đây là một định lý thực sự lý thú và bổ ích, dưới đây là một ứng dụng tương đối đơn giản nhưng cũng rất ý nghĩa:

Bài toán 3.5.2. *Chứng minh rằng với số tự nhiên n bất kỳ đều tồn tại hai số nguyên x, y thoả mãn $n|x^2 - 34y^2 + 1$.*

LỜI GIẢI. Có thể đặt $n = 3^\alpha m$ với $(m, 3) = 1$ và $\alpha > 0$.

Ta có $5^2 - 34.1^2 + 3^2 = 0$ và tồn tại j để $3j \equiv 1 \mod m \Longrightarrow m|(5j)^2 - 34j^2 + 1$.

Ta lại có $3^2 - 34.1^2 + 5^2 = 0$, và theo định lý *Euler* thì $5^{\varphi(3^\alpha)} \equiv 1 \mod 3^\alpha$

$$\Longrightarrow 3^\alpha \left| \left(3 \cdot 5^{\varphi(3^\alpha)-1}\right)^2 - 34\left(5^{\varphi(3^\alpha)-1}\right)^2 + 1. \right.$$

Theo bài toán (3.5.1) tồn tại x, y thoả mãn hai hệ đồng dư:

$$\begin{cases} x \equiv 5j \mod m \\ x \equiv 3 \cdot 5^{\varphi(3^\alpha)-1} \mod 3^\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y \equiv j \mod m \\ x \equiv 5^{\varphi(3^\alpha)-1} \mod 3^\alpha. \end{cases}$$

Khi đó rõ ràng là $n|x^2 - 34y^2 + 1$. Đây là điều phải chứng minh.

Cuối cùng, mời các bạn sử dụng định lý phần dư Trung Hoa để giải một số bài toán sau đây:

Bài toán 3.5.3. *Tìm tất cả các số tự nhiên n có tính chất tồn tại số nguyên m mà $2^n - 1$ là ước số của $m^2 + 9$.*

Bài toán 3.5.4. *Cho đa thức hệ số nguyên $P(x)$ và tập hợp hữu hạn các số nguyên $p_1, p_2, .., p_r$ khác 0 thoả mãn với mọi số nguyên n thì $P(n)$ là bội của số p_i nào đó. Chứng minh rằng khi đó tồn tại chỉ số i mà $p_i|P(n)$ với mọi $n \in Z$.*

Bài toán 3.5.5. *Giả sử $a_1, a_2, .., a_n$ là n số nguyên đôi một khác nhau và $b_1, b_2, .., b_n$ là n số nguyên tuỳ ý. Chứng minh rằng với số tự nhiên t cho trước tồn tại duy nhất một đa thức với các hệ số là $\pm 0, \pm 1, , .., \pm(t-1)$ sao cho $f(a_i) \equiv b_i \mod t$ với mọi $i = 1, 2, .., n$.*

LỜI BÌNH. Hãy chú ý đến dạng của bài toán (3.5.5) trong trường số thực, khi đó có duy nhất một đa thức hệ số thực $P(x)$ thoả mãn $P(a_i) = b_i$ với $i = 1, 2, .., n$. Chứng minh điều này các bạn có thể sử dụng công thức nội suy *Lagrange* quen thuộc.

3.6 Biểu diễn số

Các bài toán thuộc dạng toán biểu diễn số rất đa dạng và phong phú. Có nhiều bài trong số chúng thuộc loại kinh điển như bài toán biểu diễn một số thành tổng các bình phương, lập phương,.... . Đó đều là những bài toán rất thú vị nhưng trong bài viết này chúng tôi không có ý định tổng kết lại các kết quả kinh điển đó mà xét đến các bài toán về biểu diễn các số hữu tỉ.

Vấn đề thứ nhất chúng tôi đặt ra ở đây là tìm hiểu việc phân tích một số hữu tỉ dương dưới dạng tổng các lập phương của k số hữu tỉ dương. Rõ ràng định lý *Fermat* đã nói lên rằng k không thể bằng 2. Vậy k nhỏ nhất có thể bằng bao nhiêu. Câu trả lời là 3, chính xác hơn ta có bài toán sau đây:

Bài toán 3.6.1. *Mọi số hữu tỉ dương đều có thể biểu diễn vô hạn cách thành tổng các lập phương của ba số hữu tỉ dương.*

LỜI GIẢI. Xét số hữu tỉ dương r. Luôn tồn tại số hữu tỉ v sao cho:

$$\sqrt[3]{\frac{3r}{2}} < v < \sqrt[3]{3r}.$$

Chọn $u = \dfrac{3r - v^3}{3r + v^3}$, $s = v(1 + u)$, $z = su$ và $t = \dfrac{s}{3(1 - u^2)}$. Và chọn $x = s - t$, $y = t - z$.

Từ cách chọn v ta có $0 < u < \dfrac{1}{3} \Longrightarrow 3(1 - u^2) > 1$, mà $3u(1 - u^2) < 1 \Longrightarrow x, y > 0$. Vậy x, y, z đều là các số hữu tỉ dương.

Lại có:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = (s-t)^3 + (t-z)^3 + z^3 = s^3 - 3(s^2 - z^2)t + 3(s-z)t^2 \\ 3(s^2 - z^2)t = 3s^2(1 - u^2)t = s^3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^3+y^3+z^3 = 3s(1-u)t^2 = \frac{s^3(1-u)}{3(1-u^2)^2} = \frac{s^3}{3(1+u)(1-u^2)} = \frac{v^3(1+u)^2}{3(1-u^2)} = \frac{v^3(1+u)}{3(1-u)} = r.$$

Do đó r là tổng các lập phương của 3 số hữu tỉ dương. Để chứng minh số cách biểu diễn này là vô hạn ta có thể chọn v đủ gần $\sqrt[3]{3r}$. Khi đó $z = su$ sẽ đủ nhỏ. Do vậy ta có thể tạo ra vô hạn cách biểu diễn theo cùng cách như trên. Từ đây ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 3.6.1. *Mọi số hữu tỉ đều là tổng các lập phương của 3 số hữu tỉ.*

Hệ quả 3.6.2. *Với số nguyên dương n bất kỳ, phương trình $x^3 + y^3 + z^3 = nt^3$ có vô hạn nghiệm nguyên dương nguyên tố cùng nhau.*

Hệ quả 3.6.3. *Với số nguyên dương $k \geq 3$, bất kỳ số hữu tỉ dương nào cũng có thể biểu diễn vô hạn cách dưới dạng tổng các lập phương của k số hữu tỉ dương.*

Từ hệ quả 3.6.3 vấn đề đặt ra ở trên đã được giải quyết trọn vẹn. Ngoài ra lời giải trên còn cho ta phương pháp phân tích một số hữu tỷ thành tổng các lập phương của 3 số hữu tỉ. Chẳng hạn như với $r = 3/5$ thì:

$$\frac{3}{5} = r = \left(\frac{86}{105}\right)^3 + \left(\frac{73}{735}\right)^3 + \left(\frac{18}{49}\right)^3.$$

Bây giờ ta cải tiến cách chứng minh định lý trên bằng cách chọn v đủ nhỏ và $v > \sqrt[3]{3r}$ sao cho $u^2 < \dfrac{2}{3}$. Khi đó không khó khăn để chứng minh $-1 < u < 0$, $z < 0$, $t > 0$, $y > 0$, và $x > 0$. Kết quả này dẫn ta tới với định lý sau:

Bài toán 3.6.2. *Bất kỳ số hữu tỉ dương nào cũng có thể biểu diễn vô hạn cách dưới dạng $x^3 + y^3 - z^3$ trong đó x, y, z là các số hữu tỉ dương.*

Hệ quả của bài toán 3.6.2 thu được bằng cách áp dụng cho số $r + t^3$ với t là số thực dương:

Hệ quả 3.6.4. *Bất kỳ số hữu tỉ dương nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng $x^3 + y^3 - z^3 - t^3$ trong đó x, y, z, t là các số hữu tỉ dương.*

Chúng ta xét đến vấn đề thứ hai, biểu diễn một số hữu tỉ r dương dưới dạng:

$$r = \frac{a_1^3 + ... + a_n^3}{b_1^3 + ... + b_n^3}$$

với $a_1, ..., a_n$ và $b_1, ..., b_n$ là các số nguyên dương. Câu hỏi đặt ra là với n bằng bao nhiêu thì có thể biểu diễn được như vậy.

Trước hết hiển nhiên thấy rằng $n > 1$. Ta xét các trường hợp đơn giản của n.

Trường hợp $n = 2$. Xét a_1, a_2, b_1, b_2 là các số nguyên dương sao cho $a_1 = b_1$. Khi đó:

$$\frac{a_1^3 + a_2^3}{b_1^3 + b_2^3} = \frac{(a_1 + a_2)}{(b_1 + b_2)} \frac{(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{(b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2)}.$$

Ta chọn các số sao cho $a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2 = b_1^2 - b_1b_2 + b_2^2$, chẳng hạn chọn $a_1 = a_2 + b_2$

$$\Longrightarrow \frac{a_1^3 + a_2^3}{b_1^3 + b_2^3} = \frac{2a_2 + b_2}{a_2 + 2b_2}.$$

Nếu $1/2 < r < 2$, viết $r = a/b$ trong đó a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $b < 2a, a < 2b$. Ta chọn $a_2 = 2a - b$ và $b_2 = 2b - a$. Khi đó $r = \dfrac{a_1^3 + a_2^3}{b_1^3 + b_2^3}$ thỏa mãn.

Nếu r không thuộc khoảng $(1/2, 2)$. Luôn tồn tại số hữu tỉ p/q với p, q nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{2} < r\dfrac{p^3}{q^3} < 2$. Theo trường hợp trên $r\dfrac{p^3}{q^3}$ biểu diễn được dưới dạng:

$$r\frac{p^3}{q^3} = \frac{a_1^3 + a_2^3}{b_1^3 + b_2^3} \Longrightarrow r = \frac{(qa_1)^3 + (qa_2)^3}{(pb_1)^3 + (pb_2)^3}.$$

Do đó trường hợp $n = 2$, các biểu diễn trên quả thực tồn tại.

Trường hợp $n = 3$. Sử dụng trường hợp $n = 2$ và bài toán 3.6.2 suy ra tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d, e, f, g, h sao cho:

$$r = \frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3} = \frac{e^3 + f^3 - g^3}{h^3} = \frac{(ag)^3 + (bg)^3}{(cg)^3 + (dg)^3} = \frac{(be)^3 + (bf)^3 - (bg)^3}{(bh)^3}.$$

Theo tính chất tỉ lệ thức:

$$r = \frac{(ag)^3 + (be)^3 + (bf)^3}{(cg)^3 + (dg)^3 + (bh)^3}.$$

Ta có với $n = 3$ biểu diễn trên được xác lập. Mặt khác từ trường hợp $n = 2$ và $n = 3$ sử dụng tính chất tỉ lệ thức ta có bài toán sau:

Bài toán 3.6.3. *Cho số nguyên dương $n > 1$. Khi đó mọi số hữu tỉ dương đều biểu diễn được dưới dạng:*

$$\frac{a_1^3 + ... + a_n^3}{b_1^3 + ... + b_n^3}$$

trong đó $a_1, ..., a_n$ và $b_1, ..., b_n$ là các số nguyên dương.

Như vậy vấn đề thứ hai cũng đã được giải quyết trọn vẹn. Bây giờ tương tự hóa dạng biểu diễn trong vấn đề thứ hai ta có bài toán sau:

Bài toán 3.6.4. *Chứng minh rằng với mọi số hữu tỷ dương r đều tồn tại các số nguyên dương a, b, c, m, n, p thỏa mãn:*

$$r = \frac{a^2 + b^3 + c^5}{m^7 + n^{11} + p^{13}}. \tag{3.8}$$

LỜI GIẢI. Giả sử p là một số nguyên tố, với số tự nhiên n ký hiệu $v_p(n)$ là số mũ của p trong phân tích chính tắc của n. Ta chứng minh một nhận xét:

Nhận xét. Với các số tự nhiên t, s, m, n trong đó $(m, n) = 1$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a, b thỏa mãn $a^m t = b^n s$.

Chứng minh. Giả sử p là số nguyên tố, sử dụng định lý *Bezout* ta có thể tìm các số nguyên không âm α_p, β_p thỏa mãn $\alpha_p m - \beta_p n = v_p(s) = v_p(t)$. Dễ dàng chứng minh rằng:

$$\left(a = \prod p^{\alpha_p}, b = \prod p^{\beta_p}\right)$$

thỏa mãn điều kiện trên. Nhận xét được chứng minh.

Với số thực dương r chúng ta chọn các số tự nhiên a, b, c, m, n, p thỏa mãn $a^2 = rm^7$, $b^3 = rn^{11}$ và $c^5 = rp^{13}$. Khi đó rõ ràng (3.8) được thỏa mãn. Điều phải chứng minh.

Bài toán 3.6.4 là một bài toán dễ, nhưng nếu có một chút thay đổi nhỏ, chẳng hạn thay đổi vai trò của dấu cộng và dấu trừ, ta sẽ có những bài toán khó. Mà dưới đây là một ví dụ:

Bài toán 3.6.5. *Cho số nguyên dương $n > 1$. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất không có dạng $\dfrac{n^a - n^b}{n^c - n^d}$ với bất kỳ các số nguyên dương a, b, c, d nào đó.*

Các bạn hãy tự giải bài toán này xem như một bài tập.

3.7 Một dạng phương trình *Diophante* đặc biệt

Trong mục này chúng tôi muốn ghi chép lại lời giải của ba phương trình *Diophante* nghiệm tự nhiên sau đây:

$$4xy - x - 1 = z^2 \tag{3.9}$$

$$4xy - x - y = z^2 \tag{3.10}$$

$$4xyz - x - y = t^2. \tag{3.11}$$

Trong đó (3.9) và (3.10) là những phương trình của *Euler*, *Golbach* đã cho (3.9) một lời giải đẹp đẽ. *Euler* đã mô phỏng cách chứng minh đó để giải quyết (3.10). Công việc cuối cùng là sử dụng các ký hiệu *Jacobi* (mở rộng của ký hiệu *Legendre*) và luật thuận nghịch bậc hai để giải quyết trọn vẹn (3.11).

Bài toán 3.7.1. *Chứng minh rằng phương trình* (3.9) *không có nghiệm tự nhiên.*

LỜI GIẢI. Giả sử phản chứng, gọi a là số nhỏ nhất có tính chất tồn tại m, n tự nhiên mà:

$$4mn - m - 1 = a^2. \tag{3.12}$$

Cộng $4m^2 - 4ma$ vào cả hai vế của (3.12) ta được:

$$4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2. \tag{3.13}$$

Dễ dàng chứng minh được:

$$a < m. \tag{3.14}$$

Thật vậy, không thể có $a = m$ vì nếu $a = m$ thì vế phải của (3.12) chia hết cho m còn vế trái thì không (m không thể bằng 1 vì không có bình phương nào chia 4 dư 2). Còn nếu $a > m$ thì

$n - a + m < n$ và do đó vế trái của (3.13) nhỏ hơn vế trái của (3.12), tức là $(a-2m)^2 < a^2$, điều này trái với giả thiết xác định số a là giá trị tự nhiên nhỏ nhất của z thỏa mãn (3.9).

Ta chứng minh tiếp rằng:

$$4n - 1 > 2a. \tag{3.15}$$

Thật vậy, cộng $4(n-1)^2 - 2a(4n-1)$ vào hai vế của (3.13) ta được:

$$(4n-1)(m-2a+4n-1) - 1 = (a-(4n-1))^2$$
$$\Longleftrightarrow 4n(m-2a+4n-1) - (m-2a+4n-1) + 1 = (a-(4n-1))^2.$$

Do đó $z = |a-(4n-1)|$ thỏa mãn (3.9), theo cách xác định của số a ta dễ dàng suy ra (3.15).

Từ $(3.12), (3.14), (3.15)$ ta suy ra $a^2 + 1 = (4n-1)m > 2a.a = 2a^2 \Longrightarrow a^2 < 1$. Điều vô lý này chứng minh kết luận bài toán.

Bài toán 3.7.2. *Chứng minh rằng phương trình* (3.10) *không có nghiệm tự nhiên.*

LỜI GIẢI. Giả sử phản chứng, gọi a là giá trị tự nhiên nhỏ nhất của z thỏa mãn (3.10), nghĩa là tồn tại m, n tự nhiên sao cho:

$$4mn - m - n = a^2. \tag{3.16}$$

Nhân hai vế của (3.16) với 4 rồi biến đổi ta có:

$$(4m-1)(4n-1) - 1 = 4a^2. \tag{3.17}$$

Cộng $4(4n-1)^2 - 8a(4n-1)$ vào hai vế của (3.17) dẫn tới:

$$(4n-1-8a+4(4n-1))(4n-1) - 1 = 4(a-4n+1)^2. \tag{3.18}$$

Hai đẳng thức $(3.17), (3.18)$ có dạng giống nhau, cho thấy rằng (3.10) có nghiệm là $z = |a-4n+1|$, theo cách xác định a ta suy ra bất đẳng thức:

$$a \le |a-4n+1| \Longrightarrow a^2 < (a-4n+1)^2.$$

Do đó từ hai đẳng thức $(3.17), (3.18)$ ta có:

$$(4n-1-8a+4(4n-1))(4n-1) > (4n-1)(4m-1) \Longrightarrow 4n-1 > 2a.$$

Vì (3.16) là đối xứng với m, n nên cũng với lý luận tương tự như trên ta có $4m - 1 > 1$. Đặt:

$$\begin{cases} 4m-1 = 2a+p \\ 4n-1 \ = 2a+q. \end{cases}$$

Trong đó p, q là các số tự nhiên. Như vậy $(4n-1)(4m-1) = 4a^2 + 2a(p+q) + pq$, do đó từ (3.17) suy ra $2a(p+q) + pq = 1$ với các số tự nhiên a, p, q. Điều này là vô lý. Bài toán được chứng minh xong.

Bài toán 3.7.3. *Chứng minh rằng* (3.11) *không có nghiệm tự nhiên.*

LỜI GIẢI. Ta sử dụng ký hiệu *Jacobi* trong chứng minh, bạn đọc nào chưa rõ lý thuyết này có thể đọc phần chú thích ngay sau đây.

Giả sử phản chứng rằng (x, y, z, t) là nghiệm tự nhiên của (3.11). Thế thì:

$$\frac{4zt^2+1}{4yz-1} = 4zx - 1$$

là một số nguyên, tức là:

$$(2zt)^2 \equiv -z \mod (4yz-1). \tag{3.19}$$

Giả sử rằng $z = 2^\alpha z'$ với a là số nguyên không âm, z' là số tự nhiên lẻ. Khi đó sử dụng các tính chất của ký hiệu *Jacobi* ta có:

$$\left(\frac{-z}{4yz-1}\right) = \left(\frac{-1}{4yz-1}\right)\left(\frac{2^\alpha}{4yz-1}\right)\left(\frac{z'}{4yz-1}\right).$$

Thừa số thứ nhất bằng -1, thừa số thứ ba bằng $\left(\dfrac{4yz-1}{z'}\right)(-1)^{\frac{z'-1}{2}} = \left(\dfrac{-1}{z'}\right)(-1)^{\frac{z'-1}{2}} = 1$. Nếu $a = 2k+1$ với số nguyên không âm k và $z = 2z''$ thì thừa số thứ hai bằng $\left(\dfrac{2}{4yz-1}\right) = \left(\dfrac{2}{8yz''-1}\right) = 1$. Nếu $a = 2k$ với số nguyên không âm k thì nó bằng $\left(\dfrac{2}{4yz-1}\right) = 1 \Longrightarrow \left(\dfrac{-z}{4yz-1}\right) = -1$. Điều này mâu thuẫn với đồng dư thức (3.19). Bài toán được chứng minh xong.

Luật thuận nghịch bậc 2. (The law of reciprocity) Đối với số nguyên tố p và số nguyên a nguyên tố cùng nhau với p ta xét ký hiệu *Legendre* như sau:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu tồn tại } x \in Z \text{ mà } x^2 \equiv a \mod p \\ -1 & \text{nếu không tồn tại } x \in Z \text{ mà } x^2 \equiv a \mod p. \end{cases}$$

Chứng minh tiêu chuẩn *Euler*:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \mod p.$$

Tiếp theo chứng minh bổ đề *Gauss*: gọi s là số phần tử của tập hợp $\left\{ia \middle| 1 \le i \le \dfrac{p-1}{2}\right\}$ mà khi chia cho p số dư nhận được lớn hơn $p/2$. Với $a > 1, (a, p) = 1$, khi đó:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

Chứng minh tiếp đẳng thức *Cayley*: với hai số nguyên tố lẻ p, q khác nhau ta có:

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jq}{q}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

Suy ra luật thuận nghịch bậc hai: với hai số nguyên tố lẻ p, q khi đó ta có:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Ký hiệu *Jacobi* được định nghĩa như sau: với số tự nhiên lẻ $n = \prod p_i^{t_i}$ và số nguyên a nguyên tố cùng nhau với n, khi đó:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod \left(\frac{a}{p_i}\right)^{t_i}.$$

Trong đó ở vế phải là các ký hiệu *Legendre*. Khi đó cũng có luật thuận nghịch bậc hai cho ký hiệu *Jacobi*: với hai số tự nhiên lẻ nguyên tố cùng nhau m và n ta có:

$$\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}.$$

3.8 Số nguyên phức

Giới thiệu. Các số nguyên phức *Gauss* lần đầu tiên được sử dụng bởi *Gauss* trong bài nghiên cứu của ông về sự tương hỗ bậc hai, ông được coi là người đầu tiên sử dụng số phức trong số học một cách rất rõ ràng và mạch lạc. Lớp các số này có tầm quan trọng nhất định trong số học sơ cấp. Trong mục này chúng tôi sẽ đề cập đến những khái niệm và tính chất cơ bản của số nguyên phức Gauss (mà sau này ta sẽ gọi là số nguyên phức) đồng thời cũng đưa ra một số ví dụ để minh họa cho các tính chất đó.

3.8.1 Các khái niệm mở đầu

Số nguyên phức là các số có dạng $a + bi$ trong đó i là đơn vị ảo, a, b là các số nguyên. Khi đó hiển nhiên thấy rằng với các phép toán cộng và nhân trong trường số phức giữa các số phức *Gauss* ta cũng thu được một số phức *Gauss*.

Với một số phức $z = a + bi$ $(a, b \in R)$ thì số $z' = a - bi$ được gọi là *số phức liên hợp* của z. Như vậy một số là số nguyên phức khi và chỉ khi số phức liên hợp của nó cũng là số nguyên phức.

Ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất cơ bản sau của số phức liên hợp:

$$\begin{cases} (z')' = z \\ \text{Nếu } z = u + v \text{ thì } z' = u' + v' \\ \text{Nếu } z = u - v \text{ thì } z' = u' - v' \\ \text{Nếu } z = uv \text{ thì } z' = u'v'. \end{cases}$$

Ta nói rằng một số nguyên phức z *chia hết* cho một số nguyên phức t nếu và chỉ nếu tồn tại số nguyên phức u sao cho $z = tu$, khi đó viết là $t|z$. Rõ ràng nếu $a + bi, c + di$ là các số nguyên phức trong đó $c + di$ khác 0 thì ta có thương số:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$

Như vậy $c+di|a+bi$ nếu và chỉ nếu $c^2+d^2|ac+bd$ và $c^2+d^2|bc-ad$. Hơn nữa ta có các tính chất cơ bản sau:

$$\begin{cases} \text{Nếu } u|t \text{ và } t|z \text{ thì } u|z \\ \text{Nếu } t|z_i \text{ với } i=1,2,....,n \text{ thì } t|z_1u_1+z_2u_2+....+z_nu_n \text{ với mọi } u_1,u_2,...,u_n. \end{cases}$$

Bây giờ ta sẽ làm quen với khái niệm chuẩn của một số phức. *Chuẩn của một số phức* là tích giữa nó và số phức liên hợp của nó. Nếu kí hiệu chuẩn của số phức z là $N(z)$ thì $N(z)=zz'$. Hơn nữa nếu $z=a+bi$ trong đó a,b là các số thực thì $N(z)=a^2+b^2$. Các bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau:

$$\begin{cases} N(z)=N(z') \\ N(uv)=N(u)N(v) \\ z|t \Longrightarrow N(t)|N(z). \end{cases}$$

Hai số nguyên phức khác 0 thỏa mãn số này chia hết cho số kia được gọi là *hai số nguyên phức liên kết*. Như vậy z,t là hai số nguyên phức liên kết nếu và chỉ nếu $z|t$ và $t|z$. Từ đây $N(z)|N(t)$ và $N(t)|N(z)$ do đó $N(t)=N(z)$ suy ra hai số nguyên phức liên kết với nhau thì chuẩn của chúng bằng nhau. Ta còn có thêm một số tính chất cơ bản:

$$\begin{cases} \text{Nếu } z \text{ liên kết với } t \text{ thì } z' \text{ cũng liên kết với } t' \\ \text{Nếu } z \text{ chia hết cho } t \text{ thì mọi số liên kết với } z \text{ đều chia hết cho mọi số liên kết với } t. \end{cases}$$

Bây giờ ta sẽ tìm các số nguyên phức u liên kết với một số nguyên phức z cho trước. Theo định nghĩa thì $z=tu$ và do đó $N(z)=N(t)N(u)$. Theo tính chất ở trên ta có $N(z)=N(t)\neq 0$ suy ra $N(u)=1$.

Viết $u=a+bi$ thì $N(u)=a^2+b^2=1$. Điều này chỉ xảy ra trong các trường hợp $(a,b)\in\{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$. Kiểm tra đơn giản chiều ngược lại ta có 4 số phức liên kết của z là $z,-z,iz,-iz$. Ta có định lý sau:

Định lý 3.8.1. *Bất kì số nguyên phức z khác 0 nào cũng có đúng 4 số nguyên phức liên kết với nó là $z,-z,iz,-iz$.*

3.8.2 Thuật toán *Euclid* và ước chung lớn nhất của hai số nguyên phức

Định lý 3.8.2. *Nếu z và t là các số nguyên phức khác 0 thì tồn tại số nguyên phức c và r sao cho $z=ct+r$ và $N(r)\le \frac{1}{2}N(t)$.*

Chứng minh. Ta có thể viết $\frac{z}{t}=x+yi$ trong đó x,y là các số hữu tỉ. Gọi α và β là các số nguyên gần x,y nhất. Đặt $x_1=x-\alpha$ và $y_1=y-\beta$. Khi đó x_1,y_1 là các số hữu tỉ và $|x_1|,|y_1|\le\frac{1}{2}$. Ta chọn $c=\alpha+\beta i$, $r=z-ct=(x_1+y_1i)$. Không khó khăn để kiểm tra các số này thỏa mãn các điều kiện của định lý.

Từ định lý này ta có thuật toán Euclid tìm được dãy các số nguyên phức $r_0, r_1, ...$ sao cho các số t_i là các số nguyên phức thỏa mãn:

$$\begin{cases} r_0 = t, r_1 = r \\ r_i = t_i r_{i+1} + r_{i+2} \quad \text{với mọi } i = 0, 1, 2, .. \\ N(r_{i+1}) < N(r_i) \end{cases}$$

Dãy này còn tiếp tục chừng nào r_i còn khác 0.

Nhưng chú ý rằng dãy chuẩn $N(r_i)$ là dãy các số tự nhiên giảm dần nên dãy r_i không thể kéo dài vô hạn. Do đó bắt buộc phải tồn tại số nguyên n sao cho $r_{n-2} = t_{n-2} r_{n-1}$ hay có thể qui ước rằng $r_n = 0$. Dễ dàng nhận thấy từ kết quả này r_{n-1} sẽ là số cùng chia hết z và t hơn nữa nó chia hết cho mọi ước số chung của hai số này. Như vậy ta có hệ quả (định nghĩa):

Hệ quả 3.8.1. *Với hai số nguyên phức khác 0 cho trước thì có ít nhất một ước số chung chia hết cho mọi ước số chung khác của hai số đấy. Các ước số chung như vậy được gọi là các ước số chung lớn nhất của hai số này.*

Từ đây ta cũng có khái niệm *ước chung lớn nhất cho nhiều số* và *các số nguyên phức nguyên tố cùng nhau* . Các số nguyên phức được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu chúng không có ước chung nào khác $\pm 1, \pm i$.

Một định lý rất quan trọng khi nghiên cứu vấn đề về ước số chung lớn nhất, là mở rộng của định lý *Bezout* cho các số nguyên.

Định lý 3.8.3. *Hai số nguyên phức nguyên tố cùng nhau nếu và chỉ nếu tồn tại các số nguyên phức x, y sao cho $ax + by = 1$.*

Chứng minh. Chiều ngược lại là dễ dàng. Ta sẽ chứng minh chiều thuận. Giả sử $(a, b) = 1$. Ta gọi S là tập hợp các số có dạng $az + bt$ trong đó z, t cũng là các số nguyên phức không đồng thời bằng 0. $N(S)$ được kí hiệu là tập hợp các chuẩn của các phần tử trong S. Rõ ràng luôn tồn tại phần tử nhỏ nhất trong $N(S)$. Giả sử phần tử này bằng n. Khi đó tồn tại $\alpha \in S$ sao cho $N(\alpha) = n$.

Do $\alpha \in S$ nên luôn tồn tại z_1, t_1 là các số nguyên phức không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha = az_1 + bt_1$. Ta chứng minh mọi phần tử $s \in S$ đều chia hết cho α. Thật vậy, với $s = az + bt \in S$ ta viết $s = c\alpha + r$ trong đó $N(r) < N(\alpha)$.

Mặt khác $r = a(z - cz_1) + b(t - ct_1)$ nên nếu $r \neq 0$ thì $r \in S$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn α vì $N(r) < N(\alpha)$.

Vậy $r = 0$ hay ta có nếu $s \in S$ thì s chia hết cho α.

Vì $a, b \in S$ do đó a, b đều chia hết cho s. Vì $(a, b) = 1$ nên suy ra $N(s) = 1$. Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $s = 1$. Khi đó sẽ tồn tại $x = z_1; y = z_2$ là các số nguyên phức không đồng thời bằng 0 sao cho $ax + by = 1$. Định lý được chứng minh.

Từ định lý này ta có thể rút ra các hệ quả sau:

Hệ quả 3.8.2. *Với bất kỳ các số nguyên phức a, b, c sao cho $(a, b) = 1$ và $b|ac$ thì $b|c$.*

Hệ quả 3.8.3. *Nếu $(a, b) = 1$ và $(a, c) = 1$ thì $(a, bc) = 1$.*

3.8.3 Số phức nguyên tố và vấn đề phân tích các số nguyên phức

Chúng ta đã biết rằng bất kỳ số nguyên phức z nào không liên kết với 1 cũng có ít nhất 8 ước số là $1, -1, i, -i, z, -z, iz, -iz$. Từ đây người ta định nghĩa một số nguyên phức là *số nguyên phức nguyên tố* nếu nó có đúng 8 ước số phân biệt.

Điều này tương đương với khẳng định một số nguyên phức là số nguyên phức nguyên tố nếu nó có chuẩn lớn hơn 1 và không biểu diễn được thành tích của hai số phức có chuẩn lớn hơn 1. Như vậy các số phức liên kết và liên hợp với một số phức nguyên tố cũng là các số phức nguyên tố.

Như vậy số nguyên phức nguyên tố là mở rộng của khái niệm số nguyên tố trong Z. Vấn đề bây giờ được đặt ra (tương tự như trong Z) là phân tích một số nguyên phức thành tích các số nguyên phức nguyên tố. Dễ thấy rằng các số nguyên phức nguyên tố chỉ có một cách phân tích duy nhất (là chính nó). Vậy thì với các số nguyên phức trong trường hợp tổng quát thì sao. Ta có định lý sau:

Định lý 3.8.4. *Bất kỳ một số nguyên phức nào có chuẩn lớn hơn* 1 *cũng là tích của hữu hạn các số nguyên phức nguyên tố.*

Chứng minh. Ta dùng phản chứng để chứng minh định lý này.

Gọi M là tập hợp các số có chuẩn lớn hơn 1 nhưng không phân tích được thành tích của hữu hạn các số nguyên phức nguyên tố và N là tập hợp các chuẩn của các số phức trong M. Nếu M khác rỗng, suy ra N khác rỗng. Do N là tập các số nguyên dương nên luôn tồn tại phần tử nhỏ nhất. Ta gọi phần tử này là m. Khi đó tồn tại số phức $z \in M$ sao cho $N(z) = m$.

Hiển nhiên z không là số nguyên tố và $N(z) = m > 1$. Do đó theo định nghĩa về số nguyên tố ta suy ra tồn tại các số nguyên phức u, v sao cho $u, v \notin \{1, -1, i, -i, z, -z, iz, -iz\}$ thỏa mãn $z = uv$. Khi đó $N(u)N(v) = N(z) = m$. Do u và v khác tám giá trị nêu trên nên $N(u), N(v) > 1 \Longrightarrow 1 < N(u), N(v) < m$.

Theo cách chọn m ta có $u, v \notin M$. Mà u, v có chuẩn lớn hơn 1 nên chúng phân tích được thành tích hữu hạn các số nguyên phức nguyên tố. Từ đó z cũng phân tích được thành tích hữu hạn các số phức nguyên tố. Mâu thuẫn với cách chọn z. Vậy giả sử của ta là sai hay M phải là tập rỗng. Do vậy ta có điều phải chứng minh.

Các bạn có thể chứng minh được rằng nếu ta quy ước các cách phân tích một số nguyên phức thành các nhân tử nguyên tố là giống nhau nếu tập các chuẩn của nó không thay đổi thì mỗi số nguyên phức có chuẩn lớn hơn 1 đều phân tích được duy nhất thành tích các số nguyên phức nguyên tố.

Định lý 3.8.4 và chú ý ở trên là rất quan trọng. Nó đem lại cho số nguyên phức các tính chất gần gũi với số nguyên trong dạng phân tích thành tích các số phức nguyên tố. Có thể khám phá nhiều tính chất tương tự với những tính chất quen thuộc trong Z. Chẳng hạn:

Định lý 3.8.5. *Cho các số nguyên phức $z_1, z_2, ..., z_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau và có tích là lũy thừa cấp n của một số nguyên phức. Khi đó mỗi số z_i cũng là lũy thừa của một số nguyên phức.*

Lý thuyết về các số nguyên phức còn rất nhiều điều thú vị, những nghiên cứu chi tiết và sâu sắc hơn chúng ta sẽ còn quay trở lại trong một bài viết khác. Bây giờ, với những hiểu biết ban đầu trên đây, chúng ta thử vận dụng để giải một số bài toán tương đối quen thuộc.

3.8.4 Sử dụng số nguyên phức để giải một số bài toán

Bài toán 3.8.1. *Cho a, b, c là các số nguyên dương sao cho $(b, c) = 1$. Biết rằng tồn tại n nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $a^n = b^2 + c^2$.*

i) Chứng minh rằng a là tổng của hai số chính phương.

ii) Biết rằng $n = \dfrac{p+1}{2}$ trong đó p là số nguyên tố lẻ có dạng $4k + 3$ (trong đó k nguyên dương). Chứng minh rằng tích bc chia hết cho p.

LỜI GIẢI. Ta có phân tích $a^n = (b + ci)(b - ci)$. Gọi $d = (b + ic, b - ic)$ suy ra:

$$d|(b + ic) - (b - ic) = 2ic \Longrightarrow N(d)|N(2ic) = 4c^2. \tag{3.20}$$

$$\text{Tương tự} \quad d|(b + ic) + (b - ic) = 2b \Longrightarrow N(d)|4b^2. \tag{3.21}$$

Lại có $N(d)|N(b + ic) = b^2 + c^2$. Chú ý rằng b, c nguyên tố cùng nhau do đó $b^2 + c^2$ lẻ suy ra $N(d)$ lẻ. Vậy $N(d)|b^2$ và $N(d)|c^2$. Cũng do $(b, c) = 1$ và $N(d)$ nguyên không âm nên ta có $N(d) = 1$. Vậy $b + ic, b - ic$ nguyên tố cùng nhau.

Từ tính chất này suy ra tồn tại các số nguyên x, y sao cho $b + ic = t_1(x + iy)^n$ và $b - ic = t_2(x - iy)^n$ trong đó $t_1, t_2 \in \{1, -1, i, -i\}$ và $t_1t_2 = 1$. Hệ quả của công thức trên là $a = x^2 + y^2$ là tổng hai số chính phương. Đây là nội dung cần chứng minh của (i).

Với $n = \dfrac{p+1}{2}$ trong đó p là số nguyên tố dạng $4k + 3$ $(k > 1)$. Khi đó có hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: $(b + ic)^2 = (x + iy)^{p+1}, (b - ic)^2 = (x - iy)^{p+1}$.
Trường hợp 2: $(b + ic)^2 = -(x + iy)^{p+1}, (b - ic)^2 = -(x - iy)^{p+1}$.

Trong cả hai trường hợp sau khi đem hai biểu thức trừ cho nhau và đồng nhất phần thực phần ảo ta đều có $|2bc| = (p + 1)(x^py - y^px)$. Theo định lý nhỏ Fermat ta có bc chia hết cho p. Đây là yêu cầu của (ii). Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 3.8.2. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^3 - 1$ là số chính phương.*

LỜI GIẢI. Giả sử $n^3 - 1 = k^2$. Lý luận như bài toán 3.8.1, từ phân tích $n^3 = (k-i)(k+i)$ ta có $k - i$ và $k + i$ nguyên tố cùng nhau. Do đó tồn tại các số nguyên a, b sao cho $k - i = (a - bi)^3$ và $k + i = (a + bi)^3$. Đồng nhất phần thực và phần ảo ta suy ra $3a^2b - b^3 = -1$. Dễ dàng thấy $a = 0, b = 1$. Do đó giá trị duy nhất của n thỏa mãn là $n = 1$.

