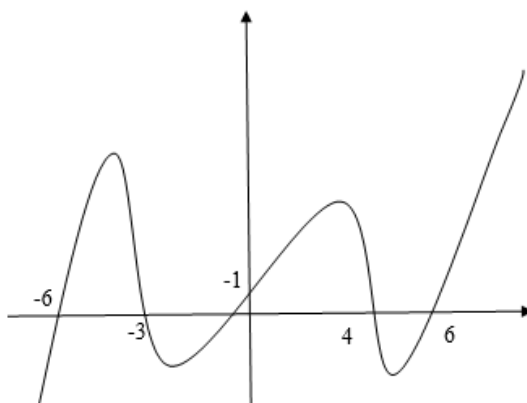


DẠNG 3**Bài toán truy tìm hàm ngược**

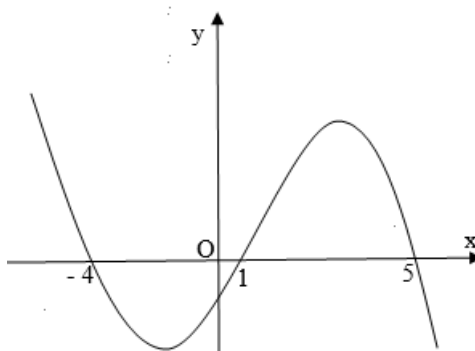
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(3-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ là

- A. 3. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(1+2x)$ như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $y = f(-|x|^2 + 2|x| - 2020 + m)$ có 7 điểm cực trị

- A. Không có giá trị nào. B. 5 giá trị. C. 6 giá trị. D. 7 giá trị.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$			0		$-\infty$
		-4				

Hàm số $h(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(-x^3 - x)$

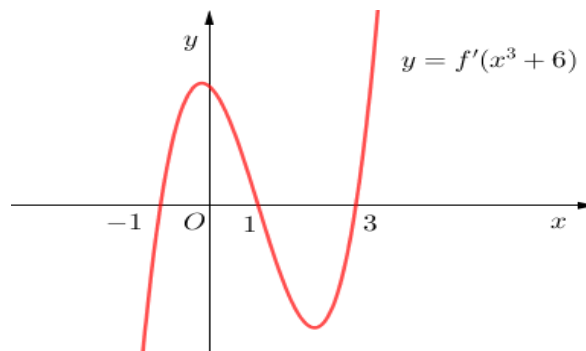
có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$g(0)$	$g(1)$	$-\infty$	

Hàm số $h(x) = f(2x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5: Cho hàm đa thức bậc ba $y = f'(x^3 + 6)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 7.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(2x^2 - 4x + 3)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ (bảng biến như hình sau)

x	$-\infty$	-5	1	6	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$		

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

Câu 7: Cho hàm đa thức $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f(3 - 4x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x - 10)$ là

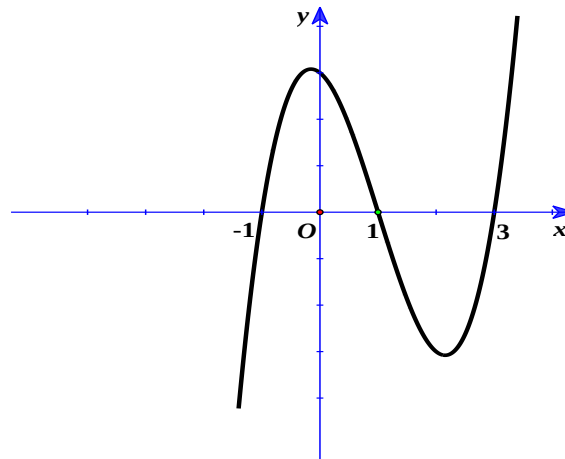
A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 9: Đồ thị của hàm $y = f'(1-4x)$ như hình vẽ dưới đây. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x - 3m - 2)$ nhiều nhất là



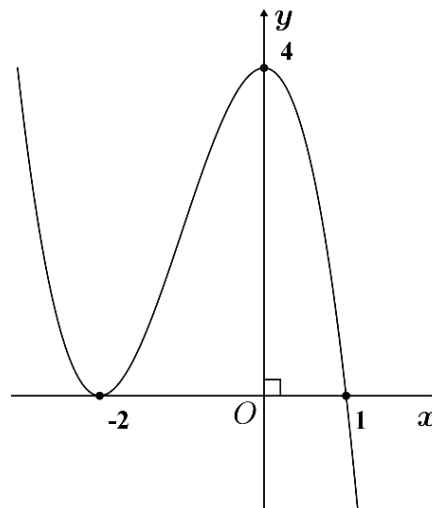
A. 4040.

