

Họ, tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

ĐỀ SỐ 10

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

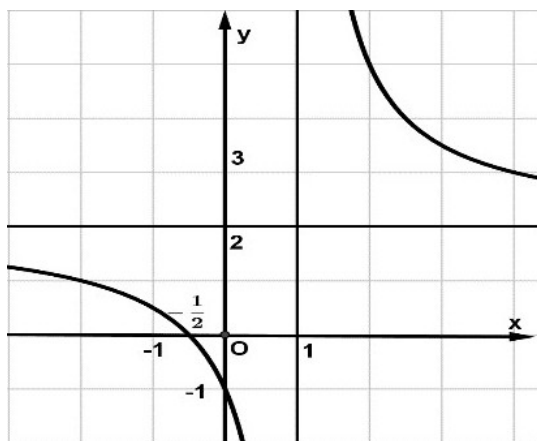
A. $(3; +\infty)$

B. $(1; 3)$

C. $(-\infty; 4)$

D. $(0; +\infty)$

Câu 2: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 0]$ là



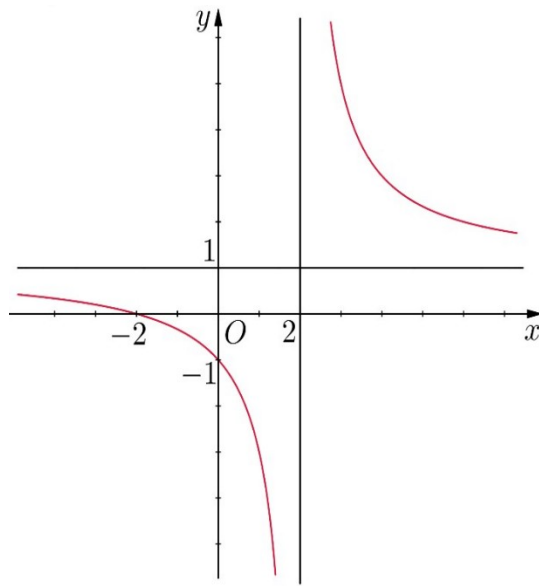
A. -1.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 3: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Tiệm cận ngang của đường cong trên là đường thẳng:



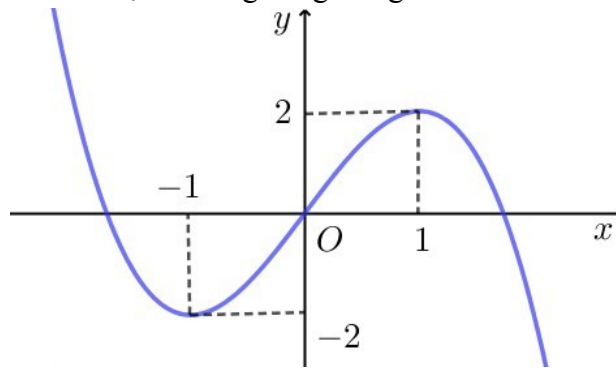
A. $y=1$

B. $y=2$

C. $x=1$

D. $x=-1$

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	-3	-2	0	1	3
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	1		0		8
		-5		-3	

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 8.

Câu 6: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

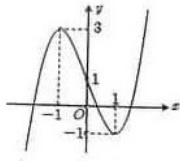
A. $\alpha=90^\circ$

B. 180°

C. 60°

D. 45°

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm phân biệt là:



- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 8: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào đúng nhất?

- A. AB và CD chéo nhau B. AB và CD vuông góc với nhau
C. AB và CD đồng phẳng D. AB và CD cắt nhau

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận. B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.
C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang. D. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

Câu 10: Số giao điểm của đồ thị $y=x^2$ và trục Ox là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

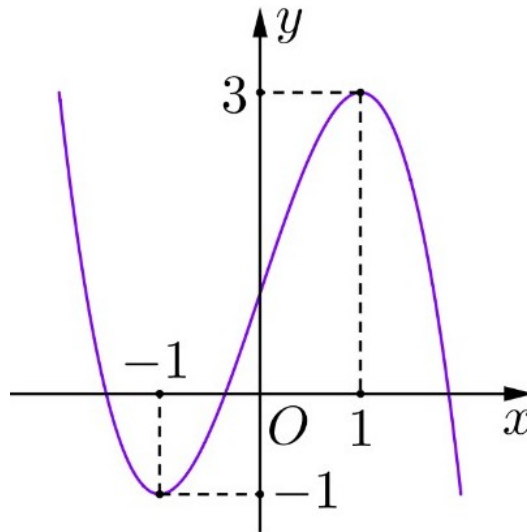
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực tiểu của hàm số đó là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 12: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình dưới?



