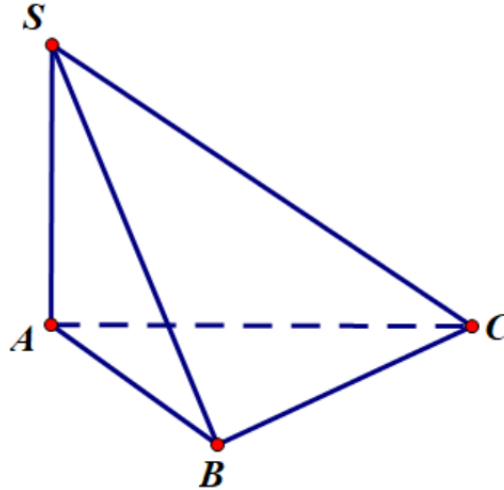


DẠNG 11**Khối đa diện trong đề thi của BGD&ĐT**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



- A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{3a^3}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $V = a^3$ D. $V = 3a^3$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ C. $V = \frac{2a^3}{3}$ D. $V = \sqrt{2}a^3$

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ và (SDA) . Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{4a^3}{3}$. B. $\frac{64a^3}{81}$. C. $\frac{128a^3}{81}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ và (SDA) . Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{9a^3}{16}$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. $\frac{9a^3}{32}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

- Câu 6:** Cho hình chóp đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$. Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng
- A. $\frac{a^3}{48}$. B. $\frac{2a^3}{81}$. C. $\frac{a^3}{81}$. D. $\frac{a^3}{96}$.
- Câu 7:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng
- A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. B. $\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. C. $\frac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. D. $\frac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.
- Câu 8:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$.
- A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. B. $\frac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. C. $\frac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. D. $\frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.
- Câu 9:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ bằng
- A. $\frac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. B. $\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. C. $\frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. D. $\frac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.
- Câu 10:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng
- A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. B. $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. C. $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. D. $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.
- Câu 11:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ và (SDA) . Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng
- A. $\frac{8a^3}{81}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{16a^3}{81}$.
- Câu 12:** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a, SBA = SCA = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích khối chóp đã cho bằng
- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.
- Câu 13:** Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE . Thể tích của khối đa diện

$ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$

B. $\frac{11}{12}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{6}$

Câu 14: Cho khối tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

A. $V = 3$

B. $V = 4$

C. $V = 6$

D. $V = 5$

Câu 16: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $48\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$.

D. $16\sqrt{3}a^3$.

Câu 17: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

B. $6\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

D. $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 18: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD) = 30^\circ$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$

B. $48\sqrt{3}a^3$

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$

D. $16\sqrt{3}a^3$

Câu 19: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $2\sqrt{3}a^3$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$.

B. $V = \frac{9a^3}{8}$.

C. $V = \frac{a^3}{8}$.

D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 21: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Câu 22: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. 2. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. 1

Câu 23: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Câu 24: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 2 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 25: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

- A. $V = \frac{8}{3}$ B. $V = \frac{16}{3}$ C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Câu 26: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

- A. 27. B. 30. C. 18. D. 36

Câu 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

- A. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. B. $8\sqrt{3}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

- A. $9\sqrt{3}$. B. $10\sqrt{3}$. C. $7\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{3}$.

Câu 29: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao là 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

- A. $12\sqrt{3}$. B. $16\sqrt{3}$. C. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$.

Câu 30: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

- A. $27\sqrt{3}$. B. $21\sqrt{3}$. C. $30\sqrt{3}$. D. $36\sqrt{3}$.

Câu 31: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 32: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

- A. $h = \frac{2}{3}a$ B. $h = \frac{4}{3}a$ C. $h = \frac{8}{3}a$ D. $h = \frac{3}{4}a$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. 72 B. 216 C. 108 D. 36

Câu 36: Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 37: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$

B. $x = \sqrt{14}$

C. $x = 3\sqrt{2}$

D. $x = 2\sqrt{3}$

Câu 38: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{1}{8}a^3$.

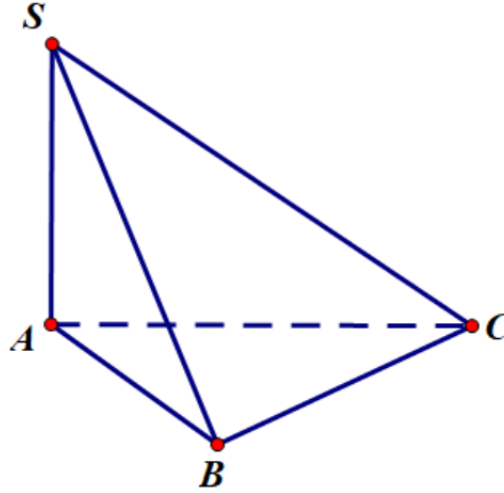
B. $\frac{3}{8}a^3$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$.

