

CĐ1: ĐA THỨC

Dạng 1. Xác định đa thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hương Sơn 2017 - 2018)

$f(x) - f(x-1) = x$ $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
 Tìm đa thức bậc hai biết . Từ đó áp dụng tính tổng

Lời giải

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Đa thức bậc hai cần tìm có dạng:

Ta có: $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý)

Áp dụng:

Với $x=1$, ta có: $1 = f(1) - f(0)$

Với $x=2$, ta có: $1 = f(2) - f(1)$

.....

Với $x=n$, ta có: $n = f(n) - f(n-1)$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

1) Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

2) Cho hàm số $y = f(x) = ax + 2$ có đồ thị đi qua điểm $A(a-1; a^2+a)$

a) Tìm a

b) Với a vừa tìm được, tìm giá trị của x thỏa mãn $f(2x-1) = f(1-2x)$

Lời giải

1)

$$A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

2)

a) Vì đồ thị hàm số $y = f(x) = ax + 2$ đi qua điểm $A(a-1; a^2+a)$ nên:

$$a^2 + a = a(a - 1) + 2$$

$$\Rightarrow a^2 + a = a^2 - a + 2$$

$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

b) Với $a = 1 \Rightarrow y = f(x) = x + 2$

ta có: $f(2x - 1) = f(1 - 2x)$

$$\Rightarrow (2x - 1) + 2 = (1 - 2x) + 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Câu 3. (Đề thi HSG 7 năm học 2017 - 2018)

Cho 2 đa thức:

$$P(x) = x^2 + 2mx + m^2$$

$$Q(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2$$

Tìm m biết $P(1) = Q(-1)$

Lời giải

$$P(1) = 1^2 + 2m \cdot 1 + m^2 = m^2 + 2m + 1$$

$$Q(-1) = 1 - 2m - 1 + m^2 = m^2 - 2m$$

Đề $P(1) = Q(-1)$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = m^2 - 2m$$

$$\Rightarrow 4m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

Vậy $m = -\frac{1}{4}$ thì thỏa mãn $P(1) = Q(-1)$.

Câu 4. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Chí Chanh năm học 2017 - 2018)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$

Lời giải

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Ta có:
$$\begin{cases} (2x - 5)^{2018} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2020} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \geq 0$$

Mà $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2018} = 0 \\ (3y + 4)^{2020} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ thay vào ta được:}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9x - y^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} M + (5x^2 - 2xy) &= 6x^2 + 9xy - y^2 \\ \Rightarrow M &= 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) \\ \Rightarrow M &= 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy \\ \Rightarrow M &= x^2 + 11xy - y^2 \end{aligned}$$

Dạng 2. Tính giá trị của đa thức

Câu 1. (HSG 7 huyện Vị Thanh 2017 - 2018)

Cho biểu thức: $P = x - 4xy + y$. Tính giá trị của P với $|x| = 1,5; y = -0,75$

Lời giải

Ta có: $|x| = 1,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x = -1,5 \end{cases}$

+) Với $x = 1,5; y = -0,75$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= 1,5 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-0,75) - 0,75 \\ &= 1,5 \cdot (1 + 3) - 0,75 = 5,25 \end{aligned}$$

+) Với $x = -1,5; y = -0,75$ ta có:

$$P = -1,5 - 4(1,5) \cdot (-0,75) - 0,75 = -6,75$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - \dots - 100x^3 - x^3 + 100x^2 + x^2 - 100x - x + 101 \\ &= (x^{10} - 100x^9) - (x^9 - 100x^8) + (x^8 - 100x^7) \dots - (x^3 - 100x^2) + (x^2 - 100x) - x + 101 \\ &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) \dots - x^2(x - 100) + x(x - 100) - x + 101 \\ &= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 \dots - x^2 + x) - x + 101 \end{aligned}$$

Với $x = 100$ ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= (100 - 100)(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 \cdot (100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 - 100 + 101 = 1 \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông, tỉnh Đồng Tháp, trường THCS Hiền Quan 2017 - 2018)

Tính giá trị của đa thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$

Lời giải

Ta có: $|x - 2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Thay tại $x = 1$ vào biểu thức ta có: $6 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 9$

Thay tại $x = 3$ vào biểu thức ta có: $6 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = 67$

Câu 4. (HSG 7 huyện Mỹ Xuyên 2017 - 2018)

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đa thức $B(x)$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\ 2B &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\ 2B &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ 2B &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2B &= B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow B &= 2 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

Vậy $B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho đa thức $A = 2x(x - 3) - x(x - 7) - 5(x - 403)$

a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

b) Tìm x để $A = 2015$.

Lời giải

Ta có $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 5x + 2015 = x^2 - 4x + 2015$

a) Thay $x = 4$ vào đa thức A ta có:

$$A = 2 \cdot 4(4 - 3) - 4(4 - 7) - 5(4 - 403) = 2015$$

Vậy khi $x = 4$ thì ta được $A = 2015$.

b) Để $A = 2015$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 4x + 2015 = 2015$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy để $A = 2015$ thì $x = 0$ hoặc $x = 4$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Biết $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và $f(-1) = 2012$. Tính a, b, c .

b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 2012$, $f(-2) = f(3) = 2036$ thì đa thức $f(x)$ vô nghiệm.