- A. $y = x^3 - 3x + 1$ B. $y = -x^3 + 3x + 1$ C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý I, II, III, IV ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các mệnh đề sau:

- (I) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$
(II) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$
(III) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
(IV) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+3x$ có đồ thị (C)

- (I) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6
(II) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=3x^2+3$
(III) Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị

(IV) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4mx+m^2+2024$ với m là tham số

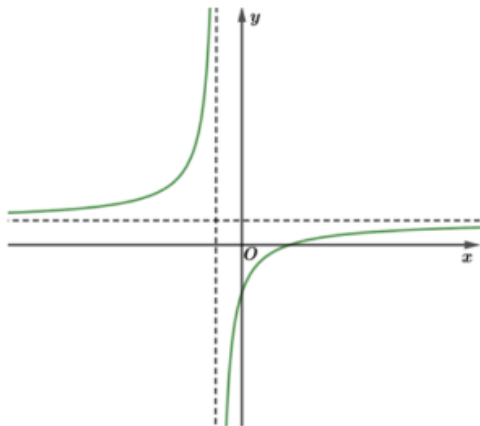
(I) Khi $m=1$ thì $\max_{[1;3]} f(x)$ đạt được tại $x=2$

(II) Khi $m=-1$ thì $\min_{[0;2]} f(x)=2025$

(III) Với m là số nguyên dương đặt $T=\min_{[-2;1]} f(x)+\max_{[-2;1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4051

(IV) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12;2024)$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng 511036

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2x+1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ



(I) Đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

(II) Đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C)

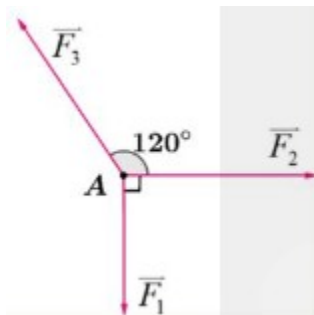
(III) $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$

(IV) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2} \right] = 0$

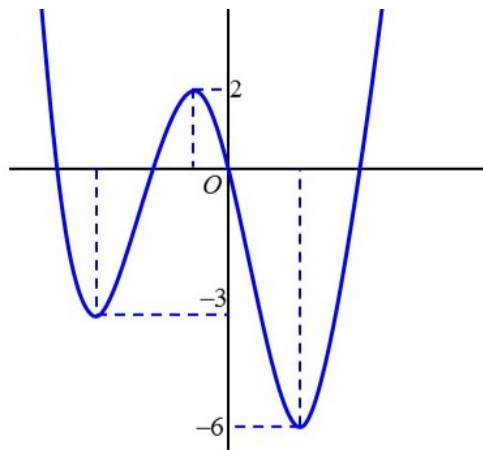
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $4m$ là một số nguyên dương?

Câu 2: Chất điểm A chịu tác động của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ như hình bên và ở trạng thái cân bằng. Nếu $|\vec{F}_1|=20\text{N}$ thì $|\vec{F}_2|+|\vec{F}_3|$ bằng bao nhiêu N? (làm tròn tới chữ số thập phân thứ nhất)



Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Biết tham số $m \in [a; b)$ thì hàm số $g(x) = \left| f(x+2022) + \frac{1}{6}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Giá trị $a^2 + b$ bằng:

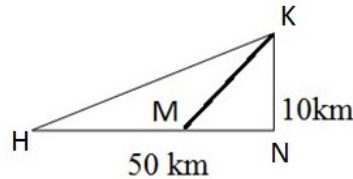
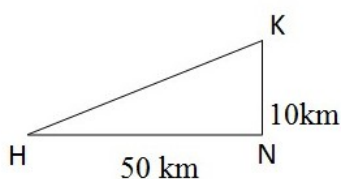
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		2			
	$-\infty$			0				$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $3f(\sin 2x) - 2 = 0$ là:

Câu 5: Cho đường cong $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$. Biết điểm M thuộc (C) và tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có chu vi nhỏ nhất. Giả sử chu vi nhỏ nhất đó bằng $a+b\sqrt{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $a+b+c$ bằng