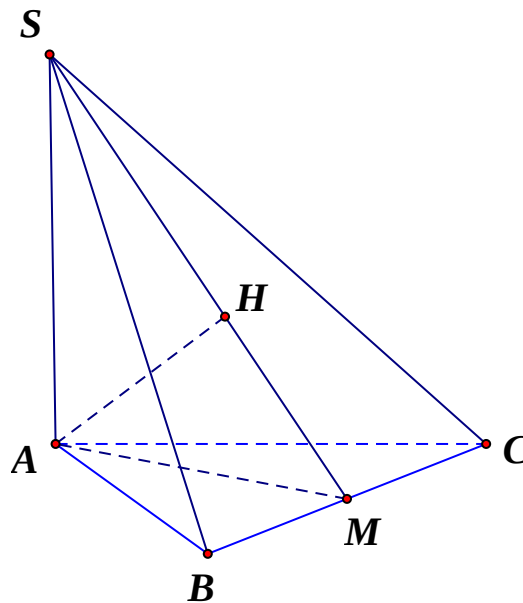
B. $\frac{3a^3}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$.

Kẻ $AH \perp SM$ tại H thì $AH \perp (SBC)$. Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng

$$\angle ASH = \angle ASM = 45^\circ. \text{ Do đó, } \triangle SAM \text{ vuông cân ở } A \text{ và } SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{3}$

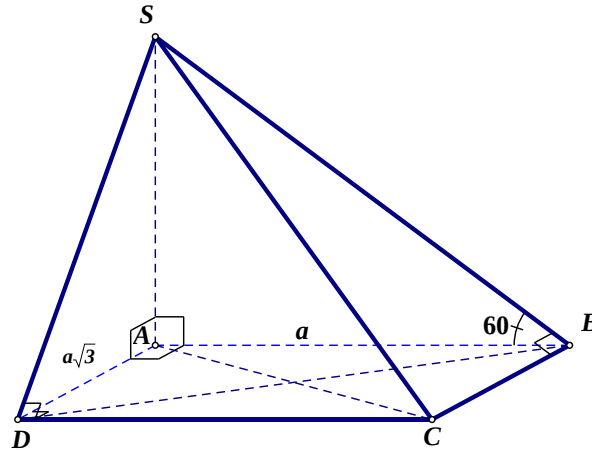
B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

C. $V = a^3$

D. $V = 3a^3$

Lời giải

Chọn.C



Ta có $S_{ABCD} = \sqrt{3}a^2$.

$$\text{Vì } \begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp SB \subset (SBC) \\ BC \perp AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (SB; AB) = SBA.$$

Vậy $SBA = 60^\circ$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3.$$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$

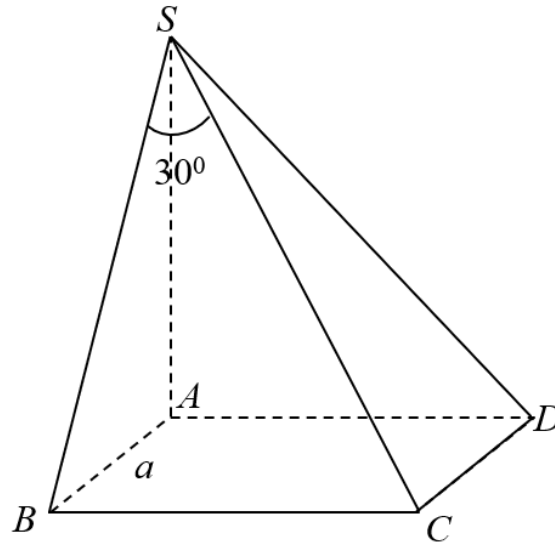
B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

C. $V = \frac{2a^3}{3}$

D. $V = \sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn B



$$\begin{cases} BC \perp BA & (ABCD \text{ là hình vuông}) \\ BC \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (\angle SC, (SAB)) = \angle BSC = 30^\circ$$

$$\triangle SBC \text{ vuông tại } B: \tan 30^\circ = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}a$$

$$\triangle SAB \text{ vuông tại } A: SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = \sqrt{2}a$$

