

Người làm: Nguyễn Thị Dương

Zalo: Nguyễn Dương - Số đt zalo: 0975 697 296

Email: nguyenthiduongc2ttlt@bacninh.edu.vn

CD 5: SỐ NGUYÊN TỔ HỢP SỐ

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Bá Thước 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2021(c^2 + 3d^2)$. Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

a) Ta có: $a^2 + b^2 = 2021(c^2 + 3d^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022c^2 + 3064d^2$

Mà $2022c^2 + 3064d^2 : 2$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 : 2$

Ta xét $(a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d) + (a + b + c + d) : 2$

Mà $(a^2 - a) = a(a - 1) : 2; b^2 - b = b(b - 1) : 2; c(c - 1) : 2; d(d - 1) : 2$

$a + b + c + d : 2$. Do $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ nên $a + b + c + d > 2$

Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên một trong ba số sẽ chia hết cho 3 .

Mà $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) nên $2^n - 1$ không chia hết cho 3

Mặt khác: với $n > 2$ thì 2^n là số chẵn nên 2^n không chia hết cho 3

Suy ra: $2^n + 1$ chia hết cho 3

Vậy $2^n + 1$ là hợp số (đpcm).

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho số nguyên tố P . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0 , thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2 + py^2}{xy}$ là các số tự

nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$.

Lời giải

Gọi ƯCLN $(x, y) = d (d \in \mathbb{N}^*)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x = da$; $y = db$ và $(a; b) = 1$

Ta có:
$$\frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 a^2 + p d^2 b^2}{d^2 ab} = \frac{a^2 + pb^2}{ab} \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó ta được: $a^2 + pb^2 : ab \Rightarrow a^2 + pb^2 : b \Rightarrow a^2 : b$

Do $(a; b) = 1$ nên ta suy ra được $b = 1$. Suy ra $a^2 + p : a \Rightarrow p : a$

Do p là số nguyên tố nên ra được $a = 1$ hoặc $a = p$. Khi đó ta xét các trường hợp

- Với $a = 1$, khi đó ta được $x = y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 + p d^2}{d^2} = p + 1$
- Với $a = p$, khi đó ta được $x = dp$; $y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 p^2 + d^2 p}{d^2 p} = p + 1$

Vậy ta luôn có
$$\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$$

Câu 4 (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

- Nếu $p = 3k + 1$ thì $(p+1)(p-1) = (3k+1+1)(3k+1-1) = (3k+2).3k : 3$

- Nếu $p = 3k + 2$ thì

$$(p+1)(p-1) = (3k+2+1)(3k+2-1) = (3k+3).(3k+1) = 3.(k+1)(3k+1) : 3$$

Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3 (1)

Ta lại có: p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ

Do đó $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp

Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 8 (2)

Mà 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Câu 5 (HSG 7 Diễn Châu Liên trường THCS 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn

$$\Rightarrow (p+1):2 \quad (1)$$

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=3(k+1):3$

$\Rightarrow p+2$ không là số nguyên tố nên $p=3k+1$ không xảy ra.

$$\text{Do đó } p=3k+2 \Rightarrow p+1=3k+3=3(k+1):3 \quad (2)$$

Vì $(2:3)=1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1):6$

Câu 6. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p và q sao cho $p^2 - 2q^2 = 17$

Lời giải

Từ gt: $p^2 - 2q^2 = 17 \Rightarrow p^2 - 17 = 2q^2$ suy ra p lẻ.

Với p lẻ $\Rightarrow p^2$ chia 4 dư 1 $\Rightarrow p^2 - 17$ chia hết cho 4 $\Rightarrow 2q^2$ chia hết cho 4 $\Rightarrow q = 2$ vì q là số nguyên tố.

Với $q = 2$ ta có $p = 5$

Câu 7. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $5p+2$ là hợp số.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

-Nếu $p=3k+1 \Rightarrow 2p+1=2(3k+1)+1=6k+3=3(2k+1)$

Khi đó $2p+1$ lớn hơn 3 và có ít nhất 3 ước là 1; 3; $2p+1$ trái với giả thiết $2p+1$ là số nguyên tố

Do đó p có dạng $3k+2$

$$\text{Xét } 5p+2=5.(3k+2)+2=15k+12=3(5k+4)$$

Khi đó $5p+2$ lớn hơn 3 và có ít nhất 3 ước là 1; 3; $5p+2$ nên $5p+2$ là hợp số.

Vậy Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $5p+2$ là hợp số (đpcm).

Câu 8. (HSG 7 huyện Lập Thạch 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên tố p sao cho $2^p + p^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải

Với $p=2$ thì $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ là hợp số

Với $p=3$ thì $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố

Với p là số nguyên tố và $p > 3$ thì .. nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Ta có $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$ vì $2^p + 1 \vdots 3$ và $p^2 - 1 \vdots 3$ với mọi số nguyên tố p có dạng:

$p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$ là hợp số.

Vậy Với $p=3$ thì $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Dạng 2: Áp dụng định lý Fermat

Câu 1. (HSG 7 quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$. Chứng minh rằng A là hợp số

Lời giải

Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2 \cdot 2^{10n} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Do 23 là số nguyên tố nên $2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4 \cdot 2^{22k} \equiv 4 \pmod{23}$

$\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$. Nên $A \vdots 23$ mà $A > 23$ với $\forall n \geq 1$ nên A là hợp số.

Dạng 3: Phương pháp phân tích

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương $a > b > 0$

Lời giải

$$A = \overline{ab} - \overline{ba} = 9a - 9b = 9(a - b)$$

Để là số chính phương thì $a - b$ là số chính phương

$$\text{Mà } 1 \leq a - b \leq 8 \Rightarrow a - b \in \{1; 4\}$$

TH1: Với $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$

Thấy có 43 là số nguyên tố

TH2: Với $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$

Có 7^3 là số nguyên tố

ssVây số bằng 4^3 hoặc 7^3

Dạng 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>