Một ứng dụng đặc sắc nữa của số nguyên phức *Gauss* là chứng minh định lý tổng hai bình phương đã được giới thiệu ở phần trước của tài liệu, các bạn hãy tìm lại chứng minh đó.

Bài toán 3.8.3. *Ký hiệu $d_1(n)$ và $d_3(n)$ lần lượt là số các thừa số nguyên tố đồng dư 1 mod 4 và đồng dư 3 mod 4 trong phân tích chính tắc của số tự nhiên n, gọi số cách biểu diễn n dưới dạng tổng hai bình phương, khi đó:*

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } d_1(n) \le d_3(n) \\ 4(d_1(n) - d_3(n)) & \text{nếu } d_1(n) > d_3(n). \end{cases}$$

Ngoài loại số nguyên phức này ra còn có các $G-$ số, là các số có dạng $xJ + yO$ trong đó x, y là số nguyên và J, O là các căn bậc 3 của đơn vị âm $J = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $I = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$. Sử dụng loại số này ta có thể chứng minh định lý *Fermat* trong trường hợp $n = 3$, chính xác hơn là chứng minh định lý đó trên tập các $G-$ số. Chứng minh chi tiết và việc khảo sát các tính chất của các $G-$ số hẹn các bạn một dịp khác thích hợp hơn.

3.9 Phương trình *Carmichael*

Phương trình *Carmichael* là phương trình nghiệm nguyên có dạng $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Phương trình này có vô hạn nghiệm nguyên xác định bởi đẳng thức:

$$d^2(m^2 - n^2 - p^2 + q^2)^2 + d^2(2mn - 2pq)^2 + d^2(2mn + 2pq)^2 = d^2(m^2 + n^2 + p^2 + q^2)^2.$$

Bài toán sau đây cho ta hiểu biết về cấu trúc nghiệm của phương trình này:

Bài toán 3.9.1 (Định lý *Carmichael*). *Bởi vì không có số chính phương nào chia 4 dư 3 nên trong 3 số x, y, z phải có ít nhất 2 số chia chết cho 2, giả sử đó là y và z. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của phương trình Carmichael có dạng:*

$$\begin{cases} y = 2l, z = 2m \\ x = \dfrac{l^2 + m^2 - n^2}{n} \\ t = \dfrac{l^2 + m^2 + n^2}{n}. \end{cases}$$

Trong đó $n | l^2 + m^2$ và $0 < n < \sqrt{l^2 + m^2}$.

LỜI GIẢI. Thật vậy, giả sử $y = 2l, z = 2m$, có thể lấy $t > x$, đặt $u = t - x > 0$ suy ra:

$$\Longrightarrow x^2 + 4l^2 + 4m^2 = (x + u)^2 \;\Longrightarrow u^2 = 4l^2 + 4m^2 - 2xu$$

$$\Longrightarrow u = 2n) \Longrightarrow n^2 = l^2 + m^2 - nx \Longrightarrow x = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{n}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{n} \quad \text{(Điều phải chứng minh.)}$$

Chiều ngược lại là dễ dàng kiểm tra.

Vấn đề của đặt ra là tình hình sẽ như thế nào nếu x, y, z, t không còn quá thoải mái, chính xác hơn, nếu cho các biến đó thêm một ràng buộc thì kết quả sẽ thay đổi như thế nào, chẳng hạn bài toán sau:

Bài toán 3.9.2. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương* $x^2 - (a^2 + b^2) \cdot y^4 = 1$.

Theo chúng tôi được biết bài toán này chưa có câu trả lời trọn vẹn, chúng ta sẽ khảo sát nó trong một trường hợp đặc biệt, khi $a = b = 2$ bài toán đã có lời giải. Nhưng trước hết chúng ta cần điểm lại một số hiểu biết về các phương trình dạng $Pythagore$.

Bài toán 3.9.3 (Phương trình $Pythagore$). *Tất cả các nghiệm nguyên thủy của phương trình nghiệm nguyên dương* $x^2 + y^2 = z^2$ *đều cho bởi công thức* $(x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2)$ *(không tính các hoán vị), trong đó* $(m, n) = 1$ *và* m, n *khác tính chẵn lẻ,* $m > n$.

Bài toán 3.9.4. *Chứng minh rằng trong tập các số nguyên không âm, nếu có đẳng thức* $x^4 + y^4 = z^2$ *thì trong hai số* x, y *có một số bằng* 0.

Chứng minh bài toán 3.9.3 đã quá quen thuộc với các bạn, dựa vào kết quả của bài toán ấy và sử dụng phương pháp xuống thang có thể chứng minh bài toán 3.9.4 không quá khó khăn. Một dạng tương tự của bài toán 3.9.4 là:

Bài toán 3.9.5. *Chứng minh rằng trong tập các số nguyên không âm, nếu có đẳng thức* $x^4 - y^4 = z^2$ *thì* $y = 0$.

Lời giải bài toán này không có liên hệ cụ thể với bài toán trên, mà là hệ quả trực tiếp của một định lý đẹp đẽ sau của $Fermat$:

Bài toán 3.9.6. *Chứng minh rằng* $y = 0$ *nếu* x, y, z, t *là các số nguyên không âm thỏa mãn:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 - y^2 = t^2. \end{cases}$$

LỜI GIẢI. Nếu $y > 0$, giả sử $(x, y) = 1$ và z là nhỏ nhất có thể được. Ta có $2x^2 = z^2 + t^2$ suy ra $\dfrac{z+t}{2} \in Z \Longrightarrow x^2 = \left(\dfrac{z+t}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z-t}{2}\right)^2$. Mà $\left(\dfrac{z+t}{2}, \dfrac{z+t}{2}\right) = 1$. Từ bài toán 3.9.3 suy ra tồn tại các số tự nhiên m, n nguyên tố cùng nhau sao cho:

$$\begin{cases} \dfrac{z-t}{2} = m^2 - n^2 \\ \dfrac{z+t}{2} = 2mn \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \dfrac{z+t}{2} = m^2 - n^2 \\ \dfrac{z-t}{2} = 2mn \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 2y^2 = z^2 - t^2 = 2.4mn(m^2 - n^2) \\ &\Longrightarrow y^2 = 4(m^2 - n^2)mn, y = 2k \\ &\Longrightarrow k^2 = (m^2 - n^2)mn. \end{aligned}$$

Mà $(m, n) = 1, (m^2 - n^2, mn) = 1$ suy ra $m^2 - n^2 = c^2$, $m = a^2, n = b^2$ nhưng như thế $a^2 \pm b^2$ đều là số chính phương. Do $m + n < z^2$, điều này trái với giả thiết về tính cực tiểu của z.

Mẫu thuẫn chứng tỏ $y = 0$.

Các bài toán về phương trình dạng *Pythagore* rất đa dạng và phong phú, trong trường hợp này những kết quả nho nhỏ ở trên lại rất có ích trong việc giải phương trình *Carmichael* ở trường hợp rất đặc biệt sau đây:

Bài toán 3.9.7. *Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 8y^4 = 1$ chỉ có hai nghiệm nguyên không âm là $(x = 1, y = 0)$ và $(x = 3, y = 1)$.*

LỜI GIẢI. Viết phương trình dưới dạng $x^2 = (2y^2)^2 + (2y^2)^2 + 1$. Nếu $x = 1$ thì $y = 0$, xét $x \neq 1$. Theo định lý *Carmichael* (bài toán 3.9.1) suy ra $l = m = y^2$ và $2l^2 = n(n+1)$. Ta xét hai trường họp sau đây.

Nếu $n = 2\alpha^4$ và $n + 1 = \beta^4$ suy ra $\beta^4 - 2\alpha^4 = 1 \Longrightarrow \beta^4 + (\alpha^2)^4 = (\alpha^4 + 1)^2$. Theo bài toán 3.9.4 suy ra $\alpha = 0$ suy ra $n = 0$. Loại.

Nếu $n = \alpha^4$ và $n + 1 = 2\beta^4$ suy ra $\alpha^4 - 2\beta^4 = -1 \Longrightarrow (\beta^2)^4 - \alpha^4 = (\beta^4 - 1)^2$. Theo bài toán 3.9.5 suy ra $\alpha = \beta = 1$ và như thế $n = 1$. Vậy $x = 3, y = 1$.

3.10 Một số bài toán khác

Bài toán 3.10.1. *Giả sử p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng trong $2p - 1$ số nguyên bất kì đều tồn tại p số có tổng là bội số của p.*

LỜI GIẢI. Ký hiệu $S(X) = \sum\limits_{x \in X} x$ và $|X|$ là số phần tử của tập hợp X bất kì. Giả sử phản chứng rằng tồn tại tập hợp S gồm $2p - 1$ số nguyên $a_1, a_2, ..., a_{2p-1}$ nào đó có tính chất tổng của p phần tử bất kì của S đều không phải bội số của p. Như vậy $\forall A \subset S, |A| = p$ thì $S(A) \not\equiv 0 \mod p$ từ đây ta suy ra $(S(A))^{p-1} \equiv 1 \mod p$:

$$\Longrightarrow S = \sum_{|A|=p} (S(A))^{p-1} \equiv \binom{2p-1}{p} \not\equiv 0 \mod p.$$

Để chỉ ra mâu thuẫn ta sẽ chứng minh rằng $S \equiv 0 \mod p$. Thật vậy, biến đổi như sau:

$$(S(A))^{p-1} = (a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_p})^{p-1} = \sum_{\alpha} \frac{(p-1)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_p!}.a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} ... a_{i_p}^{\alpha_p}.$$

Các tổng được lấy trên tất cả các bộ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p), \alpha_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = p - 1$

$$\Longrightarrow S = \sum_{(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p})} \sum_{\alpha} \frac{(p-1)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_p!}.a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} ... a_{i_p}^{\alpha_p} = \sum_{\alpha} \sum_{(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p})} \frac{(p-1)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_p!}.a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} ... a_{i_p}^{\alpha_p}.$$

Ta chứng minh với mỗi bộ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ cố định tổng sau là bội số của p:

$$T = \sum_{(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p})} a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} ... a_{i_p}^{\alpha_p} = \sum_{v} a_{v(1)}^{\alpha_1} a_{v(2)}^{\alpha_2} ... a_{v(p)}^{\alpha_p}.$$

Tổng được lấy trên tất cả các đơn ánh $v : \{1, 2, ..., p\} \to \{1, 2, ..., 2p-1\}$. Gọi $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_m}$ với $m \leq p-1$ là các phần tử có giá trị dương trong các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$. Rõ ràng ta chỉ cần quan tâm tới các giá trị $v(j_1) = v_1, v(j_2) = v_2, ..., v(j_m) = v_m$. Vì có đúng $\binom{2p-1-m}{p-m}$ đơn ánh như thế này nên chúng ta có:

$$T = \binom{2p-1-m}{p-m} \sum_v a_{v_1}^{\alpha_{j_1}} a_{v_2}^{\alpha_{j_2}} ... a_{v_m}^{\alpha_{j_m}}.$$

Mặt khác ta có:

$$\binom{2p-1-m}{p-m} = \frac{(2p-1-m)!}{(p-m)!.(p-1)!}.$$

Biểu thức này trước hết là một số nguyên, hơn nữa vì $1 \leq m \leq p-1$ nên trên tử số ít nhất một nhân tử là bội của p (chính là p) còn dưới mẫu thì không do đó biểu thức này là bội số của p. Vậy ta có T cũng là một bội số của p. Đây là điều ta đang cần chứng minh.

Nếu thay số nguyên tố p bởi một số tự nhiên n bất kì thì kết quả của bài toán vẫn đúng, các bạn có thể chứng minh điều đó theo hai cách. Trong đó một cách sử dụng kết quả vừa chứng minh ở trên, còn cách thứ hai, các bạn hãy thực hiện một phép quy nạp trực tiếp theo ước số nguyên tố lớn nhất của các số đó. Tuy nhiên cách đơn giản và đẹp đẽ nhất có lẽ là cách chứng minh dựa trên bổ đề nhỏ sau:

Bổ đề. Trong n số nguyên bất kỳ đều tồn tại một số số có tổng chia hết cho n.

Chứng minh bổ đề này khá đơn giản, các bạn hãy tự thực hiện (bằng cách sử dụng nguyên lý *Dirichlet*). Công việc của chúng ta là áp dụng bổ đề vào bài toán sau:

Bài toán 3.10.2. *Chứng minh rằng trong $2n-1$ số nguyên bất kỳ đều tồn tại n số có tổng chia hết cho n.*

LỜI GIẢI. Gọi m là số lớn nhất thoả mãn tính chất có m số đồng dư với nhau theo modun n. Nếu $m \geq n$ thì chỉ cần chọn n số đồng dư với nhau modun n, bộ số này có tổng chia hết cho n. Nếu $m \leq 2$ thì tồn tại n số phân biệt theo modun n. Với n lẻ ta chọn n số phân biệt theo modun n, với n chẵn ta chọn $n-1$ số phân biệt modun n và không chia hết cho n.

Trong các trường hợp còn lại ta có thể giả sử m số này đều chia hết cho n, nếu không ta có thể đem tất cả $2n-1$ số trừ đi số dư chung modun n của m số này. Xét $2n-1-m$ số còn lại, do $2n-1-m \geq n$ nên tồn tại k số ($k \leq n$) có tổng chia hết cho n (theo bổ đề). Nếu $k+m \geq n$ thì hiển nhiên chỉ cần chọn k số này và $n-k$ số chia hết cho n. Nếu $k+m < n$ thì $2n-1-k-m \geq n$, ta tiếp tục lập luận như trên và quá trình này rõ ràng phải kết thúc khi ta đã chọn được n số có tổng chia hết cho n.

Bài toán được chứng minh xong.

Bài toán 3.10.3. *Chứng minh rằng với mọi số thực $\delta \in [0,1]$ và với mọi $\varepsilon > 0$ ta có bất đẳng thức:*

$$\left| \frac{\varphi(n)}{n} - \delta \right| < \varepsilon$$

đúng với số tự nhiên n nào đó.

LỜI GIẢI. Ký hiệu p_k là số nguyên tố thứ k. Đặt $a_k = 1 - 1/p_k$. Do $p_k > k$ nên:

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 1.$$

Giả sử rằng $p_1, p_2, ..., p_k$ là tất cả các số nguyên tố không vượt quá n khi đó:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + ...\right) > ln(n)$$

$$\Longrightarrow 0 < a_1 a_2 ... a_k < \frac{1}{ln(n)}$$

$$\Longrightarrow \prod_{k=1}^{+\infty} a_k = 0. \tag{3.22}$$

Với số thực $\delta \in (0,1)$ bất kì lấy $k_0 > \dfrac{1}{1-\delta}$ thì ta có:

$$a_{k_0} = 1 - \frac{1}{p_{k_0}} > 1 - \frac{1}{k_0} > 1 - (1-\delta) = \delta. \tag{3.23}$$

Từ $(3.22), (3.23)$ suy ra tồn tại số nguyên không âm n sao cho:

$$\begin{aligned}
&\lambda = a_{k_0} a_{k_0+1} ... a_{k_0+n} > \delta > a_{k_0} a_{k_0+1} ... a_{k_0+n+1} \\
\Longrightarrow 0 < \lambda - \delta &< a_{k_0} a_{k_0+1} ... a_{k_0+n} - a_{k_0} a_{k_0+1} ... a_{k_0+n+1} \\
&= a_{k_0} a_{k_0+1} ... a_{k_0+n+1} \left(\frac{1}{a_{k_0+n+1}} - 1\right) \\
&< \delta\left(\frac{1}{a_{k_0+n+1}} - 1\right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nếu $k_0 > 1 + \delta/\varepsilon$. Cuối cùng để ý rằng:

$$\lambda = \frac{\varphi(p_{k_0}.p_{k_0+1}...p_{k_0+n})}{p_{k_0}.p_{k_0+1}...p_{k_0+n}}.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài toán này là một tính chất rất kì lạ của phi hàm *Euler*, về hàm số này, bài toán sau cũng đẹp đẽ không kém:

Bài toán 3.10.4. *Ký hiệu $\varphi(n)$ lần lượt là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n và $\pi(n)$ là số các số nguyên tố không vượt quá n. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ ta có:*

$$\varphi(n) \geq \frac{\pi(n)}{2}.$$

Bài toán 3.10.5. *Cho số nguyên N và tập hợp A gồm hữu hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại tập các số nguyên dương B chứa A sao cho:*

$$\prod_{x\in B} x - \sum_{x\in B} x^2 = N.$$

LỜI GIẢI. Ta chứng minh kết quả này bằng hai cách.

Cách 1. Đặt $M = \prod_{x\in A} x$ và $P = \sum_{x\in A} x^2$. Ta sẽ tìm tập hợp C các số nguyên dương phân biệt sao cho:

$$M\prod_{x\in C} x = N + P + \sum_{x\in C} x^2.$$

Trước hết để thử lý luận chọn C gồm m số 1 và k số 2. Khi đó ta có $M.2^k = N + P + 4k$.

Chú ý rằng $\lim\limits_{k\to\infty}(M.2^k - 4k) = +\infty$ nên tồn tại k_0 sao cho $M.2^k - 4k > N + P$ với mọi $k \geq k_0$. Với mỗi $k \geq k_0$, ta chọn số $m = M.2^k - 4k - N - P$. Ta luôn chọn được nghiệm có dạng $(1, 1, 1, ..., 1, 2, 2, ...2)$. Thực hiện quy tắc sinh nghiệm như sau, nếu $(x_1, x_2, .., x_n)$ là nghiệm thì $(x_1, x_2, .., x_{i-1}, Mx_1x_2...x_{i-1}x_{i+1}, ..., x_n - x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ sẽ là nghiệm mới. Sử dụng quy tắc sinh nghiệm này ta có:

$$(1, 1, 1, ..., 1, 2, 2, ..., 2) \longrightarrow (1, 1, 1, ..., 1, 2, 2, ..., 2, M.2^{k-1} - 2)$$
$$\longrightarrow (1, 1, 1, ..., 1, 2, 2, .., 2, 2^{k-2}(M.2^{k-1} - 2) - 2, M.2^{k-1} - 2) \longrightarrow ...$$

Từ đó ta sẽ tạo được nghiệm $(x_1, x_2, .., x_n)$ mà các thành phân của nó là đôi một phân biệt. Bây giờ ta chọn $C = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $B = A \cup C$. Bài toán được chứng minh.

Cách 2. Với tập S bất kì ta ký hiệu $d(S) = \prod\limits_{x\in S} x - \sum\limits_{x\in S} x^2$.

Chọn $S_0 = \{1, 2, ..., m\}$ sao cho $S \subset X$. Ta chọn m đủ lớn sao cho:

$$m! - 1 - 2 - ... - m > N + P.$$

Xét dãy $S_0 = m! - 1$, $x_{n+1} = m!x_1x_2...x_n - 1$ và $S_k = \{1, 2, ..., m, x_1, x_2, ..., x_k\}$. Dễ thấy $d(S_{k+1}) = d(S_k) - 1$ từ đó tồn tại k sao cho $d(S_k) = N + P$. Bài toán lại được chứng minh.

LỜI BÌNH. Lời giải 1 của bài toán trên là minh họa cho phương pháp *gen* trong phép giải phương trình nghiệm nguyên. Phương pháp *gen* là quy tắc xây dựng nghiệm phát sinh từ nghiệm ban đầu nhờ một phép *gen* hóa nào đó. Từ việc tạo được các nghiệm mới đó ta có thể nghiên cứu được tính chất các họ nghiệm dựa vào nghiệm cơ sở. Hai ứng dụng khá cơ bản của phương pháp *gen* là phương trình $Pell$ và phương trình $Markov$ (mà bài toán 3.10.5 đã thể hiện một biến thể của phương trình dạng $Markov$). Nhờ bài toán này ta có cách giải bài toán sau vốn là đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi toán quốc tế năm 2002, trong đó lời giải bài này chỉ là hệ quả bài trên hoặc sử dụng phương pháp trực tiếp như cách 1.

Bài toán 3.10.6. *Chứng minh rằng tồn tại số nguyên m_0 sao cho với mọi số nguyên $m \geq m_0$ luôn tồn tại m số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, ..., a_m$ sao cho N là số chính phương với:*

$$N = \prod_{i=1}^{m} a_i - 4\sum_{i=1} a_i^2.$$

Bài toán 3.10.7. *Cho k số tự nhiên $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq n$ thỏa mãn $[a_i, a_j] > n$ với mọi $1 \leq i \leq j \leq k$. Chứng minh rằng:*

$$(i)\quad \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} < \frac{3}{2} \qquad (ii)\quad \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} < \frac{6}{5}.$$

LỜI GIẢI. Rõ ràng câu (i) là hệ quả của câu (ii), nên ta chỉ chứng minh câu (ii), tuy nhiên nếu đứng độc lập thì câu (i) cũng rất thú vị.

Có thể giả sử rằng $a_k = n$ vì nếu $a_k < n$ thì khi thay n cho a_k thì ta vẫn có các kết quả sau đây.

Đặt $S_n = \{1, 2, ..., n\}$. Với $i = 1, 2, 3$ đặt r_i là các số thuộc vào tập $S_{[n/i]}$ không là bội của bất kỳ số a_j nào. Với $m = 2, 3, .., n+1$ ta xét các tập hợp sau:

$$B_m = \left\{ a_i \middle| \frac{n}{m} < a_i \leq \frac{n}{m-1} \right\}.$$

Ký hiệu b_m là số các phần tử của tập B_m. Với mỗi số thuộc $\left(\frac{n}{m}, \frac{n}{m-1}\right]$ có đúng $m-1$ bội số thuộc vào S_n suy ra B_m có đúng $(m-1)b_m$ bội số thuộc vào S_n

$$\Longrightarrow b_2 + 2b_3 + ... + (n-1)b_n = nr_1. \tag{3.24}$$

Tương tự ta có các đẳng thức

$$b_3 + b_4 + 2b_5 + 2b_6 + 3b_7 + ... = \left[\frac{n}{2}\right] - r_2. \tag{3.25}$$

$$b_4 + b_5 + b_6 + 2b_7 + 2b_8 + 2b_9 + ... = \left[\frac{n}{3}\right] - r_3. \tag{3.26}$$

Từ các đẳng thức $(3.24, 3.25, 3.26)$ ta suy ra

$$\begin{aligned}
S = \sum \frac{1}{a_i} &\leq \frac{1}{n} + \frac{2(b_2-1)}{n} + \frac{3b_3}{n} + ... \\
&\leq -\frac{1}{n} + \frac{2b_2 + 3b_3 + ...}{n} \\
&= -\frac{1}{n} + \frac{2(n-r_1)}{n} - \frac{b_3 + 2b_4 + 3b_5 +,,,}{n} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n} - \frac{2r_1}{n} - \frac{[n/2] - r_2 + [n/3] - r_3}{n} \\
&= 2 - \frac{1}{n} + \frac{r_2 + r_3 - 2r_1}{n} - \frac{[n/2] + [n/3]}{n} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n} - \frac{5}{6} + \frac{1/2 + 1/3}{n} = \frac{7}{6} + \frac{1}{6n} \leq \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng đúng với $n \geq 5$ và thế là đủ để hoàn thành chứng minh.

Thay cho lời kết. Như vậy là các bạn đã trải qua 9 bài viết nho nhỏ và một bài viết sau cùng tổng hợp khoảng 5 bài toán cùng với lời giải chi tiết của nó. Các bài toán nhỏ trên diễn đàn còn rất nhiều và có rất nhiều bài đáng để suy nghĩ, nghiền ngẫm, công việc đó sẽ dành cho các bạn ngay sau khi các bạn có trong tay cuốn tài liệu này. Còn bây giờ, trong phần cuối của tập Số Học này chúng tôi xin dẫn ra một bài viết chuyên đề về các tính chất của tổng các nghịch đảo tự nhiên.

Chương 4

Tổng nghịch đảo

Trần Mạnh Tuấn & Trần Quốc Hoàn

Giới thiệu. *Với mỗi số nguyên dương n tồn tại các số tự nhiên a_n và b_n nguyên tố cùng nhau thoả mãn đẳng thức:*

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Vấn đề đặt ra là khảo sát tính chất của các số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Một cách cụ thể hơn mối quan hệ của các số đó với số nguyên tố p cho trước là như thế nào. Đây là một câu hỏi hay và rất khó! Một trường hợp riêng (quan trọng), đó là với n như thế nào thì a_n chia hết cho p. Theo chúng tôi được biết thì đây là một bài toán chưa có lời giải. Bài viết nhỏ này cũng chỉ thực hiện một vài khảo sát trong một số trường hợp đặc biệt.

Để cho thống nhất, từ bây giờ nếu không có gì đặc biệt chúng ta quy ước p dùng để chỉ một số nguyên tố và với hai phân số tối giản $a/b, c/d$ nếu có $a \equiv c \mod p$ và $b \equiv d \neq 0 \mod p$ thì ta cũng viết $\dfrac{a}{b} \equiv \dfrac{c}{d} \mod p$. Nếu a chia hết cho số nguyên x khác 0 thì ta cũng nói a/b chia hết cho x. Các ký hiệu đồng dư vẫn được sử dụng theo nghĩa mới này.

Chúng ta bắt đầu với một vài kết quả nhỏ và quen thuộc.

Mệnh đề 1. *Chứng minh rằng ta có hai tính chất sau với số nguyên tố $p \geq 5$:*

(i) a_{p-1} *chia hết cho* p^2.

(ii) a_{p^2-p} *và* a_{p^2-1} *chia hết cho* p.

LỜI GIẢI. Sử dụng phép ghép cặp để chứng minh (i) và sử dụng (i) để chứng minh (ii).

(i)

$$\text{Ta có} \quad S(p-1) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{p-j} \right) = p \cdot \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{j(p-j)}. \tag{4.1}$$

Nhận xét rằng với mỗi $j \in \{1, 2, ..., \frac{p-1}{2}\}$ đều tồn tại $x_j \in \left\{1, 2, ..., \frac{p-1}{2}\right\}$ sao cho $(jx_j)^2 \equiv 1 \mod p$ với $1 \leq j \leq p-1$, và khi đó ta có:

$$\{x_1, x_2, ..., x_{\frac{p-1}{2}}\} \equiv \{1, 2, ..., \frac{p-1}{2}\}.$$

Sử dụng nhận xét ta được:

$$\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{j(p-j)} \equiv \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (-x_j^2) = \frac{\frac{1-p}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot p}{6} \equiv 0 \mod p. \tag{4.2}$$

Đồng dư cuối cùng đúng với $p \geq 5$. Kết hợp $(4.1), (4.2)$ suy ra $p^2 | a_{p-1}$. Điều phải chứng minh.

(ii)

$$S(p^2 - p) = \sum_{k=0}^{p-2} \left(\frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + ... + \frac{1}{kp+p-1} \right) + \frac{1}{p} \cdot S(p-1).$$

Một hệ quả của câu (i) là $p | a_{p-1}$ do đó ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + ... + \frac{1}{kp+p-1} \equiv \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \mod p \\ p^2 | S(p-1) \Longrightarrow \frac{1}{p} \cdot S(p-1) \equiv 0 \mod p. \end{cases}$$

Vậy $S(p^2 - p) \equiv 0 \mod p$. Tiếp tục biến đổi:

$$\begin{aligned} S(p^2-1) - S(p^2-p) &= \frac{1}{p^2-p+1} + \frac{1}{p^2-p+2} + ... + \frac{1}{p^2-p+p-1} \\ &\equiv \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$

Mệnh đề 2. *Giả sử k là số nguyên không âm. Chứng minh rằng a_n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p với mọi số tự nhiên $n \in [p^k, 2p^k - 1]$.*

LỜI GIẢI. Trước hết ta phát biểu và chứng minh một nhận xét:

Nhận xét. *Với p là số nguyên tố lẻ và n là số nguyên dương, nếu a_n không chia hết cho p thì $a_{np}, a_{np+1}, ..., a_{np+p-1}$ đều không chia hết cho p.*

Chứng minh. Thật vậy, vẫn bằng cách ghép cặp tương tự như đã sử dụng trong mệnh đề 1 ta có với mọi m nguyên không âm và số nguyên tố lẻ p thì:

$$\frac{1}{mp+1} + \frac{1}{mp+2} + ... + \frac{1}{mp+p-1}$$

chia hết cho p. Do đó với mọi $k = 0, 1, 2, ..., p-1$ ta có thể viết:

$$\frac{a_{np+k}}{b_{np+k}} = \frac{pa}{b} + \frac{a_n}{pb_n} + \frac{c}{d}$$

trong đó a/b và c/d là các phân số tối giản và b, c không chia hết cho p. Từ đẳng thức này ta dễ dàng suy ra nếu a_n không chia hết cho p thì với mọi $k = 0, 1, 2, ..., p-1$ ta cũng có a_{np+k} không chia hết cho p. Nhận xét được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh mệnh đề 2. Do a_1 không chia hết cho p, theo nhận xét suy ra $a_p, a_{p+1}, ..., a_{2p-1}$ đều không chia hết cho p. Tương tự ta cũng có $a_{p^2}, ..., a_{2p^2-1}$ không chia hết cho p. Tiếp tục quá trình này bằng cách sử dụng nhận xét ta thu được $a_{p^k}, ..., a_{2p^k-1}$ đều không chia hết cho p. Đây là điều phải chứng minh.

Sử dụng mệnh đề 2 cùng với bổ đề *Dirichlet* ta có kết quả thú vị sau:

Mệnh đề 3. *Cho trước các số nguyên dương N và T. Chứng minh rằng tồn tại m nguyên dương sao cho với $k = m, m+1, ..., m+T$ ta đều có a_k và N nguyên tố cùng nhau.*

Với số nguyên tố p tuỳ ý, các kết quả mới thu được là rất hạn chế. Việc xét một số trường hợp riêng của p có thể sẽ dễ dàng hơn. Thật vậy, với $p = 2$, $p = 3$ và $p = 5$ bài toán đã được giải quyết trọn vẹn trong định lý dưới đây.

Định lý. *Tử số a_n chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu $n = 2$ hoặc $n = 7$. Và b_n không chia hết cho 5 khi và chỉ khi n nhận một trong các giá trị:*

$$1, 2, 3, 4, 20, 21, 22, 23, 24, 100, 101, 102, 103, 104, 121, 122, 123, 124.$$

LỜI GIẢI. Ta chứng minh lần lượt 2 nội dung được nhắc đến trong định lý.

(i) Ta cần sử dụng một nhận xét sau đây:

Nhận xét. *Nếu a_n chia hết cho 3 thì $a_{[n/3]}$ cũng chia hết cho 3.*

Chứng minh. Thật vậy, đặt $k = [n/3]$, ta có các đẳng thức:

$$\frac{a_{3k}}{b_{3k}} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{3i+1} + \frac{1}{3i+2} \right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3i} = \frac{a_k}{3b_k} + \sum_{i=1}^{k} \frac{6i+3}{(3i+1)(3i+2)}.$$

Lập các đẳng thức tương tự cho các chỉ số $3k+1, 3k+2$ suy ra nhận xét được chứng minh.

Bây giờ chú ý rằng hệ quả của nhận xét này là nếu $a_{[n/3]}$ không chia hết cho 3 thì a_n cũng vậy. Khảo sát các trường hợp riêng ta có $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 11$ do đó chỉ cần quan tâm đến tiếp theo là a_6, a_7, a_8. Nhưng do a_6, a_8 không chia hết cho 3, chỉ có $a_7 = 363$ chia hết cho 3 nên ta chỉ cần quan tâm đến các số tiếp theo là a_{21}, a_{22}, a_{23}. Ta kiểm tra các số này như sau.

Với $n = 21$ hoặc $n = 23$ thì a_n không chia hết cho 3, bởi vì ta có $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_7}{3b_7} + 3 \cdot \frac{c}{d} = \frac{121}{140} + 3 \cdot \frac{c}{d}$ trong đó $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản có mẫu số d không chia hết cho 3.

Với $n = 22$, cũng như trên ta có $\frac{a_{22}}{b_{22}} = \frac{121}{140} + 3 \cdot \frac{c}{d} + \frac{1}{22} = \frac{1401}{1540} + 3 \cdot \frac{c}{d}$ nên a_{22} cũng không chia hết cho 3.

Vậy a_n chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu $n = 2$ hoặc $n = 7$.

(ii)

$$S'(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=i}^{[n/5]} \frac{1}{5i}.$$

Ta quy ước A là dạng các phân số tối giản có mẫu số không chia hết cho 5. B là dạng các phân số tối giản có mẫu số chia hết cho 5, C là dạng các phân số tối giản có cả mẫu số và tử số không chia hết cho 5 và D là dạng các phân số tối giản có tử số không chia hết cho 5. Các đẳng thức mang tính chất tượng trưng như $A + A = 25A$ có nghĩa là tổng hai phân số dạng A là 25 lần của một phân số dạng A nào đó.

Ta có $S(1) = 1, S(2) = \frac{3}{2}, S(3) = \frac{11}{6}$ và $S(4) = \frac{25}{12}$. Chú ý rằng:

$$\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} = (10k+5)\left(\frac{1}{(5k+1)(5k+4)} + \frac{1}{(5k+2)(5k+3)}\right) = 25A.$$

Do đó $S'(n) = 25A$. Với mọi số tự nhiên n chia hết cho 5 hoặc chia 5 dư 4. Ta xét các trường hợp sau đây:

Với $n = 5, 6, .., 19$ thì vì $S([n/5]) \in \{S(1), S(2), S(3)\}$ nên:

$$S(n) = S'(n) + \frac{1}{5} \cdot S\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) = A + \frac{1}{5}C = B.$$

Với $n = 20, 21, 22, 23, 24$ thì ta có $S\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) = S(4) = \frac{25}{12}$

$$\Longrightarrow S(n) = S'(n) + \frac{1}{5}S(4) = S'(n) + \frac{5}{12} = A.$$

Với $n = 25, 26, .., 99$ ta có $S\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) = C$

$$\Longrightarrow S(n) = S'(n) + \frac{1}{5}S\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) + \frac{1}{25}S\left(\left[\frac{n}{25}\right]\right) = A + \frac{1}{5}A + \frac{1}{25}C = B.$$

Với $n = 100, 101, 102, 103, 104$ thì:

$$S(n) = S'(n) + \frac{1}{5}S'(20) + \frac{1}{25}S'(4) = A + 5A + \frac{1}{12} = A.$$

Với $n = 105, 106, ..., 119$ ta có:

$$S(n) = S'(n) + \frac{1}{5}S\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) + \frac{1}{12}.$$

Mà $\frac{1}{5}.S\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) \in \{S'(21), S'(22), S'(23)\}$ và $S'(21) = S'(20) + \frac{1}{21} = 25A + \frac{1}{21} = C$, tương tự $S'(22), S'(23)$ đều là dạng C. Vậy ta có $S(n) = A + \frac{1}{5}C + \frac{1}{12} = B$.

Với $n = 120, 121, 122, 123, 124$ ta có $S(n) = S'(n) + \frac{1}{5}S'(24) + \frac{1}{12} = A$.

Với $n \geq 125$. Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $5^k \geq n$. Khi đó:

$$S(n) = \sum_{5^{k-2}|x} \frac{1}{x} + \sum_{5^{k-2} \text{ không chia hết } x} \frac{1}{x} = \frac{1}{5^{k-2}}S(u) + \frac{1}{5^{k-3}}A.$$

Trong đó $25 \leq u \leq 124$. Kiểm tra với $u = 100, 101, 102, 103, 104, 120, 121, 122, 123, 124$ ta thấy các phân số:

$$\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{12}, \frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{12}. \frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{12}$$

đều có tử sô không chia hết cho 5. Vậy với các giá trị đó của u ta đều có $S'(u) = 5A$. Suy ra:

$$S(u) = S'(u) + \frac{1}{5}S\left(\left[\frac{u}{5}\right]\right) + \frac{1}{12} = 5A + 5A + D = D \Longrightarrow S(n) = \frac{D}{5^{k-2}} + \frac{A}{5^{k-3}} = B.$$

Trong đó phân số dạng D này có tử số không chia hết cho 5.

Vậy các giá trị cần tìm của n là $1, 2, 3, 4, 20, 21, 22, 23, 24, 100, 101, 102, 103, 104, 121, 122, 123$ và 124. Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Chứng minh trên là một chứng minh trọn vẹn, nhưng có lẽ chưa thể hiện được cái cốt lõi của vấn đề. Bằng chứng là các bạn có thể cho rằng chứng minh đó sử dụng quá nhiều kỹ thuật. Theo chúng tôi, định lý sau đây có thể sẽ giúp ích các bạn độc giả nhìn nhận kết quả trên một cách sâu sắc hơn.

Định lý. Giả sử p là một số nguyên tố lẻ thoả mãn hai điều kiện:

(i) $p - 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất trong các số r thoả mãn $p|a_r$

(ii) $\frac{1}{p^2}S(p-1) + S(r)$ có tử số không chia hết cho p với $1 \leq r \leq p - 1$.

Khi đó b_n không chia hết cho p nếu và chỉ nếu:

$$n \in \begin{cases} [1, p-1] \cup [p^2 - p, p^2 - 1] & \text{nếu } p = 3 \\ [1, p-1] \cup [p^2 - p, p^2 - 1] \cup [p^3 - p^2, p^3 - p^2 + p - 1] \cup [p^3 - p, p^3 - 1] & \text{nếu } p \neq 3. \end{cases}$$

Rõ ràng là nếu $p|a_n$ thì b_n không chia hết cho p. Do đó n phải là một trong các số nêu trên, hệ quả là a_n không chia hết cho p nếu $n \geq p^3$. Nhận xét rằng các số nguyên tố $3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29$ đều có tính chất trên, câu hỏi là với trường hợp $p = 11$ thì sao, có điều gì khác biệt. Câu hỏi này xin dành cho bạn đọc suy nghĩ thêm.