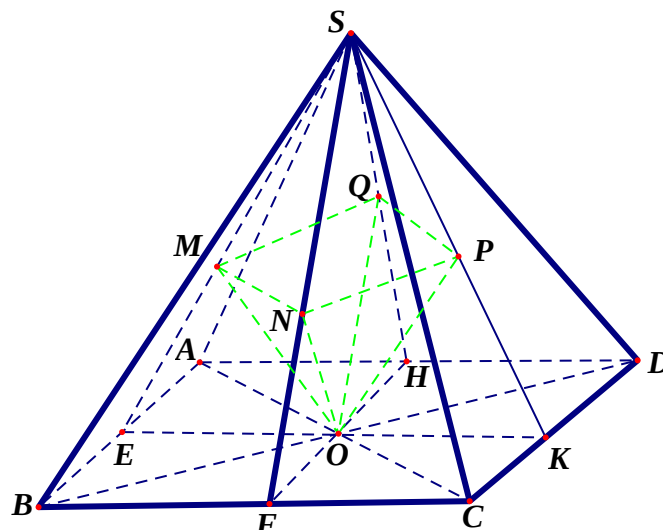
$$V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ và (SDA) . Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{4a^3}{3}$. B. $\frac{64a^3}{81}$. C. $\frac{128a^3}{81}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Gọi E, F, K, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA và M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên $SE, SF, SK, SH \Rightarrow M, N, P, Q$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$.

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}a)^2 - (2\sqrt{2}a)^2} = 2a = OE = OF = OK = OH$$

$\Rightarrow$ các tam giác SOE, SOF, SOK, SOH vuông cân tại O và bằng nhau nên M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của của $SE, SF, SK, SH \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$

Mặt khác ta có $OM = ON = OP = OQ = a\sqrt{2} \Rightarrow O.MNPQ$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên có đường cao bằng $\sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)^2} = a$.

$$\text{Khi đó thể tích của khối chóp } O.MNPQ \text{ bằng } \frac{1}{3}.a.(a\sqrt{2})^2 = \frac{2a^3}{3}$$

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy.

Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ và (SDA) . Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{9a^3}{16}$.

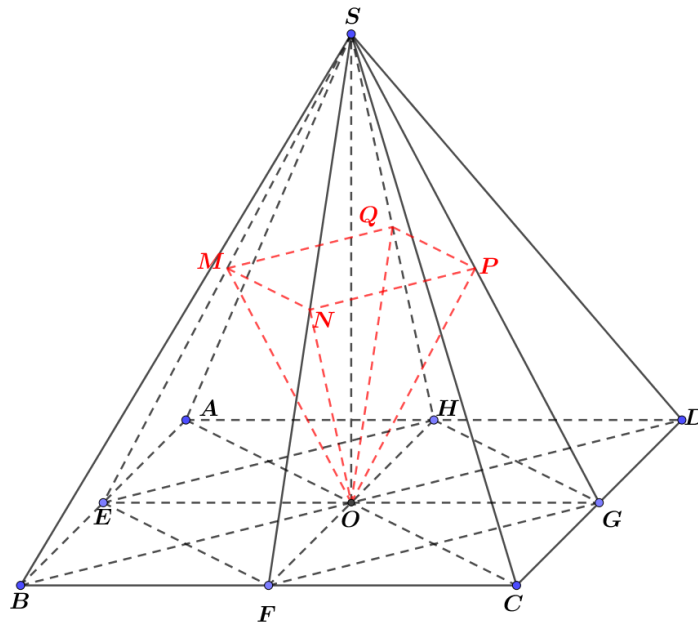
B. $\frac{2a^3}{3}$.

C. $\frac{9a^3}{32}$.

D. $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow (SAB) \perp (SOE).$$

Mặt khác: $(SAB) \cap (SOE) = SE$ đồng thời M là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (SAB) nên $OM \perp SE$ tại M .

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2} = OE.$$

Khi đó tam giác SOE vuông cân tại $O \Rightarrow M$ là trung điểm SE .

Chứng minh tương tự ta cũng có N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SF, SG, SH .

$$\text{Khi đó } d(O, (MNPQ)) = d(S, (MNPQ)) = \frac{1}{2}SO = \frac{3a}{4}, S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{EFGH} = \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{9a^2}{8}.$$

$$\text{Suy ra } V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot d(O, (MNPQ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{9a^2}{8} = \frac{9a^3}{32}.$$

$$\text{Vậy } V_{O.MNPQ} = \frac{9a^3}{32}.$$

Câu 6: Cho hình chóp đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$. Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3}{48}$.