Câu 6: Cô An đang ở khách sạn H bên bờ biển, cô cần đi du lịch đến hòn đảo K . Biết khoảng cách từ đảo K đến bờ biển là $KN = 10\text{km}$, khoảng cách từ khách sạn đến H đến điểm N là $HN = 50\text{km}$ (giả thiết $HN \perp NK$). Từ khách sạn H , cô An có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đường thủy để đến hòn đảo K (như hình vẽ). Biết rằng chi phí đi đường thủy là $5\text{USD}/1\text{km}$, chi phí đi đường bộ là $3\text{USD}/1\text{km}$. Hỏi cô An phải chi một khoản tiền nhỏ nhất là bao nhiêu để đi đến đảo K ?



Hết

-Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

-Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ, tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

ĐỀ SỐ 10

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

*A. $(3; +\infty)$

B. $(1; 3)$

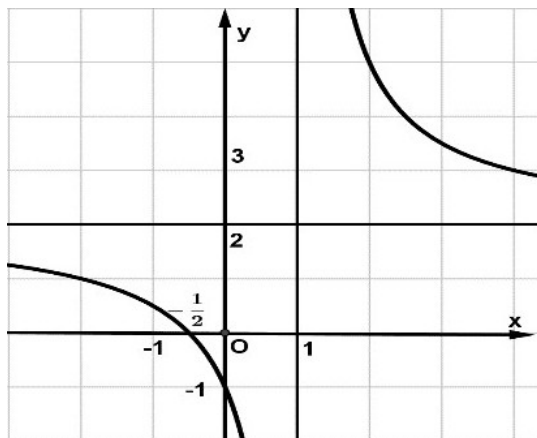
C. $(-\infty; 4)$

D. $(0; +\infty)$

Lời giải

Căn cứ vào BBT ta thấy: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 2: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 0]$ là



*A. -1.

B. 2.

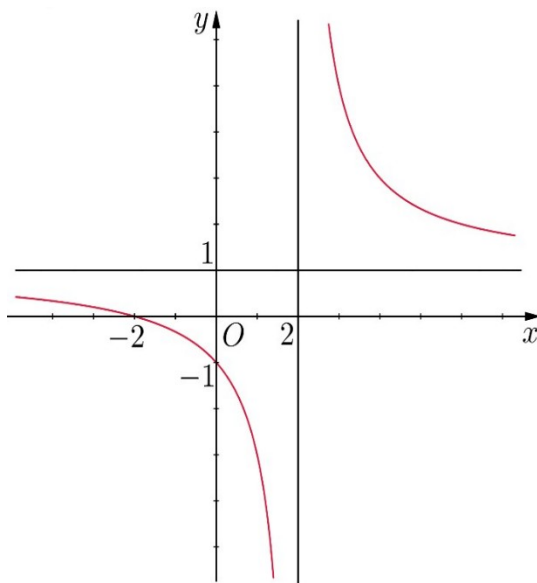
C. 0.

D. 1.

Lời giải

Căn cứ vào đths ta thấy: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 0]$ là -1.

Câu 3: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Tiệm cận ngang của đường cong trên là đường thẳng:

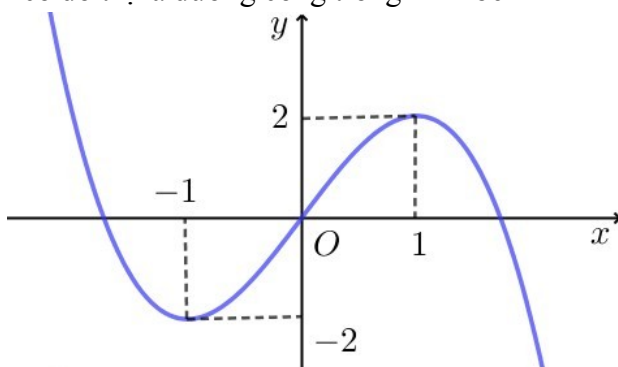


A. $y=1$ B. $y=2$ C. $x=1$ D. $x=-1$

Hướng dẫn giải

Căn cứ vào đồ thị có đường cong trong hình đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

A. 1.

B. 0.

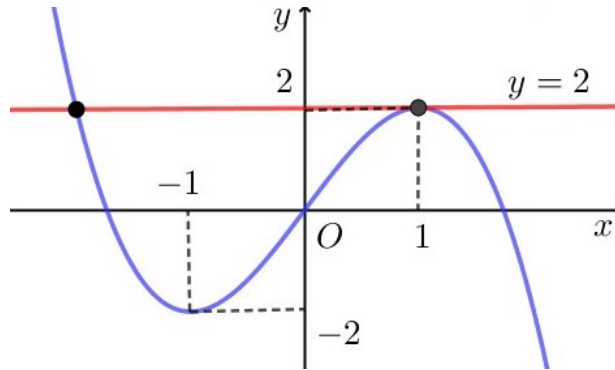
*C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có $f(x)=2$ (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$.
Dựa vào hình vẽ, hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm.