Để kết thúc chuyên đề này mời các bạn thưởng thức một bài toán tuyệt đẹp sau đây, đây là một bài toán hay và theo chúng tôi là rất khó. Tuy nhiên bằng cách sử dụng một số kết quả đã được trình bày ở trên, mọi chuyện sẽ vô cùng trong sáng và vô cùng rõ ràng.

Bài toán. *Chứng minh rằng a_n không phải luỹ thừa của một số nguyên tố với vô hạn giá trị tự nhiên của n.*

LỜI GIẢI. **Bổ đề** *$a_n > n + 1$ với mọi $n = 4, 5, 6, ...$*

Chứng minh Gọi k là số tự nhiên thoả mãn $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Bằng phép quy đồng mẫu số của tổng $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ suy ra $2^k|b_n$ và a_n là một số lẻ (điều này nói lên rằng mệnh đề 2 cũng đúng trong trường hợp $p = 2$). Suy ra $b_n \geq 2^k > \frac{n}{2}$. Ta có với mọi $n \geq 4$ thì:

$$a_n = b_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} > 2\frac{n+1}{2} = n + 1.$$

Ta sẽ chứng minh rằng với số nguyên tố lẻ p tuỳ ý trong dãy các số $n = p, p^2 - p, p^2 - 1, p^3 - p, p^3 - 1, ..., p^p - 1$ có ít nhất một số có tính chất a_n không phải luỹ thừa của một số nguyên tố. Giả sử phản chứng. Theo mệnh dề 1 ta có $S(p-1)$ chia hết cho p. Ta dùng quy nạp theo $n \leq p$ để chứng minh rằng $S(p^n - p)$ và $S(p^n - 1)$ chia hết cho p. Thật vậy, theo bổ đề thì $a_{p^n-1} > p^n$ và a_{p^n-1} chia hết cho p (mệnh đề 1), mà a_{p^n-1} là luỹ thừa của một số nguyên tố

$$\Longrightarrow a_{p^2-1} \text{ chia hết cho } p^2. \tag{4.3}$$

Ta có các đẳng thức sau:

$$S(p^{n+1} - 1) = p^{n+1} \cdot \sum_{\substack{1 \leq k \leq p^{n+1}-1 \\ p \text{ không chia hết } k}} \frac{1}{k(p^{n+1} - k)} + \frac{1}{p} S(p^n - 1). \tag{4.4}$$

$$S(p^{n+1} - p) = \sum_{(k,p)=1} \frac{1}{k} + \frac{1}{p} S(p^n - 1). \tag{4.5}$$

Kết hợp các kết quả $(4.3), (4.4), (4.5)$ ta suy ra kết luận quy nạp. Sử dụng vào bài toán ta có:

$$\begin{cases} p^n|S(p^n - 1) \text{ với } n = 1, 2, ... \text{ và } p^n|a_{p^n-p} \text{ với } n = 2, 3, ... \\ S(p^n - 1) - S(p^n - p) + S(p - 1) = p^n \sum\limits_{i=1}^{p-1} \dfrac{1}{p(p^n - i)} \text{ chia hết cho } p^n. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $S(p-1)$ chia hết cho p^n với mọi n. Mà $S(p-1) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} < p$ và $b_{p-1} \leq (p-1)!$ suy ra $a_{p-1} < p! < p^p$ Mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Phần II

Một số chủ đề Tổ Hợp

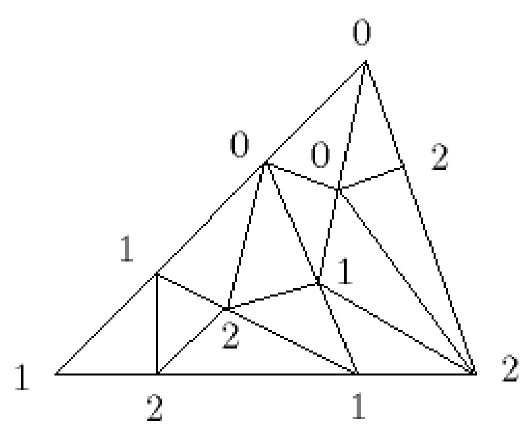
Chương 5

Bổ đề Sperner

Nguyễn Quốc Khánh

Giới thiệu. *Trong Toán Học rất thường khi xuất hiện những kết quả mặc dù có cách phát biểu rất giản dị, nhưng lại tỏ ra rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực sâu sắc. Trong bài viết này, tôi muốn ghi chép lại một số hiểu biết của mình về một kết quả như thế, trong tổ hợp, người ta gọi kết quả này là bổ để Sperner, và ứng dụng quan trọng nhất của nó là tham gia vào chứng minh tổ hợp - giải tích của định lý điểm bất động Brower.*

Bổ đề Sperner. Các đỉnh của một tam giác được đánh số bởi các chữ số $0, 1, 2$. Tam giác đó được chia thành một số tam giác sao cho không có một đỉnh của tam giác nào nằm trên cạnh của tam giác khác. Các đỉnh của tam giác ban đầu vẫn giữ nguyên các số cũ còn các đỉnh mới được đánh số bằng $0, 1, 2$ sao cho mỗi đỉnh nằm trên cạnh của tam giác ban đầu được đánh số bởi một trong các số dùng để đánh số các đỉnh của cạnh đó. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác nhỏ được đánh số bởi $0, 1, 2$.



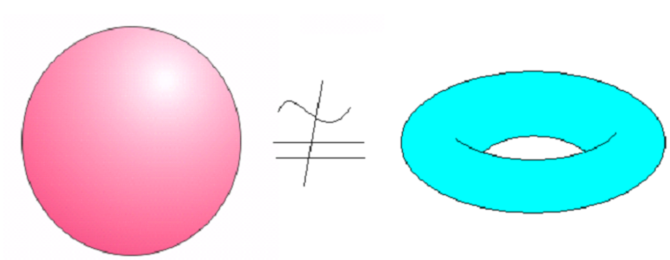
Chứng minh. Xét các đoạn thẳng được phân ra từ cạnh 01, gọi a là số đoạn thẳng dạng 00, b là số đoạn thẳng dạng 01. Đối với mỗi đoạn thẳng xét số các số 0 đứng ở các đầu của nó, và cộng tất cả các số đó ta được $2a + b$. Mặt khác, tất cả các số 0 nằm trong đều được tính hai lần, và thêm một số 0 đứng ở đỉnh của tam giác ban đầu. Do đó số $2a+b$ lẻ, suy ra b là số lẻ.

Bây giờ ta xét đến phép chia tam giác. Giả sử a_1 là tổng số các tam giác dạng 001 và 011, còn b_1 là số các tam giác dạng 012. Đối với mỗi tam giác xét số các cạnh của nó có dạng 01 và cộng tất cả các số đó lại. Tổng cộng ta được $2a_1 + b_1$. Mặc khác tất cả các cạnh nằm trong đều được tính hai lần trong tổng đó, còn tất cả các cạnh biên đều nằm trên cạnh 01 của tam giác ban đầu và số đó là lẻ theo lập luận ở trên. Do đó $2a_1 + b_1$ là số lẻ, suy ra b_1 là số lẻ và đó là điều phải chứng minh.

Bổ đề Sperner rõ ràng là rất đơn giản, và chứng minh cũng rất dễ dàng. Vậy đâu là ý nghĩa sâu sắc của nó. Để chuẩn bị cho việc trình bày chứng minh tổ hợp - giải tích của định lý điểm bất động Brower dựa trên bổ đề Sperner chúng ta cùng làm quen vói một vài khái niệm của tôpô đại cương. Đó là các khái niệm về ánh xạ liên tục và ánh xạ đồng phôi.

Hãy tưởng tượng rằng chúng ta có một quả bóng, bây giờ hãy làm bẹp nó đi. Khi dó có thể nói chúng ta đang dùng một ánh xạ liên tục tác động vào quả bóng. Hãy chú ý rằng qua ánh xạ này thì một đoạn nối hai điểm M, N trên bề mặt quả bóng không hề bị cắt đứt, nó vẫn "liên tục" như lúc đầu tiên. Nhưng nếu các bạn lại lấy một cái kim để chọc thủng quả bóng thì sao, đây vẫn là một ánh xạ, nhưng liệu có liên tục hay không. Câu trả lời thực sự là không (nhưng để chứng minh được điều này thì không hề đơn giản). Vậy là có những ánh xạ không liên tục, chúng ta có thể lấy một ví dụ khác rõ ràng hơn. Các bạn hãy xét một sợi dây, nếu các bạn thắt nút và cuốn vòng nó một cách tuỳ ý thì rõ ràng đây là một ánh xạ liên tục, tuy nhiên nếu bạn lấy kéo để cắt đôi sợi dây ra thì rõ ràng đây là một ánh xạ không liên tục.

Với hai vật thể A và B trong không gian, nếu có một ánh xạ liên tục f có thể biến A thành B thì ta nói A và B đồng phôi với nhau. Chẳng hạn một cái bánh qui hình tròn và một cái bánh qui hình vuông đương nhiên là đồng phôi với nhau. Tất nhiên, có thể nói ngược lại rằng hai vật A, B không đồng phôi với nhau nếu và chỉ nếu không thể dùng một ánh xạ liên tục để biến từ vật này thành vật kia. Những vật thể như thế là rất nhiều, chẳng hạn một hình cầu và một hình cầu khác sau khi đã đục thủng một lỗ là không đồng phôi với nhau:



Khái niệm đồng phôi là nền tảng của tôpô học, có thể hiểu một cách trực quan rằng không gian tôpô là một không gian không quan tâm nhiều đến khái niệm khoảng cách, trong không gian này ta chỉ quan tâm tới dạng của vật thể chứ không quan tâm xem nó dài rộng ra sao, nặng nhẹ thế nào. Trong không gian này thì ánh xạ liên tục là "luật pháp" tối cao. Một tính chất đặc biệt thú vị của các ánh xạ liên tục được phát biểu trong định lý sau đây.

Định lý điểm bất động Brower. Mọi ánh xạ liên tục từ một hình cầu đặc vào chính nó luôn có điểm bất động.

Chúng ta sẽ tìm cách chứng minh định lý này dựa trên bổ đề Sperner, và lưu ý rằng đã có rất nhiều cách chứng minh dành cho định lý điểm bất động này cũng như rất nhiều định lý điểm bất động khác.

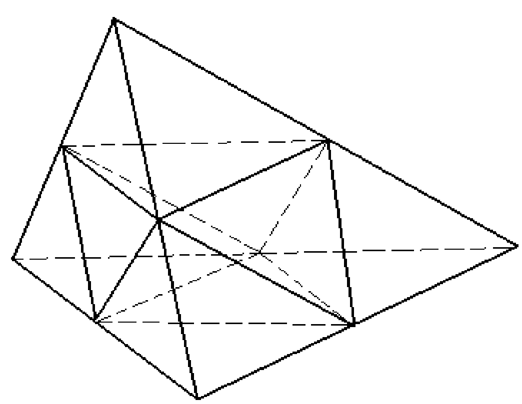
5.1 Bao lồi

Ta nói một hình S trong không gian là lồi nếu và chỉ nếu với mọi $A, B \in S$ thì với mọi $C \in [AB]$ ta có $C \in S$. Một điểm B mà mọi hình cầu tâm B bán kính nhỏ tuỳ ý đều chứa những điểm thuộc S và những điểm không thuộc S gọi là điểm biên của S. S được gọi là tập đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của chính nó.

Xét một tập hợp điểm U trong không gian $U = \{u_0, u_1, ..., u_n\}$. Nếu S là hình lồi nhỏ nhất chứa U thì S được gọi là bao lồi của U và viết $S = co(u_o, u_1, ..., u_n)$ ("co" viết tắt cho chữ "convex" trong tiếng Anh có nghĩa là lồi).

Nếu S là tứ diện $U_oU_1U_2U_3$ và U_0, U_1, U_2, U_3 được gọi là các đỉnh của tứ diện thì bao lồi của $k+1$ đỉnh tứ diện gọi là k diện của tứ diện đó.

Phép phân chia tứ diện S thành các tứ diện con S_i với $i = 1, 2, ..., n$ sao cho hợp của chúng bằng S và hai tứ diện con nếu giao nhau thì phần giao nhau phải là một diện chung của chúng gọi là một phép tứ diện phân. Để cho đơn giản ta hiểu phép tứ diện phân luôn thực hiện theo một cách duy nhất là chia tứ diện thành 8 tứ diện con có thể tích bằng nhau:



Bây giờ đối với mỗi đỉnh V của một tứ diện con gọi $co\{u_a, u_b, ...,\}$ là diện nhỏ nhất chứa V thì v được gán một trong các số $a, b, ...$, phép gán số này được gọi là phép gán số Sperner (dễ thấy các đỉnh U_i của tứ diện được gán đúng chỉ số i). Ta gọi một tứ diện con là tốt nếu các đỉnh của nó được điền bằng đủ các số là $0, 1, 2, 3$. Sử dụng đúng cách thức đã được dùng để chứng minh bổ đề Sperner ở trên, chúng ta dễ dàng suy ra:

Bổ đề Sperner trong không gian. Tồn tại tứ diện tốt trong mọi phép tứ diện phân.

5.2 Bổ đề KKM

Bổ đề KKM (Knaster - Kuratowski - Mazurkiewics - 1929). Cho trước tứ diện $S = U_oU_1U_2U_3$ và các tập đóng F_o, F_1, F_2, F_3 và S thoả mãn điều kiện KKM: với mọi tập con I của tập 4 số nguyên không âm đầu tiên $\{0,1,2,3\}$ ta có $co\{U_i|i \in I\} \subset \cap_{i\in I}F_i$, khi đó:

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi.$$

Trước khi chứng minh bổ đề này chúng ta cùng nhắc lại vài kiến thức giải tích cơ bản. Trước tiên, nhờ nguyên lý $Cantor$ cho các đoạn lồng nhau ta chứng minh được rằng từ một dãy số thực bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ và nhờ tính chất đó ta chứng minh được rằng trong một họ điểm vô hạn trong tứ diện luôn có thể trích ra một họ điểm con hội tụ.

Bây giờ chúng ta chứng minh bổ đề KKM. Thực hiện một phép tứ diện phân S và thực hiện phép gán số như sau: lấy một đỉnh V bất kỳ của tứ diện con, gọi diện con nhỏ nhất của S chứa V là $co\{U_i|i \in I\}$, khi đó theo điều kiện KKM suy ra $V \in \cap_{i\in I}F_i$ và do đó tồn tại m mà $V \in F_m$, ta gán m cho V và viết V_m. Vậy sau khi gán xong thì U_i cũng phải gán số i. Cách gán này thoả mãn điều kiện $Specner$ do đó tồn tại tứ diện con tốt $\Delta^1(V_0^1, ..., V_3^1)$ và $V_i^1 \in F_i$, $i = \overline{0,3}$. Coi Δ^1 đóng vai trò như S lại tiếp tục quá trình phân chia, quá trình này được thực hiện vô hạn lần. Và ta nhận được vô hạn tứ diện con tốt lồng nhau $\Delta_i^m \in F_i$, $i = 0,1,2,3$.

Ta trích từ dãy điểm (V_0^m) ra dãy con $(V_0^{m_i})$ hội tụ đến $V_0 \in F_0$, sau đó lại trích từ dãy $(V_0^{m_i})$ ra dãy con $(V_0^{m_{i,k}})$ hội tụ đến $V_1 \in F_1$. Sau bốn lần trích dãy ta nhận được dãy con $(V_4^{m_j})$ hội tụ đến $V_4 \in F_4$. Và do đó ta nhận được dãy con đơn hình tốt (Δ^{m_j}) của dãy (Δ^m) mà mỗi dãy đỉnh tương ứng của nó đều hội tụ tới một điểm nào đó. Mặt khác, như đã biết thể tích cảu dãy tứ diện này tiến tới 0 và do đó tất cả 4 điểm hội tụ đó đều trùng nhau. Tức là giao của các tập đóng F_i là khác rỗng. Bổ đề được chứng minh.

5.3 Chứng minh định lý điểm bất động Brower

Giả sử $\varphi : T \to T'$ là một ánh xạ đồng phôi, hơn nữa ánh xạ liên tục $f : T' \to T'$ có điểm bất động thì $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : T \to T$ cũng có điểm bất động. Do đó thay vì xét hình cầu ta có thể chứng minh định lý cho một tứ diện đặc. Khi đó với mọi điểm X nằm trong tứ diện S thì tồn tại bộ số x_i không âm mà tổng của chúng bằng 1, hơn nữa $\vec{OX} = \sum_{i=0}^{3} x_i\vec{OX_i}$, khi đó ta viết $X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Bây giờ ta xét ánh xạ liên tục $f : S \to S$, xét $X \in S$, $X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ và $f(X) = Y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$. Ký hiệu F_i là tập hợp những điểm X thuộc tứ diện S mà $x_i \geq y_i$. Dễ thấy họ F_i thoả mãn điều kiện KKM do đó tồn tại $X \in \cap F_i$, tức là $x_i \geq y_i$ với mọi $i = 0,1,2,3$. Nhưng

$$\sum_{i=0}^{3} x_i = 1 = \sum_{i=0}^{3} y_i$$

nên tất cả các đẳng thức đều phải xảy ra, điều đó cũng có nghĩa là $X \equiv Y$, và do đó f có điểm bất động. Định lý đã được chứng minh.

Chương 6

Các đề toán tổ hợp chọn lọc

Bài toán 6.1. *Có bao nhiêu cách đi từ điểm $(0,0)$ đến điểm (p,q) trên mặt phẳng toạ độ nguyên, mỗi bước đi là đi từ điểm (x,y) đến điểm $(x+1,y)$ hoặc $(x,y+1)$ sao cho mỗi con đường đều không cắt đường thẳng $x=y$.*

Bài toán 6.2. *Cho n là số nguyên dương. Tính số cách phân hoạch tập hợp n số nguyên dương đầu tiên $S_n = \{1,2,...,n\}$ thành 3 tập hợp con A,B,C thoả mãn tính chất $|A\cap B| > 0, |B\cap C| > 0, |C\cap A| > 0$ và $|A\cap B\cap C| = 0$.*

Bài toán 6.3. *Cho số nguyên dương $n > 1$. Trong không gian cho hệ trục toạ độ YZ. Ký hiệu T là tập hợp gồm tất cả các điểm $P(z,y,z)$ mà x,y,z là các số nguyên thoả mãn $1 \leq x,y,z \leq n$. Ta tô màu các điểm thuộc T sao cho nếu $A(x_0,y_0,z_0$ được tô thì tất cả các điểm $B(x_1,y_1,z_1)$ mà $x_1 \leq x_0, y_1 \leq y_0, z_1 \leq z_0$ (các đẳng thức không đồng thời xảy ra) đều không được tô màu. Hỏi ta có thể tô màu tối đa bao nhiêu điểm.*

Bài toán 6.4. *Cho tập hợp X có 56 phần tử. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mỗi 15 tập con của X, nếu số phần tử của hợp của mỗi 7 tập trong chúng là không nhỏ hơn n thì tồn tại 3 trong chúng là có giao khác rỗng.*

Bài toán 6.5. *Cho bảng vuông $n.n$, các ô vuông trên bảng được điền các số thực dương sao cho với mỗi hàng và mỗi cột đều có tổng của các số nằm trên nó là 1. Chứng minh rằng tồn tại n ô được điền số mà không cùng nằm trên cùng hàng hay cột.*

HỆ QUẢ. *Cho bảng vuông 2006.2006, có một số ô vuông trên bảng được đáng dấu sao cho mỗi hàng và cột đều có đúng 4 ô được đánh dấu. Chứng minh rằng ta có thể tô các ô được đánh dấu bằng 4 màu sao cho không có 2 ô nào cùng màu nằm trên cùng một hàng hay cột.*

Bài toán 6.6. *Cho số nguyên dương n và X là tập hợp có n^2+1 số nguyên dương sao cho trong mỗi tập con $n+1$ phần tử của X đều có hai phần tử phân biệt x,y thoả mãn $x|y$. Chứng minh rằng có tồn tại một tập con $\{x_1,x_2,...,x_{n+1}\}$ của X có tính chất $x_i|x_{i+1}$ với mọi $1 \leq i \leq n$.*

Bài toán 6.7. *Cho $4n$ điểm trên đường được tô màu xanh đỏ xen kẽ. Biết rằng không có 3 đoạn thẳng nào nối các điểm trong $4n$ điểm đồng quy. Nối $2n$ điểm xanh thành n đoạn thẳng, nối $2n$ điểm đỏ cũng thành n đoạn thẳng. Ta đánh dấu các điểm là giao điểm của một đường thẳng có hai đầu xanh và một đường thẳng có hai đầu đỏ. Hỏi ta đánh dấu ít nhất bao nhiêu điểm.*

Bài toán 6.8. *Có một con ếch tại mỗi đỉnh của 2n giác đều ($n > 1$). Tại một thời điểm tất cả các con ếch nhảy đến các đỉnh kề cùng một lúc (có thể có nhiều hơn một con ếch nhảy đến cùng một đỉnh), chúng ta gọi đó là một cách nhảy. Biết rằng tồn tại một cách nhảy sao cho đường thẳng chứa mỗi cặp 2 đỉnh phân biệt có ếch trên nó sau khi nhảy, không đi qua tâm của đa giác đều. Tìm tất cả các giá trị có thể của n.*

Bài toán 6.9. *Cho tập hợp $S = \{1, 2, ..., n\}$ và $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ là các tập hợp các tập con có 2 phần tử của S thoả mãn điều kiện $|P_i \cap P_j| = 1$ nếu và chỉ nếu $(i, j) \in P$. Chứng minh rằng mỗi phần tử của S thuộc đúng 2 phần tử của P.*

Bài toán 6.10. *Cho n viên sỏi và 2 người A, B chơi một trò chơi như sau. Đầu tiên A lấy k viên sỏi với $1 \leq k \leq n-1$ sau đó B lấy t viên sao cho $1 \leq t \leq k$. Cứ như thế cho đến hết, người nào lấy được viên sỏi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi A có chiến lược luôn thắng hay không.*

Bài toán 6.11. *Một tứ giác đều cạnh 1 bị phủ kín bởi 6 đường tròn bán kính R. Chứng minh rằng $R \geq \sqrt{3}/10$.*

Bài toán 6.12. *Trong một lớp học mỗi bạn nam quen với ít nhất một bạn nữ. Chứng minh rằng có thể chọn một nhóm gồm nhiều hơn một nửa số thành viên của lớp mà mỗi bạn nam quen với một số lẻ bạn nữ trong nhóm.*

Bài toán 6.13. *Trong một câu lạc bộ có 42 thành viên. Biết rằng cứ 31 thành viên bất kỳ thì có một đôi nam nữ quen nhau. Chứng minh rằng từ các thành viên của câu lạc bộ có thể chọn ra 12 đôi nam nữ quen nhau.*

Bài toán 6.14. *Cho $S_n = \{1, 2, ..., n\}$. giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là n tập con khác rỗng của S_n. Đặt $k = [n/2] + 1$. Chứng minh rằng tồn tại k tập $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ trong các tập A_i mà tồn tại hai tập hợp con X của S_n để $|A_{i_j} \cap X|$ là số lẻ với mọi $1 \leq j \leq k$.*

Bài toán 6.15. *Cho bảng ô vuông n.n gồm các số nguyên không âm a_{ij}. Biết rằng với mọi $i, .j$ thì tổng tất cả các số ở hàng i và cột j đều không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{i,j} a_{ij} \geq \frac{n^2}{2}.$$

Bài toán 6.16. *Cho đồ thị lưỡng phân với 2 tập đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ và $B_1, B_2, ..., B_n$. Biết A_i nối với B_i với mọi $1 \leq i \leq n$ và A_i nối với B_j nếu và chỉ nếu A_j nối với B_i. Chứng minh rằng tồn tại tập các điểm:*

$$S = \{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}\}$$

sao cho với mỗi số B_i số cạnh nối B_i với một đỉnh thuộc S là lẻ.

Bài toán 6.17. *Có tồn tại hay không $n > 2$ điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và các tâm đường tròn ngoại tiếp của mọi tam giác có các đỉnh là các điểm đó cũng là một trong n điểm đó.*

Bài toán 6.18. *Cho số nguyên $n > 2$. Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho nếu với n túi, mỗi túi chứa một vài quả cầu, mỗi quả cầu có khối lượng là một luỹ thừa nguyên của 2 (trong mỗi túi khối lượng các quả cầu không nhất thiết phân biệt) và tổng khối lượng của tất cả các quả cầu trong mỗi túi là bằng nhau, thì tồn tại ít nhất m quả cầu có cùng khối lượng trong tất cả các quả cầu đã được chia vào n túi.*

Bài toán 6.19. *Trên bảng ban đầu có n số 1 ($n \geq 2$). Cứ sau mỗi lần ta lấy 2 số tuỳ ý a, b và thay chúng bởi số $\dfrac{a+b}{4}$. Sau $n-1$ lần thì trên bảng còn lại một số duy nhất. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của số đó.*

Bài toán 6.20. *Cho trước số nguyên dương N. Hai người A, B chơi một trò chơi như sau. Bắt đầu từ người A viết số N lên bảng, sau đó mỗi người viết số m thì người sau viết số $m-1$ hoặc $[m/2]$. Ai viết được số 1 trước thì thắng cuộc. Hỏi ai là người thắng cuộc, vì sao?*

Bài toán 6.21. *Trong một cuộc thi hoa hậu, mỗi giám khảo được đề nghị 10 thí sinh vào vòng chung khảo. Một nhóm thí sinh được gọi là chấp nhận được với giám khảo A nếu trong nhóm đó có ít nhất một thí sinh do A đề nghị. Biết rằng cứ 6 giám khảo thì có 2 thí sinh là nhóm chấp nhận được với cả 6. Chứng minh rằng có thể chọn được 10 thí sinh là nhóm chấp nhận được với tất cả các thành viên trong ban giám giảo.*

Bài toán 6.22. *Có 101 thành phố. Biết giữa hai thành phố bất kì thì có 1 đường bay một chiều hoặc không có đường bay nào cả.*

i) Biết rằng mỗi thành phố có 50 đường bay đến, 50 đường bay đi. Chứng minh rằng với 2 thành phố bất kì A và B ta có thể bay từ A đến B mà chỉ phải dừng tại nhiều nhất 1 thành phố C.

ii) Biết rằng mỗi thành phố có 40 đường bay đến, 40 đường bay đi. Chứng minh rằng với thành phố bất kỳ A và B ta có thể bay từ A đến B mà chỉ phải dừng tại nhiều nhất 2 thành phố C_1, C_2.

Bài toán 6.23. *Cho trước số nguyên dương $n \geq 12$ và một tập hợp X có n phần tử. F là một họ gồm các tập con 4 phần tử của X sao cho giao của mỗi cặp tập con phân biệt trong F có nhiều nhất 2 phần tử. Chứng minh rằng có một tập con S của X chứa ít nhất $\sqrt[3]{6n-6}$ phần tử sao cho không có tập con 4 phần tử nào của S nằm trong họ F.*

Bài toán 6.24. *Cho số nguyên dương chẵn n và $A_1, A_2, ..., A_n$ là n tập con của tập $S = \{1, 2, .., n\}$ sao cho $i \in A_i \forall i \in S$ và $i \in A_j$ nếu và chỉ nếu $j \in A_i$ với $i \neq j$. Chứng minh rằng tồn tại $i \neq j$ mà $|A_i \cap A_j|$ là số chẵn.*

Bài toán 6.25. *Trong một căn phòng có 2005 cái hộp, mỗi hộp chứa một hoặc vài loại trái cây là táo chuối và nho. Dĩ nhiên số trái cây là nguyên. Chứng minh rằng có thể tìm được 669 hộp sao cho toàn bộ chúng chứa ít nhất 1/3 của tất cả số táo và ít nhất 1/3 tất cả số chuối. Liệu có phải luôn luôn tìm được 669 hộp sao cho toàn bộ chúng chứa ít nhất 1/3 tất cả số táo, ít nhất 1/3 tất cả số chuối và ít nhất 1/3 tất cả số nho.*

Bài toán 6.26. *Ta gọi bộ số $x = (x_1.x_2, ..., x_n)$ là một vecto trong không gian n chiều. Với hai vecto trong không gian n chiều là $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ta ký hiệu $xy = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ là tích vô hướng của 2 vecto x, y. Giả sử rằng $f(n)$ là số lớn nhất mà tồn tại $f(n)$ vecto khác 0 mà tích vô hướng của 2 vecto bất kì đều không dương. Chứng minh rằng $f(n) \leq n$.*

Bài toán 6.27. *Cho tập hợp A có n phần tử và n tập con nhiều hơn 1 phần tử của nó là $A_1, A_2, ..., A_n$. Giả sử rằng với mọi tập con $2p$ phần tử $A' \in A$ có duy nhất một tập con A_i của A'. Chứng minh rằng với 2 tập bất kì trong n tập ban đầu có chung duy nhất một phần tử.*

Bài toán 6.28. *Cho n là một số nguyên dương và tập hợp các bộ số sau:*

$$S_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in [0,1], \forall i = \overline{1,n}\}.$$

Với hai phần tử $a = (a_1, a_2, ..., a_{2^n}), b = (b_1, b_2, ..., b_{2^n}) \in S_n$. Định nghĩa khoảng cách $d(a,b) = \sum_{i=1}^{2^n} |a_i - b_i|$. Chúng ta gọi tập hợp con $A \in S_n$ là tốt nếu $d(a,b) \geq 2^{n-1}$ thoả mãn với mọi cặp phần tử phân biệt a, b của A. Hỏi một tập con tốt của S_n có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử.

Bài toán 6.29. *Giả sử tập hợp $A \in \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in R, \forall i = \overline{1,n}\}$. Định nghĩa hàm khoảng cách như sau: với mỗi $a = (a_1, a_2, ..., a_{2^n}), b = (b_1, b_2, ..., b_{2^n}) \in A$ đặt:*

$$\gamma(a,b) = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, ..., |a_n - b_n|).$$

Xét tập hợp $D(A) = \{\gamma(a,b) | a, b \in A\}$. Chứng minh rằng $|D(A)| \geq |A|$.

Bài toán 6.30. *Cho một tập hợp gồm k dãy nhị phân đôi một khác nhau có độ dài lần lượt là $n_1, n_2, ..., n_k$. Giả sử rằng không tồn tại dãy nhị phân $0, 1$ nào mà ta có thể biểu diễn bằng cách đặt liên tiếp các số $n_1, n_2, ..., n_k$ (không nhất thiết khác nhau) bằng hai cách khác nhau. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + ... + \frac{1}{2^{n_k}} \leq 1.$$

Bài toán 6.31. *Cho bảng vuông $n.n$ với $n > 1$. Hãy tìm tất cả các cách tô màu bằng hai màu đen trắng sao cho không có hai ô đen nào kề nhau và bất kỳ ô trắng nào cũng kề với ít nhất hai ô đen.*

Bài toán 6.32. *Chứng minh rằng không thể có nhiều hơn 4096 cây nhị phân độ dài 24 sao cho 2 cây bất kỳ trong chúng có ít nhất 8 vị trí khác nhau.*

Bài toán 6.33. *Trong một buổi dạ tiệc có $2n$ người gồm nam và nữ. Họ ngồi trên một cái bàn tròn. Hãy tìm tất cả n sao cho với mọi cách ngồi ta luôn có thể chia họ thành n cặp nam nữ mà hai người cùng cặp không ngồi cạnh nhau.*

Bài toán 6.34. *Cho tập hợp hữu hạn M gồm ít nhất hai số thực dương khác nhau. Biết rằng với bất kỳ $a \in M$ tồn tại các số $b, c \in M$ (a, b, c không nhất thiết phân biệt) sao cho $a = 1 + \frac{b}{c}$. Chứng minh rằng tồn tại hai số $x, y \in M$ $(x \neq y)$ sao cho $x + y > 4$.*

Bài toán 6.35. *Cho số nguyên dương $n > 2$. Hãy tìm số các số nguyên a thoả mãn điều kiện tồn tại song ánh $f : \{1, 2, .., n\} \to \{1, 2, .., n\}$ mà $|f(i) - i| = a \ \forall i = \overline{1.n}$.*

Bài toán 6.36. *Xét 2000 đường tròn bán kính 1 trên mặt phẳng sao cho không có hai đường tròn nào tiếp xúc nhau và mỗi đường tròn cắt ít nhất 2 đường tròn khác. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của số giao điểm của các đường tròn này.*

Bài toán 6.37. *Cho các số nguyên dương* n, k *thoả mãn* $n = 2k - 1$ *và* $k \geq 6$. *Giả sử* $T = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in [0,1], \forall i = \overline{1,n}\}$. *Định nghĩa hàm khoảng cách* $d(x,y)$ *là số các chỉ số* j *sao cho* $x_j \neq y_i$. *Giả sử tồn tại các tập con* S *của* T *với* 2^k *phần tử thoả mãn với mỗi phần tử* $x \in T$ *tồn tại duy nhất phần tử* $y \in S$ *sao cho* $d(x,y) \leq 3$. *Chứng minh rằng* $n = 23$.

Bài toán 6.38. *Cho các số nguyên dương* n, k. *Trong mặt phẳng* n *đường tròn được bố trí sao cho hai đường tròn tuỳ ý cắt nhau tại 2 điểm phân biệt và không có ba đường tròn nào cùng đi qua một điểm. Các giao điểm được tô bởi 1 trong* n *màu, mỗi màu được dùng ít nhất một lần, trên mỗi đường tròn có đúng* k *màu. Tính* k, n *để việc tô màu có thể thực hiện được.*

Bài toán 6.39. *Với mỗi cặp số khác nhau* (x,y) *của tập hợp hữu hạn phần tử* X *ta gán cho nó một số là* $f(x,y)$ *bằng 0 hoặc 1 sao cho* $f(x,y) \neq f(y,x)$ $\forall x \neq y$. *Chứng minh rằng có đúng một trong các tính chất sau là đạt được:*

i) X *là hợp của 2 tập rời nhau khác rỗng* U, V *sao cho* $f(u,v) = 1$ $\forall u \in U, v \in V$.

ii) Các phần tử của X *có thể gán cho* $x_1, x_2, ..., x_n$ *thoả mãn* $f(x_1,x_2) = f(x_2,x_3) = ... = f(x_n,x_1)$.

Bài toán 6.40. *Giả sử rằng trên đường tròn đã có* n *ô* $(n \geq 3)$. *Mỗi ô đã được viết một trong hai ký hiệu* $0, 1$. *Một phép toán thực hiện theo luật sau. Chọn một ô* C *nào đó có ký hiệu 1, biến đổi nó thỳanh 0 và biến đổi các ký hiệu* x, y *trong hai ô kề với ô* C *thành* $1 - x, 1 - y$. *Trạng thái ban đầu có một ô mang ký hiệu 1 còn các ô khác mang ký hiệu 0. tìm các giá trị* n *msao cho sau một số hữu hạn bước thực hiện phép toán trên ta có thể đưa các ký hiệu trên các ô về toàn là 0.*

Bài toán 6.41. *Từ được định nghĩa là một số có 10 chữ số chỉ gồm các số* $0, 1$. *Một phép biến đổi một từ là chọn một số các chữ số liên tiếp trong từ sao cho tổng của chúng là một số chẵn rồi dảo ngược các số đó. Hai từ được gọi là đồng nghĩa nếu sau một số làn dùng phép biến đổi từ này có thể biến thành từ kia. Tìm số lớn nhất các từ đôi một không đồng nghĩa.*

Bài toán 6.42. *Cho bảng buông* $n.n$. *Trên mỗi ô vuông con của bảng có ghi duy nhất một số nguyên dương sao cho hiệu của hai số ghi ở hai ô kề nhau là 1 hoặc* -1. *Chứng minh rằng ta có thể tìm được một số nguyên dương* k *mà tất cả các cột chứa* k *hoặc tất cả các hàng chứa* k.

Bài toán 6.43. *Cho bảng vuông* $2n.2n$ *với* n *là một số nguyên,* $n \geq 2$. *Ta điền* $2n^2$ *số tự nhiên từ 1 tới* $2n^2$ *vào bảng, mỗi số lặp lại 2 lần. Chứng minh rằng tồn tại một cách chọn* $2n^2$ *số tự nhiên từ 1 tới* $2n^2$, *mỗi số một lần sao cho trên mỗi hàng và mỗi cột luôn có ít nhất một số được chọn.*

Bài toán 6.44. *Viết* n *số tự nhiên trên một đường tròn. Tìm* n *sao cho với mọi dãy gồm* n *số tự nhiên ta luôn tìm được hai số cạnh nhau sao cho sau khi xoá chúng đi các số còn lại có thể chia thành hai tập hợp có tổng các phần tử bằng nhau.*

Bài toán 6.45. *Giả sử* n *là một số nguyên dương,* $n > 1$. *Giả sử rằng cho* $2n$ *điểm trong mặt phẳng, không có ba điểm nào thẳng hàng,* n *điểm trong chúng được tô màu xanh,* n *điểm còn lại được tô màu đỏ. Một đường thẳng trong mặt phẳng được gọi là tốt nếu nó đi qua một điểm xanh và một điểm đỏ của mỗi nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng này số điểm xanh trên đó bằng số điểm đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai đường thẳng tốt.*

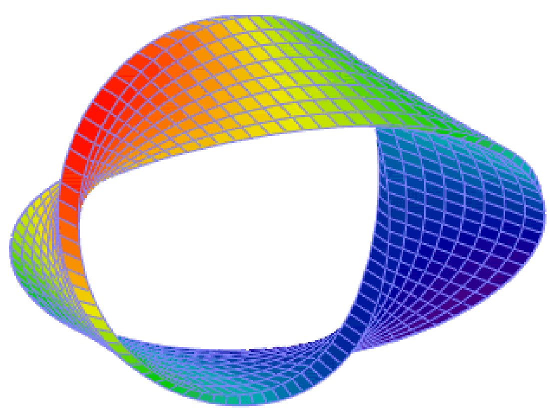
Bài toán 6.46. *Cho bảng vuông* 1983.1984 *tô màu như bàn cờ vua. Trên mỗi ô trắng ta ghi số* 1 *hoặc* -1. *Tên mỗi ô đen ta ghi tích của các ô trắng kề với nó. Biết tất cả các các ô đen đều ghi số* 1. *Chứng minh rằng tất cả các số của bảng dều là số* 1.