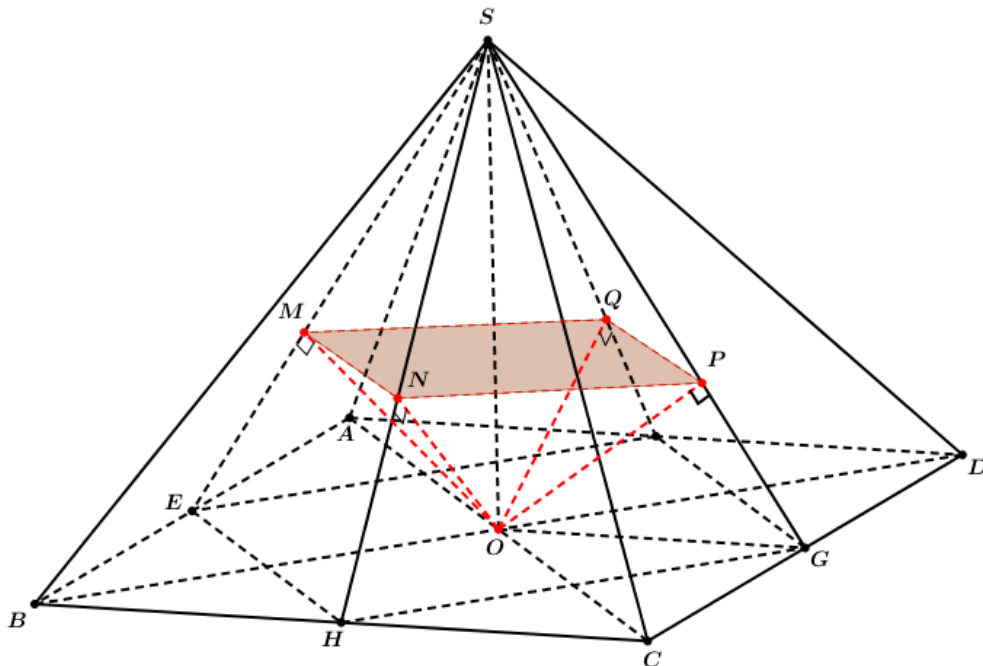
B. $\frac{2a^3}{81}$.

C. $\frac{a^3}{81}$.

D. $\frac{a^3}{96}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Từ giả thiết ta có } OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Gọi E là trung điểm của AB , kẻ $OM \perp SE$ ($M \in SE$) $\Rightarrow OM \perp (SAB)$.

$$\text{Và } \frac{SM}{SE} = \frac{SO^2}{SO^2 + OE^2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow M \text{ là trung điểm của } SE.$$

Chứng minh tương tự với các điểm N, P, Q .

$$\Rightarrow \text{Diện tích tứ giác } MNPQ \text{ là } \left(\frac{a\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{a^2}{8} \text{ và } d(O; (MNPQ)) = \frac{1}{2}SO = \frac{a}{4}.$$

$$\Rightarrow V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a^2}{8} = \frac{a^3}{96}.$$

Câu 7: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$.

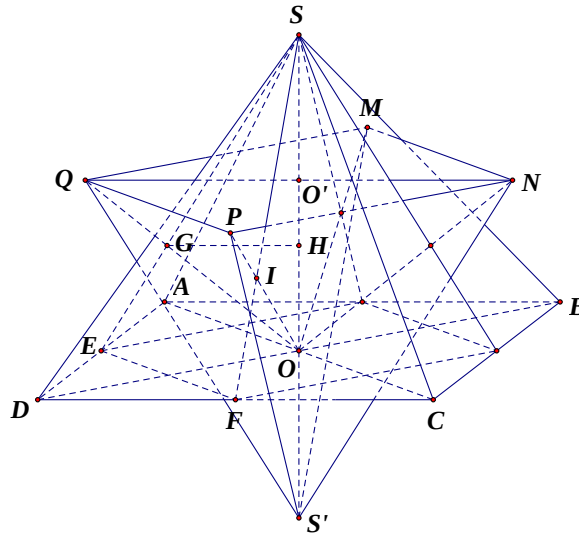
B. $\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

C. $\frac{40\sqrt{2}a^3}{81}$.

D. $\frac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng $a \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi G, I lần lượt là trọng tâm các tam giác SDA, SDC .