B. 2024.

C. 4002.

D. 2020.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(3-2x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(|x^2 - 3|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



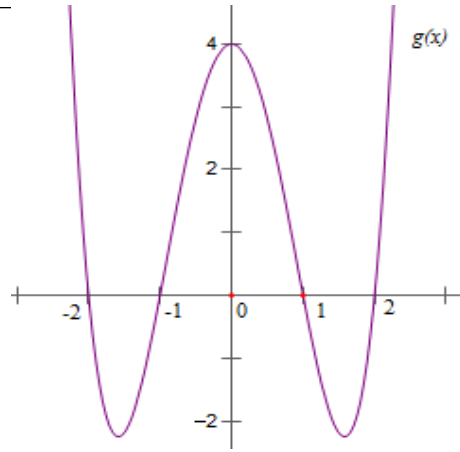
A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên R . Hàm số $g(x) = f'(1-x^2)$ là hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ như dưới

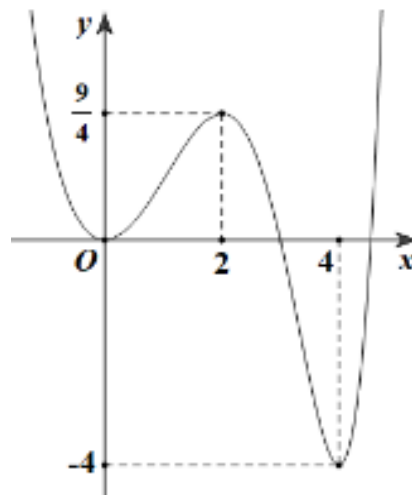


Hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

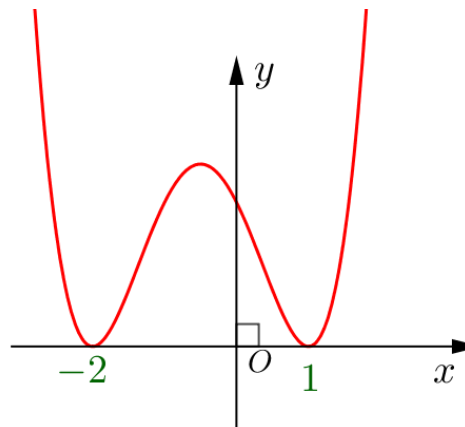
Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(5 - 2x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9; 9)$ thỏa mãn $2m \in \mathbb{Z}$ và hàm số

$y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị?



- A. 26. B. 25. C. 24. D. 27.

Câu 13: Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f(1 - x)$ được cho như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 2)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f(x^2 - 2x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Biết hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = a$. Hàm số $f(x^2 - 4x + 4)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

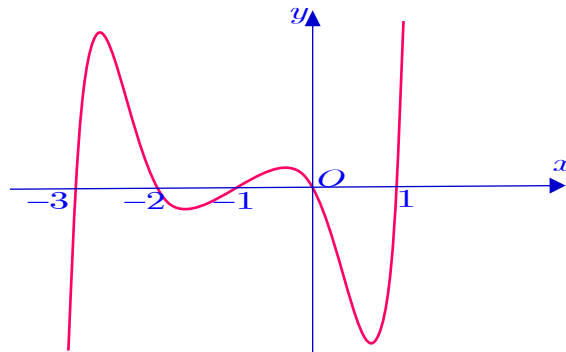
A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Câu 15: Cho hàm đa thức $y = \left[f(x^2 + 2x) \right]'$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|x - 2| + m)$ có 5 cực trị

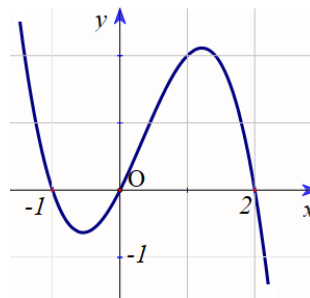
A. -52.