Bài toán 6.47. *Người ta điền số vào* 441 *ô vuông của bảng vuông* 21.21 *sao cho tại mỗi hàng và mỗi cột có không quá* 6 *giá trị khác nhau được điền vào. Chứng minh rằng có một số xuất hiện ở ít nhất* 3 *hàng và ít nhất* 3 *cột của bảng vuông này.*

Bài toán 6.48. *Cho họ các đường tròn trong mặt phẳng có phần trong rời nhau từng cặp. Mỗi đường tròn tiếp xúc với ít nhất* 6 *đường tròn khác của họ. Chứng minh rằng họ này có vô hạn phần tử.*

Bài toán 6.49. *Giả sử* N *là một số nguyên dương, hai người chơi* A, B *lần lượt viết các số* $1, 2, .., N$ *lên bảng.* A *viết số* 1 *ở lượt đầu tiên. Từ lượt thứ* 2 *nếu một người viết số* n *thì người tiếp theo viết số* $n+1$ *hoặc số* $2n$. *Ai viết số* N *là người thắng. Ta nói* N *là kiểu* A *hay kiểu* B *tuỳ theo* A *hay* B *có chiến thuật thắng. Xác định kiểu của* 2004 *và tìm* N *nhỏ nhất lớn hơn* 2004 *khác kiểu với* 2004.

Bài toán 6.50. *Cho tập hợp* n *phần tử phân biệt* A. *Giả sử rằng các tập hợp con* $U_1, U_2, ..., U_m$ *của* A *thoả mãn tồn tại số nguyên* k *sao cho với mọi cặp* (i, j) *ta có* $|U_i \cap U_j| = k$. *Chứng minh rằng* $m \leq n$.

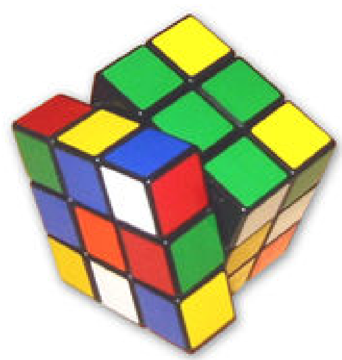


Chương 7

Một số chủ đề tổ hợp chọn lọc

7.1 Bài toán Rubik lục lăng

Giới thiệu. Toán học cũng giống như một "trò chơi", bởi vì nó truyền cho những người làm toán một khát vọng chinh phục và chiến thắng. Ngược lại để có thể chơi giỏi một trò chơi nào đó, cần phải có những suy luận toán học logic và hợp lý dẫn đường. Rubik là một trò chơi "trí tuệ". Hẳn các bạn đều đã từng một lần trăn trở bởi các khối màu của một chiếc rubik lục lăng (6 mặt), và hẳn bạn đã từng trầm trồ khi được một ai đó "biểu diễn" với món đồ chơi nho nhỏ này. Làm sao họ có thể xoay, xoay và xoay ..... để rồi cuối cùng tất cả các khối màu hỗn độn trở về đúng vị trí của nó. Thực ra để có thể thực hiện được điều đó bạn chỉ cần nắm được khoảng 7 kỹ thuật cơ bản.

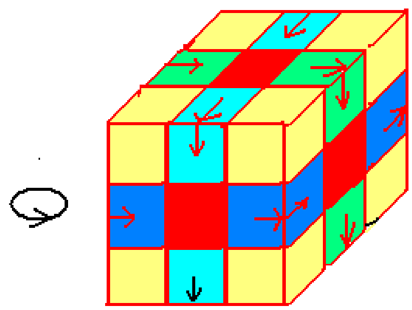


Nhiều người lại cho rằng bởi vì việc quay rubik có thể quy về 7 thủ thuật đơn giản đó, nên nó đã không còn gì thú vị. Sự thực là những người đó chưa hiểu nhiều lắm về rubik. Vấn đề về các rubik là rất phong phú. Chẳng hạn đó là làm thế nào để có thể tìm ra được các thủ thuật có ích, và tại sao lại tồn tại những thủ thuật như vậy. Đây là một câu hỏi khó, vì rằng mối liên hệ giữa các mặt của rubik là rất "vướng víu" và không dễ để có thể tìm được mô hình toán học tốt cho bài toán này. Tuy nhiên, vấn đề khó và thú vị đó không phải mục đích của chúng tôi.

Trong bài viết nhỏ này chúng tôi muốn đề cập đến một kết quả tưởng chừng hiển nhiên, nhưng đã là trăn trở của rất nhiều rubiker sành sỏi. Vấn đề của chúng ta là nếu có một ai đó tình cờ lắp ngược đúng một khối của rubik thì liệu có thể xoay về trạng thái ban đầu hay không. Chúng ta cần phân biệt hai trường hợp tương ứng với hai loại vị trí của một khối, ở cạnh và ở đỉnh. Do đó cần phải giải quyết hai bài toán tương đối khác nhau.

Bài toán 7.1.1. *Chứng minh rằng không thể lật ngược một khối ở cạnh của rubik mà các khối khác vẫn ở đúng vị trí ban đầu của nó (vị trí tương đối so với các khối khác).*

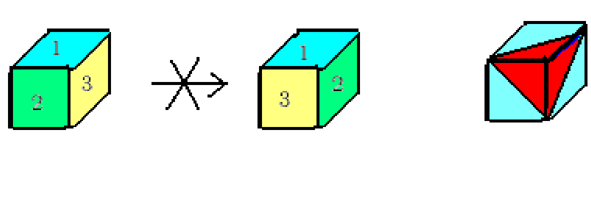
LỜI GIẢI. Để giải quyết bài toán này ta cần tìm được một bất biến đối với phép quay hợp lệ. Chúng ta tiến hành đánh dấu các mặt của các khối trên cạnh bằng các mũi tên như sau:



Nghĩa là ở thời điểm đầu tiên chúng ta vẽ các mũi tên theo ba vòng "bện" xung quanh rubik. Khi đó trên mỗi khối ở cạnh thì hai mũi tên trên hai mặt của khối đó sẽ tạo thành một trong hai hướng. Sau khi xoay, nếu hướng của một khối ở vị trí nào đó giống với hướng của khối ô ở vị trí đó lúc đầu tiên thì ta nói đó là một khối đúng, và gọi là khối sai trong trường hợp ngược lại.

Rõ ràng là sau mỗi lần xoay thì hiệu giữa số ô đúng và số ô sai giữ nguyên tính chẵn lẻ, điều này suy ra từ sự kiện là một khối sai sau khi xoay đi sẽ thành khối đúng. Rõ ràng nếu tại một thời điểm nào đó chỉ có một khối sai thì hiệu số đó là một số lẻ, trong khi đó lúc đầu tiên (chưa xoay) hiệu này là chẵn. Vậy không thể xoay lại được cho tất cả 6 mặt đều đúng.

Một kết quả tương tự mà chúng ta quan tâm đó là nếu thay khối ở cạnh bởi khối ở đỉnh thì mọi chuyện sẽ thế nào. Một kết quả có thể đạt được ngay đó là khối ở đỉnh nếu có "xoay" đi được thì cũng không thể quá thoải mái, hình vẽ minh hoạ dưới đây nói lên điều đó:



Tuy nhiên bài toán sau đây mới thực sự là khó và có lẽ vẫn chưa có lời giải (!?).

Bài toán 7.1.2 (Open Question). *Chứng minh rằng không thể xoay một khối ở đỉnh của rubik mà các khối khác vẫn đúng như ban đầu (vị trí tương đối so với các khối khác).*

7.2 Nguyên lý bất biến và nửa bất biến

Giới thiệu. Bất biến và nửa bất biến là một công cụ quan trọng và có hiệu quả cao trong rất nhiều các bài toán tổ hợp. Xét lớp bài toán sau: cho A, B là hai tập hợp và f là các phép toán. Bắt đầu từ A bằng các tác động f lên các phần tử của A ta thu được $f(f(A)) = f_2(A)$. Tiếp tục ta thu được $f_3(A), f_4(A), \ldots$. Vậy bài toán đặt ra ở đây là gì? Đó là có tồn tại hay không một số nguyên dương k mà $f_k(A) = B$ và nếu tồn tại thì liệu có chỉ ra được nó hay không? Rõ ràng đây là một câu hỏi hay và khó. Có rất nhiều bài toán mặc dù cách phát biểu khác xa như trên nhưng nó lại thuộc lớp bài toán trên.

7.2.1 Bất biến

Trong mục này chúng ta sẽ xét đến lớp bài toán không tồn tại k tức là không bao giờ ta nhận được tập B từ tập A thông qua f và một trong những phương pháp đó là xây dựng một đặc trưng $\psi(X)$ mà nó không thay đổi trong quá trình thực hiện phép toán f và có $\psi(A) \neq \psi(B)$. Đặc trưng $\psi(X)$ gọi là một bất biến. Chúng ta hãy cùng xét mấy ví dụ sau đây:

Ví dụ 7.2.1. *Trên bảng số cho 10 số 1 và 11 số -1, mỗi lần cho phép lấy ra 2 số và thay vào đó là số 1 nếu 2 số lấy ra bằng nhau và -1 nếu khác nhau. Hỏi sau 20 lần thì số còn lại là số 1 hay không?*

LỜI GIẢI. Trong bài toán này dễ thấy tập A là tập gồm 10 số 1 và 11 số -1, B là tập gồm 1 số 1 và phép toán là cho phép lấy ra 2 phần tử và thay bằng tích của chúng. Do f thay 2 phần tử bởi tích của chúng nên ta dễ dàng thấy một bất biến là $\psi(X) = \prod\limits_{x \in X} x$. Mà ta có $\psi(A) = -1 \neq 1 = \psi(B)$ do đó dẫn tới kết luận của bài toán.

Ví dụ 7.2.2. *Cho dãy số $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$. Với $n \geq 0$ thì x_{n+6} là chữ số tận cùng của số $x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + x_{n+4} + x_{n+5}$. Hỏi có tồn tại k hay không mà $x_k = 0, x_{k+1} = 1, x_{k+2} = 0, x_{k+3} = 1, x_{k+4} = 0, x_{k+5} = 1$.*

LỜI GIẢI. Dễ thấy là A là bộ số $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_5)$; $B = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$ và:

$$f_k(A) = (x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}, x_{k+5}).$$

Với phép toán f xác định:

$$x_{k+6} \equiv x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} + x_{k+4} + x_{k+5} \pmod{10}.$$

Bây giờ ta tìm đặc trưng ψ. Với $X = (c_1, c_2, \ldots, c_6)$ ta xét từ dạng đơn giản nhất là hàm tuyến tính:

$$\psi(X) = t_1c_1 + t_2c_2 + t_3c_3 + t_4c_4 + t_5c_5 + t_6c_6 \pmod{10}.$$

Ta có:

$$\psi(f_{k+1}(A)) \equiv t_1x_{k+1} + t_2x_{k+2} + t_3x_{k+3} + t_4x_{k+4} + t_5x_{k+5} + t_6x_{k+6} \pmod{10}$$

$$\equiv t_6x_k + (t_6 + t_1)x_{k+1} + (t_6 + t_2)x_{k+2} + (t_6 + t_3)x_{k+3} + (t_6 + t_4)x_{k+4} + (t_6 + t_5)x_{k+5} \pmod{10}.$$

Như vậy là ta cần có $t_6 \equiv t_1 \pmod{10}, t_6 + t_1 \equiv t_2 \pmod{10}, \ldots, t_6 + t_5 \equiv t_6 \pmod{10}$. Nên có thể dễ dàng nhận ra $t_1 = 2, t_2 = 4, \ldots, t_6 = 12$ thỏa mãn. Hay:

$$\psi(X) = 2c_1 + 4c_2 + 6c_3 + 8c_4 + 10c_5 + 12c_6 \pmod{10}.$$

Vậy luôn có $\psi(f_k(A)) = \psi(A) = 8$. Nhưng $\psi(B) = 2 \neq \psi(A)$ do đó ta không thể có B nghĩa là không tồn tại k. Bài toán được chứng minh.

Qua ví dụ trên ta có thể thấy đối với các phần tử là các số thì ta thường tìm những hàm tuyến tính, đa thức, ...

Ví dụ 7.2.3. *Trên bảng ô vuông vô hạn, tại ô $(1,1)$ có một viên bi. Cho phép bỏ bi theo quy tắc sau: Mỗi lần lấy chọn ô (i,j) mà các ô $(i+1,j)$ và $(i,j+1)$ đều không có bi và lấy bi ở ô (i,j) ra khỏi bảng và đặt vào các ô $(i+1,j)$ và $(i,j+1)$ mỗi ô một viên. Hỏi bằng cách đó ta có thể làm cho các ô $(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1)$ đều không có bi hay không?*

LỜI GIẢI. Đối với bài toán này ta quan tâm tới các ô chứa bi. Ta có mỗi trạng thái k của các ô chứa bị trên bảng cho ta một tập hợp $X_k = \{(i,j) |$ ô (i,j) có bi$\}$ với $X_0 = \{(1,1)\}$. Ta xét hàm $\psi(X) = \sum\limits_{(i,j)\in X} s(i,j)$.

Ta tìm s sao cho ψ là bất biến hay ta cần $\psi(X_{k+1}) = \psi(X_k)$ với mỗi k. Rõ ràng là ta có trạng thái $k+1$ nhận được từ trạng thái k qua việc bỏ đi bi ở ô (i,j) và thay vào đó là hai ô $(i+1,j)$ và $(i,j+1)$ nên ta có $\psi(X_{k+1}) - \psi(X_k) = s(i+1,j) + s(i,j+1) - s(i,j)$. Do quan hệ bình đẳng giữa $s(i+1,j)$ và $s(i,j+1)$ nên ta chọn s sao cho $s(i+1,j) = s(i,j+1)$ và đồng thời $s(i,j) = 2s(i+1,j)$ do đó ta nghĩ ngay đến $s(i,j) = \frac{1}{2^{i+j}}$.

Như vậy ta luôn có $\psi(X) = \sum\limits_{(i,j)\in X} \frac{1}{2^{i+j}}$ và với mọi k thì $\psi(X_k) = \psi(X_0) = \frac{1}{4}$.

Bây giờ giả sử ta đã làm cho các ô $(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1)$ đều không có bi và ta thu được tập B gồm các ô không có bi. Mặt khác với cách bỏ bi như trên thì dễ thấy tại mỗi thời điểm thì trên hàng $\{(1,4),(1,5),\ldots\}$ có đúng một ô có bi. Tương tự cho cột $\{(4,1),(5,1),\ldots\}$ cũng có một ô có bi. Do đó ta có tại thời điểm đó chỉ có hữu hạn ô có bi nên:

$$\psi(B) < \frac{1}{2^{1+4}} + \frac{1}{2^{4+1}} + \sum_{i,j\geq 2|i+j\geq 5} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{4} = \psi(X_0).$$

Nên ta không thể làm được. Bài toán được chứng minh.

Những đại lượng bất biến này đã cung cấp cho chúng ta một phương hướng quan trọng để chứng minh không thể biến đổi từ đối tượng này thành một đối tượng khác. Việc phát hiện những đại lượng bất biến này dường như không có một quy tắc nào cả do đó tốt hơn hết ta nên quan sát hết giả thiết, phân tích nó, dựa trên những đối tượng mà nó hướng đến và hãy cố gắng từ những biểu thức đơn giản nhất rồi đến phức tạp dần.

Bằng cách sử dụng đại lượng bất biến các bạn hãy hoàn thành các bài tập sau:

Bài toán 7.2.1. *Trên bảng có ghi một số số 0, một số số 1, một số số 2. Cho phép thực hiên quy tắc sau: mỗi lần lấy ra hai số khác nhau và thay vào đó là số còn lại. Chứng minh rằng nếu sau một số lần thực hiện quy tắc trên mà trên bảng còn lại một số duy nhất thì số đó không phụ thuộc vào quá trình xóa số.*

Bài toán 7.2.2. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là một hoán vị của $(1, 2, \ldots, n)$. Cho phép thực hiện quy tắc: mỗi lần lấy hai số hạng nằm liên tiếp nhau và đổi chỗ của chúng cho nhau. Hỏi sau một số lẻ lần đổi chỗ như trên thì ta có thu được hoán vị ban đầu hay không?*

Bài toán 7.2.3. *Cho bảng 11×12. Tô màu các ô của bảng theo quy tắc sau: mỗi lần tô 6 hoặc 7 ô chưa có màu nằm liên tiếp nhau trên cùng một hàng hoặc một côt. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu hết tất cả các ô vuông sau 19 lần tô hay không ? Câu trả lời là thế nào với 20 lần tô.*

Bài toán 7.2.4. *Cho lục giác đều. Chia mỗi cạnh của lục giác đều thành 1000 phần bằng nhau. Nối các điểm chia với nhau bởi các đoạn thẳng song song với cạnh của lục giác. Mỗi giao điểm của các đoạn nói trên gọi là nút. Tô màu các nút theo quy tắc sau: Mỗi lần tô 3 nút chưa có màu và là 3 đỉnh của một tam giác đều. Hỏi sau một số lần tô ta mà còn lại một nút không có màu thì nút đó có thể là đỉnh của lục giác hay không?*

Một số bài toán lát phủ sau đây cũng thuộc dạng này:

Bài toán 7.2.5. *Một nền nhà hình chữ nhật được lát bởi các hình 2×2 và 1×4. Nhưng khi lát lại nền nhà thì vỡ mất một viên 2×2, người ta thay bằng một viên 1×4, Hỏi họ có thể lát được nền nhà lại hay không?*

Bài toán 7.2.6. *Cho $m, n \geq 3$ là các số nguyên dương. Cho bảng kích thước $m \times n$. Mỗi hình nhận được từ hình vuông 2×2 bị mất đi một góc gọi là một thước thợ. Ta bỏ bi như sau: mỗi lần ta bỏ bi vào 3 ô mà 3 ô đó tạo thành hình thước thợ mỗi ô một viên bi. Hỏi với cách đó ta có thể bỏ bi sao cho sau một số hữu hạn lần thì mỗi ô đều có số bi bằng nhau hay không?*

7.2.2 Nửa bất biến

Trong mục này chúng ta sẽ xét về lớp bài toán tồn tại k hay ta có thể nhận được B từ A thông qua f. Một trong những hướng để giải quyết các bài toán thuộc dạng này là xây dựng hàm ψ có đặc điểm : ψ thay đổi đơn điệu qua mỗi lần thực hiện phép toán f, ψ chỉ nhận một số hữu hạn giá trị khác nhau. Để thấy rõ hơn chúng ta hãy xét một vài ví dụ:

Ví dụ 7.2.4. *Trên một $n \geq 4$ giác đều, tại mỗi đỉnh được điền một số thực. Cho phép thực hiện thực hiện phép toán sau: mỗi lần lấy ra 4 số a, b, c, d theo thứ tự nằm liên tiếp nhau mà $(a-d)(b-c) < 0$ và đổi chỗ b và c cho nhau. Chứng minh rằng sau một số lần thì phép toán sẽ phải dừng lại.*

LỜI GIẢI. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số được viết trên các đỉnh lúc ban đầu. Dễ dàng nhận thấy là mỗi lần sẽ lấy ra một số i mà $(a_i - a_{i+3})(a_{i+1} - a_{i+2}) < 0$ và đổi chỗ a_{i+1} và a_{i+2} cho nhau. Chú ý là: $(a_i - a_{i+3})(a_{i+1} - a_{i+2}) = a_i a_{i+1} + a_{i+2} a_{i+3} - a_i a_{i+2} - a_{i+1} a_{i+3}$. Do đó ta có thể thấy ngay hàm ψ có thể lấy như sau:

$$\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_n a_1.$$

Rõ ràng tập các số trên các đỉnh của n-giác là không thay đổi sau các phép toán nên ψ chỉ nhận hữu hạn giá trị. Mặt khác cứ sau mỗi lần thực hiện phép toán thì ta có:

$$\psi(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} \ldots, a_n) - \psi(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+2}, a_{i+1}, a_{i+3} \ldots, a_n)$$

$$= (a_i - a_{i+3})(a_{i+1} - a_{i+2}) < 0.$$

Nghĩa là sau mỗi lần thực hiện phép toán thì giá trị của ψ tăng lên. Mà số giá trị mà ψ nhận là hữu hạn nên chỉ thực hiện được hữu hạn lần mà thôi.

Ví dụ 7.2.5. *Tại mỗi đỉnh của một ngũ giác đều, ta đặt tương ứng một số nguyên sao cho tổng của cả* 5 *số là một số dương. Nếu có* 3 *đỉnh liên tiếp nhau được đặt tương ứng* 3 *số* x, y, z *và* $y < 0$ *thì ta thực hiện phép toán như sau: thay các số* x, y, z *đó tương ứng thành các số* $x + y, -y, z + y$. *Phép toán trên trên được thực hiện lặp lại nếu trong* 5 *số ở các đỉnh vẫn còn có số âm. Hãy xác định xem việc thực hiện các phép toán đó có dừng sau một số hữu hạn bước không?*

LỜI GIẢI. Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_5$ là 5 số tương ứng được đặt trên 5 đỉnh của ngũ giác đều sao cho: $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$. Đặt $\chi = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ và $f(\chi) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2$. Rõ ràng là ta có $f(\chi) \geq 0$ và $f(\chi)$ không thay đổi khi các x_i thay đổi vị trí.

Khi $x_3 < 0$ thì toán tử xác định như đã nói khi tác động lên χ sẽ biến χ thành:

$$Y = (x_1, x_2 - x_3, -x_3, x_4 - x_3, x_5).$$

Từ đó bằng các tính toán đơn giản ta thu được:

$$f(Y) - f(\chi) = 2x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 2x_3 S \leq -2.$$

Nói cách khác cứ mỗi lần thực hiện phép toán thì hàm $f(\chi)$ sẽ giảm đi 2 đơn vị. Vì vậy, quá trình đó sẽ dừng lại sau một số hữu hạn bước.

Ví dụ 7.2.6. *Có* n *tập truyện tranh được xếp theo một thứ tự bất kì thành một hàng ngang trên giá sách. Mỗi lần bạn lấy tập* k $(1 \leq k \leq n)$ *nhỏ nhất (không nằm ở vị trí thứ* k*) và xếp nó vào chỗ thứ* k *từ trái qua phải. Hỏi sau một số hữu hạn lần làm như vậy thì bạn có thể xếp được liên tiếp* n *tập truyện theo đúng thứ tự của nó không?*

LỜI GIẢI. Với mỗi $0 \leq i \leq n$, ta định nghĩa $d_i = 0$ nếu tập truyện i nằm ở vị trí thứ i và bằng $d_i = 1$ nếu ngược lại. Đặt $\psi = d_1 + d_2.2 + \ldots + d_n.2^{n-1}$.

Lúc đó ta có $\psi \leq 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ và $\psi = 0$ khi và chỉ khi tập truyện i nằm ở vị trí thứ i. Mặt khác mỗi lần thực hiện phép thay đổi vị trí các tập truyện thì có một d_k mà d_k chuyển từ 1 thành 0 trong khi $d_{k+1}, d_{k+2}, \ldots, d_n$ không thay đổi. Do đó dù trường hợp xấu nhất là $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ đều chuyển từ 0 thành 1 đi nữa thì ta vẫn có ψ giảm đi ít nhất là một đơn vị. Do đó sau không quá $2^n - 1$ lần thì phép toán phải dừng lại. Hay bạn luôn có thể sắp xếp được. Chú ý là ở bài toán này $2^n - 1$ lần là số lần chuyển sách tối thiểu.

Ví dụ 7.2.7. *Giả sử* G *là một đồ thị có bậc mỗi đỉnh không lớn hơn* 11. *Chứng minh rằng có thể tô màu các đỉnh của* G *bởi* 4 *màu sao cho có không quá* n *cạnh có hai đỉnh cùng màu.*

LỜI GIẢI. Trước hết là ta tô màu một cách bất kì. Bây giờ ta chứng minh bằng một số phép đổi màu các đỉnh ta sẽ làm cho đồ thị có tính chất: mỗi đỉnh kề với không quá với hai đỉnh cùng màu với nó. Rõ ràng là khi đó số cạnh có hai cạnh cùng màu sẽ không vượt quá: $2n/2 = n$.

Với mỗi đồ thị như trên ta gọi ψ là số cạnh có hai đỉnh cùng màu. Cứ mỗi lần mà có đỉnh A (giả sử A có màu xanh) chẳng hạn nào đó kề với ít nhất là 3 đỉnh cùng màu với nó là B, C, D thì do số đỉnh kề với A là 11 mà 11 đỉnh này được tô bằng 4 màu nên có một màu được tô màu cho không quá hai đỉnh, gọi là màu đỏ chẳng hạn. Thì ta đổi màu các đỉnh A từ xanh sang đỏ. Rõ ràng là khi đó ta có số cạnh có hai đỉnh cùng màu sẽ giảm đi một hay ψ giảm đi một. Nhưng rõ ràng là ta có ψ luôn nhận giá trị nguyên không âm. Do đó ta có phép đổi màu trên sẽ chỉ thực hiện được hữu hạn lần hay từ lúc nào đó thì mỗi đỉnh chỉ kề với không quá hai đỉnh cùng màu với nó hay ta có bài toán được chứng minh.

Chú ý là với $n = 12k$ thì n ở đây là số tốt nhất, bởi lấy đồ thị gồm hợp của k đồ thị K_{12} thi dễ dàng kiểm tra rằng mọi cách tô màu bằng 4 màu đều có số cạnh có hai đỉnh cùng không nhỏ hơn n.

Bài toán này thuộc bài toán trạng thái đặc biệt và dưới đây cũng là một số bài toán thuộc dạng này, các bạn hãy giải để hiểu rõ hơn phương pháp.

Bài toán 7.2.7. *Trong một đồ thị có n đỉnh, chứng minh rằng ta có thể tô màu các đỉnh bởi hai màu sao cho với mỗi đỉnh bất kì thì trong các đỉnh kề với nó, số đỉnh cùng màu với nó không hơn số đỉnh khác màu với nó.*

Bài toán 7.2.8. *Trong một căn nhà có một số chẵn bóng đèn được lắp đặt trong các căn phòng sao cho mỗi phòng đều có ít nhất* 3 *bóng. Mỗi bóng đèn đều có công tắc chung với đúng một bóng đèn khác (không nhất thiết là phải khác phòng). Mỗi lần bật tắt công tắc thì làm thay đổi trạng thái của hai bóng mà nó tác động. Chứng minh với mỗi trạng thái ban đầu bất kì của các bóng, có một dãy hữu hạn các thao tác tắt bật công tắc mà ta có thể làm cho mỗi căn phòng đều có ít nhất một bóng sáng và một bóng tắt.*

Cuối cùng, mời các bạn giải quyết ba bài toán sau đây, xem như các bài tập:

Bài toán 7.2.9. *Có một bộ bài* 52 *quân, lần lượt rút các quân bài. Trước khi rút cho phép đoán chất của quân bài. Nếu đoán đúng là thắng. Chứng minh rằng có thuật toán để có thể thắng ít nhất* 13 *lần.*

Bài toán 7.2.10. *Giả sử hai người cùng chơi một ván cờ caro như sau: trên bảng vô hạn các ô vuông, lần lượt mỗi người chơi khi đến lượt mình thì điền các ký hiệu X và O vào các ô vuông (mỗi người chỉ điền một loại dấu). Ai điền được một hàng ngang, cột dọc hoặc một đường chéo độ dài* 11 *gồm toàn dấu của mình thì chiến thắng. Hỏi có chiến thuật nào để không người chơi bao giờ thua hay không.*

Câu hỏi tương tự khi thay 11 *bởi* 9.

Bài toán 7.2.11. *Cho hàm số $f : N \times Z \to N$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) $f(0, 0) = 5^{2003}, f(0, n) = 0$ *với mọi số nguyên* $n \neq 0$.

ii) $F(m, n) = f(m-1, n) - 2.[f(m-1, n)/2] + [f(m-1, n-1)/2] + [f(m-1, n+1)/2]$ *với mọi số tự nhiên* $m > 0$ *và với mọi số nguyên* n.

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên M sao cho:

$$f(M, n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |n| \leq (5^{2003} - 1)/2 \\ 0 & \text{nếu } |n| > (5^{2003} - 1)/2. \end{cases}$$

7.3 Phương pháp phân nhóm

Giới thiệu. Có lẽ mục này là mục có ít tính chất tổ hợp nhất trong toàn bộ tài liệu. Tuy nhiên, có thể nó có ích cho bạn đọc nào muốn nhìn thấy một chút liên hệ giữa tổ hợp và các phân môn khác. Thật vậy, các bạn có thể theo dõi để thấy rằng lời giải của một số bài toán đại số dưới đây mang màu sắc tổ hợp rất rõ nét.

Ví dụ 7.3.1. *Cho các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn:* $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right| \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $A = \{i |\, x_i \ge 0\}, B = \{i |\, x_i < 0\}$. Khi đó điều kiện bài toán trở thành:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in A} x_i + \sum\limits_{i\in B} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i\in A} x_i - \sum\limits_{i\in B} x_i = 1. \end{cases}$$

Do đó $\sum\limits_{i\in A} x_i = \frac{1}{2}$ và $\sum\limits_{i\in B} x_i = -\frac{1}{2}$. Bây giờ ta có:

$$\left|\sum_{i\in A} \frac{x_i}{i}\right| \le \sum_{i\in A} x_i = \frac{1}{2} \text{ và } \left|\sum_{i\in B} \frac{x_i}{i}\right| = -\sum_{i\in B} \frac{x_i}{i} \le -\sum_{i\in B} \frac{x_i}{2n} = -\frac{1}{2n}.$$

Suy ra $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right| = \sum\limits_{i\in A} \frac{x_i}{i} - \sum\limits_{i\in B} \frac{x_i}{i} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Đây là điều phải chứng minh.

Ví dụ 7.3.2. *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n số thực sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $S \subset \{1, 2, \ldots, s\}$ thỏa mãn:*

$$\begin{cases} 1 \le |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \le 2 \;\forall\; i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ |\sum\limits_{i\in S} x_i| \ge \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

LỜI GIẢI. Với mỗi $i = 0, 1, 2$, đặt:

$$s_i = \sum_{x_j \ge 0, j \equiv i \pmod 3} x_j, \quad t_i = \sum_{x_j < 0, j \equiv i \pmod 3} x_j.$$

Khi đó ta có $s_1 + s_2 + s_3 - s_1 - s_2 - s_3 = 1$. Suy ra $(s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + (s_3 - s_1) - (t_1 + t_2) - (t_2 + t_3) - (t_3 + t_1) = 2$. Không mất tính tổng quát giả sử $s_1 + s_2 \ge 1/3$ và $|s_1 + s_2| \ge |t_1 + t_2|$. Suy ra $s_1 + s_2 + t_1 + t_2 \ge 0$. Do đó ta có $(s_1 + s_2 + t_1) + (s_1 + s_2 + t_2) \ge s_1 + s_2 \ge 1/3$. Suy ra $s_1 + s_2 + t_1$ hoặc $s_1 + s_2 + t_2$ không nhỏ hơn $1/6$. Rõ ràng trong 3 số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho 3. Nên ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 7.3.3. *Với mỗi số nguyên dương n kí hiệu $d(n)$ là số các chữ số 0 trong cách viết của n trong hệ cơ số 3. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^{d(n)}}{n^3} < +\infty.$$

LỜI GIẢI. Với mỗi số nguyên dương k kí hiệu $s_k = \sum \frac{10^{d(n)}}{n^3}$ ở đây tổng lấy theo tất cả các số n có k chữ số trong cơ số 3. Ta có:

$$s_k = \sum_{t=0}^{k-1} 10^t \Big(\sum_{d(n)=t} \frac{1}{n^3} \Big).$$

Mặt khác ta có có đúng 2^{k-t} số có k chữ số trong cơ số 3 mà chứa đúng t số 0 nên:

$$s_k < \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\binom{k-1}{t} 2^{k-t}}{3^{3(k-1)}} < \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{27^{k-1}} 10^t \binom{k-1}{t} 2^{k-t} = \frac{2}{27^{k-1}} 12^{k-1} = 2.(\frac{12}{27})^{k-1}.$$

Do đó ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{10^{d(n)}}{n^3} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} s_k < \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2.(\frac{12}{27})^{k-1} < +\infty$. Điều cần chứng minh.

Ví dụ 7.3.4. *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ là dãy tăng gồm các số nguyên dương không có chữ số 9 nào trong biểu diễn thập phân. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{x_i} < \frac{1}{80}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $s_k = \sum \frac{1}{n}$ ở đây tổng lấy trên tất cả n mà có n có k chữ số và không chứa chữ số 9 trong biểu diễn thập phân. Ta có đúng 8.9^{k-1} số có k chữ số mà không chứa chữ 9 nào trong biểu diễn thập phân. Do đó $s_k < 8.9^{k-1}/10^{k-1}$. Nên:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{x_i} = \sum_{k=1}^{+\infty} s_k < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8.9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8.\frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 80.$$

Chú ý: bài toán tương tự sau đây cũng đúng và nó có cách chứng minh hoàn toàn tương tự như ví dụ 7.3.4.

Bài toán 7.3.1. *Cho trước số nguyên dương n. Chứng minh rằng nếu s là tổng nghịch đảo của các số không chứa chữ số $n-1$ trong biểu diễn cơ số n thì $s < +\infty$.*

Với bài toán này ta có thể giải quyết bài toán sau:

Bài toán 7.3.2. *Giả sử $\{a_n\}$ là dãy tăng gồm các số nguyên dương thỏa mãn $\{a_n/n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng có vô số số hạng thuộc dãy $\{a_n\}$ có chứa 2005 chứ số 9 liên tiếp trong biểu diễn thập phân.*

LỜI GIẢI. Xét trong cơ số $m = 10^{2005}$ bây giờ ta có dãy $\{a_n/n\}$ bị chặn nên ta sẽ chứng minh rằng tồn tại vô số n sao cho a_n chứa chữ số $m-1$. Thật vậy ta có nếu dãy a_n không chứa số nào có chữ số $m-1$. Khi đó theo bài toán 7.3.1 ta có $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_i} < +\infty$. Nhưng ta lại có dãy số $\{a_n/n\}$ bị chặn nên ta có tồn tại C sao cho $a_n < nC$ với mọi n . Suy ra $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_i} > \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC} = +\infty$ (mâu thuẫn). Vậy tồn tại n_0 mà a_{n_0} có chứa chữ số $m-1$. Bây giờ xét dãy $a_{n_0+1}, a_{n_0+2} \ldots, a_k, \ldots$.

Dãy này vẫn có tính chất đề bài nên tồn tại vô số n mà a_n chứa chữ số $m-1$ trong cơ số m. Hay có vô số n mà a_n chứa 2005 chữ số 9 trong biểu diễn thập phân.

Như vậy qua bài toán trên ta có nhận xét là: nếu dãy số nguyên dương $a_1 < a_2 < \ldots$ thỏa mãn không có n nào mà a_n chứa k chữ số 9 liên tiếp thì $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{x_i} < +\infty$. Bây giờ kí hiệu S_j là tổng các nghịch đảo của các số n mà n có j chữ số và n không chứa chữ số k chữ số 9 liên tiếp trong biểu diễn thập phân.

Giả sử M là một tổ hợp gồm k chữ số bất kì trong hệ thập phân (với chũ số đầu tiên khác 0). Khi đó số các chữ số n mà n có j chữ số và không chứa số M bằng số các số n mà n có j chữ số và không chứa k chữ số 9 liên tiếp. Do đó nếu đặt t_j là tổng các các số n mà n có j chữ số trong hệ thập phân và n không chứa M. Khi đó $t_j \leq 10s_j$. Như vậy với t là tổng nghịch đảo của các số nguyên dương mà không chứa M trong biểu diễn thập phân thì ta có $t = t_1 + t_2 + \ldots \leq 10(s_1 + s_2 + \ldots) < +\infty$. Vậy ta đã giải quyết được bài toán.

Bài toán 7.3.3. *Giả sử M là một tổ hợp các các chữ số (với chữ số đầu khác 0) . Khi đó nêu t tổng nghịch đảo của các các số không chứa M trong biểu diễn thập phân thì $t < +\infty$.*

Với bài toán 7.3.3 thì ta thu được hệ quả là bài toán 7.3.4 sau đây (là bài toán tổng quát của đề thi VN TST 2005 ở trên).