Gọi E, F lần lượt là trung điểm DA, DC .

$$\text{Ta có } GI = \frac{2}{3}EF, \quad EF = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow GI = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Mà } G, I \text{ lần lượt là trung điểm của } OQ, OP \Rightarrow QP = 2GI = \frac{2\sqrt{2}a}{3}.$$

$$\text{Từ giả thiết cho dễ dàng suy ra được } MNPQ \text{ là hình vuông cạnh } PQ = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{8a^2}{9}.$$

Gọi O' là tâm hình vuông $MNPQ$ kẻ $GH // QO' (H \in OO') \Rightarrow H$ là trung điểm OO' (vì G là trung điểm OQ).

$$\text{Ta có } QO' = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2a}{3} \text{ và } OO' = 2OH = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot SO = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Theo giả thiết } OS' = OS = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S'O' = S'O + OO' = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}a}{6}$$

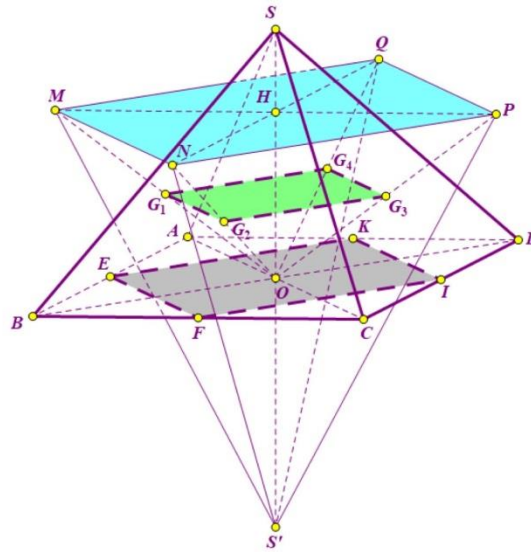
$$V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}a}{6} \cdot \frac{8a^2}{9} = \frac{20\sqrt{2}a^3}{81}.$$

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. B. $\frac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. C. $\frac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. D. $\frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA .

E, F, I, K lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA .

Ta có: $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4 \cdot \frac{4}{9} S_{EFIK} = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{8}{9} a^2$.

$$SO = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S'H = S'O + OH = SO + \frac{2}{3}SO = \frac{5a\sqrt{6}}{6}.$$

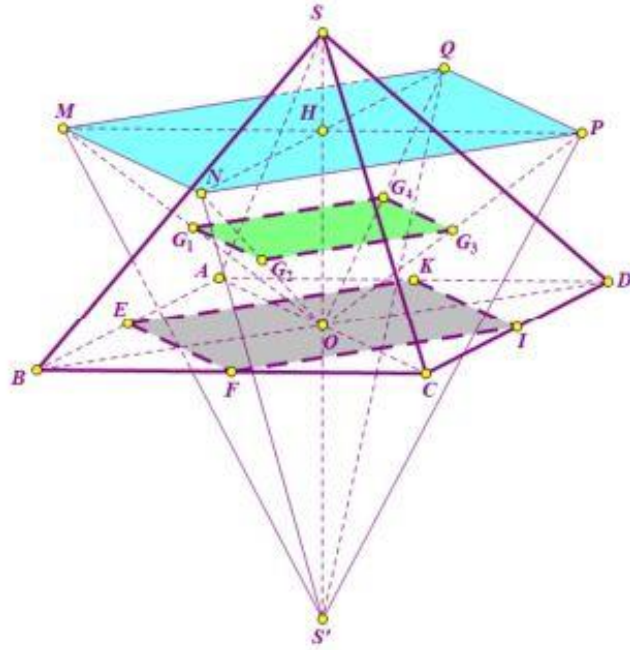
$$\Rightarrow V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{8}{9} a^2 = \frac{20a^3\sqrt{6}}{81} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 9: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích khối chóp $S'MNPQ$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. B. $\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. C. $\frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. D. $\frac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SCD, \triangle SAD$.