B. 55.

C. -55.

D. 56.

Câu 16: Cho hàm số $y = f'(x^3 - x^2 - 2x + 3)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Biết $f(0) > 0$, $f(-1) < 0$. Hàm số $g(x) = |f(x^4 - 2x^2)|$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 6.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(e^{2x} - 2x - 2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

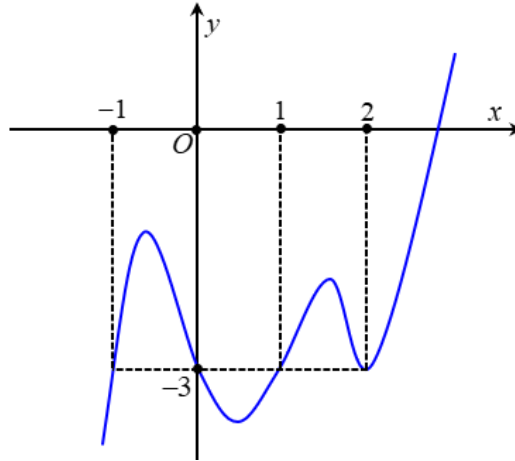
A. 9.

B. 11.

C. 5.

D. 7.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x||$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2.

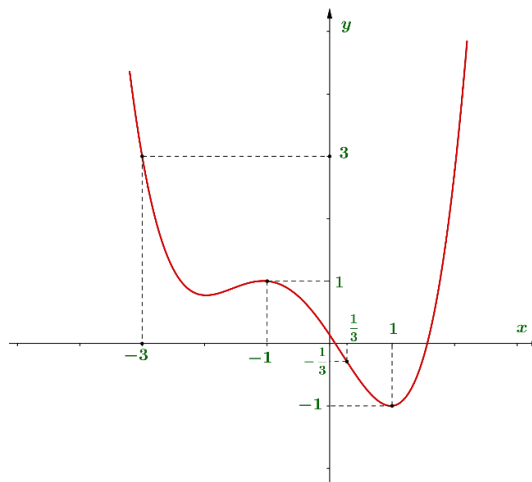
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

$$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng } (0; 2\pi)?$$



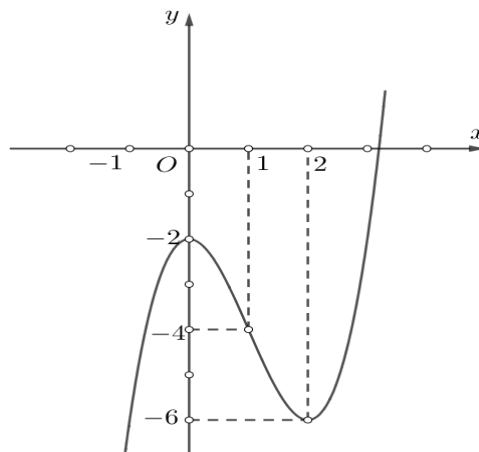
A. 9.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = |f(1 - |x|) + m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 14.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.C	5.D	6.A	7.D	8.B	9.D	10.A
11.B	12.A	13.D	14.D	15.C	16.D	17.A	18.D	19.D	20.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ ta có

$$y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \end{cases}$$

Giải $f'(x^2 - 2x + 3) = 0$, đặt $x^2 - 2x + 3 = 3 - t$ từ đồ thị hàm số $y = f'(3 - t)$ ta có

$$f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 9 \\ x^2 - 2x + 3 = 6 \\ x^2 - 2x + 3 = 4 \\ x^2 - 2x + 3 = -1 \\ x^2 - 2x + 3 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 6 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Phương trình $f'(x^2 - 2x + 3) = 0$ có 7 nghiệm bội đơn phân biệt suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ có đúng 7 điểm cực trị.