Bài toán 7.3.4. *Giả sử M là một tổ hợp các chữ số (với chữ số đầu tiên khác 0). Giả sử dãy số $\{a_n\}$ là dãy số nguyên dương tăng và dãy $\{a_n/n\}$ là dãy bị chặn khi đó có vô số số hạng của dãy có chứa M trong biểu diễn thập phân.*

Với cùng phương pháp ta có thể dễ dàng giải quyết được một số bài toán sau:

Bài toán 7.3.5. *Chứng minh rằng với mọi dãy $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ có tính chất không có số nào bắt đầu bởi số khác trong n số đó thì:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}.$$

Bài toán 7.3.6. *Với n là số nguyên dương. kí hiệu $f(n)$ là số các chữ số 0 trong biểu diễn thập phân của n. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2} < +\infty \Longleftrightarrow a < 91.$$

Bài toán 7.3.7. *Giả sử m là số dương sao cho với mọi bộ gồm các vectơ có tổng modun bằng 1 thì có một số vectơ có modun của vectơ tổng không nhỏ hơn m. Chứng minh rằng: $1/4 \leq m \leq 1/2$.*

7.4 Vai trò của các bộ số đặc biệt

Giới thiệu. Một tính chất đặc trưng của các bài toán tổ hợp mang tính chất tối ưu đó là tính hai chiều của chứng minh. Chẳng hạn muốn chứng minh đáp số của bài toán là $k = \alpha$, vậy thì nhiệm vụ của ta là phải chứng minh được $k \geq \alpha$ và $k \leq \alpha$, hơn nữa còn phải chỉ ra được một cách bố trí sao cho trong cách bố trí đó thì quả thực $k = \alpha$. Bước thứ nhất trong nhiều trường hợp là không quá khó khăn, khó khăn thực sự lại nằm ở bước thứ hai. Trong mục này chúng tôi xin dẫn ra một số ví dụ như vậy.

Bài toán 7.4.1. *Tại một cửa hàng ăn thực đơn có* 20 *món. Có* 10 *khách hàng cùng vào ăn, mỗi người gọi đúng* 3 *món. Hai người bất kỳ gọi giống nhau ít nhất một món và giả sử a là món được nhiều người gọi nhất. Gọi k là số người gọi món a. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của k.*

LỜI GIẢI. Gọi các món ăn là $\{1, 2, ..., n\}$ khi đó danh sách các món ăn do mỗi người chọn sẽ là một tập con ba phần tử của tập hợp này. Ta chứng minh câu trả lời của bài toán là 5. Để chứng minh $k \geq 5$ ta xét 10 tập hợp 3 phần tử và A là một trong số 10 phần tử đó. Do tập A có chung ít nhất một phần tử với bất kỳ tập hợp àno trong 9 tập còn lại nên theo nguyên lý *Dirichlet* suy ra có một phần tử của A xuất hiện không dưới ba lần trong 9 tập đó. Vậy $k \geq 4$. Nếu $k = 4$ tức là mỗi phần tử của A đều xuất hiện đúng ba lần trong các tập còn lại. Điều này thực hiện với mọi phần tử thuộc vào những món ăn đã gọi nhưng tổng số món ăn (tính cả lặp) là $10.3 = 30$ không chia hết cho 4. Vậy $k \neq 4$ suy ra $k \geq 5$.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách gọi món mà $k = 5$. Thật vậy, xét 10 tập con 3 phần tử sau đây $\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\}, \{2,4,6\}, \{3,5,7\}, \{3,5,7\}$. Trong các tập này thì 1 xuất hiện 3 lần, các số $2, 4, 6$ xuất hiện 4 lần còn $3, 5, 7$ xuất hiện đúng 5 lần. Vậy $k = 5$. Do đó k nhỏ nhất là 5.

Bài toán 7.4.2. *Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho trong k phần tử tuỳ ý của tập* $\{1, 2, ..., 50\}$ *luôn chọn ra được ba số là độ dài các cạnh của một tam giác vuông.*

LỜI GIẢI. Trước hết ta liệt kê toàn bộ các tập con ba phần tử của tập $\{1, 2, ..., 50\}$ mà ba phần tử đó là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. Có đúng 20 tập con như vậy:

$\{5,4,3\}$	$\{10,8,6\}$	$\{15,12,9\}$	$\{20,16,12\}$	$\{25,20,15\}$
$\{30,24,18\}$	$\{35,28,21\}$	$\{40,32,24\}$	$\{45,36,27\}$	$\{17,15,8\}$
$\{37,35,12\}$	$\{13,12,5\}$	$\{29,21,20\}$	$\{25,24,7\}$	$\{41,40,9\}$
$\{50,48,14\}$	$\{34,30,16\}$	$\{26,24,10\}$	$\{39,36,15\}$	$\{50,40,30\}$

Ta đặt $K = S \setminus \{5, 8, 9, 16, 20, 24, 35, 36, 50\}$. Rõ ràng K có 41 phần tử và tất cả các tập hợp được liệt kê ở trên đều không phải tập con của K. Cuối cùng ta xét 9 tập hợp rời nhau:

$\{5,4,3\}$	$\{45,36,27\}$	$\{50,48,14\}$
$\{10,8,6\}$	$\{41,40,9\}$	$\{34,30,16\}$
$\{37,35,12\}$	$\{29,21,20\}$	$\{25,24,7\}$

Một tập hợp có không ít hơn 42 phần tử chứa ít nhất một trong 9 tập hợp trên. Vậy giá trị nhỏ nhất của k là 42. Bài toán được giải xong.

Bài toán 7.4.3 (IMO 1991). *Xét tập hợp $S = \{1, 2, ..., 280\}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thoả mãn n số bất kỳ lấy ra từ S có 5 số nguyển tố cùng nhau đôi một.*

LỜI GIẢI. Trước hết ta chỉ ra 216 phần tử của S mà trong 5 phần tử bất kỳ luôn có 2 phần tử có ước chung lớn hơn 1. Thật vậy, tập hợp sau đây có tính chất đó (chứng minh đều này không quá khó):

$$A = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 2, 3, 5, 7 \text{ hoặc } 11\}.$$

Xét một tập hợp $T \in S$ gồm 217 phần tử. Ta sẽ chứng minh rằng T chứa 5 phần tử đôi một nguyên tố cùng nhau. Đặt:

$$\begin{aligned} B_1 &= A \setminus \{2, 3, 5, 7\} \\ B_2 &= \{11^2, 11.13, 11.17, 11.19, 11.23, 13^2, 13.17, 13.19\} \\ P &= S \setminus (B_1 \cup B_2). \end{aligned}$$

Rõ ràng $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$ và P là hợp của 1 và tất cả các số nguyên tố trong S.

Néu $|T \cap P| \geq 5$ thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu $|T \cap P| \leq 4$. Ta có $|T \cap (S \setminus P)| \geq 217 - 4 = 213$. Suy ra tập hợp các số không nguyên tố trong S có nhiều nhất $280 - 213 - 60 = 7$ số không thuộc T. Xét các tập hợp :

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2.23, 3.19, 5.17, 7.13, 11.17\} \\ M_2 &= \{2.29, 3.23, 5.19, 7.17, 11.13\} \\ M_3 &= \{2.31, 3.29, 5.23, 7.19, 11.17\} \\ M_4 &= \{2.37, 3.31, 5.29, 7.23, 11.19\} \\ M_5 &= \{2.41, 3.37, 5.31, 7.29, 11.23\} \\ M_6 &= \{2.43, 3.41, 5.37, 7.31, 13.17\} \\ M_7 &= \{2.47, 3.43, 5.41, 7.37, 13.19\} \\ M_8 &= \{2^2.3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}. \end{aligned}$$

Rõ ràng khi đó tồn tại i_0 để $T \in M_{i_0}$, suy ra điều phải chứng minh.

Thực ra thì chưa có một phương án cụ thể nào để giải quyết chiều ngược lại của loại toán này. Tuy nhiên chúng tôi muốn sử dụng một ví dụ nhỏ coi như bước đầu công phá vấn đề đó.

Bài toán 7.4.4. *Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho trong k phần tử tuỳ ý của tập $\{1, 2, ..., 50\}$ luôn chọn ra được hai số là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông.*

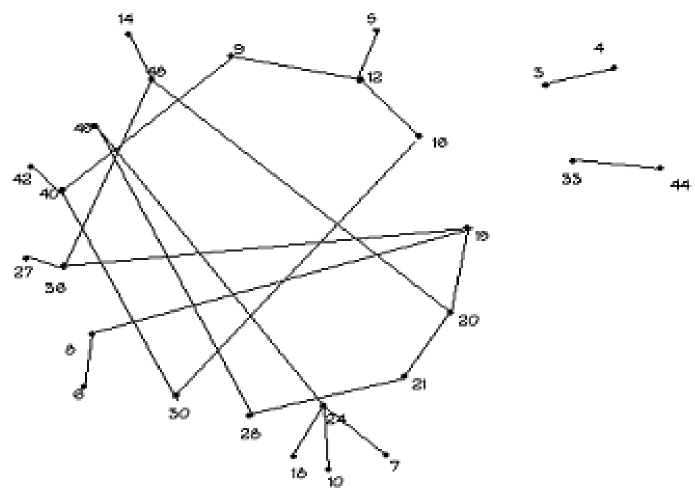
LỜI GIẢI. Trước hết ta liệt kê tất cả các cặp $(a, b) \in (S, S)$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, bằng cách liệt kê các cặp số *Pythagore* nguyên thuỷ trước, sau đó lập các cặp *Pythagore* đồng dạng (sai khác một hằng số nhân) ta có 26 cặp (a, b) là (3,4), (6,8), (9,120), (12,16), (15,20), (18,24), (21,28), (24,32), (27,36), (30,40), (33,44), (36,48), (8,15), (16,30), (24,45), (12,35), (5,12), (10,24), (15,36), (20,48), (20,21), (40,42), (28,45), (7,24), (14,48), (9,40).

Xét $B = \{3, 33, 12, 24, 8, 36, 40, 48, 16, 20, 28\}$. Ta thấy mỗi cặp *Pythagore* đều có ít nhất một phần tử thuộc B. Do đó $C = S \setminus B$ là tập hợp không chứa bất cứ cặp số *Pythagore* nào. Suy ra $k > |C| = 39$.

Xét 11 cặp só *Pythagore* rời nhau (3,4), (33,44), (5,12), (7,24), (6,8), (27,36), (40,42), (48,14), (16,30), (45,28), (21,20). Vì bất cứ tập con gồm 40 phần tử nào của S cũng phải chứa ít nhất một cặp *Pythagore* ở trên , cho nên $k \leq 40$.

Kết hợp hai đánh giá trên suy ra $k = 40$.

Vấn đề của chúng ta là làm thế nào để tìm được tập hợp B và 11 cặp *Pythagore* rời nhau. Suy nghĩ một chút, có lẽ các bạn sẽ nhận thấy rằng đồ thị là một sự trợ giúp tuyệt vời.



Biểu diễn các phần tử của tập S như các điểm của một đồ thì và nối tất cả các cặp *Pythagore* (a, b). Ta xây dựng tập B gồm ít phần tử nhất sao cho trong tập $C = S \setminus B$ không có bộ *Pythagore* nào. Muốn vậy, trên đồ thị, B phải là các đỉnh sao cho khi ta xoá các đỉnh này và tất cả các cạnh có nối với nó đi thì đồ thị không còn cạnh nào cả.

Từ ý đồ đó, ta tiến hành chọn các điểm của B như sau. Vì (3,4), (33,44) là hai đoạn riêng lẻ cho nên ta chọn $\{3, 33\} \in B$ (hoặc $\{3, 44\}$, $\{4, 33\}$, $\{4, 44\}$ đều được). Xoá các đoạn đó đi. Các đoạn thẳng có một đầu là đỉnh đơn thì đỉnh kia (không đơn) phải thuộc B. Vậy $\{12, 24, 8, 36, 40, 48\} \in B$. Xoá chúng và các cạnh nối với chúng.

Cặp (16,30) riêng lẻ nên ta chọn 16 (hoặc 30). Cuối cùng $\{20, 28\} \in B$. Lúc này, đồ thị đã bị xoá hết cạnh. Vậy $B = \{3, 33, 12, 24, 8, 36, 40, 48, 16, 20, 28\}$.

Tiếp theo, ta phải chỉ ra 11 cặp *Pythagore* rời nhau. Trong đồ thị trên, các cặp này sẽ là các đỉnh của các cạnh rời nhau. Muốn chọn đủ 11 cặp, ta cố gắng chọn sao cho được nhiều đoạn rời nhau càng tốt. Trước hết ta chọn 2 cạnh rời (3,4) và (33,44). Tiếp đến, ta chọn các cặp có một đầu là đỉnh đơn (5,12), (7,24), (6,8), (27,36), (40,42), (48,14).

Xoá tất cả các cạnh có một đầu nằm trong số các diểm ở trên (còn lại như trên hình). Dễ dàng chọn tiếp (16,30). Và chọn hai trong bốn cặp (45,28), (28,21), (21,20) và (20,15).Chẳng hạn ta chọn (45,28), (21,20). Đúng 11 cặp Pitago rời nhau đã được xác định. Bài toán được giải quyết xong hoàn toàn.

Cuối cùng mời các bạn giải hai bài toán sau xem như những bài tập nhỏ:

Bài toán 7.4.5. *Có 10 em bé đứng gần nhau, mỗi em bé cảm một quả bóng. Khi có hiệu lệnh thì các em bé sẽ đồng thời chuyền bóng cho bạn đứng gần mình nhất. Hỏi cuối cùng có ít nhất bao em bé có bóng (giả thiết rằng khoảng cách giữa các cặp em bé đều khác nhau).*

Bài toán 7.4.6 (VMO 2005). *Trong mặt phẳng cho bát giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ mà không có ba đường chéo nào của nó cắt nhau tại một điểm. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của bát giác là một nút. Xét các tứ giác lồi mà mỗi tức giác đều có cả bốn đỉnh là đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tức giác như vậy là một tức giác con. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất có tính chất có thể tô màu n nút sao cho với mọi $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $i \neq k$, nếu ký hiệu $s(i, k)$ là số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị $s(i, k)$ đều bằng nhau.*

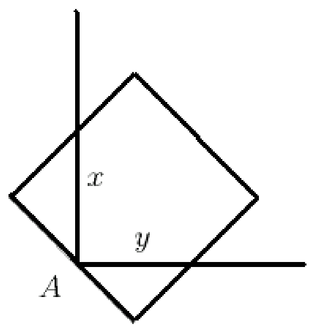
7.5 Hai bài toán về phủ các hình vuông

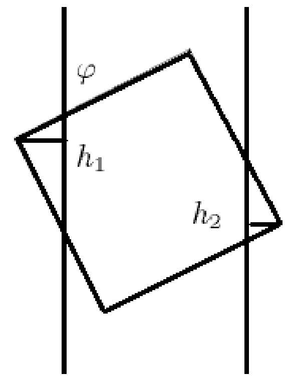
Giới thiệu. Dùng các hình đồng dạng để phủ hình ban đầu là một vấn đề rất thú vị của hình học tổ hợp. Trong bài viết này chúng tôi xin dẫn ra hai kết quả tương đối quen thuộc về việc dùng các hình vuông bé để phủ một hình vuông lớn ban đầu, và sẽ chỉ trình bày lời giải cho một bài toán. Từ lời giải đó các bạn có thể thấy ngay lời giải của bài toán còn lại.

Bài toán 7.5.1. *Chứng minh rằng không thể dùng hai hình vuông có cạnh nhỏ hơn* 1 *để phủ một hình vuông cạnh* 1.

Bài toán 7.5.2. *Chứng minh rằng không thể dùng năm hình vuông có cạnh* 1/2 *để phủ một hình vuông cạnh* 1.

LỜI GIẢI. Xét hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh 1, và gọi cạnh của 5 hình vuông dùng để phủ là $a < 1/2$. Giả sử rằng có thể dùng 5 hình vuông như vậy để phủ. Ta chia $ABCD$ làm 4 hình vuông cạnh 1/2 bằng hai đường thẳng qua O và vuông góc với cạnh. Do đường kình hình vuông cạnh 1/2 lớn hơn đường kính của mỗi hình dùng để phủ nên hình chứa một trong 5 điểm A, B, C, D, O mà ta ký hiệu là V_A, V_B, V_C, V_D, V_O.





Xét hình vuông V_A, rõ ràng là tổng độ dài hai đoạn mà nó phủ ở hai cạnh AB, AD phải nhỏ hơn 1, vì $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq \sqrt{2}.\sqrt{2}.a < 1$. Do đó tổng các đoạn mà V_A, V_B, V_C, V_D phủ trên các cạnh nhỏ hơn 4, cho nên V_O phải có giao với một cạnh nào đó. Giả sử đó là cạnh BC.

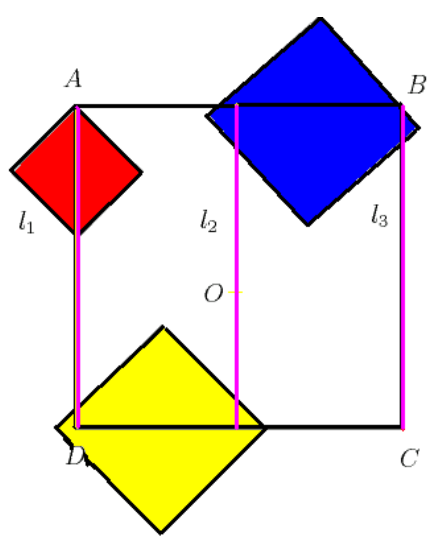
Xét hình vuông cạnh a phủ lên một đoạn của hai đường thẳng song song cách nhau 1/2 như hình vẽ ở trên. Gọi l là độ dài mà hình vuông phủ lên hai đường đó. Ta có:

$$l = (h_1 + h_2)(\tan\varphi + \cot\varphi) = \frac{h_1 + h_2}{\sin\varphi.\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}\cos(\varphi - 45^0) - 1/2}{\sin\varphi.\cos\varphi}$$

$$\Longrightarrow l < \frac{\sqrt{2}\cos(\varphi - 45^0) - a}{\sin\varphi.\cos\varphi} = \frac{a(\cos\varphi + \sin\varphi) - a}{\sin\varphi.\cos\varphi} = a - \frac{a(\sin\varphi - 1)(\cos\varphi - 1)}{\cos\varphi + \sin\varphi} \leq a.$$

Vậy tổng độ dài hai đoạn được phủ sẽ $\leq a$.

Bây giờ xét l_1, l_2, l_3 là ba đường thẳng cách nhau 1/2 như hình vẽ dưới đây:

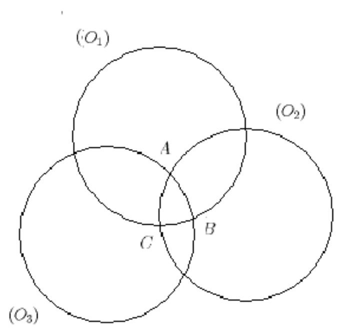


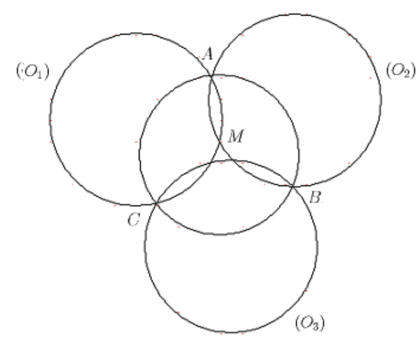
Trong hai cặp (V_A, V_B) và (V_C, V_D) thì mỗi cặp phải có ít nhất một hình phủ cả hai đoạn cách nhau 1/2, còn hình kia phủ lên một đoạn $\leq \sqrt{2}a$. Vậy tổng độ dài mà 5 hình vuông phủ lên 3 đoạn thẳng l_1, l_2, l_3 sẽ là $d \leq a + a + a + \sqrt{2}a + \sqrt{2}a = (3 + 2\sqrt{2})a < 6a < 3$.

7.6 Câu hỏi mở về một tính chất của chùm các đường tròn

Giới thiệu. Việc khảo sát mối quan hệ của nhiều đối tượng là một đặc trưng của tổ hợp. Trong mục này chúng tôi sẽ khảo sát một số tính chất của chùm các đường tròn. Tất nhiên số lượng các tính chất kiểu như thế này rất đa dạng, không thể liệt kê trong một bài viết nhỏ. Vì vậy chúng tôi sẽ chỉ tập trung vào các đối tượng đặc biệt, đó là các đường tròn đơn vị.

Hạn chế hơn nữa chúng ta chỉ quan tâm tới các đường tròn đơn vị và giả thiết thêm mọi cặp đường tròn trong số chúng đều cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Đối với 3 đường tròn có hai cách bố trí như sau:

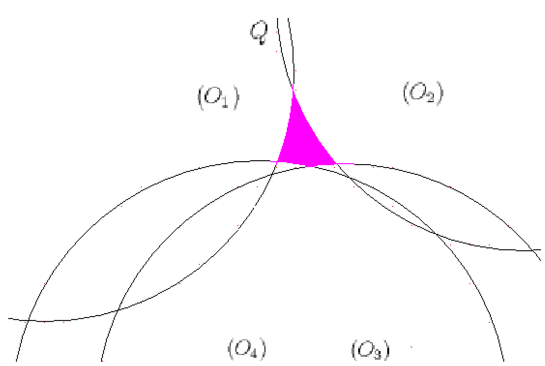


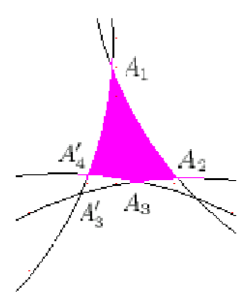


Cách bố trí ở bên phải cho ta một tính chất rất đẹp, đó là tam giác ABC có bán kinh đường tròn ngoại tiếp bé hơn đơn vị, còn ở bên trái, điều này không phải lúc nào cũng đúng. Các bạn có thể tự chứng minh hoặc tham khảo thêm phần hình học của tài liệu này.

Câu hỏi là cái gì đã tạo nên sự khác biệt? Thực ra có tính chất như vậy vì sự có mặt của tam giác cong "hổng" mà ta gọi là "lỗ" trong cách bố trí giữa các đường tròn. Một câu hỏi rất tự nhiên được đặt ra là phải chăng nếu n hình tròn sắp xếp tuỳ ý thì liệu có thể tạo ra được tứ giác cong, ngũ giác cong ... hay không. Câu trả lời là có, và chính xác hơn ta có:

Định lý. Lỗ cong do n đường tròn tạo ra có nhiều nhất n cạnh.
Chứng minh.





Rõ ràng một đường tròn cung cấp cho lỗ nhiều nhất là một cạnh cong, do đó số cạnh cong của lỗ bất kỳ không vượt quá số đường tròn, tức là n. Ta gọi số cạnh của đa giác cong có nhiều cạnh nhất có thể tạo ra do n đường tròn là C_n. Vậy $C_n \le n$, ngoài ra ta đã có $C_3 = 3$.

Bắt đầu từ $(O_1), (O_2), (O_3)$ và ba đỉnh của lỗ là A_1, A_2, A'_3. Quy ước đối với hai điểm A, B thì (AB) là đường tròn bán kính 1 có tâm không thuộc nửa mặt phẳng bờ AB hứa Q (là giao điểm thứ hai của $(O_1), (O_2)$). Lấy A_3, A'_4 như sau, điểm A_3 thuộc cung $A_2A'_3$ và điểm A'_4 thuộc cung A'_3A_1 mà A_3 đủ gần A_2, A'_4 đủ gần A'_3 sao cho $(O_4) = (A_3A'_4)$ cắt (O_2). Điều này thực hiện được do đó $C_4 = 4$, tứ giác cong trong trường hợp này là $A_1A_2A_3A'_4$.

Bây giờ khi đã có $C_n = n$ với $n \geq 4$ theo đúng cách đã xây dựng ở trên, lấy A'_{n+1} thuộc cung A'_nA_1 đủ gần A'_n và điểm A_n thuộc cung $A_{n-1}A'_n$ đủ gần A_{n-1} sao cho $(O_{n+1}) = (A_nA'_{n+1})$ cắt (O_2), điều này thực hiện được và ta có $C_{n+1} = n + 1$, $n + 1$ - giác cong lúc này là $A_1A_2...A_nA'_{n+1}$. Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Chúng ta hãy khai thác theo một cách khác. Chúng ta biết rằng theo định lý *Helly* cho họ hình lồi thì nếu với n hình tròn mà bộ ba nào cũng có giao điểm chung thì điều đó cũng đúng với hệ n hình tròn, tức là không thể tồn tại lỗ như trên được. Vậy, nếu được sắp xếp tuỳ ý thì từ n hình tròn có thể tạo ra được nhiều nhất bao nhiêu lỗ. Đây là một bài toán thực sự khó và kết quả chúng tôi đạt được mới chỉ là một sự khảo sát nhỏ. Gọi L_n là số lỗ nhiều nhất có thể tạo ra. Thế thì ta có:

Định lý. Số lỗ nhiều nhất có thể tạo ra không nhỏ hơn $n - 2$ hay là $L_n \geq n - 2$.

Chứng minh. Rõ ràng $L_3 \geq 1$, xét $n \geq 4$. Công việc của chúng ta là chỉ ra một cách bố trí mà trong cách bố trí đó có đúng $n - 2$ lỗ được tạo ra. Quy ước khi viết (O) tức là đường tròn tâm O bán kính 1. Xét một điểm O_1, vẽ đường tròn $(O_1, 2)$. Lấy O_2, O_n trên đường tròn này sao cho $O_2\widehat{O_1}O_n \leq 60^0$. Trên cung nhỏ O_2O_n lấy các điểm $O_3, ..., O_{n-1}$ sao cho khi $i = 3, ..., n-1$ thì giá trị của các góc $O_2\widehat{O_1}O_i$ cũng tăng nhưng luôn bé hơn $O_2\widehat{O_1}O_n$. Với cách xác định này thì (O_1) tiếp xúc với (O_i) với mọi $i = 2, 3, .., n$, hơn nữa với mọi $2 \leq j < k \leq n$ thì (O_j) và (O_k) cắt nhau. Lúc này ta có đúng $n - 2$ lỗ được tạo thành.

Xét một tia O_1x cắt cung nhỏ O_2O_n với mọi $2 \leq j < k \leq n$ thì tồn tại số $\epsilon_{j,k}$ mà với mọi phép tịnh tiến (O_1) thành $(O_{1,j,k})$ thoả mãn $O_{1,j,k} \in O_1x$ và $O < O_1O_{1,j,k} < \epsilon_{j,k}$. Khi đó lỗ do ba đường tròn $(O_1), (O_j), (O_k)$ được bảo toàn tính tồn tại. Và như vậy khi đổi tâm O_1 bởi O với $O \in O_1x$ và $0 < O_1O < \min\{\epsilon_{j,k} \mid 2 \leq j < k \leq n\}$. Định lý được chứng minh.

Một cách rất tự nhiên chúng ta sẽ đặt câu hỏi, vậy $n - 2$ có phải câu trả lời tốt nhất cho bài toán này hay không. Đây là một câu hỏi mở.

Bài toán 7.6.1 (Open Question). *Chứng minh rằng số lỗ được tạo ra từ n đường tròn đơn vị nhiều nhất là $n - 2$.*

THAY CHO LỜI KẾT. Vấn đề về chùm các đường tròn còn nhiều, chẳng hạn một vấn đề được đặt ra là khảo sát số lượng các giao điểm được tạo thành. Có một bài toán tương tự cho các đường thẳng, cần chú ý rằng nếu bỏ qua điều kiện bán kính các đường tròn bằng nhau thì mọi chuyện có lẽ sẽ đơn giản hơn. Giả thiết hơi "giả tạo" đó có thể sẽ khiến cho bài toán trở nên rất khó. Các bạn hãy tiếp tục công việc khảo sát này, có lẽ sẽ còn nhiều điều thú vị đang đợi các bạn.

7.7 Định lí Konig-Hall

Trước hết ta cần nhắc lại một vài hiểu biết về khái niệm cặp ghép trong lý thuyết đồ thị. Cho đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y, U)$, tập cạnh E ($E \subset U$) được gọi là cặp ghép của đồ thị G hay là tập cạnh độc lập trong đồ thị G nếu hai cạnh bất kì thuộc E đều không có đỉnh chung. Nếu cặp ghép lập quan hệ tương ứng một - một giữa tập $A \subset X$ và tập $B \subset Y$ thì ta nói rằng ghép cặp tập A trên tập B hay đã ghép cặp A vào Y.

Định lý Hall-Konig. Trong đồ thị hai mảng vô hướng $G = (X, Y, U)$ ta có thể ghép cặp X vào Y khi và chỉ khi đối với mọi tập $A \subset X$ đều có $|D(A)| \geq |A|$ (Với $D(A)$ là tập hợp các đỉnh trong Y kề với ít nhất một đỉnh trong A).

Chúng ta cũng có thể phát biểu định lí đó theo cách khác như sau: Cho tập $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ và giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập con của A. Gọi một dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là tốt nếu như $x_i \in A_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, và đồng thời $x_i \neq x_j$ với mọi $i \neq j \in \{1, 2, ..., , n\}$. Khi đó điều kiện cần và đủ để tồn tại dãy tốt là với mọi $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ thì $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo $k = |X| + |Y|$. Với $k = 2, 3$ thì hiển nhiên ta có $|X| = 1$ do đó khẳng định đúng. Giả sử bài toán đã đúng với mọi $1 \leq k \leq n$. Ta sẽ chứng minh khẳng định trên cũng đúng cho $k = n + 1 \geq 4$. Thật vậy xét 2 trường hợp:

Nếu với mọi $A \subset X$ ta đều có $|D(A)| \geq |A| + 1$. Khi đó ta lấy một đỉnh $x_0 \in X$ và lấy đỉnh $y_0 \in Y$ kề với x_0. Xét đồ thị G' nhận được từ G khi bỏ đi 2 đỉnh x_0,y_0 và cạnh x_0y_0 thì dễ thấy trong G' với mọi $A \subset X \setminus \{x_0\}$ ta đều có $|D_{G'}(A)| \geq |A|$. Khi đó theo giả thiết quy nạp ta có thể ghép cặp từ $X \setminus \{x_0\}$ vào $Y \setminus \{y_0\}$. Kết hợp thêm cạnh x_0y_0 ta có thể ghép cặp được từ X vào Y.

Nếu tồn tại $A \subset X$ mà $|D(A)| = |A|$. Khi đó đặt $X' \subset X \setminus A$ và xóa hết các cạnh xuất phát từ các đỉnh trong A đồng thời xóa các đỉnh thuộc $D(A)$. Ta thu được đồ thị $G' = (X', Y', U')$. Ta sẽ chứng minh với mọi $B \subset X'$ thì $|D_{G'}(B)| \geq B$. Thật vậy nếu xảy ra $|D_{G'}(B)| < |B|$ thì bằng cách xét tập $A \cup B$ trong G ta sẽ có:

$$|D_G(A \cup B)| = |D_G(A)| + |D_{G'}(B)| < |A| + |B| = |A \cup B|.$$

Vô lí. Do đó theo giả thiết quy nạp ta có thể ghép cặp từ X' vào Y', từ A vào $D(A)$ suy ra có thể ghép cặp từ X vào Y. Như vậy theo nguyên lí quy nạp bài toán đúng với mọi k. Định lí được chứng minh.

Định lí này là một kết quả hay trong lí thuyết đồ thị và có khá nhiều bài toán khác có thể được giải quyết gọn gàng nhờ áp dụng một cách khéo léo bài toán này. Chúng ta hãy cùng nhau xem xét một số vài bài toán như vậy.

Bài toán 7.7.1. *Có 1000 hộp bi, mỗi hộp chứa đúng 10 viên bi. Biết rằng không có 11 viên bi nào cùng màu. Chứng minh rằng có thể lấy từ mỗi hộp một hòn bi sao cho tất cả 1000 viên được lấy ra đều có màu khác nhau.*

LỜI GIẢI. Trước hết ta có nhận xét là với mọi $1 \leq k \leq 1000$ hộp bi trong số 1000 hộp đó thì các viên bi trong k hộp đó có ít nhất là k màu. Thật vậy giả sử tồn tại k hộp bi mà các hòn bi trong k hộp đó chỉ có $k - 1$ màu khác nhau. Theo giả thiết mỗi hộp có 10 viên bi. Do đó trong k hộp có tất cả $10 \times k$ viên bi. Mặt khác lại có không có 11 viên bi nào cùng màu cho nên ta có trong k hộp bi đó có không quá $(k-1) \times 10$ viên bi. Đây là điều vô lí. Nhận xét được chứng minh.

Vậy ta đã đưa bài toán về các điều kiện thỏa mãn định lí nêu trên. Theo đinh lí đó ta có thể chọn được được từ 1000 hộp bi đã cho 1000 viên bi có màu khác nhau, mỗi hộp 1 viên.

Bài toán 7.7.2. *Cho bảng ô vuông $n \times n$. Trong mỗi ô vuông con của bảng có điền một số thực không âm sao cho tổng các số nằm trên mỗi hàng, mỗi cột bất kì trên bảng là 1. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra n ô vuông con không có hai ô nào cùng hàng hay cột mà trong mỗi ô đó đã được điền một số thực dương.*

LỜI GIẢI. Đối với bài toán này ta cần chú ý tới quan hệ giữa các hàng và cột, mỗi ô vuông là giao của một hàng và một cột nên ta xét quan hệ kề nhau như sau. Hàng i và cột j là kề nhau nếu ô giao giữa hàng i và cột j được điền một số thực dương. Chú ý tới điều kiện tồn tại n ô mà không có hai ô nào không nằm trên cùng một hàng hay một cột và trong mỗi ô đều được điền 1 số thực dương. Ta có thể thấy ngay điều đó tương đương với là có thể tìm được n cạnh mà đôi một không có đỉnh chung. Hay là ghép cặp được từ tập các hàng vào tập các cột (theo quan hệ trên). Sử dụng định lí ta chỉ cần k hàng bất kì kề với ít nhất là k cột.

Thật vậy ta giả sử có k hàng mà nó chỉ kề với $m \leq k-1$ cột khi đó ta xét bảng chữ nhật $k \times m$ tạo bởi k hàng và m cột trên. Khi đó ta có tổng các số nằm trên mỗi hàng là bằng 1. Do đó tổng các số viết trên bảng này là k. Tuy nhiên tổng các số nằm trên mỗi cột ≤ 1 do đó tổng các số viết trên bảng không vượt quá $m \leq k-1$ (Vô lí).

Vậy k hàng bất kì đều kề với ít nhất k cột nên theo định lí suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 7.7.3. *Cho $2n$ đại biểu đến từ n quốc gia, mỗi quốc gia có đúng 2 đại biểu. Biết rằng họ ngồi trên một bài tròn. Chứng minh rằng ta có thể chia họ thành 2 nhóm, mỗi nhóm gồm n đại biểu đến từ n nước mà không có 3 người nào ngồi cùng nhau liên tiếp.*

LỜI GIẢI. Ta đánh số $2n$ người đó theo thứ tự theo chiều quay của kim đồng hồ. Và chia họ thành n cặp $(1, 2), \ldots, (2n-1, 2n)$. Bây giờ ta chứng minh có thể lấy từ mỗi cặp một người sao cho n người được lấy ra đến từ n nước khác nhau. Thật vậy ta có mỗi cặp gồm 2 người và mỗi nước có 2 đại biểu cho nên theo bài toán 7.7.1 ta có thể chọn ra từ mỗi cặp một người sao cho n người đó đến từ n nước khác nhau. Rõ ràng là khi đó n người còn lại cũng đến từ n nước khác nhau và dễ thấy không có ba người nào thuộc cùng một nhóm ngồi cạnh nhau liên tiếp. Đây là điều phải chứng minh.

Bài toán 7.7.4. *Trong một hội nghị có 100 đại biểu đến từ 25 quốc gia khác nhau, mỗi quốc gia có đúng 4 đại biểu. Biết rằng họ ngồi trên một bàn tròn. Chứng minh rằng có thể chia họ thành 4 nhóm phân biệt, mỗi nhóm gồm 25 đại biểu của 25 nước mà không có hai đại biểu nào cùng một nhóm ngồi cạnh nhau.*

LỜI GIẢI. Theo bài toán 7.7.3 ta có thể chia 100 người đó thành 2 nhóm sao cho mỗi nhóm gồm 50 người đến từ 25 nước, mỗi nước gồm 2 người. Sao cho không có 3 người nào cùng một nhóm ngồi cạnh nhau liên tiếp. Bây giờ ta xét 50 người trong nhóm lớn thứ nhất, do không có 3 người nào ngồi cạnh nhau liên tiếp nên ta có thể chia 50 người đó thành 25 cặp mà hai người thuộc 2 cặp khác nhau thì không ngồi cạnh nhau. Theo bài toán 7.7.3 ta có thể chia 50 người này thành 2 nhóm mà mỗi nhóm có đúng 25 người đến từ 25 nước khác nhau và không có hai người nào cùng một cặp ở trong cùng nhóm. Dễ thấy không có hai người nào trong cùng một nhóm ngồi cạnh nhau. Tương tự cho nhóm lớn còn lại. Ta có 100 người đã được chia thành 4 nhóm sao cho mỗi nhóm có 25 đại biểu đến từ 25 nước khác nhau và không có hai người nào cùng nhóm ngồi cạnh nhau. Điều phải chứng minh.