Do $G_1G_2 \parallel G_3G_4 \parallel EF; G_1G_2 = G_3G_4 = \frac{1}{2}EF \Rightarrow$ Tứ giác $G_1G_2G_3G_4$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN \parallel PQ \parallel G_1G_2, MN = PQ = 2G_1G_2 \Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi $H = QN \cap MP$. Ta có: $\frac{SH}{SO} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ta có: } V_{S'.MNPQ} = 5.V_{S.MNPQ} = 5.2V_{S.G_1G_2G_3G_4} = 5.2.\left(\frac{2}{3}\right)^3.V_{S.EFIK} = \frac{80}{27}.V_{S.EFIK}$$

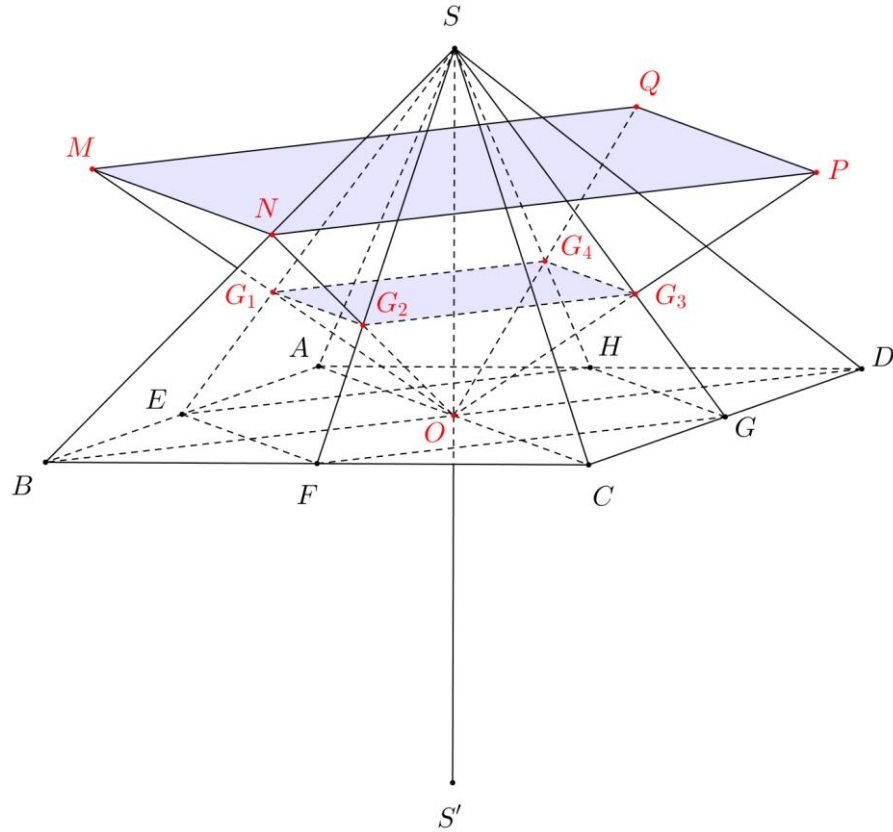
$$= \frac{80}{27} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{20\sqrt{10}a^3}{81}.$$

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. B. $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. C. $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. D. $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SDA$.

E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA .

$$\text{Ta có } S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4 \cdot \frac{4}{9} S_{EFGH} = 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} EG \cdot HF = \frac{8a^2}{9}.$$

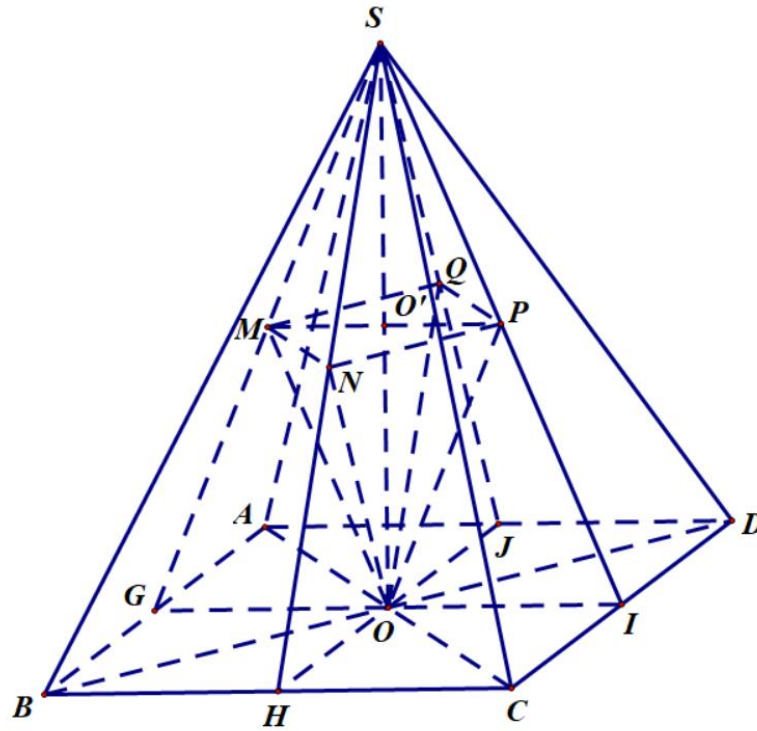
$$\begin{aligned} d(S', (MNPQ)) &= d(S', (ABCD)) + d(O, (MNPQ)) \\ &= d(S, (ABCD)) + 2d(O, (G_1G_2G_3G_4)) \\ &= d(S, (ABCD)) + \frac{2}{3} d(S, (ABCD)) \\ &= \frac{5}{3} d(S, (ABCD)) = \frac{5a\sqrt{14}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a\sqrt{14}}{6} \cdot \frac{8a^2}{9} = \frac{20a^3\sqrt{14}}{81}.$$