Câu 2: Xét hàm số $y = f(-x^2 + 2x - 2020 + m)$ ta có

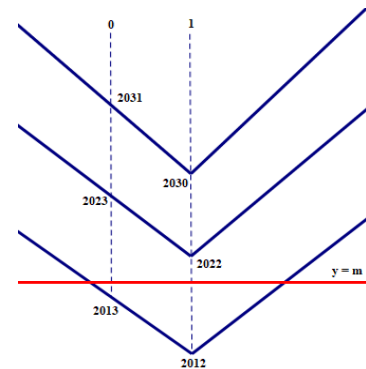
$$h'(x) = (-2x + 2) \cdot f'(-x^2 + 2x - 2020 + m)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(-x^2 + 2x - 2020 + m) = 0, (*) \end{cases}$$

Giải (*), đặt $-x^2 + 2x - 2020 + m = 1 + 2x$, ta có

$$f'(-x^2 + 2x - 2020 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x - 2020 + m = -7 \\ -x^2 + 2x - 2020 + m = 3 \\ -x^2 + 2x - 2020 + m = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^2 - 2x + 2013 \\ m = x^2 - 2x + 2023 \\ m = x^2 - 2x + 2031 \end{cases}$$

hàm số $y = f(-|x|^2 + 2|x| - 2020 + m)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(-x^2 + 2x - 2020 + m)$ có 3 điểm cực trị dương, từ đồ thị hàm số ta suy ra $2012 < m < 2013$, do $m \in [-2021; 2021]$ suy ra $m \in \emptyset$.



Câu 3: Ta có $g'(x) = -f'(3-x); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$.

Suy ra $x=1; x=3$ là các nghiệm của phương trình $f'(3-x) = 0$.

Do đó $f'(0) = 0; f'(2) = 0$.

Ta có $h'(x) = 2xf'(x^2+1)$;

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \\ x^2+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4: Ta có $g'(x) = -(3x^2+1)f'(-x^3-x); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Suy ra $x=0; x=1$ là các nghiệm của phương trình $f'(-x^3-x) = 0$.

Do đó $f'(0) = 0; f'(-2) = 0$.

Ta có $h'(x) = (4x-1)f'(2x^2-x)$;

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ f'(2x^2-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ 2x^2-x=0 \\ 2x^2-x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Ta có: $f'(x^3+6) = a(x-1)(x+1)(x-3)$ (với $a > 0$).

Với $x=-1$ thì $f'(5) = 0$.

Với $x=1$ thì $f'(7) = 0$.

Với $x=3$ thì $f'(33) = 0$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=7 \\ x=33 \end{cases}$$

Ta có: $g'(x) = (2x+4)f'(x^2+4x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ f'(x^2 + 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 4 = 5 \\ x^2 + 4 = 7 \\ x^2 + 4 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{29} \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 6: Ta có $y' = (4x - 4)f'(2x^2 - 4x + 3) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ f'(2x^2 - 4x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(2x^2 - 4x + 3) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ $x = -5, x = 1, x = 6$.

Như vậy phương trình (1) có nghiệm bội lẻ $x = -5$ hoặc $x = 6$.

Thay $x = -5$ vào (1) ta được: $f'(73) = 0$.

$$\text{Thay } x = 6 \text{ vào (1) ta được: } f'(51) = 0. \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 73 \\ x = 51 \end{cases}.$$

Ta có: $g'(x) = (3x^2 + 6x)f'(x^3 + 3x^2) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ x^3 + 3x^2 = 73 \\ x^3 + 3x^2 = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x \approx 3,382... \\ x \approx -5,022... \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có ít nhất 4 điểm cực trị.

Câu 7: Từ bảng xét dấu của $f'(x+1)$ ta có:

$$f'(x+1) = (x+1)x(x-1)h(x) \text{ với } h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f'(x+1) = (x+1-2)(x+1)(x+1-1)h(x).$$

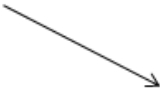
Đặt $t = x+1$ khi đó $f'(t) = t(t-1)(t-2)U(t)$ với $t = x+1 \Rightarrow h(x) = U(t) > 0$ với mọi t thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Vậy } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Mặt khác ta có: $g(x) = f(x^2 + x + 1) \Rightarrow g'(x) = (2x+1)f'(x^2 + x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+x+1=0 \\ x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases}.$$

Ta có bảng biên thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-	+	-	+
$g(x)$							
$g(x)$							

Vì $y = g(|x|) = f(x^2 + |x| + 1)$ và $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ có một điểm cực đại.

Vậy hàm số $|g(x)| = y = \left| f\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \right|$ có tối đa 6 điểm cực trị.