Vậy phương trình $f(x)=2$ có hai nghiệm.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	-3	-2	0	1	3
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	1	-5	0	-3	8

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 0.

B. 3.

C. 1.

*D. 8.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng 8.

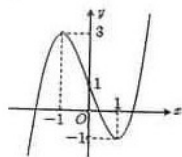
Câu 6: Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vecto $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha=90^\circ$ B. 180° C. 60° D. 45°

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0 \rightarrow \vec{a}\vec{b} = -1$

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm phân biệt là:



A. 4.

B. 5.

C. 2.

*D. 3.

Lời giải

Ta có phương trình tương đương: $f(x) = m - 1$.

Dựa vào đồ thị phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$-1 < m - 1 < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4 \Leftrightarrow m \in (1; 3).$$

Vậy có ba giá trị nguyên.

Câu 8: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào đúng nhất?

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Hướng dẫn giải

Đặt $AB = AD = AC = a$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Vậy AB vuông góc CD

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

*D. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

Lời giải

Theo định nghĩa, ta thấy đồ hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Câu 10: Số giao điểm của đồ thị $y = x^2$ và trục Ox là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải

Phương trình $x^2 = 0$ có 1 nghiệm $\rightarrow$ có 1 giao điểm

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số đó là

A. 0.

*B. 2.

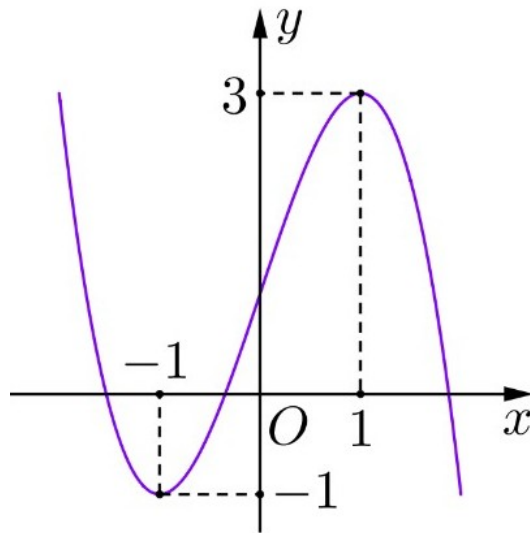
C. 1.

D. 3.

Lời giải

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số có hai điểm cực tiểu $x = -1$ và $x = 1$.

Câu 12: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình dưới?



A. $y = x^3 - 3x + 1$

*B. $y = -x^3 + 3x + 1$

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 3)$ nên hàm số cần tìm là $y = -x^3 + 3x + 1$

Câu 1: Cho các mệnh đề sau

(I) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

(II) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$

(III) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(IV) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng

Hướng dẫn giải

(I) Đ (II) Đ (III) S (IV) S

(I) Đ do quy tắc trừ vectơ

(II) Đ do quy tắc trừ vectơ

(IV) S vì $\begin{cases} k=0 \\ \vec{a} \neq \vec{0} \end{cases} \rightarrow k\vec{a} = \vec{0}$

(IV) S vì $k=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$ A trùng B

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+3x$ có đồ thị (C)

(I) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6

(II) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=3x^2+3$

(III) Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị

(IV) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

Hướng dẫn giải

(I) Đ (II) Đ (III) S (IV) S

$y'=3x^2+3$, suy ra hàm số không có cực trị vì $y'>0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4

$\Rightarrow y_0=4 \Rightarrow x_0^3+3x_0=4 \Leftrightarrow x_0=1 \Rightarrow f'(x_0)=6$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4mx+m^2+2024$ với m là tham số

(I) Khi $m=1$ thì $\max_{[1;3]} f(x)$ đạt được tại $x=2$

(II) Khi $m=-1$ thì $\min_{[0;2]} f(x)=2025$

(III) Với m là số nguyên dương đặt $T = \min_{[-2;1]} f(x) + \max_{[-2;1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4051

(IV) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12; 2024)$.

