

Câu 1. (5 điểm)

Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

- Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

- $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$
- $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$
- $$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6}$$

Câu 3. (3 điểm)

- Tìm số tự nhiên n để P là số nguyên tố biết: $P = n^3 - n^2 + n - 1$
- Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

- Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Câu 4. (6,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kỳ ($CM < CD$), vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H, MP cắt BD tại K.

- Chứng minh: DH vuông góc với BM .

- Tính $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$

- Chứng minh: $MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$

Câu 5. (1,5 điểm)

- Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Giá trị của A được xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x) + x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)(4+x^2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right] \cdot \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2-x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x^2 + x - 2x - 2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x(x+1) - 2(x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

b)

$$* \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 : 2x \Rightarrow 2x+2 : 2x \quad \text{mà } 2x : 2x$$

$$\Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = -1(tm) \end{cases}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

Câu 2.**a)**

$$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

b)

$$y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y+1+(2^x)^2-2.2^x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2+(2^x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-1)$

c)

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+16x+72}{x+8}=\frac{x^2+8x+20}{x+4}+\frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq -2; x \neq -4; x \neq -6; x \neq -8$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+8)^2+8}{x+8}=\frac{(x+4)^2+4}{x+4}+\frac{(x+6)^2+6}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow x+2+\frac{2}{x+2}+x+8+\frac{8}{x+8}=x+4+\frac{4}{x+4}+x+6+\frac{6}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+4}=\frac{6}{x+6}-\frac{8}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)}=\frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)}=\frac{-2x}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8x=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} (tm)$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-5$

Câu 3.

1) Biến đổi được $p=(n^2+1)(n-1)$

Nếu $n=0;1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n=2$ thỏa mãn đề bài vì $p=(2^2+1)(2-1)=5$

Nếu $n>3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n-1>1$ và $n^2+1>n-1>1$

Vậy $n=2$ thì $p=n^3-n^2+n-1$ là số nguyên tố.

2) $*g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x-2)$

$$*f(x)=ax^3+bx^2+10x-4; g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+10x-4=(x-1)(x-2)Q(x) \quad (1) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- Thay $x_1=1; x_2=2$ vào (1) ta có:

$$a+b+6=0 \text{ và } 8a+4b+16=0 \Rightarrow a=2 \text{ và } b=-8$$

$$f(x)=ax^3+bx^2+10x-4; g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases}$$

Vậy

3)

Biến đổi được:

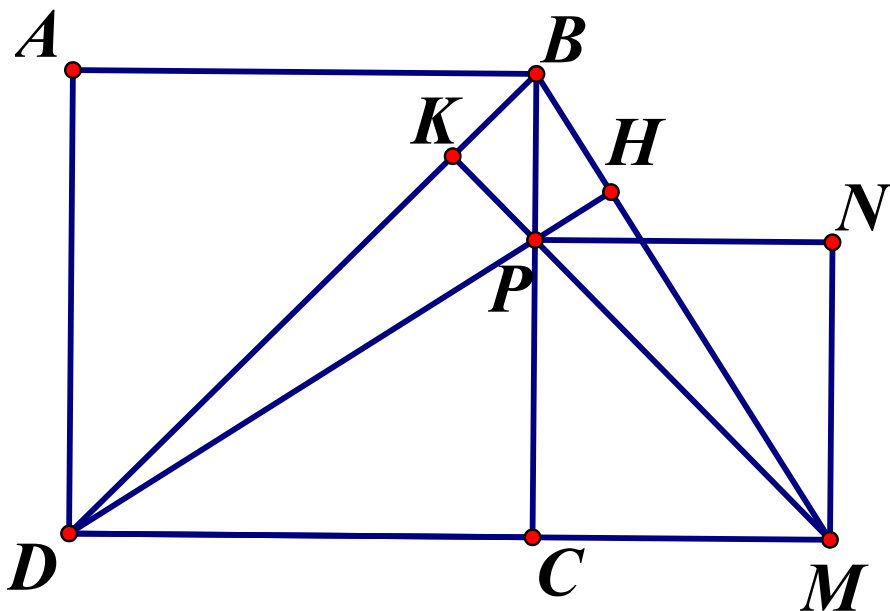
$$4a^2+b^2=5ab \Leftrightarrow (4a-b)(a-b) \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a \\ b=a \end{cases}$$

Mà $2a>b>0 \Rightarrow 4a>2b>b$ nên $a=b$

$$\text{Ta có: } P=\frac{a^2}{4a^2-a^2}=\frac{1}{3}$$

Vậy $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$ thì $P=\frac{1}{3}$

Câu 4.



a) Chứng minh được : DH vuông góc với BM

Chứng minh được: $CD = BC; PC = CM; \angle DCB = \angle BCM = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle DPC = \triangle BMC (c.g.c) \Rightarrow \angle BHP = 90^\circ$

$$MP \perp BD \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DM \cdot PC}{\frac{1}{2}DM \cdot BC} = \frac{S_{\triangle PDM}}{S_{\triangle BDM}}$$

b) Chứng minh được:

$$\frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2}DB \cdot KP}{\frac{1}{2}DB \cdot MK} = \frac{S_{PBM}}{S_{BDM}}; \frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2}DB \cdot KP}{\frac{1}{2}DB \cdot MK} = \frac{S_{PBD}}{S_{BDM}}$$

Tương tự

$$\Rightarrow Q = \frac{S_{PDM} + S_{PBM} + S_{PBD}}{S_{BDM}} = 1.$$

c) Chứng minh: $\triangle MCP \sim \triangle MKD (g.g) \Rightarrow MP \cdot MK = MC \cdot MD$ (1)

Chứng minh: $\triangle DBC \sim \triangle DKM (g.g) \Rightarrow DK \cdot BD = DC \cdot DM$ (2)

Từ (1) & (2)

$$\Rightarrow MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM \cdot (MC + DC)$$

$$\Rightarrow MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$$

Câu 5.

1)

Học sinh chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với mọi $x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y > 0$

2)

$$B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$*) x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 12 \geq 3 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$+ B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2009$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2009$$

$$= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow B \geq 2 \cdot 3 + 2009 \Rightarrow B \geq 2015$

$$*) B = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \text{ \& } y = -3$$

$$*) \text{Min} B = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$