Câu 8: $y = f(x^2 - 2x - 10) \Rightarrow y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x - 10).$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x - 10) = 0 \end{cases}$$

Xét $f'(x^2 - 2x - 10) = 0.$

Đặt $x^2 - 2x - 10 = 3 - 4t.$

$$\text{Ta có } f'(3 - 4t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Leftrightarrow 3 - 4t = -9 \\ t = 2 \Leftrightarrow 3 - 4t = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Nên } f'(x^2 - 2x - 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 10 = -9 \\ x^2 - 2x - 10 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \end{cases}.$$

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x - 10)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9:

$$\text{Từ giả thiết ta có } f'(1 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4x = 5 \\ 1 - 4x = -3 \\ 1 - 4x = -11 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -3 \\ t = -11 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } g(x) = f(x^2 + 4x - 3m - 2) \Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x - 3m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 4x - 3m - 2 = 5 \\ x^2 + 4x - 3m - 2 = -3 \\ x^2 + 4x - 3m - 2 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \left((-2)^2 + 4(-2) = -4 \right) \\ x^2 + 4x = 3m + 7 \\ x^2 + 4x = 3m - 1 \\ x^2 + 4x = 3m - 9 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 4x$ ta được $\min_{\mathbb{R}}(x^2 + 4x) = y(-2) = -4$.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x - 3m - 2)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $3m - 9 > -4 \Leftrightarrow m > \frac{5}{3}$.

Vì giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ nên $m \in \{2; 3; \dots; 2021\}$. Vậy có 2020 số.

Câu 10: Ta có $y = f'(3 - 2x) = a(x + 2)^2(x - 1)$ với $a < 0$

Với $x = -2$ ta có $f'(7) = 0$

Với $x = 1$ ta có $f'(1) = 0$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$ trong đó $x = 7$ là nghiệm bội hai.

Ta có: $g(x) = f(|x^2 - 3|) = f\left(\sqrt{(x^2 - 3)^2}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{|x^2 - 3|} \cdot f'(|x^2 - 3|)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x^2 - 3| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$ và $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}$ thì $g'(x)$ không xác định

Xét $g'(-3) = \frac{-3 \cdot 6}{6} f'(6)$. Ta có $f'(6) = f'\left(3 - 2 \cdot \frac{-3}{2}\right)$

Nên $f'(6) = f'\left(3 - 2 \cdot \frac{-3}{2}\right) = a\left(-\frac{3}{2} + 2\right)^2\left(-\frac{3}{2} - 1\right) > 0$ vì $a < 0$ suy ra $g'(-3) < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số có 4 điểm cực tiểu.

Câu 11:

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 4 nên có dạng

$$g(x) = a(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2), a > 0 \Rightarrow f'(1 - x^2) = a(x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

$$\text{Đặt } t = 1 - x^2 \Rightarrow f'(t) = at(t + 3)$$

$$y = f(x^2 - 2|x|) \Rightarrow y' = \left(2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2}}\right) f'(x^2 - 2|x|) = 2ax \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right) (x^2 - 2|x|)(x^2 - 2|x| + 3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 12:

Đặt $t = 5 - 2x$. Khi $y = f(5 - 2x)$ có 3 điểm cực trị $x = 0, x = 2, x = 4$ thì $y = f(t)$ có 3 điểm cực trị $t = 5, t = 1, t = -3$ và $f(5) = 0, f(1) = \frac{9}{4}, f(-3) = -4$.

Bảng xét dấu $y = f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$		-4	$\frac{9}{4}$	0	$+\infty$

$$\text{Xét } g(x) = 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \Rightarrow g'(x) = 24x^2 f'(4x^3 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^3 + 1 = 5 \\ 4x^3 + 1 = 1 \\ 4x^3 + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x = 1 \\ x^3 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

$$\text{Xét phương trình } 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f(4x^3 + 1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}.$$

Đặt $u = 4x^3 + 1 \Rightarrow u \in \mathbb{R}$.

Số nghiệm $f(4x^3 + 1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$ bằng số nghiệm phương trình $f(u) = f(t) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$.

