

Bài 1: (6,0 điểm)

a. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$

1. Rút gọn P 2. Tìm các giá trị của x để $P = \frac{8}{9}$ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P

b. Chứng minh rằng $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$

Bài 2: (4,0 điểm)

$$\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{x^2+x+2} = x + \frac{4}{x}$$

a) Giải phương trình:

b) Chứng minh rằng: $n^2 + 7n + 2014$ không chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n.

Bài 3: (3,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

b) Cho a, b, c là các số dương và $a+b+c=1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = a^3 + b^3 + c^3$$

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R, từ một điểm S ở ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến SA, SB (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của (O) cắt AB tại E. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, O, S, B thuộc cùng một đường tròn.

b) $AC^2 = AB \cdot AE$

b) $SO \parallel CB$

c) OE vuông góc với SC

Bài 5: (1,0 điểm)

Tìm a, b là các số nguyên dương sao cho: $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$

Đáp án + biểu điểm

Bài 1: a) (4đ) 1.(2đ) Tìm được ĐK: $x \geq 0$ $\left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$ $= \left(\frac{x+2-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$ $= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$ $= \frac{4\sqrt{x}}{3(x-\sqrt{x}+1)}$	0,25đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,25đ
2. (1đ) $\frac{8}{9} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = \frac{1}{4}$ P=9 (TMĐK)	1đ
3. Với $x \geq 0; 3(x - \sqrt{x} + 1) > 0 \Rightarrow P \geq 0$, minP=0 khi x=0 Với $x > 0, P = \frac{4}{3(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1)}$ vì $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ nên $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 1$. Do đó $P \leq \frac{4}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi x=1. Vậy maxP= $\frac{4}{3}$ khi x=1	0,5đ 0,25đ 0,25đ
b. $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$ $A > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$ $2A > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$ $2A > \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \dots + \sqrt{81} - \sqrt{80}$ $2A > \sqrt{81} - 1 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow A > 4$ (đpcm)	1đ 1đ
Bài 2: (4đ) a) (2đ) ĐK: $x > 0$ Nhận thấy $2x^2 + x + 6 \neq x^2 + x + 2$ với mọi x Biến đổi:	0,25đ

$\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{x^2+x+2} = x + \frac{4}{x}$ $\Leftrightarrow \frac{x^2+4}{\sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x^2+4}{x}$ $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{x^2+x+2} = x$ $\Rightarrow 2\sqrt{x^2+x+2} = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+x+2} = 2 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 2x^2 + 4x + 4) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x^3 + 2x^2 + 4x + 4 > 0 \text{ khi } x > 0)$	0,5đ 0,25đ 0,5đ 0,5đ
b)(2đ) Giả sử $n^2 + 7n + 2014 : 9$ $\Rightarrow n^2 + 7n + 2014 : 3 \Rightarrow 4n^2 + 28n + 8056 : 3 \Leftrightarrow (2n+7)^2 + 8007 : 3$ vì $8007 : 3 \Rightarrow (2n+7)^2 : 3 \Rightarrow (2n+7)^2 : 9$ mà 8007 không chia hết cho 9. Nên $(2n+7)^2 + 8007$ không chia hết cho 9 $\Rightarrow n^2 + 7n + 2014$ không chia hết cho 9 mâu thuẫn với giả sử nên điều giả sử là sai. Vậy $n^2 + 7n + 2014$ không chia hết cho 9 (đpcm)	0,5đ 0,5đ 1đ
Bài 3: (3điểm) a. (1,5đ) Giải: Ta có $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ $5x^2 + 11x + 7 = 5(x + \frac{11}{10})^2 + \frac{19}{20} > 0$ Nên $(1+x+x^2+x^3) - (1+x+x^2) < 1+x+x^2+x^3 < (1+x+x^2+x^3) + (5x^2+11x+7)$ $\Leftrightarrow x^3 < 1+x+x^2+x^3 < (x+2)^3 \text{ hay } x^3 < y^3 < (x+2)^3. \text{ Do đó } y^3 = (x+1)^3$ $\Rightarrow (x+1)^3 = 1+x+x^2+x^3 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ *$x=0 \Rightarrow y=1$ *$x=-1 \Rightarrow y=0$ Vậy nghiệm nguyên của PT là : (0;1), (-1;0) b) (1,5đ) $a^3 + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27}} = \frac{a}{3} \text{ (bất côsi cho 3 số dương)}$ ta có $a > 0$ nên $\Rightarrow a^3 \geq \frac{a}{3} - \frac{2}{27}$ tương tự $b^3 \geq \frac{b}{3} - \frac{2}{27}; c^3 \geq \frac{c}{3} - \frac{2}{27},$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{3}(a+b+c) - \frac{2}{9} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$	0,25đ 0,25đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ

Do đó $A \geq \frac{1}{9}$. Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ Vậy $\min A = \frac{1}{9} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$	0,5đ
Bài 4:(6đ) a. Vẽ đúng hình chứng minh được 4 điểm A,O,S,B cùng thuộc 1 đường tròn đường kính SO b.Cm được $AC^2=AB.AE$ c. Cm được $SO \parallel CE$ d. Cm $\triangle AEC$ đồng dạng $\triangle SOA \Rightarrow \frac{EC}{OA} = \frac{AC}{SA} \Rightarrow \frac{EC}{OC} = \frac{AC}{SA} \Rightarrow \triangle OCE$ đồng dạng $\triangle SAC$ từ đó suy ra OE vuông góc với SC	1,5đ 1,5đ 1,5đ 1,5đ
Bài 5: (1đ) $x^2 - 2 : xy + 2 \Rightarrow y(x^2 - 2) : xy + 2 \Rightarrow x(xy + 2) - 2(x + y) : xy + 2$ $\Rightarrow 2(x + y) : xy + 2$ Đặt $2(x+y)=k(xy+2)$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ Nếu $k=1 \Rightarrow 2x+2y=xy+2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2)=2$ Tìm được $x=4 ; y=3$ Nếu $k \geq 2 \Rightarrow 2(x+y) \geq 2(xy+2) \Rightarrow x+y \geq xy+2 \Rightarrow (x-1)(y-1)+1 \leq 0$ vô lí (loại) Vậy $x=4, y=3$	1,0đ