Tổng tất cả các giá trị của m bằng 511036

Hướng dẫn giải

(I) S (II) Đ (III) Đ (IV) S

(I) Khi $m=1$ thì $f(x)=x^2-4x+2025$

Xét hàm số $f(x)=x^2-4x+2025$ xác định và liên tục trên đoạn $[1; 3]$

Ta có $f'(x)=2x-4$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

Khi đó: $f(1)=2022; f(2)=2021; f(3)=2022$

Suy ra $\max_{[1;3]} f(x) = f(1) = f(3) = 2022$

Hay hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=1; x=3$

(II) Khi $m=-1$ thì $y=f(x)=x^2+4x+2025$

Ta có: $f'(x)=2x+4$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$

Khi đó $f(0)=2025; f(2)=2037$

Suy ra $\min_{[0;2]} f(x) = 2025$

(III) Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4mx+m^2+2024$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$

Ta có: $f'(x)=2x-4m$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4m=0 \Leftrightarrow x=2m \geq 2$

Khi đó $f(-2)=m^2+8m+2028; f(1)=m^2-4m+2025$

Suy ra $T = \min_{[-2;1]} f(x) + \max_{[-2;1]} f(x) = m^2+8m+2028+m^2-4m+2025 = 2m^2+4m+4053$

Hay $T \geq 4059$, với mọi m thuộc $\mathbb{Z}^+$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 4059

(IV) Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4mx+m^2+2024$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=2x-4m$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4m=0 \Leftrightarrow x=2m$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$2m$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(2m)$	$+\infty$

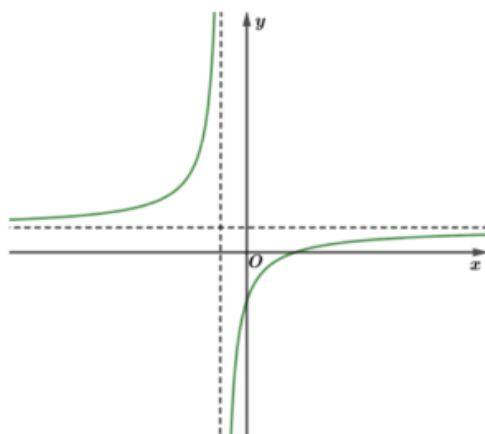
Để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12;2024)$ thì

$12 < 2m < 2024 \Leftrightarrow 6 < m < 1012$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{7;8;9;\dots;1011\}$

Tổng tất cả các giá trị của m là 511545

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2x+1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ



(I) Đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

(II) Đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C)

(III) $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$

(IV) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2} \right] = 0$

Hướng dẫn giải

(I) Đ (II) Đ (III) S (IV) Đ

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C) nên (I) Đ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C) nên (II) Đ

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$ nên (III) S

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ nên (IV) Đ

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $4m$ là một số nguyên dương?

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN 5

Ta có $y' = 3x^2 + 2(1 - 2m)x + 2 - m$

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2(1 - 2m)x + 2 - m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}$$

$$(1) \Leftrightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} g(x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{1}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

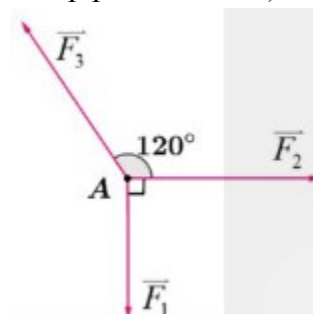
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	2	$\frac{5}{4}$	$+\infty$

Vì $4m$ là số nguyên dương và $m \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow 0 < 4m \leq 5$

$4m \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow m$ có 5 giá trị

Câu 2: Chất điểm A chịu tác động của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ như hình bên và ở trạng thái cân bằng. Nếu $|\vec{F}_1| = 20\text{N}$ thì $|\vec{F}_2| + |\vec{F}_3|$ bằng bao nhiêu N? (làm tròn tới chữ số thập phân thứ nhất)



Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN 34,6

A ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$, ta có $\vec{F}_3 + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