Lời giải

a) Vì $f(0) = 0$ nên $c = 0$;

$$f(1) = 2013 \quad \text{nên} \quad a + b + c = 2013$$

$$f(-1) = 2012 \quad \text{nên} \quad a - b + c = 2012$$

$$a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 0$$

Khi đó:

b) Tính được:

$$2012 = f(1) = a + b + c \quad (1)$$

$$2036 = f(-2) = 4a - 2b + c \quad (2)$$

$$2036 = f(3) = 9a + 3b + c \quad (3)$$

Từ (1), (2) có $a - b = 8$

Từ (2), (3) có $a + b = 0 \Rightarrow a = 4, b = 4$

Như vậy $f(x) = 4x^2 - 4x + 2012 = (2x - 1)^2 + 2011 > 0 (\forall x)$

Vậy đa thức vô nghiệm.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hương Khê 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$
 $f(5)$

1) Tính .

$$f(x)$$

2) Chứng minh rằng có ít nhất 3 nghiệm.

Lời giải

$$x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$$

1) Ta có:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow x=0$$

2) là một nghiệm

$$x=3 \Rightarrow f(5)=0 \Rightarrow x=5 \text{ là một nghiệm}$$

$$x=-3 \Rightarrow f(-1)=0 \Rightarrow x=-1 \text{ là một nghiệm}$$

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm

Câu 8. (HSG 7 huyện Bồ Trạch 2017 - 2018)

Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + x$

a) Tính $f(0)$; $f(-0,5)$

b) Chứng minh: $f(-a) = -f(a)$

Lời giải

a) $f(0) = -4.0^3 + 0 = 0$

$$f(-0,5) = -4.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0$$

b) $f(-a) = -4.(-a)^3 - a = 4a^3 - a$

$$-f(a) = -[-4a^3 + a] = 4a^3 - a$$

Khi đó $f(-a) = -f(a)$

Dạng 3. Dấu của đa thức

Dạng 4. Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết

Câu 1. (HSG 7 huyện Sầm Sơn 2017 - 2018)

$P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn: $P(x) \equiv 0 \pmod{7} \forall x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 7.

Lời giải

Vì $P(x) \equiv 0 \pmod{7} \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta có:

+) $P(0) \equiv 0 \pmod{7}$ nên $c \equiv 0 \pmod{7}$

+) $P(1) \equiv 0 \pmod{7}$ nên $(a+b+c) \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow (a+b) \equiv 0 \pmod{7}$ (1)

+) $P(-1) \equiv 0 \pmod{7}$ nên $(a-b+c) \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow (a-b) \equiv 0 \pmod{7}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2a \equiv 0 \pmod{7}$ mà $(2;7)=1$ nên $a \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{7}$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 7.

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Trường Sa 2017 – 2018)

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7.

Lời giải

Vì $f(x) \equiv 0 \pmod{7} \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta có:

+) $f(0) = c$ chia hết cho 7, tức là $c : 7$

+) $f(1) = a + b + c$ chia hết cho 7, tức là $(a + b + c) : 7$ (1)

+) $f(-1) = a - b + c$ chia hết cho 7, tức là $(a - b + c) : 7$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(2a + 2c) : 7$ mà $c : 7 \Rightarrow a : 7$

Với $a : 7$; $c : 7$ mà $(a + b + c) : 7$ nên $b : 7$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 7.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017 – 2018)

Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, $p(x) : 5$ với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Lời giải

Vì $p(x) : 5$ với mọi x nguyên nên ta có:

+) $p(0) = d : 5$

+) $p(1) = (a + b + c + d) : 5$ (1)

+) $p(-1) = (-a + b - c + d) : 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2(b + d) : 5$ và $2(a + c) : 5$

Vì $2(b + d) : 5$, mà $(2, 5) = 1$ nên $b + d : 5 \Rightarrow b : 5$

Có $p(2) = (8a + 4b + 2c + d) : 5$ mà $d : 5, b : 5$ nên $(8a + 2c) : 5$

Vì $2(a + c) : 5$; $(8a + 2c) : 5$ nên $6a : 5$ mà $(6, 5) = 1 \Rightarrow a : 5$

Với $a : 5$; $d : 5$; $b : 5$ mà $(a + b + c + d) : 5$ nên $c : 5$

Vậy a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Câu 4. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017 – 2018)

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $f(-1); f(0); f(1)$ đều chia hết cho 3.

Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

Lời giải

Ta có: $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$; $f(-1) = a - b + c$

Vì $f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$

$f(1) : 3 \Rightarrow (a + b + c) : 3 \Rightarrow (a + b) : 3$ (1)

$f(-1) : 3 \Rightarrow (a - b + c) : 3 \Rightarrow (a - b) : 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a : 3$ mà $(2, 3) = 1$ nên $a : 3 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Câu 1. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $x.f(x - 2011) = (x - 2012).f(x)$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Lời giải

+) Với $x=0$ ta có: $-2012.f(0)=0.f(-2011)=0$ hay $f(0)=0$

Khi đó $x=0$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

+) Với $x=2011$ ta có: $2011.f(2011-2011)=(2011-2012)f(2011)$
 $\Rightarrow 2011.f(0)=-1f(2011)=0$
 $\Rightarrow f(2011)=0$

Khi đó $x=2011$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>