Cuối cùng các bạn hãy sử dụng định lí $Hall - Konig$ để giải một số các bài toán sau đây:

Bài toán 7.7.5. *Trong một cuộc khiêu vũ có n ông và n bà. Biết rằng mỗi ông quen đúng k bà và mỗi bà quen đúng k ông (k là số nguyên dương cho trước). Chứng minh rằng ta có thể chia họ thành n cặp nhảy sao cho mỗi người đều nhảy với người mà mình quen.*

Bài toán 7.7.6. *Cho bảng ô vuông $n \times n$. Giả sử các ô vuông đơn vị của một bảng con $n \times k\,(k < n)$ của bảng đã được tô bởi $\leq n$ màu (mỗi màu sử được tô cho không quá n ô) thỏa mãn không có hai ô nào cùng màu cùng nằm trên một hàng hay một cột. Chứng minh rằng ta có thể tô màu tiếp các ô còn lại của bảng bởi n màu đó sao cho mỗi màu được tô cho đúng n ô và không có hai ô nào cùng màu nằm trên cùng một hàng hay một cột.*

Bài toán 7.7.7. *Cho bảng $n \times n$ biết mỗi ô vuông con của bảng được điền một số tự nhiên sao cho hai hàng bất kì đều khác nhau. Chứng minh rằng ta có thể xóa đi một cột mà bảng $n \times (n-1)$ thu được vẫn có tính chất trên.*

7.8 Định lý *Erdos* - *Skerezes*

Định lý *Erdos* **-** *Skerezes***.** Số $Ramsey$ $R(m,n)$ với $m, n \in N$ là số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn tính chất trong $R(m,n)$ người bất kỳ đều tồn tại ít nhất m người đôi một quen nhau hoặc tồn tại ít nhất n người đôi một không quen nhau. Khi đó với mọi $m, n \in Z, m, n \geq 2$ ta có bất đẳng thức sau $R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$.

Hệ quả. Với m, n là các số nguyên lớn hơn 2 ta có:

$$R(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}.$$

Chứng minh. Đặt $a = R(m-1,n) + R(m,n-1)$. Xét a người bất kỳ, ký hiệu mỗi người tương ứng với một điểm trên mặt phẳng, hai người quen nhau được nối với nhau bằng màu xanh, ngược lại nếu không quen nhau thì hai điểm tương ứng với hai người được nối bằng màu đỏ. Xét một người A bất kỳ trong a người này. Giả sử số cạnh màu xanh (tương ứng đỏ) xuất phát từ đỉnh này là u (tương ứng v). Như vậy ta có $u+v = a-1 = R(m-1,n)+R(m,n-1)-1$

$$\Longrightarrow [v - R(m,n-1)] + [u - R(m,n-1)] = -1.$$

Do hai số hạng trong ngoặc vuông ở trên đều là những số nguyên suy ra tồn tại ít nhất một trong hai số đó không âm. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: nếu $v - R(m,n-1) \geq 0$ suy ra $v \geq R(m,n-1)$. Do đó trong v người tương ứng với v đỉnh này có m người quen nhau hoặc $n-1$ người không quen nhau. Mà A không quen với bất kỳ người nào trong số v người này nên trong a người có m người quen nhau hoặc n người không quen nhau.

Trường hợp 2: nếu $u - R(m-1,n) \geq 0$ suy ra $u \geq R(m-1,n)$. Do đó trong tập u người này có $m-1$ người quen nhau hoặc n người không quen nhau. Mà A quen với tất cả u người này suy ra trong a người có thể chỉ ra m người quen nhau hoặc n người không quen nhau.

Kết hợp hai trường hợp trên ta suy ra $R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$.

Từ các khẳng định trên ta dễ dàng suy ra rằng trong $\binom{2n}{n}$ luôn có n người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau. Bên cạnh đó có thể thấy ngay rằng việc đánh giá các số $R(m,n)$ như trên là khá lỏng, tất nhiên trong từng trường hợp riêng có thể chỉ ra những sự đánh giá chặt chẽ hơn nhưng khi đó cần phải có những kỹ thuật tinh tế hơn, dưới đây là một ví dụ như thế cùng với 2 cách chứng minh của nó.

Bài toán. Chứng minh rằng trong 18 người tuỳ ý luôn tồn tại 4 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau.

Rõ ràng đây là đánh giá chặt chẽ hơn cho số $R(4,4)$, bởi vì $\binom{4+4-2}{4-1} = \binom{6}{3} = 20 > 18$.

LỜI GIẢI 1. Ký hiệu mỗi người là một điểm trên mặt phẳng và tô màu các đoạn thẳng nối hai điểm trong số các điểm đó bởi một trong hai màu xanh, đỏ. Xét một điểm A_1 nối với 17 điểm còn lại bằng hai màu, suy ra tồn tại chín điểm được nối với A_1 bởi cùng một màu, giả sử $A_1A_2, ..., A_1A_{10}$ được tô bởi cùng một màu xanh. Nếu tồn tại một tam giác ó ba cạnh cùng màu xanh là $A_iA_jA_k$ với $2 \leq i < j < k \leq 10$ thì 4 điểm A_1, A_i, A_j, A_k cùng nối bằng màu xanh. Ngược lại nếu mọi bộ bốn điểm A, A_i, A_j, A_k đều tồn tại một cạnh đỏ nối chúng thì ta sẽ chứng minh rằng tồn tại bốn điểm được nối với nhau bằng cùng một màu đỏ. Xét 9 điểm $A_2, A_3, ..., A_{10}$, A_2 được nối với 8 điểm còn lại bởi hai màu. Xét hai trường hợp.

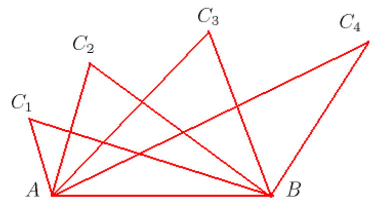
Trường hợp 1: tồn tại không ít hơn 4 điểm nối với A_2 bằng màu xanh, giả sử đó là A_3, A_4, A_5, A_6 thì các tam giác dạng $A_2A_mA_n$ với $3 \leq m < n \leq 6$ có các cạnh A_2A_m, A_2A_n xanh suy ra A_mA_n đỏ, vậy bốn điểm A_3, A_4, A_5, A_6 được nối bởi toàn cạnh đỏ.

Trường hợp 2: tại mọi đỉnh A_i với $i = \overline{2,10}$ đều có không ít hơn 5 cạnh đỏ, nhưng do tổng số cạnh đỏ nối 9 điểm này là một số chẵn (tính cả lặp nên mỗi cạnh đỏ được tính 2 lần), nhưng $9.5 = 45$ lại là số lẻ suy ra tồn tại một điểm nối với ít nhất 6 cạnh đỏ. Giả sử đó là $A_2A_3, ..., A_2A_8$. Xét điểm A_3 nối với A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 có ít nhất 3 điểm nối với A_3 bởi cùng một màu, chẳng hạn A_3A_4, A_3A_5, A_3, A_6 cùng màu. Nếu tồn tại A_4A_5, A_4A_6 hoặc A_5A_6 cùng màu với A_3A_4 thì tồn tại tam giác cùng màu, ngược lại thì tam giác $A_4A_5A_6$ cùng màu. Như vậy từ 6 điểm $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ luôn có ít nhất một tam giác cùng màu, theo tính chất tồn tại ít nhất một cạnh đỏ xác định ở trên thì tam giác cùng màu này phải là màu đỏ, giả sử đó là $\Delta A_3A_4A_5$. Khi đó bốn điểm A_2, A_3, A_4, A_5 đôi một nối với nhau bằng màu đỏ.

Bài toán được chứng minh xong.

Lời giải trên đây là những suy luận thông thường dựa trên nguyên lý *Dirichlet*. Chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn một lời giải nữa, lời giải dưới đây có sử dụng một kết quả sẽ được chứng minh trong bài viết về mở rộng bài toán 6 người sẽ được trình bày ở cuối tài liệu.

LỜI GIẢI 2. Sử dụng cách tô màu như ở cách 1, áp dụng định lý về số tam giác cùng màu (được chứng minh ở phần cuối tài liệu) ta suy ra có ít nhất $18.(18-2)(18-4)/2 = 168$ tam giác cùng màu từ 18 điểm này. Từ đó suy ra có ít nhất $168.3/18 = 28$ đỉnh của 168 tam giác cùng màu trùng nhau, nghĩa là có ít nhất một điểm là đỉnh chung của ít nhất 28 tam giác cùng màu. Tiếp tục suy ra có ít nhất $28.2/17 > 3$ cạnh của 28 tam giác cùng màu trùng nhau hay là tồn tại một đoạn AB là cạnh chung của ít nhất 4 tam giác cùng màu. Gọi 4 đỉnh còn lại của bốn tam giác cùng màu đó là C_1, C_2, C_3, C_4.



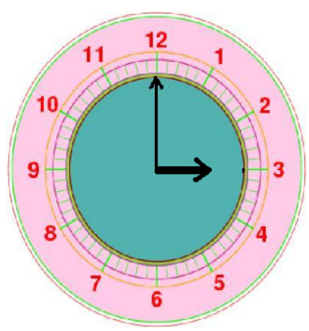
Nếu tồn tại C_i, C_j cùng màu với AB thì A, B, C_i, C_j được nối bởi cùng một màu.

Nếu mọi đoạn C_iC_j đều khác màu với AB thì C_1, C_2, C_3, C_4 được tô bởi cùng một màu.

Vậy trong cả hai trường hợp thì ta đều có thể chỉ ra bốn người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau, và như vậy bài toán đã được chứng minh hoàn toàn.

7.9 Một số bài toán khác

Bài toán 7.9.1 (Bài toán cái đồng hồ). *Đối với chiếc đồng hồ treo tường, chúng ta quan sát hai kim giờ và phút. Tất cả các vị trí mà cặp hai kim này tạo thành trong một nửa ngày được gọi là hợp lý. Đếm số vị trí hợp lý mà nếu đổi chỗ vị trí hai kim ta vẫn được giờ hợp lý.*



LỜI GIẢI. Chúng ta sử dụng một trục toạ độ để biểu thị vị trí của hai kim:

Giả sử kim giờ chỉ x giờ, kim phút chỉ y phút. Vì kim phút chạy nhanh gấp 12 lần kim giờ nên điều kiện để vị trí (x, y) hợp lý là $y = 12\{x\}$. Và do đó để giờ vẫn đúng khi thay đổi vị trí hai kim thì phải có $x = 12\{y\}$. Giải hệ hai phương trình này như sau: (chú ý $(0,0) \equiv (12,12)$)

$$\frac{x}{144} = \frac{\{y\}}{12} = \frac{y}{12} - \frac{[y]}{12} = \{x\} - \frac{[y]}{12} \Longrightarrow x = 144\{x\} - 12[y] \Longrightarrow [x] + 12[y] = 143\{x\}.$$

Vậy $\{x\} = k/143$ với $k = 0, 1, ..., 142 \Longrightarrow y = 12k/143$. Giả sử $12k = 143p + q$ với $0 \le q \le 142$ $\Longrightarrow \{y\} = q/143 \Longrightarrow x = 12q/143$. Ta phải chứng minh rằng $\{12q/143\} = k/143$, điều này tương đương với $143|12q - k \Longleftrightarrow 143|12(12k - 143p) - k \Longleftrightarrow 143|143k - 12.143p$ (luôn đúng).

Vậy có tất cả 143 thời điểm "hợp lý" trong nửa ngày.

LỜI BÌNH. Chủ đề về chiếc đồng hồ còn khá nhiều, chẳng hạn một câu hỏi là trong ngày có thời điểm nào mà nếu đổi chỗ 3 kim (giờ, phút, giây) cho nhau ta lại được một giờ hợp lý hay không. Ngoài ra liệu 3 kim đó có thể tạo với nhau các góc 120^0 hay không. Đây đều là các câu hỏi không quá khó nhưng tương đối thú vị, việc giải quyết chúng xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 7.9.2. *Trong mặt phẳng cho* 2001 *điểm, không có* 3 *điểm nào thẳng hàng. Một số cặp điểm được nối với nhau bởi các đoạn thẳng sao cho mỗi điểm được nối với ít nhất* 1601 *điểm khác. Chứng minh rằng trong những điểm nói trên sẽ có* 6 *điểm đôi một được nối với nhau, hơn nữa nếu số* 1601 *đổi thành* 1600 *thì kết quả không còn đúng nữa.*

LỜI GIẢI. Gọi n là giá trị lớn nhất của tập hợp các số chỉ số lượng của những tập điểm đôi một được nối với nhau. Xét $n < 2001$. Khi đó vì với mỗi điểm trong tập con n điểm này thì có không nhiều hơn $2001 - 1 - 1601 = 399$ điểm không được nối với điểm ấy. Do đó tập những điểm mà không được nối với ít nhất một trong n điểm nói trên thì có số phần tử $\leq 399.n$.

Nếu $399n < 2001 - n$ thì chắc chắn còn một điểm nữa được nối với tất cả n điểm này, trái với giả thiết về tính cực đại của n. Vậy ta phải có $399n \geq 2001 - n \Longrightarrow n \geq 2001/400 > 5$ do đó $n \geq 6$. Điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh rằng khi thay 1601 bởi 1600 thì có cách nối mà trong cách nối đó trong mọi bộ 6 điểm đều tồn tại một cặp điểm được nối với nhau. Gọi các điểm đó là $\{A_i | i = 1, 2, .., 2001\}$. Ta nối A_iA_j khi và chỉ khi $i \not\equiv j \mod 5$. Rõ ràng với cách nối này thì mỗi điểm được nối đúng với 1600 điểm khác, mà trong 6 số tuỳ ý luôn có hai số đồng dư với nhau modulo 5, nên hai điểm có chỉ số tương ứng sẽ không nối với nhau.

LỜI BÌNH. Kỹ thuật sử dụng trong bài toán này gọi là nguyên lý cực đại, hay là khởi đầu cực trị. Nội dung của nguyên lý này là trong một tập hữu hạn số luôn có số nhỏ nhất và số lớn nhất. Ngoài ra bài toán này có thể tổng quát một cách dễ dàng như sau.

Bài toán 7.9.3 (Tổng quát). *Cho tập hợp S điểm ($S > 1$) trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và mỗi điểm được nối với ít nhất M điểm khác ($S < M$). Chứng minh rằng tồn tại* $\left[\dfrac{S-1}{S-M}\right] + 1$ *điểm đôi một được nối với nhau.*

Sử dụng bài toán này chúng ta có thể giải quyết bài toán sau không mấy khó khăn:

Bài toán 7.9.4 (TST VMO 2004). *Xét tập hợp $S = \{a_1 < a_2 < ... < a_{2004}\}$, với mỗi phần tử $a_i \in S$ ta gọi $f(a_i)$ là số lượng các phần tử của S mà nguyên tố cùng nhau với a_i. Giả thiết rằng $f(a_i) < 2003$ và $f(a_i) = f(a_j)$ với mọi $1 \leq i, j \leq 2004$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất là với mọi tập con k phần tử của S đều chứa hai phần tử mà ước chung lớn nhất của chúng lớn hơn* 1.

Bài toán 7.9.5. *Giả sử A là một tập hợp có n phần tử và $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập con có không ít hơn 2 phần tử của A. Giả sử với mọi phần tử $x, y \in A$ đều tồn tại duy nhất i thoả mãn $x, y \in A_i$. Chứng minh rằng $|A_i \cap A_j| = 1$ với mọi $1 \leq i < j \leq n$.*

LỜI GIẢI. Đặt $|A_i| = a_i$ với $i = 1, 2, .., n$. Giả sử $A = \{1, 2, .., n\}$, d_i là số tập hợp A_j chứa i. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} d_i. \tag{7.1}$$

$$\sum |A_i \cap A_j| = \sum \binom{d_i}{2}. \tag{7.2}$$

Mặc khác do với mọi phần tử $x, y \in A$ đều tồn tại duy nhất i thoả mãn $x, y \in A_i$ nên ta xét số cặp (x, y, Z_i) với $x, y \in A_i$ suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2} = \binom{n}{2}. \tag{7.3}$$

Các công thức $(7.1), (7.2), (7.3)$ được gọi là các nội công thức. Bây giờ ta cần phải thiết lập được các hệ thức riêng khác. Giả sử rằng $A_m = \{s_1, s_2, ..., s_p\}$, với $b \notin A_m$ suy ra có p tập khác chứa $\{b, s_i\} \Longrightarrow d_b \geq p$. Do đó $d_i \geq a_j$ với mọi $i \notin A$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j, i \notin A_j} \frac{d_i}{n - d_i}}_{\text{có } n - d_i \text{ giá trị } j} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i, i \notin A_j} \frac{a_j}{n - a_j}}_{\text{có } n - c_j \text{ giá trị } i} = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Để có đẳng thức ta phải có $d_i = a_j$ với mọi $i \notin A_i$. Từ đó dễ có $\sum \binom{d_i}{2} = \binom{n}{2}$ suy ra $\sum |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}$, mà $|A_i \cap A_j| \leq 1$ suy ra $|A_i \cap A_j| = 1$ với mọi i, j.

Lời Bình. Phương pháp được sử dụng trong bài toán này có thể tạm gọi tên là phương pháp độc lập chuyển động, ý tưởng của nó là khi phải khảo sát quá nhiều đối tượng chúng ta có thể tạm cố định một số biến lại và tận dụng tính độc lập (bình đẳng) của các biến đó rồi khảo sát một số ít biến hơn. Việc tổng hợp các "chuyển động" vừa khảo sát được sẽ cho chúng ta một đánh giá đầy đủ về tất cả các biến ban đầu. Dưới đây là hai bài toán minh họa:

Bài toán 7.9.6. *Xét các số nguyên dương n, k, m thoả mãn $n > 2k$. S là tập gồm các tập con k phần tử của $\{1, 2, ..., n\}$ mà với mọi tập con $k + 1$ phần tử khác rỗng của $\{1, 2, ..., n\}$ chứa đúng m phần tử của S.*

Bài toán 7.9.7. *Tại một cuộc họp có $12k$ người, mỗi người trao đổi lời chào với đúng $3k + 6$ người khác, với hai người bất kỳ nào đó, số người trao đổi lời chào với cả hai người này là như nhau. Xác định k.*

Chương 8

Góc cùng màu

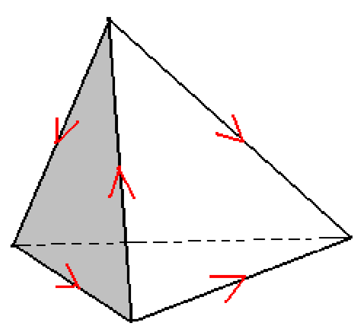
Nguyễn Quốc Khánh & Lê Hồng Quý

Giới thiệu. Trong Toán Học việc tìm ra một khái niệm mới có thể sẽ giúp chúng ta nhìn nhận những kết quả cũ một cách rõ ràng và sâu sắc hơn. Hơn nữa rất có thể nhờ đó chúng ta sẽ tạo ra được những kết quả mới mẻ, ý nghĩa. Trong bài viết này, chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn một khái niệm có nhiều ứng dụng trong tổ hợp, đó là khái niệm về góc cùng màu.

8.1 Khái niệm góc cùng màu

Chúng ta cùng bắt đầu với một số ví dụ.

Bài toán 8.1.1. *Một đa diện lồi trong không gian có tất cả các mặt đều là hình tam giác. Đối với cạnh AB bất kì của đa diện, chúng ta đánh dấu mũi tên theo chiều từ A đến B hoặc từ B đến A sao cho tại một đỉnh bất kì đều có ít nhất một mũi tên đi vào và một mũi tên đi ra. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một mặt ABC của đa diện mà các mũi tên trên các cạnh của mặt đó đi theo cùng một chiều.*



LỜI GIẢI. Gọi D, M, C lần lượt là số đỉnh, số mặt và số cạnh của đa diện lồi trong giả thiết. Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra khái niệm: góc $\widehat{ABC}$ được gọi là góc cùng màu nếu và chỉ nếu hai cạnh AB, BC được đánh dấu mũi tên theo cách có một mũi tên đi vào B và một đi ra từ B. Giả sử phản chứng rằng có một cách vẽ mũi tên mà không có mặt nào của đa diện có các mũi tên đi cùng một chiều. Đếm số góc cùng màu trong cách tô đó theo hai cách.

Chúng ta biết rằng mỗi mặt của đa diện đều là hình tam giác, mà theo giả sử phản chứng thì các mũi tên trên các cạnh của tam giác đó không đi cùng chiều. Do đó trên mỗi mặt chỉ có đúng 1 góc cùng màu. Và như thế có tổng cộng M góc cùng màu.

Mặt khác xét một đỉnh bất kì của đa diện, giả sử tại đỉnh đó có x mũi tên đi ra và y mũi tên đi vào với $x \geq y$. Theo giả thiết thì $x, y \geq 1$. Số góc cùng màu tại đỉnh này sẽ là xy. Chú ý thêm rằng $xy - (x+1)(y-1) = x - y + 1 \geq 0$. Do đó tại một đỉnh bậc n (tức là có đúng n cạnh có một đầu mút là đỉnh này) thì có ít nhất $n-1$ góc cùng màu. Do đó số góc cùng màu sẽ không bé hơn $2C - D$.

Vậy ta có bất đẳng thức $M \geq 2C - D$. Ngoài ra chúng ta đều đã biết hệ thức Euler đối với các đa diện lồi $D + M = C + 2$. Kết hợp hai sự kiện này $\Longrightarrow D + M \geq 2C \Longrightarrow 2 \geq C$. Bất đẳng thức này rõ ràng sai nên giả sử phản chứng cũng sai. Như vậy điều phải chứng minh là đúng. Bài toán đã được chứng minh xong hoàn toàn.

Lời Bình. Bài toán này là một kết quả đáng ngạc nhiên mặc dù cách phát biểu của nó rất giản dị. Cách giải sử dụng khái niệm góc cùng màu trên đây cũng vậy. Chúng tôi thực sự không biết ngoài cách giải vừa trình bày ở trên liệu có còn một lời giải sơ cấp đẹp đẽ khác hay không. Theo một cách nào đó, có thể nói rằng đây là một ví dụ đẹp nhất để thể hiện cho khái niệm mới mẻ này. Tuy nhiên một ví dụ đẹp không phải lúc nào cũng làm tròn nhiệm vụ của nó. Chính vì vậy chúng tôi muốn cùng các bạn quay lại với hai bài toán khá cổ điển sau đây. Một bài là đề thi IMO năm 1998, còn bài kia cũng đã xuất hiện trong một kì thi IMO từ cách đây hơn 20 năm. Chúng ta cùng đi vào chi tiết 2 bài toán.

Bài toán 8.1.2. *Trong một cuộc thi có a thí sinh và b giám khảo, với b là số nguyên dương lẻ, $b \geq 3$. Mỗi giám khảo sẽ đánh giá mỗi thí sinh theo hai mức rớt hoặc đậu. Gọi k là số nguyên dương có tính chất nếu lấy 2 giám khảo tuỳ ý thì đánh giá của 2 vị giám khảo này có kết quả trùng nhau nhiều nhất là cho k thí sinh. Chứng minh rằng:*

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

lời giải. Trước hết ta dịch bài toán ra ngôn ngữ dồ thị, là ngôn ngữ thích hợp hơn với khái niệm góc cùng màu của chúng ta. Mỗi giám khảo và mỗi thí sinh được coi như một điểm. Khi đó với giám khảo A và thí sinh B, tô đỏ đoạn thẳng AB nếu giám khảo A cho thí sinh B đậu, và tô màu xanh trong trường hợp ngược lại. Lại đếm số góc cùng màu S theo hai cách.

Chúng ta biết rằng mỗi cặp giám khảo có chung đánh giá đối với nhiều nhất k thí sinh, vì thế có không quá k góc cùng màu có hai đầu mút hai cạnh góc là hai giám khảo này. Có tất cả C_b^2 cặp giám khảo, do đó ta có:

$$S \leq \frac{kb(b-1)}{2}. \tag{8.1}$$

Bây giờ xét một thí sinh bất kì. Giả sử có x giám khảo cho thí sinh đó đậu và còn lại $b - x$ giám khảo cho rớt. Như vậy số góc cùng màu nhận thí sinh này làm đỉnh góc sẽ là:

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(b-x)(b-x-1)}{2} = \frac{2x^2 - 2bx + b^2 - b}{2}$$

$$= (x - \frac{b}{2})^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \geq \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Chú ý là b là số nguyên lẻ do đó $(b-1)^2/4$ là số nguyên, vậy số góc cùng màu nhận thí sinh này làm đỉnh góc sẽ không bé hơn $(b-1)^2/4$. Và do đó:

$$S \geq \frac{a(b-1)^2}{4}. \tag{8.2}$$

Kết hợp hai kết quả vừa thu được (8.1) và (8.2) ta suy ra rằng:

$$\frac{kb(b-1)}{2} \geq \frac{a(b-1)^2}{4} \Longrightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Bài toán 8.1.3. *Giả sử k, n là hai số nguyên dương và S là tập hợp n điểm trên mặt phẳng thoả mãn tính chất mọi bộ ba điểm trong số đó đều không thẳng hàng, và với mỗi điểm P có ít nhất k điểm phân biệt của S cách đều P. Chứng minh rằng:*

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

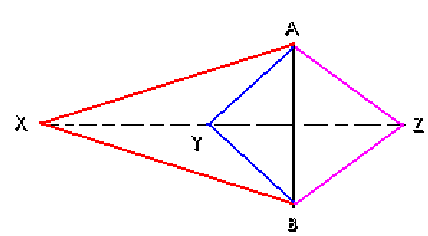
LỜI GIẢI. Chúng ta quy ước một góc được gọi là cùng màu nếu góc có hai cạnh bằng nhau. Ta sẽ ước lượng tổng số góc cùng màu T tạo bởi tập hợp S theo hai cách.

Một mặt với mỗi điểm của S có ít nhất k điểm phân biệt của S cách đều nó, vì thế tại đỉnh đó có không ít hơn C_k^2 góc cùng màu. Vì thế ta có đánh giá:

$$T \geq nC_k^2. \tag{8.3}$$

Mặt khác đối với cặp hai điểm $A, B \in S$ có không quá 3 góc cùng màu nhận hai điểm đó làm đầu mút hai cạnh. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng $\widehat{AXB}, \widehat{AYB}, \widehat{AZB}$ là 3 góc cùng màu phân biệt. Khi đó rõ ràng cả 3 điểm X, Y, Z đều nằm trên đường trung trực của AB, và vì thế chúng thẳng hàng. Điều này trái với giả thiết của bài toán rằng trong tập S không có bộ 3 điểm nào thẳng hàng. Vậy đối với một cặp điểm A, B trong S có nhiều nhất 2 góc cùng màu $\widehat{AXB}, \widehat{AYB}$ nhận A, B làm đầu mút hai cạnh góc. Từ đây ta có:

$$T \leq 2C_n^2. \tag{8.4}$$



Kết hợp hai đánh giá (8.3), (8.4) vừa thu được ta có $2C_n^2 \geq nC_k^2$ và suy ra:

$$n(n-1) \geq \frac{nk(k-1)}{2} \Longrightarrow k^2 - k - \frac{1}{4} < 2n - 2 < 2n$$

$$\Longrightarrow (k - \frac{1}{2})^2 < 2n \Longrightarrow k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Rõ ràng ý tưởng để giải hai bài toán trên thực ra không quá mới. Tuy nhiên nhờ sử dụng khái niệm góc cùng màu mà lời giải trở nên vô cùng sáng sủa. Điều đó cho thấy rằng khái niệm góc cùng màu thực ra đã tiềm ẩn trong suy nghĩ của chúng ta từ rất lâu, hai bài toán trên có vai trò cụ thể hoá ý tưởng này. Và kết quả của sự cụ thể hoá đó thật là thú vị, nhờ có khái niệm mới góc cùng màu mà hai bài toán cổ điển có thể nhìn nhận theo một cách mới nhẹ nhàng và đẹp đẽ hơn.

Về mặt toán học thì góc cùng màu có thể hiểu đơn giản là một bộ ba các đối tượng có kèm theo một số tính chất nào đó. Và như vậy toàn bộ công việc của chúng ta là ghép một số đối tượng thành một bộ và khảo sát các tính chất của bộ đó theo nhiều cách khác nhau. Các bạn hãy sử dụng khái niệm này để giải quyết một số bài toán sau đây:

Bài toán 8.1.4 (IMO Shortlist 1986). *Cho* 5 *số có* 100 *chữ số được tạo thành bởi* 1 *và* 2. *Ta xếp các số đó thẳng nhau theo các hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, ... Biết rằng hai số bất kỳ trong* 5 *số đó đều có chung ít nhất r hàng và mỗi hàng sau khi xếp đều chứa đủ hai chữ số* 1 *và* 2. *Chứng minh rằng* $40 \leq r \leq 60$.

Bài toán 8.1.5. *Cho bảng vuông T kích thước $(n^2+n+1).(n^2+n+1)$ với n là một số nguyên dương. Hãy tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho có thể tô màu k ô vuông đơn vị của T mà trong số các ô được tô không có* 4 *ô nào có tâm tạo thành bốn đỉnh của một hình chữ nhật.*

Bài toán 8.1.6 (IMO Shortlist 2004). *Trong một trường đại học có n sinh viên với n là một số tự nhiên lẻ. Các sinh viên tham gia các câu lạc bộ (một sinh viên có thể tham gia nhiều câu lạc bộ). Các câu lạc bộ có thể kết hợp với nhau tạo thành các hội đồng (mỗi câu lạc bộ có thể thuộc về nhiều hội đồng khác nhau). Có đúng k hội đồng và giả sử thêm rằng:*
(i) Mỗi cặp sinh viên cùng thuộc về đúng một câu lạc bộ.
(ii) Với mỗi sinh viên và một hội đồng thì sinh viên đó thuộc về đúng một câu lạc bộ trong hội đồng.
(iii) Mỗi câu lạc bộ có lẻ sinh viên. Và nếu câu lạc bộ đó $2m+1$ sinh viên thì nó thuộc về đúng m hội đồng.
Hãy tìm tất cả các giá trị có thể của k.

Bài toán 8.1.7 (IMO 2005). *Trong một kỳ thi có n thí sinh và có* 6 *bài toán. Biết rằng không có thí sinh nào giải hết* 6 *bài và với hai bài toán bất kỳ thì có nhiều hơn $2n/5$ thí sinh giải được cả hai bài toán đó. Chứng minh rằng có tí nhất hai thí sinh giải được* 5 *bài toán.*

THAY CHO LỜI KẾT. Một khái niệm mới có thể giúp chúng ta soi sáng các kết quả cũ. Tuy nhiên đó không phải tất cả, việc tạo ra một khái niệm mới có thể đem so sánh với vai trò của một công cụ mới. Công cụ này rất có thể sẽ giúp ta công phá các vấn đề khó đã từng được đặt ra từ trước khi khái niệm đó ra đời. Trong bài viết tiếp theo chúng tôi sẽ sử dụng một kết quả kinh điển khác để thể hiện điều này một cách cụ thể hơn, kết quả mà chúng tôi sẽ sử dụng thường được biết dưới cái tên bài toán 6 người. Dưới đây là cách phát biểu của bài toán đó:

Bài toán 8.1.8 (Bài toán 6 người). *Trong một nhóm* 6 *học sinh cùng trường luôn có thể chọn ra một nhóm* 3 *học sinh mà* 3 *học sinh này hoặc học cùng một lớp hoặc học ở* 3 *lớp khác nhau.*

Bài toán này như đã biết có rất nhiều hướng phát triển. Trong bài viết sau chúng tôi sẽ giải quyết vấn đề đếm số bộ ba có tính chất đặc biệt nêu trên khi thay 6 bởi n bất kỳ.

8.2 Mở rộng bài toán 6 người

Trong bài viết này tôi sẽ sử dụng khái niệm góc cùng màu đã được đề cập tới trong kỳ trước để giải quyết một bài toán mở rộng của bài toán 6 người cổ điển. Đây cũng là một phần nhỏ trong lớp rất rộng các bài toán dạng $Turan$.

Bài toán 8.2.1 (Bài toán 6 người). *Trong một nhóm* 6 *học sinh cùng trường luôn có thể chọn ra một nhóm* 3 *học sinh mà* 3 *học sinh này hoặc học cùng một lớp hoặc học ở* 3 *lớp khác nhau.*

LỜI GIẢI. Ta dịch bài toán về ngôn ngữ dồ thị, 6 thí sinh tương ứng với 6 điểm phân biệt trong không gian với điều kiện không có bộ 3 điểm nào trong chúng đồng phẳng. Khi đó với 2 điểm bất kì A, B ta tô đỏ đoạn thẳng AB nếu A, B học cùng lớp và tô màu xanh trong trường hợp ngược lại. Cần chứng minh với mọi cách tô tồn tại tam giác có ba cạnh được tô cùng 1 màu.

Giả sử phản chứng rằng có một cách tô mà trong cách tô đó không tồn tại tam giác cùng màu nào cả. Gọi 6 điểm đó là A, B, C, D, E, F, 5 cạnh xuất phát từ đỉnh A là AB, AC, AD, AE, AF được tô bằng 2 màu đỏ và xanh. Theo nguyên lý $Dirichlet$ thì sẽ tồn tại ít nhất 3 cạnh được tô cùng một màu. Giả sử AB, AC, AD cùng là màu đỏ, do 3 tam giác ABC, ACD, ADB đều không phải tam giác cùng màu suy ra BC, CD, DB đều phải tô màu xanh, nhưng như vậy tam giác BCD lại là một tam giác cùng màu. Mâu thuẫn chứng tỏ giả sử phản chứng là sai. Nghĩa là với mọi cách tô đều tồn tại ít nhất một tam giác cùng màu.

Có một kết quả mạnh hơn khá nhiều, đó là với mọi cách tô như trên sẽ tồn tại ít nhất hai tam giác cùng màu. Với cùng cách thức như trên có thể chứng minh kết quả này mặc dù khá phức tạp vì phải xét xét quá nhiều các trường hợp. Cần chú ý thêm rằng đối với bài toán sau đây chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng những suy luận kiểu như vậy để giải quyết.

Bài toán 8.2.2. *Trong không gian cho* 7 *điểm với giả thiết trong chúng không có* 3 *điểm nào đồng phẳng. Tô màu tất cả các đoạn nối* 2 *điểm bất kì trong số các điểm đó bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng với mọi cách tô như vậy ta đều có thể tìm được ít nhất* 4 *tam giác có ba cạnh được tô bởi cùng một màu.*

Tất nhiên chúng ta sẽ không đi vào chi tiết, bởi vì sau khi giải quyết bài toán 7 điểm, biết đâu lại chẳng xuất hiện bài toán $8, 9$ hay nhiều điểm hơn nữa. Một người làm toán thông minh chắc chắn không giải từng bài toán riêng lẻ kiểu như vậy nữa mà họ sẽ đặt ra bài toán tổng quát và đi tìm những cách giải tổng quát hơn. Hãy đặt ra một bài toán tổng quát hơn để tấn công nó, và nhớ rằng giải một bài toán tổng quát đôi khi dễ dàng hơn việc cố tìm một lời giải trong một trường hợp riêng lẻ. Với trường hợp của chúng ta đây là một lời khuyên tốt.

Bài toán 8.2.3. *Trong không gian cho n điểm mà trong chúng không có* 4 *điểm nào đồng phẳng. Tô tất cả các đoạn thẳng nối* 2 *điểm bất kì trong số các điểm đó bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Tìm số lớn nhất $f(n)$ sao cho với mọi cách tô như thế đều có thể tìm được ít nhất $f(n)$ tam giác cùng màu.*

LỜI GIẢI. Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_n$.

Để giải bài toán toán này rõ ràng những phép suy luận "ngây thơ" sẽ không đem lại hiệu quả. Chúng ta sẽ sử dụng khái niệm góc cùng màu để đưa ra một lời giải sáng sủa. Cần phải nhắc lại rằng góc $\widehat{ABC}$ được gọi là cùng màu nếu như 2 cạnh AB, BC được tô bởi cùng 1 màu. Gọi tổng số góc cùng màu trong một cách tô nào đó là T, ta sẽ ước lượng T theo hai cách sau đây.

Giả sử trong cách tô đó có x tam giác cùng màu, mỗi tam giác như thế cho 3 góc cùng màu, những tam giác khác chỉ cho đúng 1 góc cùng màu. Do đó ta có:

$$T = 3x + (C_n^3 - x) = C_n^3 + 2x. \tag{8.5}$$

Bây giờ ta ước lượng số góc cùng màu theo một cách khác. Giả sử tại 1 đỉnh nào đó co a cạnh tô màu đỏ và b cạnh tô màu xanh. Số góc cùng màu tại đỉnh đó sẽ là $C_a^2 + C_b^2$. Nếu $|a-b| > 1$, có thể giả sử $a > b+1$, khi đó:

$$\begin{aligned}(C_a^2 + C_b^2) - (C_{a-1}^2 + C_{b+1}^2) &= (C_a^2 - C_{a-1}^2) - (C_{b+1}^2 - C_b^2)\\ &= C_{a-1}^1 - C_b^1\\ &= a - b - 1 > 0.\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức này suy ra số góc cùng màu tại một đỉnh sẽ nhỏ nhất khi và chỉ khi số lượng các cạnh đỏ và số lượng các cạnh xanh xuất phát từ đỉnh đó chênh nhau không quá 1. Do vậy ta xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ.