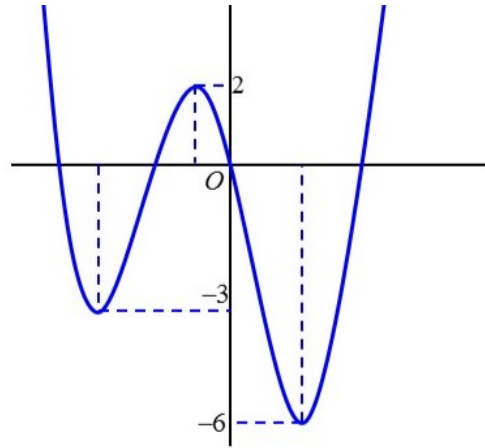
→ A là trung điểm của CM

$$\rightarrow |\vec{F}_2| = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow |\vec{F}_3| = |\overrightarrow{AM}| = \frac{40}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } |\vec{F}_2| + |\vec{F}_3| = \frac{60}{\sqrt{3}} \approx 34,6$$

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Biết tham số $m \in [a; b]$ thì hàm số $g(x) = \left| f(x+2022) + \frac{1}{6}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Giá trị $a^2 + b$ bằng:

Lời giải

+ Đặt
$$h(x) = f(x+2022) + \frac{1}{6}m^2$$

+ Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị nên hàm số $y = h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) hay

+ Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ là:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$-3 + \frac{1}{6}m^2$	$2 + \frac{1}{6}m^2$	$-6 + \frac{1}{6}m^2$	$+\infty$		

+ Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} -3 + \frac{1}{6}m^2 \geq 0 \\ -6 + \frac{1}{6}m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 18 \leq m^2 < 36 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} \leq m < 6 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}, b = 6$$

$$\text{Vậy } a^2 + b = 24.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		0		2	
	$-\infty$							$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $3f(\sin 2x) - 2 = 0$ là:

Lời giải

Đặt $\sin 2x = t$, $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

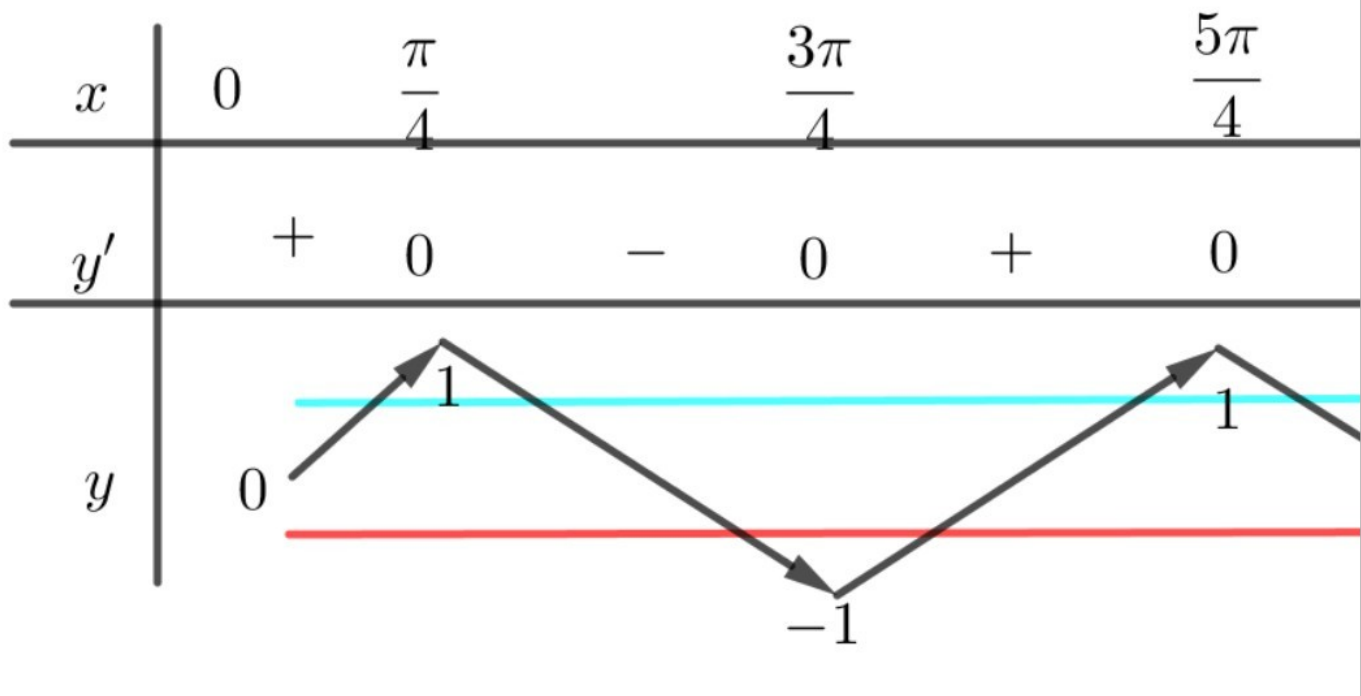
Phương trình trở thành: $f(t) = \frac{2}{3}$.