Để $y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị thì $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \geq \frac{9}{4} \\ -4 < \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ \frac{1}{2} \leq m < \frac{17}{2} \end{cases}. \text{ Vì } m \in (-9; 9) \text{ và } 2m \in \mathbb{Z} \text{ nên có 26 giá trị.}$$

Câu 13: Đồ thị hàm số $y = f(1 - x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -2$ và $x = 1$.

Suy ra $y = f(1 - x) = a(x + 2)^2 \cdot (x - 1)^2$ trong đó $a > 0$.

$$y = f(1 - x) = a[3 - (1 - x)]^2 \cdot [-(1 - x)]^2.$$

Do đó, $f(x) = a(3-x)^2 \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = 2ax \cdot (3-x) \cdot (3-2x)$.

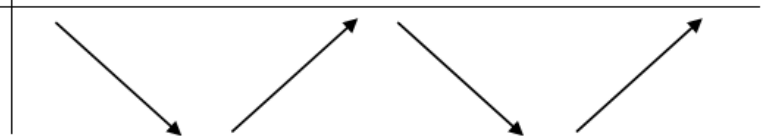
Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \\ x^2 + 2 = \frac{3}{2} \\ x^2 + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

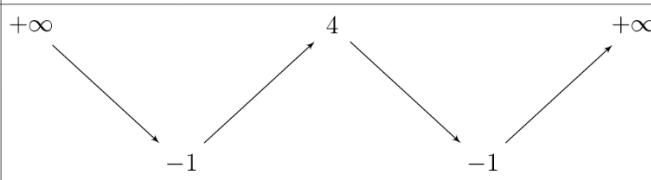


Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x) = f(x^2 + 2)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 14: Đặt $t = x^2 - 2x$.

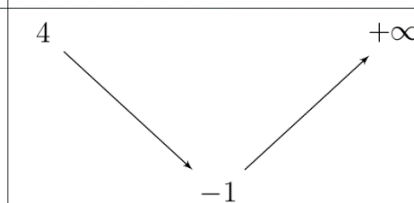
Ta có một phần bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$t = x^2 - 2x$	$+\infty$	15	-1	15	$+\infty$
$f(t) = f(x^2 - 2x)$	$+\infty$		4		$+\infty$



Ta vẽ lại một phần bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	-1	15	$+\infty$
$f(x)$	4		$+\infty$



Suy ra hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = 15$.

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow g'(x) = (2x - 4) f'(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 4 = -2 \\ x^2 - 4x + 4 = 15 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 - 4x + 4 = -2$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 15$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy hàm số $f(x^2 - 4x + 4)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 15: Ta có: $\left[f(x^2 + 2x) \right]' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = a(x + 3)(x + 2)(x + 1)(x)(x - 1) \quad (a > 0)$

$$\Rightarrow f'(x^2 + 2x) = \frac{a}{2}(x + 3)(x + 2)x(x - 1) = \frac{a}{2}(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x \Rightarrow f'(t) = \frac{a}{2}(t - 3)t.$$

$$\text{Ta có } g' = \frac{x-2}{|x-2|} f'(|x-2| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f'(|x-2| + m) = 0 \end{cases}$$

Đề hàm số $g(x)$ có 5 cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| + m = 0 \\ |x-2| + m = 3 \end{cases} \text{ phải có 4 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Suy ra $m \in \{-10; -9; \dots; -1\}$. Tổng giá trị m nguyên là -55 .

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5; 9)$.

Câu 16: Từ đồ thị ta thấy $f'(x^3 - x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ do đó ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Xét $h(x) = f(x^4 - 2x^2)$ ta có $h'(x) = (4x^3 - 4x)f'(x^4 - 2x^2)$,

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x^3 - 4x)f'(x^4 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ f'(x^4 - 2x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x^4 - 2x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