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ và (SDA) . Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{8a^3}{81}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{16a^3}{81}$.

Lời giải



Chọn C

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên có $SO \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a$.

Gọi G, H, I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

Ta có $AB \perp GO, AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOG)$ mà $AB \perp (SAB)$ nên $(SGO) \perp (SAB)$ do đó M là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB) suy ra $M \in SG$ và $OM \perp SG$.

Xét $\triangle SOG$ vuông tại O có $SO = OG = a$, $OM \perp SG$ nên M là trung điểm của SG .

Hoàn toàn tương tự có N, P, Q lần lượt là trung điểm của SH, SI, SJ .

Do đó dễ thấy $O.MNPQ$ là chóp tứ giác đều có đường cao $OO' = \frac{1}{2}SO = \frac{a}{2}$ và cạnh đáy

$$MN = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{4}AC = \frac{2a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } O.MNPQ \text{ bằng } V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}OO'.S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{12}.$$

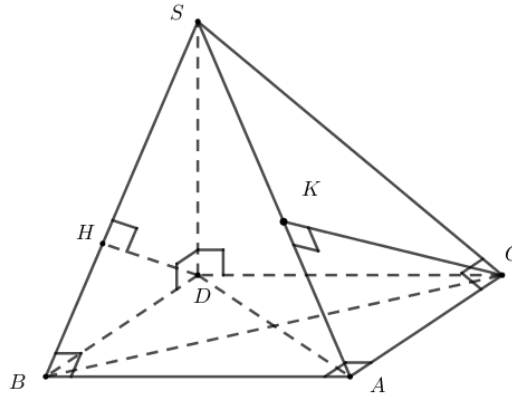
Câu 12: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a, SBA = SCA = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD$.

Tương tự, ta có $AC \perp CD$

$\Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a .

Đặt $SD = x, x > 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên $SB \Rightarrow DH = \frac{DB \cdot DS}{\sqrt{DB^2 + DS^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ta có $\begin{cases} DH \perp SB \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB) \Rightarrow d(D, (SAB)) = DH = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Lại có $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DH$.

$\triangle SCA$ vuông tại C , có $AC = a, SC = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Kẻ $CK \perp SA \Rightarrow CK = \frac{CA \cdot CS}{\sqrt{CA^2 + CS^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}$.

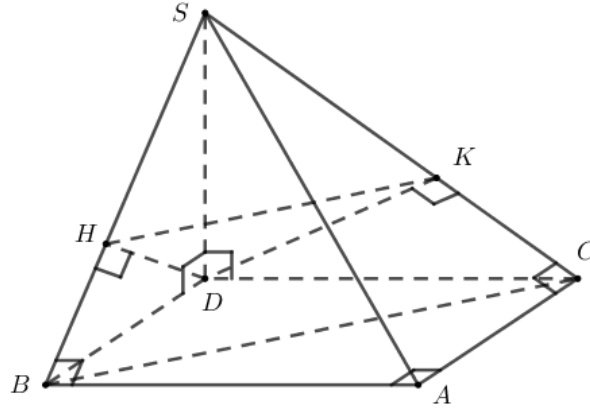
Vì $(SAB) \cap (SAC) = SA \Rightarrow \sin((SAB), (SAC)) = \frac{d(C, (SAB))}{d(C, SA)} = \frac{DH}{CK}$

$$\Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{\frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{a \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x \sqrt{x^2 + 2a^2}}{x^2 + a^2} \Leftrightarrow 3(x^2 + a^2)^2 = 4x^2(x^2 + 2a^2) \Rightarrow x = a.$$

$\Rightarrow DH = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3}{6}$.

Cách 2:



Dựng hình vuông $ABCD \Rightarrow SD \perp (ABCD)$.

Đặt $SD = x, x > 0$.