Từ bảng biến thiên ta có:

x	$-\infty$	-1	a	0	b	1	$+$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	0	2	0	2	$-\infty$

$$f(t) = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = b \end{cases} \text{ Với } -1 < a < 0 \text{ và } 0 < b < 1$$

Xét bảng biến thiên của hàm số $y = \sin 2x$ trên $[0; 2\pi]$:



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

Phương trình $\sin 2x = a$ có 4 nghiệm.

Phương trình $\sin 2x = b$ có 4 nghiệm.

Vậy phương trình $3f(\sin 2x) - 2 = 0$ có 8 nghiệm.

Câu 5: Cho đường cong $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$. Biết điểm M thuộc (C) và tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có chu vi nhỏ nhất. Giả sử chu vi nhỏ nhất đó bằng $a+b\sqrt{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $a+b+c$ bằng

Lời giải

Tiệm cận đứng $x = 1$

Tiệm cận ngang $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến tại M của (C)

$$(d): y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+3}{x_0-1}$$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng: $A\left(1; \frac{x_0+7}{x_0-1}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang: $B(2x_0-1; 1)$

Tâm đối xứng của (C) : $I(1; 1)$

$$IA = \frac{8}{|x_0-1|}; IB = 2|x_0-1| \Rightarrow IA \cdot IB = 16$$

Khi đó

$$\text{Ta có: } P_{IAB} = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy*, ta có

$$IA + IB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} = 2\sqrt{16} = 8$$

$$IA^2 + IB^2 \geq 2\sqrt{IA^2 \cdot IB^2} = 2\sqrt{16^2} = 32 \Rightarrow AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 4\sqrt{2}$$

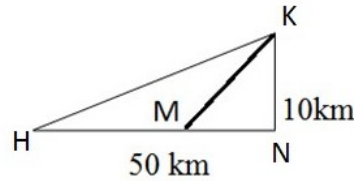
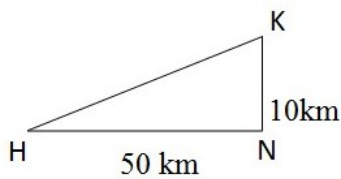
Suy ra $P_{IAB} \geq 8 + 4\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$IA = IB \Leftrightarrow \frac{8}{|x_0 - 1|} = 2|x_0 - 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = 8, b = 4, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 14$.

Câu 6: Cô An đang ở khách sạn H bên bờ biển, cô cần đi du lịch đến hòn đảo K . Biết khoảng cách từ đảo K đến bờ biển là $KN = 10\text{km}$, khoảng cách từ khách sạn đến H đến điểm N là $HN = 50\text{km}$ (giả thiết $HN \perp NK$). Từ khách sạn H , cô An có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đường thủy để đến hòn đảo K (như hình vẽ). Biết rằng chi phí đi đường thủy là $5\text{USD}/1\text{km}$, chi phí đi đường bộ là $3\text{USD}/1\text{km}$. Hỏi cô An phải chi một khoản tiền nhỏ nhất là bao nhiêu để đi đến đảo K ?



Lời giải

Giả sử người đó đi đường bộ từ H đến M , rồi đi đường thủy từ M đến K .

Đặt $x = MN \Rightarrow HM = 50 - x$, $MK = \sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 + 100}$ với $0 \leq x \leq 50$.

Khi đó kinh phí phải trả là: $f(x) = 3(50 - x) + 5\sqrt{x^2 + 100}$ với $0 \leq x \leq 50$.

Ta có: $f'(x) = -3 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 100}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 100} = 5x \Leftrightarrow 9x^2 + 900 = 25x^2 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$.

Mà $f(0) = 200$, $f(50) = 50\sqrt{26}$, $f\left(\frac{15}{2}\right) = 190$ nên $\min_{0 \leq x \leq 50} f(x) = 190$ khi $x = \frac{15}{2}$.

Vậy cô An phải chi khoản tiền nhỏ nhất là 190 USD.