1. Nếu n chẵn

Đặt $n = 2k$ khi đó số góc cùng màu tại mỗi đỉnh nhỏ nhất là:

$$C_k^2 + C_{k-1}^2 = (k-1)^2 \Longrightarrow T \geq n(k-1)^2. \tag{8.6}$$

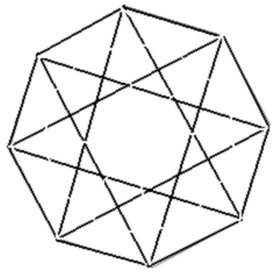
Kết hợp hai bất đẳng thức $(8.5), (8.6)$ dẫn tới:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + 2x \geq n(k-1)^2.$$

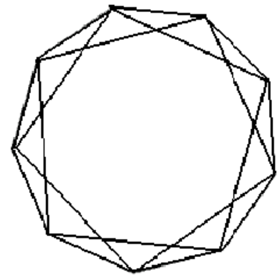
Ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned}x &\geq \frac{1}{2}\left(2k(k-1)^2 - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{6}\right)\\ &= \frac{k(k-1)}{6}\big(6(k-1) - 2(2k-1)\big)\\ &= \frac{k(k-1)(k-2)}{3} = \frac{n(n-2)(n-4)}{24}.\end{aligned}$$

Biểu thức cuối cùng bên phải là một số nguyên khi n chẵn. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi ta tô màu các cạnh theo cách sau: tô đỏ cạnh A_aA_b nếu $|a-b|$ là số chẵn và tô xanh nếu $|a-b|$ là số lẻ. Khi đó rõ ràng tại mỗi đỉnh có đúng $k-1$ cạnh đỏ và k cạnh xanh. Các ước lượng ta đã dùng ở trên đều trở thành đẳng thức đúng.



$n = 8$



$n = 9$

2. Nếu n lẻ

Đặt $n = 2k + 1$ khi đó tại mỗi đỉnh có ít nhất $2C_k^2 = k(k-1)$ góc cùng màu và do đó:

$$T \geq nk(k-1). \tag{8.7}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (8.5), (8.7), biến đổi tương tự như trên ta thu được:

$$\begin{aligned} x &\geq \frac{1}{2}\left((2k+1)k(k-1) - \frac{(2k+1).2k(2k-1)}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2k+1)k\left((k-1) - \frac{2k-1}{3}\right) \\ &= \frac{(2k+1).k(k-2)}{6}. \end{aligned}$$

2.1. Nếu k chẵn

Nếu k chẵn thì biểu thức cuối cùng là một số nguyên, ta chỉ ra một trường hợp đẳng thức: đặt $k = 2t + 1$ thì $n = 4t + 1$. Khi đó tô A_aA_b màu đỏ nếu số dư trong phép chia $|a - b|$ cho n không lớn hơn t hoặc lớn hơn $3t$ và tô xanh trong trường hợp ngược lại. Nếu xếp n điểm đó trên đỉnh của một n giác đều thì rõ ràng ta đã tô đỏ $2t$ đoạn nối một đỉnh A với t đỉnh bên trái và t đỉnh bên phải của nó, ngoài ra $2t$ cạnh còn lại được tô màu xanh. Các ước lượng lại trở thành đẳng thức đúng.

2.2. Nếu k lẻ

Đặt $k = 2t + 1$ thì $t = 4k + 3$, lúc này biểu thức cuối cùng không còn là số nguyên nữa, chính xác hơn nó có dạng $y\frac{1}{2}$. Bây giờ ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của x là $y + 1$ bằng cách chỉ ra một cách tô thích hợp. Để làm điều đó chúng ta sẽ cố gắng tận dụng cách tô của trường hợp trên và chú ý đến tính đối xứng của các phép tô. Cụ thể, ta có thể tiến hành một cách tô như sau, cách tô này có dựa một chút vào trường hợp trước.

Đầu tiên ta lấy ra $4t + 1$ đỉnh và tô để từ mỗi đỉnh có đúng $2t$ cạnh xanh và $2t$ cạnh đỏ. Chọn 1 điểm X trong $4t + 1$ điểm đó và chia $4t$ điểm còn lại thành 2 tập S_1, S_2. Lấy 2 điểm A, B, ta tiến hành tô theo nguyên tắc sau:

$$\begin{cases} As_1 \text{ đỏ, } Bs_1 \text{ xanh với mọi điểm } s_1 \in S_1 \\ Bs_2 \text{ đỏ, } As_2 \text{ xanh với mọi điểm } s_2 \in S_2 \\ AX, BX \text{ cùng đỏ, } AB \text{ xanh.} \end{cases}$$

Khi đó $4t+3$ điểm này (trừ điểm X) đều có tính chất là từ điểm đó có đúng $2t+1$ cạnh xanh và $2t+1$ cạnh đỏ. Riêng đỉnh X có $2t+2$ cạnh xanh và $2t$ cạnh đỏ và do đó tại đỉnh X dôi ra 1 góc cùng màu so với các đỉnh khác. Thêm góc dôi ra này vào các ước lượng ở trên thì vế phải của cuối cùng sẽ có thêm $1/2$ đơn vị. Lúc đó rõ ràng là $x = y+1$. Điều phải chứng minh.

Cuối cùng ta tổng kết lại các kết quả vừa thu được:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n-2)(n-4)}{24} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{n(n-1)(n-5)}{24} & \text{nếu } n \text{ chia 4 dư 1} \\ \dfrac{n(n-1)(n-5)}{24} + \dfrac{1}{2} & \text{nếu } n \text{ chia 4 dư 3.} \end{cases}$$

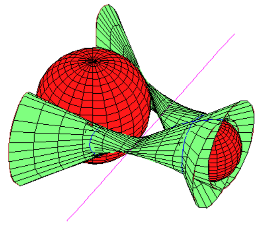
Vậy bài toán 8.2.3 đã được giải quyết hoàn toàn.

Lời Bình. Bài toán 8.2.1 không phải quá khó để chứng minh, nhưng nó thực sự có ý nghĩa và mở ra nhiều vấn đề thú vị hơn. Chẳng hạn đối với n điểm đã cho, hãy tìm số $t(n)$ nhỏ nhất để với mọi cách chọn ra $t(n)$ cạnh để tô bởi một màu đỏ luôn tìm được tam giác cùng màu. Đây chính là nội dung của bài toán $Turan$ cổ điển, các bạn có thể chứng minh rằng $t(n) = [n^2/4]$ không quá khó khăn. Một câu hỏi khác, tìm số $k(n)$ nhỏ nhất sao cho với mọi cách chọn ra $k(n)$ cạnh để với mọi cách tô các cạnh đó bởi 2 màu xanh đỏ đều tìm được tam giác cùng màu. Đây thực sự là một bài toán rất hay và khó. Trọng phần cuối của bài viết chúng tôi sẽ giới thiệu một cách chứng minh với các bạn rằng nếu $n = 5p+q$ với $0 < q \leq 5$ thì:

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{5p(p-1)}{2} - pq + 1.$$

Thay cho lời kết. Việc đếm số lượng các góc cùng màu thực chất chỉ là đếm số bộ ba thoả mãn một tính chất nào đó, và như vậy liệu có thực sự cần tới khái niệm góc cùng màu hay không. Câu trả lời là để diễn đạt một lời giải hoàn chỉnh thì không thực sự cần thiết. Tuy nhiên việc sử dụng khái niệm góc cùng màu như một cách của tư duy giúp cho mọi chuyện sẽ rõ ràng và hợp lý hơn. Và như các bạn đã thấy, mặc dù có vẻ khó nhưng bài toán 8.2.3 sẽ trở nên dễ chịu hơn rất nhiều khi sử dụng khái niệm góc cùng màu. Điều quan trọng là trước khi bắt tay vào tính toán, ta cần phải có niềm tin rằng kết quả chắc chắn sẽ đạt được.

Trong mục tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu về phương pháp hàm đếm, đây có thể coi là một sự hình thức của khái niệm góc cùng màu. Sau đó, với các hiểu biết về góc cùng màu và hàm đếm chúng tôi sẽ thực hiện chứng minh cho bài toán mở rộng nêu trên..



8.3 Phương pháp hàm đếm và vài ứng dụng

Trong bài viết thứ nhất chúng tôi đã nói rằng góc cùng màu thực ra chỉ là một cái tên được đặt cho việc nhóm một số các đối tượng lại với nhau và việc khảo sát tính chất của bộ đó theo nhiều cách chính là tư tưởng chính của phương pháp góc cùng màu. Trong bài viết này chúng tôi tiếp tục giới thiệu một sự hình thức hoá của tất cả những điều đó. Trong một số bài toán tổ hợp, lập luận thông thường chưa đem lại hiệu quả, chúng ta có thể thêm vào đó một hàm đếm để có thể tiếp xúc với bản chất của vấn đề một cách tường minh hơn.

Bài toán 8.3.1 (TST VMO 2000). *Trong mặt phẳng cho* 2000 *đường tròn bán kính đơn vị sao cho không có hai đường tròn nào tiếp xúc nhau và mỗi đường tròn cắt ít nhất là hai đường tròn khác. Tìm giá trị nhỏ nhất của số các giao điểm tạo bởi các trường tròn này.*

LỜI GIẢI. Kí hiệu χ là tập hợp các đường tròn, S là tập hợp các giao điểm của các đường tròn đã cho. Với mỗi cặp $X \in S$ và $(C) \in \chi$ ta xét hàm đếm:

$$f(X,C) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } X \notin (C) \\ \dfrac{1}{k} & \text{nếu có đúng } k \text{ đường tròn đi qua } X \text{ và } X \in (C). \end{cases}$$

Với cách đặt đó ta nhận thấy với mọi $X \in S$ thì hàm f có tính chất:

$$\sum_{C \in \chi} f(X,C) = 1. \tag{8.8}$$

Mặt khác với mỗi đường tròn (C) thuộc χ. Do số đường tròn và số giao điểm là hữu hạn, suy ra tồn tại giá trị nhỏ nhất của các số $f(X,C)$. Giả sử giá trị nhỏ nhất đó đạt tại X_0 và:

$$f(X_0,C) = \frac{1}{k_0} \ \ (k_0 \in N^*).$$

Có $k_0 - 1$ đường tròn (C_i) (với $i = 1,2,...,k_0-1)$) khác (C) đi qua X_0. Mặt khác các đường tròn không tiếp xúc nhau và có bán kính bằng nhau nên $k_0 - 1$ đường tròn này cắt (C) tại $k_0 - 1$ điểm phân biệt và khác X_0. Suy ra theo cách chọn X_0 ta có:

$$\sum_{X \in S} f(X_0,C) \geq \frac{1}{k_0} + (k_0-1)\frac{1}{k_0} \ \text{ với mọi } (C) \in \chi. \tag{8.9}$$

Kết hợp (8.8) và (8.9) suy ra:

$$|S| = \sum_{X \in S} \sum_{(C) \in \chi} f(X,C) = \sum_{(C) \in \chi} \sum_{X \in S} f(X,C) \geq |\chi| = 2000.$$

Mặt khác xét 500 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 đường tròn bán kính 1 mà hai đường tròn thuộc hai nhóm khác nhau thì không cắt nhau. Không có hai đường tròn nào tiếp xúc nhau và trong mỗi nhóm có 3 đường tròn có tâm tại 3 đỉnh của tam giác đều cạnh $\sqrt{3}$ và đường tròn thứ tư có tâm tại tâm của tam giác đều nói trên. Dễ thấy với 2000 đường tròn đó thì chúng thỏa mãn các giả thiết và có đúng 2000 giao điểm.

Vậy số giao điểm nhỏ nhất là 2000.

Bài toán 8.3.2. *Xét tập* $\mathcal{P}_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid 1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \ \&\ \sum_{i=1}^{k} a_i = n, k \le n\}$ *trong đó* n *là số nguyên dương. Với mỗi phần tử* $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathcal{P}_n$*, gọi* $F(\pi)$ *là số số* 1 *trong* π *và* $G(\pi)$ *là số các số phân biệt trong* π*. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} F(\pi) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} G(\pi).$$

LỜI GIẢI. Đặt $p_n = |\mathcal{P}_n|$ và $p_0 = 1$. Ta sẽ chứng minh $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} G(\pi) = p_0 + \ldots + p_{n-1} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} F(\pi)$.

Để chứng minh vế trái của đẳng thức kép ta xét hàm đếm:

$$\chi(\pi, m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \notin \pi \\ 1 & \text{nếu } m \in \pi. \end{cases}$$

Với $\pi \in \mathcal{P}_n$ cố định $\sum_{i=1}^{n} \chi(\pi, m) = G(\pi) \Longrightarrow \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} G(\pi) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \sum_{m=1}^{n} \chi(\pi, m) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \chi(\pi, m)$.

Mà ta lại có $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \chi(\pi, m) = p_{n-m} \Longrightarrow \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} G(\pi) = \sum_{m=1}^{n} p_{n-m} = p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1}$.

Bây giờ ta chứng minh vế phải của đẳng thức kép trên nhờ quy nạp theo n. Với $n = 1$ thì nó hiển nhiên đúng. Giả sử khẳng định đã đúng tới $n - 1 \ge 1$. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với n. Thật vậy, ta có $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} F(\pi) = \sum_{1 \in \pi \in \mathcal{P}_n} F(\pi)$.

Xét ánh xạ: $f : \pi = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \to \psi = (a_2, a_3, \ldots, a_k)$. Suy ra $\psi \in \mathcal{P}_{n-1}$. Dễ có f là song ánh, từ đó suy ra:

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} F(\pi) = \sum_{\psi \in \mathcal{P}_{n-1}} F(1, \psi) = \sum_{\psi \in \mathcal{P}_{n-1}} (1 + F(\psi)) = |\mathcal{P}_{n-1}| + \sum_{\psi \in \mathcal{P}_n} F(\psi) = p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1}.$$

(ở bước cuối cùng ta đã sử dụng giả thiết quy nạp). Như vậy theo nguyên lí quy nạp ta có đẳng thức đúng với mọi n. Bài toán được chứng minh xong.

Với cùng phương pháp này ta có thể giải được các bài toán khá thú vị sau đây:

Bài toán 8.3.3 (IMO 2001). *Trong một kì thi Toán có* 21 *nam và* 21 *nữ tham gia. Biết rằng mỗi thí sinh giải không quá* 6 *bài toán và với mỗi cặp nam-nữ, có ít nhất một bài toán được giải bởi cả hai thí sinh này. Chứng minh rằng có một bài toán mà được giải bởi ít nhất* 3 *nam và* 3 *nữ.*

Bài toán 8.3.4 (IMO 2005). *Trong một kì thi Toán có* n *thí sinh tham gia giải* 6 *bài toán. Biết rằng không có ai giải hết cả* 6 *bài toán và với hai bài toán bất kì thì có* $> 2n/5$ *số thí sinh giải được cả hai bài toán đó. Chứng minh rằng có ít nhất hai thí sinh giải được* 5 *bài toán.*

Như vậy, các bạn có thể nhận thấy rõ rằng góc cùng màu thực ra là một hàm đếm, và hàm đếm là một công cụ để chúng ta khảo sát các tính chất của một hệ các đối tượng có liên hệ với nhau. Các lập luận logic thường mang tính trừu tượng, nếu sử dụng các hàm số tường minh như hàm đếm thì mọi việc trở nên sáng sủa hơn rất nhiều. Đó cũng là ý nghĩa quan trọng nhất của phương pháp hàm đếm cũng như khái niệm góc cùng màu.

8.4 Mở rộng một đề thi IMO 1992

Tiếp theo tinh thần của 3 bài viết trước, với các hiểu biết về góc cùng màu và hàm đếm, trong bài viết này chúng tôi giới thiệu với các bạn lời giải cho một kết quả đã được đề cập tới trong bài mở rộng bài toán 6 người. Đây cũng là một sự mở rộng của bài toán tổ hợp xuất hiện trong kỳ thi IMO năm 1992.

Bài toán. Cho đồ thị đầy đủ n đỉnh. Chọn ra $k = f(n)$ cạnh tuỳ ý và tô chúng bởi một trong hai màu xanh đỏ. Hỏi k nhỏ nhất bằng bao nhiêu để mọi phương án tô đều tạo ra tam giác có ba cạnh được tô bởi cùng một màu.

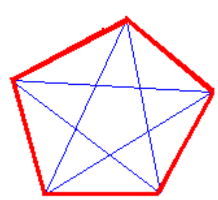
LỜI GIẢI. Chúng ta lưu ý đến kết quả của bài toán 6 người: trong 6 người luôn chỉ ra được 3 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau. Với lưu ý đó ta có thể phát biểu bài toán này dưới một dạng khác: tìm số R_n để tồn tại cách tô màu R_n cạnh của đồ thị đầy đủ n đỉnh mà không có bộ 6 điểm nào rời nhau, hơn nữa mọi cách tô $R_n - 1$ cạnh thì bộ 6 điểm rời nhau luôn tồn tại. Và khi đó chúng ta có hệ thức liên hệ $f(n) = \binom{n}{2} - R_n + 1$.

Sự tương đương giữa hai cách phát biểu cùng với hệ thức liên hệ trên được suy trực tiếp từ thuật toán (T) sau đây: đối với đồ thị$A_1, A_2, ..., A_n$ có cạnh được tô bởi một trong hai màu, hoặc không tô gì cả, ta thêm điểm A_{n+1} và ký hiệu phép thêm điểm dựa vào A_i là $T(A_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ như sau:

Đối với $f(n)$ thì đoạn A_iA_{n+1} không được tô, còn với mọi $j \neq i$ và $1 \leq j \leq n$ thì A_iA_j và $A_{n+1}A_j$ được tô bởi cùng một màu.

Đối với R_n thì A_iA_{n+1} được nối và nối A_{n+1} với tất cả những điểm đã được nối với A_i.

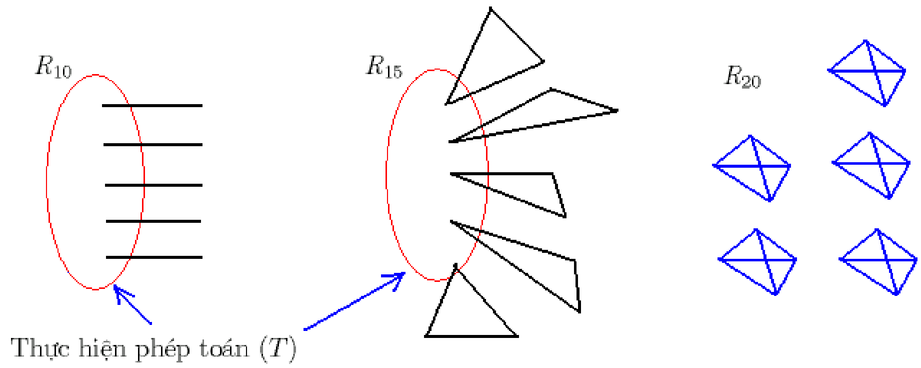
Xuất phát từ đồ thị đầy đủ như hình bên, để đạt được $f(n)$ ta thực hiện lần lượt các phép toán $T(A_1), T(A_2), T(A_3), T(A_4), T(A_5)$ để có được đồ thị $6, 7, 8, 9, 10$ đỉnh với $f(n)$ tối thiểu.Tiếp tục thực hiện $T(A_1)$ cho đồ thị 10 đỉnh, ta được đồ thị 11 đỉnh cũng có $f(11)$ tối thiểu.



Đồ thị cho R_n được xem như là bù màu của $f(n)$: đầu tiên ta có 5 điểm rời nhau, qua 5 bước đầu ta có 5 cặp điểm đôi một được nối với nhau, chọn 5 điểm của từng cặp và thực hiện (T) cho chúng ta nhận được 5 giá trị nữa của R_n và sau 5 bước nhận được 5 bộ 3 điểm đôi một được nối với nhau. Lại chọn ra 5 điểm nữa của 5 bộ 3 và thực hiện (T) cho chúng, sau 5 bước nhận được 5 giá trị và cuối cùng là 5 bộ 4 đôi một nối với nhau. Quá trình này tiếp tục mãi.

Cuối cùng chúng ta thu được công thức sau với $n = 5p + q$, $0 < q \leq 5$:

$$R_n = \frac{5p(p-1)}{2} + qp \Longrightarrow f(n) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{5p(p-1)}{2} - qp + 1.$$



Bây giờ ta chỉ cần chứng minh rằng nếu chỉ tô $R_n - 1$ cạnh cho đồ thi n đỉnh thì bộ 6 điểm rời nhau luôn tồn tại, giả sử phản chứng.

Trường hợp 1: số cạnh tô $R_n - 1$, số đỉnh thuộc các cạnh đã tô là $R_n - 1$ với $a \geq 1$, ký hiệu đó là tập các đỉnh D. Ngoài D còn có $n - R_n + a$ đỉnh khác.

Nếu trong D có $6 + R_n - a - n$ đỉnh rời nhau thì ta có $(n - R_n + a) + (6 + R_n - a - n) = 6$ đỉnh rời nhau, mâu thuẫn.

Nếu trong D không có $6 + R_n - a - n$ đỉnh rời nhau, tức là cứ $6 + R_n - a - n$ đỉnh của D thì có ít nhất một cạnh, và do vậy số cạnh ít nhất phải là:

$$g(a) = \frac{C_{R_n - a}^{6 + R_n - a - n}}{(R_n - a) - 2}.$$

Cần kiểm tra rằng $g(R_n + 3 - n) > R_n - 1 \iff \dfrac{C_{n-3}^{3}}{n-5} > R_n - 1$. Thay $n = 5p + q$ ta biến đổi tương đương $\dfrac{(5p+q-3)(5p+q-4)}{6} > \dfrac{5p(p-1)}{2} + qp$

$$\iff (5p+q-3)(5p+q-4) > 15p(p-1) + 6qp$$
$$\iff 10p(p-2) + (q^2 + 12) + q(4p - 7) > 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, vậy số cạnh trong D lại lớn hơn $R_n - 1$, mâu thuẫn. Suy ra trường hợp này không hợp lý.

Trường hợp 2: $|D| > R_n - 1$, hay ký hiệu tập các cạnh được tô là (C), ta có $|D| > |(C)|$ (xét $n \geq 11$ thì ta có $|(C)| \geq 6$). Đối với $d \in D$ và $c \in (C)$ ta định nghĩa

$$f(d, c) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } d \notin (C) \\ \dfrac{1}{k} & \text{nếu } d \in (C) \text{ và số lượng các cạnh thuộc } (C) \text{ và chứa } d \text{ là } k \end{cases}$$

$$\implies \sum_{c \in (C)} \sum_{d \in D} f(d, c) = \sum_{d \in D} \sum_{c \in (C)} f(d, c) = |D|.$$

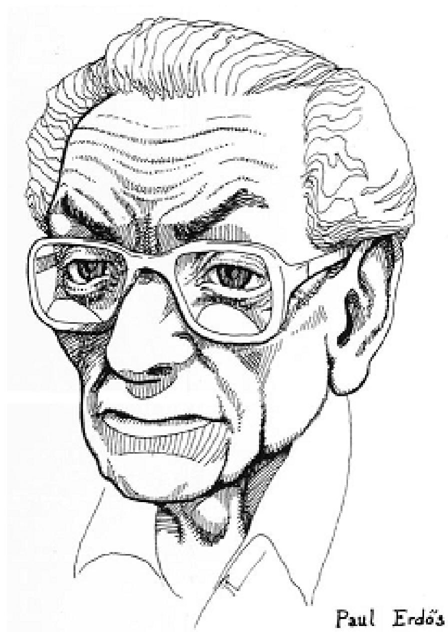
Theo nguyên lý *Dirichlet* thì tồn tại c_1 mà $\sum_{d\in D} f(d,c) \geq |D|/|(C)| > 1$ và do đó c_1 chứa một đỉnh treo A_1. Do $2.1 < |(C)|$ nên trong D còn một đỉnh nối với A_1, do vậy $|D| > |(C)|+1$ (nếu ngược lại thì với việc họn A_1 và điểm rời nó trong D cộng với những điểm không thuộc vào D sẽ cho ta ít nhất 6 điểm rời nhau, mâu thuẫn). Ký hiệu D_2 và (C_2) là tập nhận được từ D và (C) sau khi bỏ tất cả các thông tin về A_1. Suy ra:

$$\sum_{c\in(C_2)} \sum_{d\in D_2} f(d,c) > |(C_2)|.$$

Từ đó ta lại lấy được đỉnh treo A_2 rời A_1, lại lập luận như trên do $2.2 < |(C_2)|$ nên lại có:

$$\sum_{c\in(C_3)} \sum_{d\in D_3} f(d,c) > |(C_3)|.$$

Quá trình này tiếp tục cho đến khi lấy được A_5 và lúc đó $2.5 \leq |(C_5)|$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi cách bố trí áp dụng cho $n = 11$, nhưng khi đó dễ dàng nhận ra mâu thuẫn. Vậy ta xét $2.5 < |(C_5)|$ và như thế ta tiếp tục chọn được A_6. Và ta có 6 điểm $A_1, A_2, ..., A_6$ rời nhau đôi một, mâu thuẫn. Bài toán được chứng minh hoàn toàn.



Paul Erdős

Phần III

Một số bài toán khác

Chương 9

Hình Học

Bài toán 9.1. *Cho* ΔABC*, biết rằng tồn tại ba điểm* X, Y, Z *tương ứng thuộc các cạnh* BC, CA, AB *sao cho* $AX = BY = CZ$ *và* $\angle BAX = \angle CBY = \angle ACZ$*. Chứng minh rằng* ΔABC *đều.*

Bài toán 9.2. *Cho* O *là một điểm nằm trong tam giác nhọn* ABC*. Các đường tròn có tâm là trung điểm các cạnh của tam giác đi qua* O *cắt nhau tại các điểm thứ hai là* M, K, L *khác điểm* O*. Chứng minh rằng* O *là tâm đường tròn nội tiếp của* ΔMKL *nếu và chỉ nếu* O *là tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC*.*

Bài toán 9.3. *Cho ba đường tròn bán kính* 1 *đôi một cắt nhau tạo thành* 6 *giao điểm, nhưng cả ba đường thì không có điểm chung nào cả, tức là chúng tạo thành một lỗ có dạng tam giác cong có ba đỉnh là ba trong số sáu giao điểm đó. Chứng minh rằng đường tròn thứ tư đi qua ba giao điểm còn lại sẽ có bán kính bé hơn* 1*.*

Bài toán 9.4. *Cho* ΔABC *với* M *là trung điểm cạnh* BC*. Điểm* $P \in AM$ *thoả mãn* $PM = BM = CM$*. Hạ* $PH \perp BC$*. Kẻ* $PQ \perp BA$ $(Q \in BA)$*. Kẻ* $PR \perp AC$ $(R \in AC)$*. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp* ΔQRH *tiếp xúc với* BC *tại* H*.*

Bài toán 9.5. *Điểm* M *nằm trong tam giác* ABC*. Các đường thẳng* AM, BM, CM *cắt đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *tại* $A', B", C'$*. Gọi* r, r' *lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác* ABC *và* $A'B'C'$*. Chứng minh rằng:*

$$4rr' \leq R^2 - OM^2.$$

Bài toán 9.6. *Giả sử* 4 *đường tròn* $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ *có tính chất* (O_1) *tiếp xúc ngoài với* (O_2)*,* (O_2) *tiếp xúc ngoài với* (O_3)*,* (O_3) *tiếp xúc ngoài với* (O_4) *và* (O_4) *tiếp xúc ngoài với* (O_1)*. Chứng minh rằng các tiếp điểm cùng thuộc một đường tròn.*

Bài toán 9.7. *Cho hình chữ nhật* $ABCD$*. Về phía ngoài của hình chữ nhật trên các cạnh* AB, CD *dựng các tam giác* AMB, CND *thoả mãn điều kiện* $\angle AMB = \angle CND$*. Đường thẳng* MN *cắt các* AB, CD *tại* P *và* Q*,* DP *cắt* BM *tại* E *,* BQ *cắt* DN *tại* F*. Hỏi* 3 *đường thẳng* EF, AC, MN *có đồng quy không.*

Bài toán 9.8. *Giả sử đường tròn nội tiếp* (I) *của* ΔABC *tiếp xúc với các cạnh* BC, CA, AB *tại* D, E, F *tương ứng. Cho* K *là một điểm bất kì,* DK, EK, FK *cắt các cạnh đối diện của*

ΔDEF tại M, N, P cà cắt (I) tại X, Y, Z. Chứng minh các khẳng định sau đây:

(i) AM, BN, CP đồng quy tại J.
(ii) AX, BY, CZ đồng quy tại L.
(iii) K, J, L thẳng hàng.

Bài toán 9.9. *Cho $\Delta A_1A_2A_3$. Giả sử P_i là điểm trên cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$ sao cho các đoạn thẳng A_iP_i đồng quy. (I) là đường tròn nội tiếp $\Delta A_1A_2A_3$ và t_i là tiếp tuyến qua P_i đến (I) khác với $A_{i+1}A_{i+2}$. Gọi Q_i là giao điểm của t_i và $P_{i+1}P_{i+2}$. Chứng minh rằng 3 điểm Q_1, Q_2, Q_3 thẳng hàng (các chỉ số ở đây được tính theo mod 3).*

Bài toán 9.10. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường trong (O). Giả sử E và I lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB, CD và AC, BD. Chứng minh rằng:*

i) $EA.EB = IA.IC + IE^2$
ii) O là trực tâm ΔEIF.

Bài toán 9.11. *Giả sử nửa đường tròn tâm O đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC của ΔABC tại E và D. ED cắt BC tại F. H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng $FH \perp AO$.*

Bài toán 9.12. *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ và một điểm M nằm trên cạnh CD sao cho ΔADM và tứ giác $ABCM$ có cùng diện tích và cùng chu vi. Chứng minh rằng hai cạnh nào đó của tứ giác $ABCD$ có cùng độ dài.*

Bài toán 9.13. *Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE và các phân giác trong AP, BQ. Ký hiệu I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng nếu và chỉ nếu P, Q, O thẳng hàng.*

Bài toán 9.14. *Sử dụng AB, AC làm đường kính vẽ ra phía ngoài tam giác hai nửa đường tròn. AH là đường cao của ΔABC và D là điểm bất kì trên cạnh BC ($D \neq B, C$). Qua D vẽ $DE \parallel AC, DF \parallel AB$ (E, F nằm trên 2 nửa đường tròn đã vẽ). Chứng minh rằng D, E, F, H cùng nằm trên một đường tròn.*

Bài toán 9.15. *Chứng minh rằng $A_1, A_2, ..., A_n$ là n đỉnh của một n giác đều nếu một trong hai tính chất sau được thoả mãn:*
i) Các điểm đó cùng thuộc một đường tròn bán kính 1 và với mọi điểm M nằm trong hình tròn đó ta có bất đẳng thức $MA_1MA_2...MA_n \leq 2$.
ii) Đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ có các góc bằng nhau và $A_1A_2 \leq A_2A_3 \leq ... \leq A_nA_1$.

Bài toán 9.16. *Giả sử X, Y là hai điểm nằm trong đường tròn (O). H là một điểm bất kì nằm trên đường thẳng XY. Một đường thẳng l bất kỳ đi qua H cắt (O) tại M, N. MX, NY cắt (O) tại P, Q tương ứng. Chứng minh rằng PQ đi qua điểm cố định khi l thay đổi.*

Bài toán 9.17. *Cho trước đường tròn tâm O và đường thẳng d bất kỳ. H là hình chiếu của O trên d. M là một điểm cố định trên (O). A, B thay đổi trên d sao cho H luôn là trung điểm của AB. MA, MB cắt (O) tại P, Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi AB thay đổi.*

Bài toán 9.18. *Giả sử M, N, P là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác NAP, PBM, MCN bằng nhau và bằng nửa bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng M, N, P là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.*

Bài toán 9.19. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau ở A, B. Tiếp tuyến chuyến chung EF với $E \in (O_1), F \in (O_2)$. Một cát tuyến $MN \parallel EF$ với $M \in (O_1), N \in (O_2)$. ME cắt NF ở S. Chứng minh rằng $\angle SBM = \angle SBN$.*

Bài toán 9.20. *Cho ΔABC với trung tuyến AM. Về hai phía của A trên đường phân giác trong lấy hai điểm E, F thoả mãn $AE = \sqrt{bc}$. Chứng minh rằng $\angle FMC = \angle EMC$.*

Bài toán 9.21. *Giả sử E là một điểm nằm trên trung tuyến kẻ từ C của ΔABC. Đường tròn qua E và tiếp xúc với AB tại A cắt AC tại M, đường tròn qua E và tiếp xúc AB tại B cắt BC tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN tiếp xúc với hai đường tròn nói trên.*

Bài toán 9.22. *Giả sử A, B, C, D, E, F là 6 điểm nằm trên một đường tròn sao cho $AE \parallel BD, BC \parallel DF$. Điểm X đối xứng với D qua CE. Chứng minh rằng $d(X, EF) = d(B, AC)$, với $d(M, NP)$ là khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng NP.*

Bài toán 9.23. *Xét 4 đường thẳng đồng phẳng, không có 2 đường thẳng nào trong chúng song song hay đồng quy, cũng không có 3 đường thẳng nào trong chúng tạo thành một tam giác đều. Chứng minh rằng nếu có một đường thẳng nào đó trong chúng song song với đường thẳng Euler của tam giác tạo bởi 3 đường thẳng còn lại thì một đường thẳng bất kì trong số 4 đường thẳng đã cho đều song song với đường thẳng Euler của tam giác tạo bởi 3 đường thẳng còn lại.*

Bài toán 9.24. *Lục giác $A_1A_2...A_6$ có 6 cạnh bằng nhau và giả sử ta có đẳng thức $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = \angle A_2 + \angle A_4 + \angle A_6$. Chứng minh rằng lục giác này có các góc đối diện bằng nhau, nghĩa là $\angle A_1 = \angle A_4, \angle A_2 = \angle A_5, \angle A_3 = \angle A_6$.*

Bài toán 9.25. *Hai đường tròn đường kính bằng nhau $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại P, Q và hai tâm không nằm trong phần chung của hai đường tròn đó. O là trung điểm PQ. Hai đường thẳng AB, CD vẽ qua P ($\not\equiv PQ$) sao cho $A, C \in (O_1)$ và $B, D \in (O_2)$. M, N là trung điểm của AD, BC tương ứng. Chứng minh rằng M, N, O thẳng hàng.*

Bài toán 9.26. *Cho trước ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và đường thẳng Δ bất kỳ. $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ là ảnh của Δ qua phép đối xứng trục qua BC, CA, AB. Đặt $A' = \Delta_b \cap \Delta_c$, xác định B', C' một cách tương tự. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy và điểm đồng quy đó trùng với tâm nội tiếp hay tâm bàng tiếp bàng tiếp góc A' của $\Delta A'B'C'$ tuỳ theo ΔABC nhọn hay tù ở A.*

Bài toán 9.27. *Giả sử (I, r) là đường tròn nội tiếp ΔABC và $(O_i, r_i), i = 1, 2, 3$ là các đường tròn tiếp xúc ngoài với (I) và tiếp xúc với 2 trong 3 cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng:*

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}.$$

Bài toán 9.28. *Giả sử a, b, c là ba đường thẳng song song và đi qua 3 đỉnh A, B, C của ΔABC. Gọi a', b', c' là 3 đường thẳng đối xứng với a, b, c qua BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng a', b', c' đồng quy nếu và chỉ nếu a, b, c song song với đường thẳng Euler của ΔABC.*

Bài toán 9.29. *Ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn tam O và thoả mãn $CB = DE$. Chứng minh rằng $p(ABCDE) \leq BE + AD + AC$ trong đó $p(ABCDE)$ là chu vi của ngũ giác $ABCDE$.*

Bài toán 9.30. *Lấy 2 điểm P, Q tuỳ ý trên cạnh BC của ΔABC. Chứng minh rằng $r(ABP) = r(AQC)$ nếu và chỉ nếu $r(ABQ) = r(APC)$. Trong đó $r(XYZ)$ chỉ bán kính đường tròn nội tiếp ΔXYZ.*

Bài toán 9.31. *Cho ΔABC và một điểm $P \in BC$. Tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp ΔABP mà song song với BC cắt AP ở Q, AC ở R. Chứng minh rằng $r(AQR) + r(ABP) = r(ABC)$.*

Bài toán 9.32. *Tìm số thực k lớn nhất sao cho nếu P nằm trong tam giác nhọn ABC thoả mãn $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ và AP, BP, CP là các tia cắt $(PBC), (PCA), (PAB)$ tại A_1, B_1, C_1 tương ứng thì $S(A_1BC) + S(B_1CA) + S(C_!AB) \geq kS(ABC)$.*

Bài toán 9.33. *Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo $AC \perp BD$. Trung trực AB cắt trung trực CD tại O nằm trong tứ giác đó. Chứng minh rằng hai tam giác ABO, CDO có diện tích bằng nhau nếu và chỉ nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp.*

Bài toán 9.34. *Cho trước đường tròn đường kính AB, trên nửa đường tròn này ta chọn n điểm $P_1, P_2, ..., P_n$ sao cho P_1 nằm giữa A và P_2, P_2 nằm giữa P_1 và P_3,...., P_n nằm giữa P_{n-1} và B. Tìm điểm C trên nửa đường tròn còn lại sao cho tổng diện tích các tam giác $CP_1P_2, CP_2P_3, ..., CP_{n-1}P_n$ là lớn nhất.*

Bài toán 9.35. *Giả sử điểm E nằm trong ΔABC thoả mãn $\angle EBA = \angle ECA$. Gọi M, N là hình chiếu của E trên phân giác trong và ngoài tại đỉnh A. Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm của BC.*

Bài toán 9.36. *Cho trước ΔABC và gọi M là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) tam giác trên cạnh BC. điểm $N \in BC$. Chứng minh rằng tồn tại đường tròn tiếp xúc với cả 3 đường tròn nội tiếp các tam giác BMN, MNA, CAN.*

Bài toán 9.37. *Tứ giác $ABCD$ có tính chất $AB.CD = AD.BC$. Gọi H, K là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng nếu BD là phân giác $\angle AKC$ thì suy ra $AK + KC = BH + HD$.*

Bài toán 9.38. *Giả sử tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I và thoả mãn $(IA+IB)^2 + (IC+ID)^2 = (AB+CD)^2$ thì $ABCD$ là hình thang cân.*

Bài toán 9.39. *Cho trước ΔABC nội tiếp đường tròn (S) và (O) nằm trong góc $\angle BAC$ và tiếp xúc với AB tại P, AC tại Q, đồng thời tiếp xúc trong với (S). Chứng minh rằng trung điểm của PQ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.*

Bài toán 9.40. *Trên các cạnh BC, CA, AB của ΔABC ta lấy lần lượt các điểm X, Y, Z. Chứng minh bất đẳng thức:*

$$\frac{1}{S(AYZ)} + \frac{1}{S(BZX)} + \frac{1}{S(CXY)} \geq \frac{3}{S(XYZ)}.$$

Từ đó suy ra rằng $S(XYZ) \geq min(S(AYZ), S(BZX), S(CXY))$.