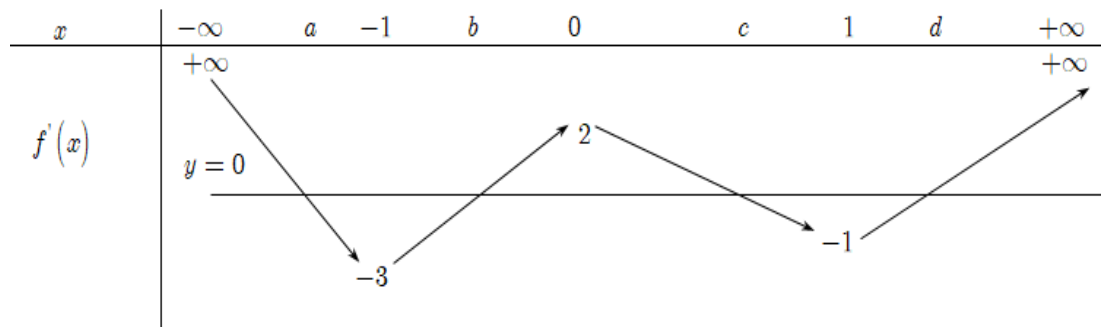
(Tất cả các nghiệm đều bội lẻ)

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4 - 2x^2)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	$f(3)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(-1)$	$f(3)$	$-\infty$

Do hàm số $y = f'(x^3 - x^2 - 2x + 3)$ là hàm bậc 3 suy ra $y = f'(x)$ là hàm bậc nhất có hệ số bậc nhất âm và $f'(3) = 0$ do đó $f(3) > f(0)$, theo giả thiết $f(0) > 0$, $f(-1) < 0$ nên kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4 - 2x^2)$ ta suy ra hàm số $g(x) = |f(x^4 - 2x^2)|$ có 6 điểm cực tiểu.

Câu 17: Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$



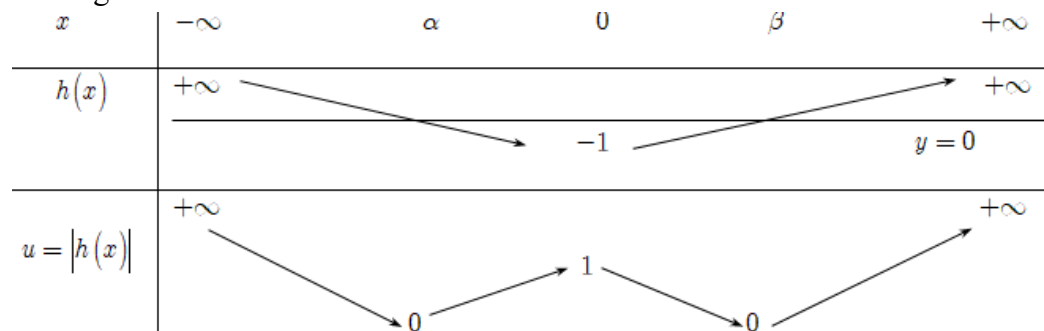
Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in -\infty; -1 \\ x = b \in -1; 0 \\ x = c \in 0; 1 \\ x = d \in 1; +\infty \end{cases}$

Đặt $h(x) = e^{2x} - 2x - 2$

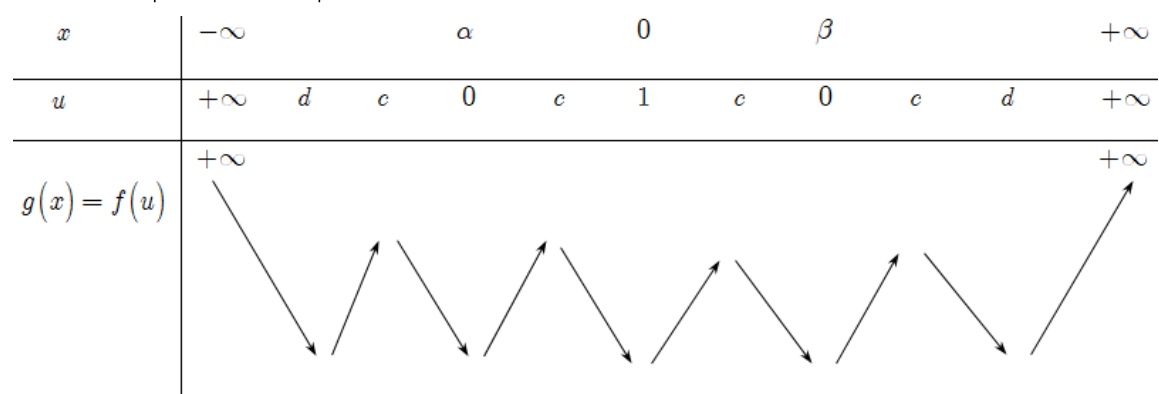
$h'(x) = 2e^{2x} - 2 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \approx -0,92 \\ x = \beta \approx 0,57 \end{cases}$