Bài toán 9.41. *Giả sử $(I),(O)$ là đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Các tiếp điểm của (I) tại BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Vẽ 3 đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ tiếp xúc với $(I),(O)$ tại D, K đối với ω_a, E, M đối với ω_b và F, N đối với ω_c.*

i) *Chứng minh rằng DK, EM, FN đồng quy tại P.*

ii) *Chứng minh rằng trực tâm ΔDEF nằm trên OP.*

Bài toán 9.42. *Trên mặt phẳng cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Tiếp tuyến của (O_1) tại A và B cắt nhau tại K. Cho một điểm M tuỳ ý $(\neq A, B)$ trên (O_1). Đường thẳng MA cắt (O_2) lần nữa tại P. Đường thẳng MK cắt (O_1) lần nữa tại C. Đường thẳng CA cắt (O_2) lần nữa tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ nằm trên đường thẳng MC và đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên (O_1).*

Bài toán 9.43. *Cho trước lục giác lồi $ABCDEF$. Lấy sáu trung điểm $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Ký hiệu p và p_1 lần lượt là chu vi của hai lục giác lồi nói trên. Giả sử tất cả các góc của lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ đều bằng nhau. Chứng minh rằng:*

$$p \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot p_1.$$

Bài toán 9.44. *Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có ba đường cao là AH, BK, CL. Lấy A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm của các đường cao đó. Đường tròn nội tiếp với tâm I của ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng bốn đường thẳng A_0D, B_0E, C_0F, OI đồng quy. Khi $O \equiv I$ ta coi như IO là đường thẳng tuỳ ý quay quanh O.*

Bài toán 9.45. *Trên các cạnh của ΔABC lấy các điểm M_1, N_1, P_1 sao cho các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đều chia chu vi của ΔABC thành 2 phần bằng nhau, trong đó M, N, P là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại K và chứng minh:*

$$\max\left\{\frac{KA}{BC}, \frac{KB}{CA}, \frac{KC}{AB}\right\} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài toán 9.46. *Giả sử ΔABC là tam giác có góc C nhọn, lấy H là chân đường cao hạ từ A, M là trung điểm của BC, x, y là các đường chia 3 góc A (khi $\angle BAx = \angle xAy = \angle yAC$), và N, P lần lượt là giao điểm của trung trực cạnh BC và các tia x, y. Tìm tất cả các ΔABC có tính chất $AB = NP = 2HM$.*

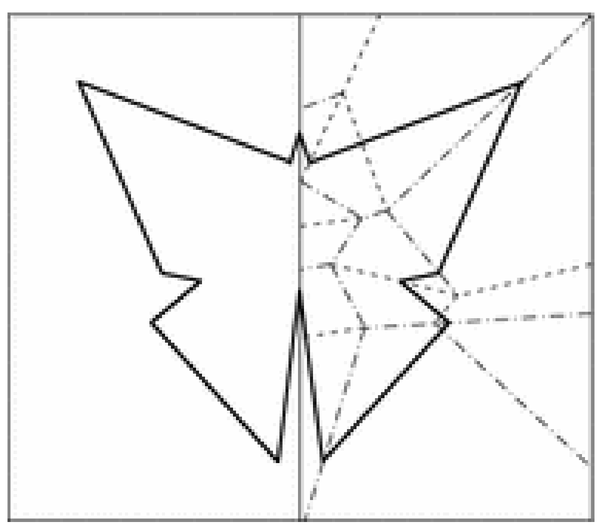
Bài toán 9.47. *Hai đường tròn cắt nhau tại A, B. Gọi l là tiếp tuyến của 2 đường tròn, với các tiếp điểm là P, T. Tiếp tuyến của đường trong ngoại tiếp ΔAPT tại P và T cắt nhau tại S. Lấy H là điểm đối xứng của điểm B qua đường thẳng l. Chứng minh rằng A, S, H thẳng hàng.*

Bài toán 9.48. *Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại P, Q. Tiếp tuyến chung của chúng (gần P hơn Q) tiếp xúc (C_1) tại A và (C_2) tại B. Tiếp tuyến của (C_1) và (C_2) tại P cắt đường tròn kia lần lượt tại $E, F \neq P$. Lấy H, K là các điểm trên các tia AF, BE thoả mãn $AH = AP$ và $BK = BP$. Chứng minh rằng A, H, Q, K, B là các điểm đồng viên.*

Bài toán 9.49. *Cho trước một đường trong A bấn kính và đường tròn B đi qua tâm của A và tiếp xúc trong với A. Ký hiệu H là họ các đường tròn C tiếp xúc ngoài với B và tiếp xúc trong với A. Giả sử C, C' là hai đường tròn trong H với bán kinh tương ứng là p, p' Với số nguyên $n > 1$ thì tồn tại dãy n đường tròn $C = C_1, C_2, ..., C_n = C'$ thoả mãn C_i tiếp xúc với C_{i+1} với $1 \leq i \leq n-1$ nếu và chỉ nếu:*

$$(p - p')^2 = (n-1)^2(2p + 2p' - (n-1)^2 - 8).$$

Bài toán 9.50. *Cho ΔABC. Một đường tròn tiếp xúc với (O) và tiếp xúc với AB, AC tại M_1, N_1. Các điểm M_2, N_2, M_3, N_3 được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.*



Chương 10

Giải Tích

Bài toán 10.1. *Xét dãy số thực* $\{a_n\}$ *thoả mãn* $a_{m+n} \leq a_n + a_m$ *với mọi chỉ số m. Hỏi có tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ *hay không?*

Bài toán 10.2. *Xét hai dãy số* $\{u_n\}$ *và* $\{v_n\}$ *thoả mãn:*

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n^2} \\ v_n = \dfrac{u_n^3 e^{1/u_n^2}}{n} \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy $\{v_n\}$.

Bài toán 10.3. *Cho số tự nhiên m. Với số tự nhiên n, ký hiệu* a_n *là số các số* 0 *trong cách viết của n trong hệ cơ số m. Đặt:*

$$S(m) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(m-1)(m^2-m-1)^{a_j}}{j^3}.$$

Chứng minh rằng $S(m) \to 0$ *khi* $m \to 0$.

Bài toán 10.4. *Giả sử P là một đa thức hệ số thực có ít nhất một hệ số a mà* $\dfrac{a}{\pi} \notin Q$. *Chứng minh rằng tập* $\{\sin(f(n)) | n \in N\}$ *trù mật trong* $[-1, 1]$.

Bài toán 10.5. *Dãy các số* $a_1, a_2, ..., a_n$ *thoả mãn với mọi số thực* $\delta > 1$*:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{[\delta^n]} = 0.$$

Chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bài toán 10.6. *Xét hai dãy số* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *xác định bởi:*

$$\begin{cases} a_0 = b_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{với mọi số tự nhiên } n. \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$$

Tính:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Bài toán 10.7. *Giả sử rằng ta có đẳng thức sau với n tự nhiên tuỳ ý:*

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = p_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}.$$

Trong đó $p_n, r_n, s_n, t_n \in Z$. *Tìm các giới hạn sau khi n tiến đến vô cùng:*

$$\lim \frac{r_n}{p_n} \quad \lim \frac{s_n}{p_n} \quad \lim \frac{t_n}{p_n}.$$

Bài toán 10.8. *Giả sử* P *là một đa thức hệ số nguyên bất khả quy với hệ số bậc cao nhất là 1.* $P(0)$ *không có ước số chính phương. Với mọi nghiệm phức của* P *có modun lớn hơn 1. Chứng minh rằng đa thức* $h(x) = f(x^3)$ *cũng bất khả quy.*

Bài toán 10.9. *Cho hàm tuần hoàn* $f : R \to R$ *khác hằng số và liên tục tại một điểm nào đó. Chứng minh rằng* f *tuần hoàn có chu kì cơ sở.*

Bài toán 10.10. *Tính giới hạn của dãy số* $\{u_n\}$ *sau đây:*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}} - 1\right).$$

Bài toán 10.11. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *với điều kiện* $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 1}{2x_n}$ $\forall n \geq 0$. *Tìm giá trị của* x_0 *sao cho* $|x_n| \leq 1$ $\forall n$.

Bài toán 10.12. *Chứng minh rằng* $\{\dfrac{n}{10^k}|n, k \in N\}$ *trù mật trong* $(0, +\infty)$.

Bài toán 10.13. *Tìm điều kiện cần và đủ để tập hợp các điểm* $A = \{(\{n\alpha\}, \{n\beta\})|n \in N\}$ *trù mật trong hình vuông đơn vị* $[0,1] \times [0,1]$.

Bài toán 10.14. *Cho số thực* $x > 1$ *thoả mãn* $\lim\limits_{n\to\infty} x^x\{x\}^n = 0$ *thì* $x \in Z$.

Bài toán 10.15. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *với* $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{n}{x_n} + \dfrac{x_n}{n}$ *với* $n \geq 1$. *Chứng minh rằng tồn tại* N *sao cho với mọi* $n > N$ *ta có* $n \leq x_n \leq n+1$.

Bài toán 10.16. *Cho* $0 < c_n < 1$ $\forall n$. *Chứng minh rằng nếu đặt:*

$$\begin{cases} x_n = (1-c_1)(1-c_2)...(1-c_n) \\ y_n = (1+c_1)(1+c_2)...(1+c_n) \end{cases}$$

tbì các khẳng định sau là tương đương với nhau:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty \qquad (2) \quad x_n \to 0 \qquad (3) \quad y_n \to \infty$$

Bài toán 10.17. *Tính giới hạn sau đây:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^{1/n}\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^{1/n}\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}\sin^{1/n}\frac{3\pi}{7}\right)^n.$$

Bài toán 10.18. *Các số dương $c_1, c_2, ..., c_m$ gọi là thông ước với nhau nếu:*

$$\frac{c_i}{c_j}\in Q \quad \text{với mọi chỉ số } i, j.$$

i) Cho dãy tăng các số thực dương $\{a_n\}$. Với các số thực $A_i \neq 0$ với $i = 1, 2, .., n$ xét hàm số sau đây:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\cos a_i x.$$

Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn, chứng minh rằng các số $\{a_n\}$ thông ước.

ii) Với $n, m \in N$ và các số thực A_i và B_j khác 0 với $i = \overline{1,n}$ và $j = \overline{1,m}$. Các số dương $\{a_1, a_2, ..., a-n\}$ đôi một khác nhau, các số dương $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ cũng đôi một khác nhau. Xét hàm số $g(x)$ sau đây:

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\cos a_i x+\sum_{j=1}^{n}B_i\cos b_i x.$$

Chứng minh rằng nếu hàm số $g(x)$ tuần hoàn thì $\{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, .., b_m\}$ là các số thông ước với nhau.

Bài toán 10.19. *Với số nguyên dương n gọi $f(n)$ là số các chữ số 0 trong cách viết của n dưới dạng thập phân. Cho $a > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{f(n)}}{n^2}<\infty \Longleftrightarrow a<91.$$

Bài toán 10.20. *Cho dãy $\{a_n\}$ với $a_1 = x$ và $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+y}{2}$ với mọi n. Tìm tất cả các cặp số (x, y) để dãy số $\{a_n\}$ hội tụ.*

Bài toán 10.21. *Giả sử $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$ và:*

$$\sum_{j=0,j\neq i}^{n+1}\frac{1}{x_i-x_j}=0 \quad \text{với mọi } 1\le i\le n.$$

Chứng minh rằng $x_i + x_{n+1-i} = 1$ với mọi $0 \le i \le n+1$.

Bài toán 10.22. *Xét dãy các số thực dương $a_n > 0$ với $n = 1, 2, 3, ...$ Đặt $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Chứng minh rằng nếu với mọi $n \ge 2$ ta có:*

$$a_{n+1}\le\frac{1}{S_{n+1}}\Big((S_n-1)a_n+a_{n-1}\Big)$$

thì suy ra:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Bài toán 10.23. *Cho* $0 < x_1 < 1$ *và* $x_{n+1} = x_n + \left(\dfrac{x_n}{n}\right)^2$ $(n \geq 1)$. *Chứng minh rằng dãy này có giới hạn là a và khi đó chứng minh rằng:*

$$\lim n(a - x_n) = a^2.$$

Bài toán 10.24. *Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n)^{n^2}$.

Bài toán 10.25. *Cho* $0 \leq r < 1$ *và hàm số:*

$$F(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum \Big(\pm 1 \pm r ... \pm r^{n-1} \Big).$$

Chứng minh rằng ta có các đẳng thức:

$$F\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{4}{6-\sqrt{5}} \quad \text{và} \quad F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{6}.$$

Bài toán 10.26. *Cho hàm số* $f : R \to R$ *liên tục, tồn tại* $M > 0$ *sao cho:*

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| < M \quad \text{với mọi } x, y \in R.$$

i) Chứng minh rằng với mọi số thực x đều tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$g(x) = \lim_{n\in N, n\to\infty} \frac{f(nx)}{n}.$$

ii) Chứng minh rằng hàm số $g(x)$ *liên tục tại điểm* $x = 0$.

iii) Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Bài toán 10.27. *Chứng minh rằng tồn tại hàm số liên tục trên toàn bộ tập các số thực R nhưng không khả vi tại bất kì điểm nào trên đó.*

Bài toán 10.28. *Giả sử* $b \in Z$, $b > 1$. *Tập hợp* $S \in Z$ *thoả mãn :*

$$\begin{cases} 0 \in S \\ x \not\equiv y \mod b \quad \forall x \neq y, x, y \in S \end{cases}$$

Cho $k_n \in S$ $\forall n$ *thoả mãn* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{k_n}{b^n} = 0$. *Chứng minh rằng* $k_n = 0$ *với mọi* $n \geq 1$.

Bài toán 10.29. *Cho hàm số* $f : R \to R$. *Chứng minh mệnh đề sau:*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Bài toán 10.30. *Cho đa thức* $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \geq 0 \ \forall x$. *Giả thiết* $1 \geq a_1 \geq a_2... \geq a_n \geq 0$. *Gọi* λ *là nghiệm phức của* P *mà* $|\lambda| \geq 1$. *Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên* m *mà* $\lambda^m = 1$.

Bài toán 10.31. *Cho dãy số thực* $\{a_n\}$. *Chứng minh mệnh đề:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} 3n \cdot a_n^3 = 1.$$

Bài toán 10.32. *Cho hàm số* $f : R \to R$ *khả vi liên tục cấp* 3 *Chứng minh rằng tồn tại* $a \in R$ *thoả mãn:*

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0.$$

Bài toán 10.33. *Chứng minh các công thức giới hạn sau đây và tìm ý nghĩa hình học của chúng:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{\pi^2}{2} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\pi^2}{n^2} - 2\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)\right) = 0. \end{cases}$$

Bài toán 10.34. *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *thoả mãn* $a_0 = 0, a_1 = 1$ *và:*

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \sin a_{n-1} & \text{nếu } a_n > a_{n-1} \\ a_n + \cos a_{n-1} & \text{nếu } a_n \leq a_{n-1}. \end{cases}$$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bài toán 10.35. *Với mỗi song ánh* $p : Z^+ \to Z^+$ *xây dựng một hàm số* $f : (0,1) \to R$ *như sau:*

$$f(0, a_1a_2, a_3....) = 0, a_{p(1)}a_{p(2)}a_{p(3)}....$$

Hỏi với song ánh p *nào thì* f *khả vi tại một điểm nào đó.*

Bài toán 10.36. *Cho số thực* $\alpha > 0$ *và* n *số thực dương* $b_1, b_2, ..., b_n$. *Chứng minh rằng với các số thực bất kỳ* $x_1, x_2, ..., x_k$ *ta có:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i - x_j}{(b_i + b_j)^\alpha} \geq 0.$$

Bài toán 10.37. *Tìm giá trị lớn nhất của* $\int\limits_{-1}^{1} x^3 g(x)dx$ *biết hàm* g *thoả mãn:*

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} (g(x))^2 dx = 1 \\ \int\limits_{-1}^{1} g(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} xg(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0 \end{cases}$$

Bài toán 10.38. *Cho hàm số f liên tục trên R tuần hoàn chu kỳ 1. Chứng minh rằng với mọi số vô tỷ α ta có:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Bài toán 10.39. *Cho dãy các số thực dương $a_n > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

Bài toán 10.40. *Xây dựng hàm số liên tục $f_n : [0,1] \to R$ thoả mãn:*

$$\begin{cases}\int\limits_0^1 f_n(t)dt = 1 & \text{với số tự nhiên } n \text{ bất kỳ}\\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 & \text{với mọi số thực } x \in [0,1].\end{cases}$$

Bài toán 10.41. *Cho m số vô tỷ $a_1, a_2, ..., a_m$ có tính chất là không tồn tại m số nguyên $t_1, t_2, ..., t_m$ không đồng thời bằng 0 mà $t_1a_1 + t_2a_2 + ... + t_ma_m = 0$. Chứng minh rằng với mọi $0 < s < t < 1$ tồn tại số tự nhiên n thoả mãn $\{na_i\} \in (s,t)$ với mọi $1 \leq i \leq n$.*

Bài toán 10.42. *Chứng minh rằng tồn tại hằng số thực dương k sao cho với mọi $n \in N$:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin i}{i}\right| < k.$$

Xét các tổng riêng sau:

$$S_n^+ = \left|\sum_{\sin i>0}\frac{\sin i}{i}\right| \quad \text{và} \quad S_n^- = \left|\sum_{\sin i<0}\frac{\sin i}{i}\right|.$$

Chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-} = -1.$$

Bài toán 10.43. *Cho hàm số $f : R \to R$ liên tục trên toàn R và thoả mãn:*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \geq 0.$$

Chứng minh rằng f là hàm số tăng.

Bài toán 10.44. *Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 4^n$.*

Bài toán 10.45. *Hàm số Dirichlet xác định như sau:*

$$D(x) = \begin{cases}1 & x \notin Q\\ 0 & x \in Q.\end{cases}$$

Chứng minh rằng không tồn tại dãy hàm liên tục $\{f_n\}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = D(x).$$

Bài toán 10.46. *Với mỗi số thực x ký hiệu $E(x)$ là phần nguyên của x. Cho số hũu tỷ a. Hàm số $f : Z \to [0, 1]$ được định nghĩa như sau:*

$$f(m) = am - E(am) \quad \text{với mọi số nguyên } m \in Z.$$

Chứng minh rằng với mọi $\epsilon > 0$ đoạn $[0, \epsilon]$ chứa vô số phần tử của $f(Z)$ (tập hợp toàn bộ các giá trị của f). Từ đó suy ra có vô số số hữu tỷ $\dfrac{p}{q}$ thoả mãn:

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{\epsilon}{|q|}.$$

Bài toán 10.47. *Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_k$. Với số tự nhiên n tuỳ ý đặt:*

$$b_n = \prod_{i=1}^{k} \sin(na_i).$$

Biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Chứng minh rằng tồn tại chỉ số i mà $\dfrac{a_i}{\pi} \in Z$.

Bài toán 10.48. *Giả sử rằng $\{a_n\}$ là một dãy số thực bị chặn thoả mãn:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \to b \\ \dfrac{1}{\ln(n)}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \to c. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $b = c$.

Bài toán 10.49 (Bổ đề *Dirichlet* **- 1842).** *Cho số thực α và $n \in N$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $p \in Z$ và số tự nhiên $q \in N$ thoả mãn:*

$$i) \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}.$$
$$ii) \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q(n+1)}.$$

Từ đó suy ra rằng với mọi số vô tỷ α đều tồn tại vô số phân số $\dfrac{p}{q}$ thoả mãn:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Với điều kiện là $q \to +\infty$.

Lời Bình. Có thể mở rộng bổ đề *Dirichlet* cho nhiều số. Hãy chứng minh trong trường hợp hai số sau đây *Chứng minh rằng với hai số thực α, β và số tự nhiên n tồn tại hai số nguyên $p, r \in Z$ và số tự nhiên $q \in N$, $q \le n^2$ thoả mãn:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn} \quad \text{và} \quad \left|\alpha - \frac{r}{q}\right| < \frac{1}{qn}.$$

Bài toán 10.50. *i) Xét dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_1 = t \neq 0 \\ x_{n+1}(x_n + t) = t + 1 \quad \text{với mọi số tự nhiên } n. \end{cases}$$

Tính giới hạn:

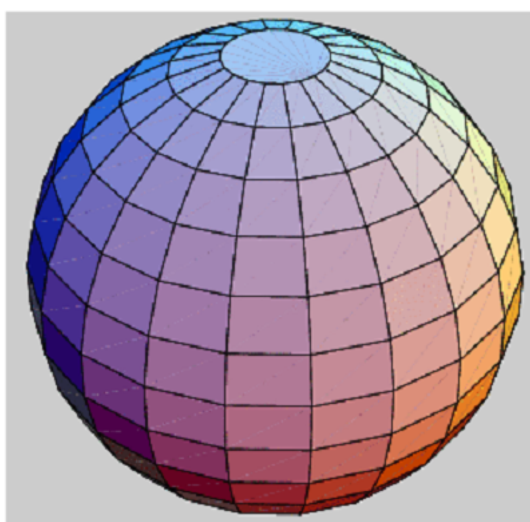
$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

ii) Xét dãy số $\{y_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} y_1 = a \neq -1 \\ y_{n+1} = \dfrac{3\sqrt{2y_n^2+2}-2}{2y_n+\sqrt{2y_n^2+2}} \quad \text{với mọi số tự nhiên } n. \end{cases}$$

Tính giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} y_n.$$



Chương 11

Đại Số

Bài toán 11.1. *Ký hiệu N_m là tập hợp tất cả các số nguyên không bé hơn số nguyên m cho trước. Tìm tất cả các hàm $f : N_m \to N_m$ thoả mãn:*

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \quad \forall x, y \in N_m.$$

Bài toán 11.2. *Số thực c được gọi là giá trị bội của dãy số (x_n) nếu tồn tại hai chỉ số k, l thoả mãn $x_k = x_l = c$. Với mỗi cặp số thực (a, b) ta lập dãy số:*

$$U(a, b) : \quad u_0 = a, u_1 = b - u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{với mọi số tự nhiên } n$$

Chứng minh tồn tại a, b nguyên sao cho dãy $U(a, b)$ có hơn 2006 giá trị bội.

Bài toán 11.3. *Xét dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn a_1, a_2, a_3 là các số nguyên và $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ với mọi số tự nhiên n. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p ta có p là ước của số:*

$$a_{n+3p+1} - a_{n+p+1} - a_{n+1}.$$

Bài toán 11.4. *Với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1, xét đa thức:*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{3}]} C_n^{3k+2}.x^k.$$

Tìm tất cả các số nguyên a thoả mãn $3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} | P_n(a^3)$ với mọi $n \geq 2$.

Bài toán 11.5. *Xét dãy số (a_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \\ a_n.a_{n-4} = a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2 \quad \text{với mọi } n > 4. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_n \in Z$ với mọi $n \in N$.

Bài toán 11.6. *Với điều kiện $x_i > 0$ với mọi $i = \overline{1, n}$. Tính giá trị sau:*

$$c = \min\max\{x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, ..., \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{1}{x_n}\}.$$

Giả sử có thêm điều kiện $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Tính:

$$c = \min\max\{\frac{x_1}{1 + x_1}, \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, ..., \frac{x_n}{1 + x_1 + x_2 + ... + x_n}\}.$$

Bài toán 11.7. *Cho dãy tăng các số tự nhiên* $\{a_i\}$ *thoả mãn tính chất với hai tập con* $I, J \in \{1, 2, ..., n\}$ *và* $I \neq J$ *thì ta có:*

$$\sum_{i\in I} a_i \neq \sum_{i\in J} a_i.$$

Tính giá trị lớn nhất của:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Bài toán 11.8. *Tìm tất cả các hàm số* $f : (1, +\infty) \to R$ *thoả mãn:*

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy) \quad \textit{với mọi } x, y > 1.$$

Bài toán 11.9. *Tồn tại hay không số thực u có tính chất* $[u^n] - n$ *là số chính phương với mọi số tự nhiên n.*

Bài toán 11.10. *Cho dãy số dương* $\{a_n\}$ *thoả mãn:*

$$\begin{cases} a_0 = a_{2005} \\ a_i = 2 \cdot \sqrt{a_{i-1}a_{i+1}} \quad \forall 1 \leq i \leq 2005. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_n = a_{2005-n}$ *với mọi* $0 \leq n \leq 2005$.

Bài toán 11.11. *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *thoả mãn* $a_1 = a_{2000}$ *và với mọi* $n \in N$:

$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}}.$$

Chứng minh rằng $x_2 \neq x_{1999}$.

Bài toán 11.12. *Xét hàm số* $f(x) = 3(|x + |x - 1| - |x + 1|)$ *và đặt* $x_{n+1} = f(x_n)$ *với mọi* $n \geq 0$. *Hỏi có bao nhiêu số thực* x_0 *thoả mãn* $x_0 = x_{2007}$ *và các số* $x_0, x_1, ..., x_{2006}$ *là đôi một phân biệt.*

Bài toán 11.13. *Hỏi có tồn tại hay không đa thức* $P(x)$ *bậc n mà đa thức hợp m lần của P là* $\underbrace{P(...(P(x))...)}_{m \text{ lần } P}$ *nhận đủ các nghiệm là* $1, 2, .., mn$.

Bài toán 11.14. *Cho số nguyên* $n > 1$ *và n số thực* $a_1, a_2, .., a_n$. *Đặt:*

$$\begin{cases} S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \\ P = \min\limits_{i<j} (a_i - a_j)^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{S}{P} \geq \frac{n(n-1)(n+1)}{12}.$$

Bài toán 11.15. *Cho số tự nhiên $n > 1$ và n số thực $a_1, a_2, .., a_n$. Chứng minh rằng tồn tại n số thực $b_1, b_2, ..., b_n$ thoả mãn tính chất:*

$$\begin{cases} a_i - b_i \in Z \quad \text{với mọi } 1 \leq i \leq n \\ \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (b_i - b_j)^2 \leq \dfrac{n^2 - 1}{12}. \end{cases}$$

Bài toán 11.16. *Cho a, b, c, x, y, z là sáu số thực dương thoả mãn đẳng thức $ax+by+cz = xyz$. Chứng minh bất đẳng thức:*

$$x + y + z > \sqrt{4(a + b + c) + \sqrt{8(ab + bc + ca)}}.$$

Bài toán 11.17. *Trên mặt phẳng cho n vecto sau đây $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_3}$ có:*

$$\sum_{i=1}^{n} |\vec{v_i}| = h.$$

Chứng minh rằng có k vecto $\vec{v_{i_1}}, \vec{v_{i_2}}, ..., \vec{v_{i_n}}$ trong số các vecto $\{\vec{v_{i_1}}\}$ sao cho:

$$|\sum_{j=1}^{k} \vec{v_{i_j}}| \geq \frac{h}{\pi}.$$

Bài toán 11.18. *Giả sử số tự nhiên n có ít nhất 2 ước số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị $(a_1, a_2, .., a_n)$ của $(1, 2, .., n)$ mà:*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cos \frac{2\pi a_k}{n} = 0.$$

Bài toán 11.19. *Cho các số nguyên dương p, thoả mãn $p = 2n + 1$ là số nguyên tố và a không chia hết cho p. Chứng minh mệnh đề sau:*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{2\pi a_k}{p} \right) \quad \text{chẵn} \quad \Longleftrightarrow \quad p | a^n - 1.$$

Bài toán 11.20. *Tìm điều kiện cần và đủ của các số tự nhiên $b_1, b_2, ..., b_n$ sao cho ta có đẳng thức sau với $1 \leq k \leq n - 1$:*

$$\sum_{i=1}^{n} \cos \left(\frac{2k\pi}{n} b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sin \left(\frac{2k\pi}{n} b_i \right).$$

Bài toán 11.21. *Cho đa thức $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \in R[x]$. Cho n số thực phân biệt $b_1, b_2, ..., b_n$ thoả mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} = -a_1$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(b_i)}{\prod\limits_{j \neq i} (b_i - b_j)} = 0.$$

Bài toán 11.22. *Chứng minh bất đẳng thức:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+x_k^2)^{n/2}}{\prod\limits_{j\neq k}(b_k-b_j)} \geq n.$$

Bài toán 11.23. *Cho số tự nhiên n và $u_i = \cos\dfrac{2i-1}{2n+1}\cdot\pi$ với $1 \leq i \leq n$. Chứng minh rằng:*

$$2^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-u_i^2}\prod\limits_{j\neq i, 1\leq j\leq n+1}|u_i-b_j|}.$$

Từ đó suy ra định lý Markov: giả sử đa thức hệ số thực $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ thoả mãn:

$$\sqrt{1-x^2}\cdot|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1,1].$$

Chứng minh rằng:

$$|a_0| \leq 2^n.$$

Bài toán 11.24. *Ký hiệu phép toán $*$ như sau. Với hai số thực dương x, y:*

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Tính giá trị biểu thức $1 * 2 * 3 * ... * 2006$ với thứ tự các phép toán tuỳ ý.

Bài toán 11.25. *Chứng minh rằng tồn tại phân hoạch:*

$$N = \{[n\alpha]|n \in N\} \cup \{[n\beta]|n \in N\}.$$

Với hai số vô tỷ dương α, β thoả mãn $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Tuy nhiên không tồn tại ba số vô tỷ dương α, β, λ sao cho ta có phân hoạch:

$$N = \{[n\alpha]|n \in N\} \cup \{[n\beta]|n \in N\} \cup \{[n\lambda]|n \in N\}.$$

Bài toán 11.26. *Trong bảng số m.n có tính chất tổng mỗi hàng hay cột đều là số nguyên. Chứng minh rằng có thể thay mỗi số trong bảng bởi một trong hai số nguyên gần nó nhất sao cho tổng các hàng và cột đều không đổi.*

Bài toán 11.27. *Cho tập n số thực tuỳ ý $\{a_n\}$. Chứng minh rằng tồn tại tập con $T \in A$ sao cho tổng các số trong T là một số thực sai khác với số nguyên gần nó nhất không quá $\dfrac{1}{n+1}$.*

Bài toán 11.28. *Cho n số thực bất kỳ $\{a_n\}$. Chứng minh rằng có thể tìm các số $\{b_i\}$ mà b_i là một trong hai số nguyên gần a_i nhất và với k bất kỳ:*

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} - \sum_{j=1}^{k} b_{i_j}\right| \leq \frac{n+1}{4}.$$

Bài toán 11.29. *Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn $a > b > c > d > e$ (với e là cơ số của logarith tự nhiên). Chứng minh rằng:*

$$a^{e^b} + b^{e^c} + c^{e^d} + d^{e^a} < b^{e^a} + c^{e^b} + d^{e^c} + a^{e^d}.$$

Bài toán 11.30. *Với mội số nguyên dương n tìm số thực dương $q = q(n)$ tốt nhất sao cho với mọi dãy n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ ta có bất đẳng thức:*

$$\text{(1)} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} x_i\right)^2 \geq q \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\text{(2)} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} x_i\right)^2 \leq q \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Bài toán 11.31. *Xét dãy số $\{a_n\}$ xác định như sau:*

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \left[\dfrac{3a_n}{2}\right] \quad \text{với mọi số tự nhiên } n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

(1) Trong dãy số này có vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.

(2) Tồn tại số thực α sao cho $a_{n+1} = \left[\alpha\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right] + 1$.

(3) Số $0, a_1a_2, ...$ là số vô tỷ hay hữu tỷ.

Ngoài ra có tồn tại hay không số thực α sao cho $a_{n+1} = \left[\dfrac{3}{2}\alpha^n\right] + 1$?

Bài toán 11.32. *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : R \to R$ mà:*

$$f(f(x)) = x^2 - 3x - 2 \quad \text{với mọi số thực } x.$$

Bài toán 11.33. *Chứng minh đẳng thức sau đối với n tự nhiên tuỳ ý:*

$$\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{3} - \frac{1}{12}}\right] = \left[\sqrt[3]{n + \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{3} - \frac{1}{12}}\right]}\right].$$

Bài toán 11.34. *Chứng minh đẳng thức sau đây với mọi số tự nhiên n:*

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{p}\left[-\frac{1 + \sqrt{8q + (2p-1)^2}}{2}\right] = -\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Bài toán 11.35. *Giả sử P và Q là các đa thức thoả mãn $P^3 \not\equiv Q^2$. Chứng minh rằng:*

$$deg(P^3 - Q^2) \geq deg(P) + \frac{3}{2}.$$

Nếu đặt $F = P^3 - Q^4$ thì ta có:

$$deg(F) \geq \frac{5}{2} \cdot deg(Q) + 1.$$

Bài toán 11.36. *Tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thoả mãn:*

$$f(x - f(y)) = 4f(x) - f(y) - 3x \quad \text{với mọi } x, y \in R.$$

Bài toán 11.37. *Cho các số thực a, b, c thoả mãn $(b-1)^2 - 4ac = 9$. Xét dãy các đa thức:*

$$\begin{cases} f(1, x) = ax^2 + bx + c \\ f(n+1, x) = f(1, f(n, x)) \quad \text{với mọi số tự nhiên } n. \end{cases}$$

Tìm số nghiệm thực $x \in R$ của phương trình $f(n, x) = 1$.

Bài toán 11.38. *Tìm tất cả các bộ số thực $(x_1, x_2, .., x_n)$ thoả mãn:*

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)(x_k + ... + x_n) = 1 \quad \text{với } 1 \le k \le n.$$

Bài toán 11.39. *Cho a, b là 2 số tự nhiên khác 1. Chứng minh mệnh đề:*

$$b^n - 1 | a^n - 1 \quad \forall n \in N \Longrightarrow \exists k \in N \quad a = b^k.$$

Bài toán 11.40. *Giả sử $f : R \to R$ là một hàm số thoả mãn với mọi số thực dương x tồn tại đa thức $P_c(x)$ có tính chất:*

$$|f(x) - P_c(x)| \le cx^{2006} \quad \forall x \in R.$$

Chứng minh rằng f là một đa thức.

Bài toán 11.41. *Tìm tất cả các đa thức P hệ số nguyên sao cho đa thức:*

$$Q(x) = (x^2 + 6x + 10)(P(x))^2 - 1 = (R(x))^2$$

là bình phương của một đa thức hệ số nguyên.

Bài toán 11.42. *Cho số tự nhiên $m > 3$ và các số $p_1, p_2, .., p_n$ là tất cả các số nguyên tố không vượt quá m. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} \right) \ge ln(ln(n)).$$

Bài toán 11.43. *Tìm tất cả các số thực a, b sao cho với mọi n và x_n là nghiệm của phương trình $\dfrac{\cos x}{x} = n$ ta luôn có $\cos ax_n + \cos bx_n \ge 2 - x_n^2$.*

Bài toán 11.44. *Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hàm số f khả vi trên toàn R thoả mãn với mọi số thực x thì:*

$$\begin{cases} f(x) \le 1 \\ (f(x))^2 + (f'(x))^2 = k. \end{cases}$$

Bài toán 11.45. *Tìm tất cả các hàm số $f : [0,1] \to [0,1]$ thoả mãn:*

$$f(xy) = xf(x) + yf(y) \quad \text{với mọi } x, y \in R.$$

Bài toán 11.46. *Tìm tất cả các toàn ánh $f : R \to R$ thoả mãn:*

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) \quad \text{với mọi } x, y \in R.$$

Bài toán 11.47. *Cho x là một số thực thoả mãn $[nx^2] = [x[xn]] + 1$ với số tự nhiên n bất kỳ. Chứng minh rằng $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Chứng minh rằng nếu $x^3 = x^2 + 1$ và $x > 0$ thì tồn tại các số $\{C_n\}$ nhận giá trị $0, 1, 2$ mà:

$$[nx] + [nx^2] + [nx^3] = [x[n^4]] + C_n.$$

Bài toán 11.48. *Một học sinh chơi với các hệ số của phương trình bậc hai như sau. Lấy hai số p, q bất kỳ, xét phương trình $x^2 + px + q = 0$. Nếu phương trình có hai nghiệm p_1, q_1 thì lại xét phương trình $x^2 + p_1x + q_1$. Hỏi học sinh đó có thể chơi quá 5 lượt hay không (không tính phương trình đầu tiên).*

Bài toán 11.49. *Cho tập hợp hữu hạn A có không ít hơn 6 phần tử sao cho nếu a, b, c, d, e, f là 6 phần tử phân biệt của A thì $ab + cd + ef$ cũng thuộc vào A. Tìm giá trị lớn nhất của số các phần tử của A.*

Bài toán 11.50. *Trên mặt phẳng toạ độ cho 101 đường thẳng và đánh dấu tất cả các giao điểm của chúng. Hỏi có thể xảy ra hay không tình huống trên mỗi đường thẳng có đúng 50 điểm đánh dấu có hoành độ dương và 50 điểm được đánh dấu khác có hoành độ âm.*