Nên ta có bảng biến thiên sau:



Sử dụng phương pháp ghép trực, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(|e^{2x} - 2x - 2|) = f(u)$ như sau:

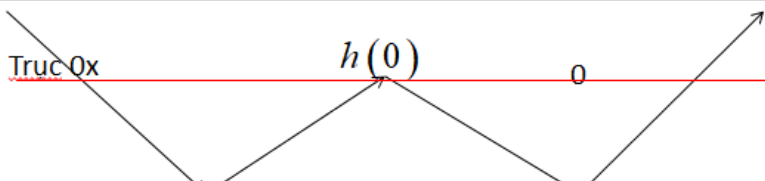


Vậy hàm số $g(x) = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 18: Đặt: $h(x) = f(x) + 3x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - (-3)$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$							

Số điểm cực trị dương của hàm $|h(x)|$ là 2.

Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là: $2.2+1=5$.

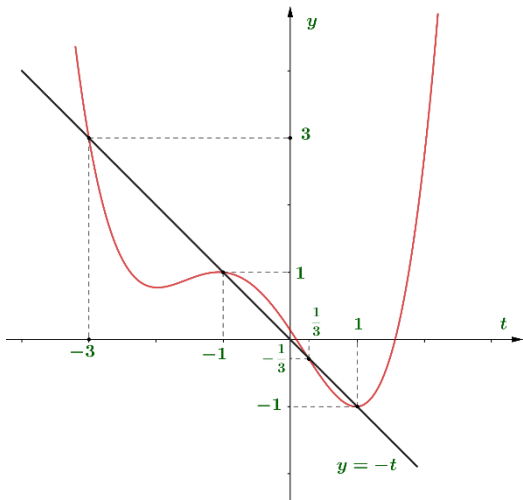
Câu 19: Đặt $t = \frac{5\sin x - 1}{2}$

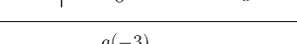
Suy ra $g(t) = 2f(t) + t^2 + 3$

Ta có $g'(t) = 2f'(t) + 2t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



t	$-\infty$	-3		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	 The graph shows a function $g(t)$ plotted against t. The function has a zigzag shape with peaks at $t = -3$, $t = \frac{1}{3}$, and $t = 1$, and valleys at $t = -\infty$, $t = -1$, and $t = 1$. The function approaches $+\infty$ as t approaches $+\infty$.									

Suy ra:

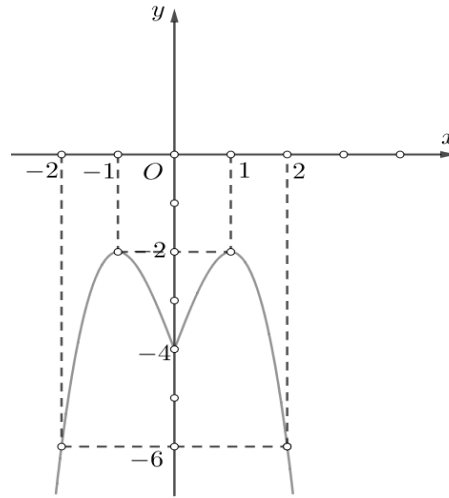
x	0			$\frac{\pi}{2}$			$\frac{3\pi}{2}$			2π		
t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	-3	-1	$-\frac{1}{2}$		
$g(t)$												

Câu 20: $f(x)$ có hai cực trị là $x = 0, x = 2 \Rightarrow f'(x) = ax(x - 2) \Rightarrow f(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$.

$$f(0) = -2, f(1) = -4 \Rightarrow a = 3, c = -2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 2.$$

$$f(1-|x|) = \begin{cases} f(1-x), & \text{khi } x \geq 0 \\ f(1+x), & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1-|x|) = \begin{cases} -x^3 + 3x - 4, & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 - 3x - 4, & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Ta có đồ thị của $f(1-|x|)$ như sau:



Đặt $h(x) = f(1-|x|) + m$. Ta có $g(x) = |h(x)|$.

$g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m \geq 4$.

Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.