Kẻ $DH \perp SB, (H \in SB) \Rightarrow DH \perp (SAB)$ và $DH = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Kẻ $DK \perp SC, (K \in SC) \Rightarrow DK \perp (SAC)$ và $DK = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Ta có $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SC} = \frac{SD^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow HK \parallel BD \Rightarrow HK = \frac{x^2}{x^2 + a^2} BD = \frac{x^2}{x^2 + a^2} \cdot a\sqrt{2}$.

Ta có $\cos((SAB), (SAC)) = |\cos HDK| = \left| \frac{DH^2 + DK^2 - HK^2}{2DH \cdot DK} \right|$

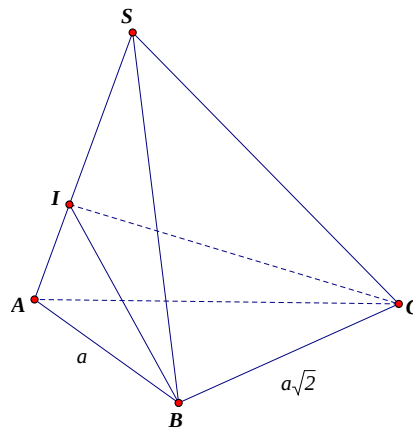
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left| \frac{\frac{2x^2a^2}{x^2 + a^2} - \frac{2a^2x^4}{(x^2 + a^2)^2}}{\frac{2x^2a^2}{x^2 + a^2}} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left| \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right| \Leftrightarrow x = a.$$

$\Rightarrow SD = a$.

Lại có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3}{6}$.

Cách trình bày khác



Hai tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau chung cạnh huyền SA .

Kẻ BI vuông góc với SA suy ra CI cũng vuông góc với SA và $IB = IC$.

$$SA \perp IC, SA \perp IB \Rightarrow SA \perp (IBC) \text{ tại } I.$$

$$V_{S.ABC} = V_{A.IBC} + V_{S.IBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle IBC} AI + \frac{1}{3} S_{\triangle IBC} SI = \frac{1}{3} S_{\triangle IBC} (AI + SI) = \frac{1}{3} S_{\triangle IBC} SA.$$

$$((SAB), (SAC)) = (IB, IC) \Rightarrow (IB, IC) = 60^\circ \Rightarrow BIC = 60^\circ \text{ hoặc } BIC = 120^\circ.$$

Ta có $IC = IB < AB = a$ mà $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác IBC không thể đều suy ra $BIC = 120^\circ$.

Trong tam giác IBC đặt $IB = IC = x (x > 0)$ có:

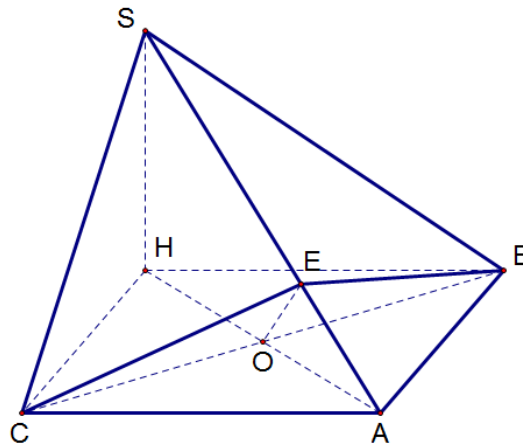
$$\cos 120^\circ = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2IB.IC} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{2x^2 - (a\sqrt{2})^2}{2x^2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow IB = IC = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Trong tam giác } ABI \text{ vuông tại } I \text{ có: } AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Trong tam giác } SAB \text{ vuông tại } B \text{ đường cao } BI \text{ có: } AB^2 = IA.SA \Rightarrow SA = \frac{AB^2}{IA} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle IBC} SA = \frac{1}{3} \frac{1}{2} IB.IC.SA \sin BIC = \frac{1}{6} \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 a \sqrt{3} \sin 120^\circ = \frac{a^3}{6}.$$

Cách trình bày khác



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) .

Theo bài ra, ta có $HC \perp CA, HB \perp BA \Rightarrow ABHC$ là hình vuông cạnh a .

Gọi $O = HA \cap BC$, E là hình chiếu của O lên SA .

Ta dễ dàng chứng minh được $EC \perp SA, EB \perp SA$.

Từ đó, ta được: góc giữa (SAC) và (SAB) là góc giữa EB và EC .

Vì $CAB = 90^\circ$ nên $BEC > 90^\circ \Rightarrow BEC = 120^\circ$.

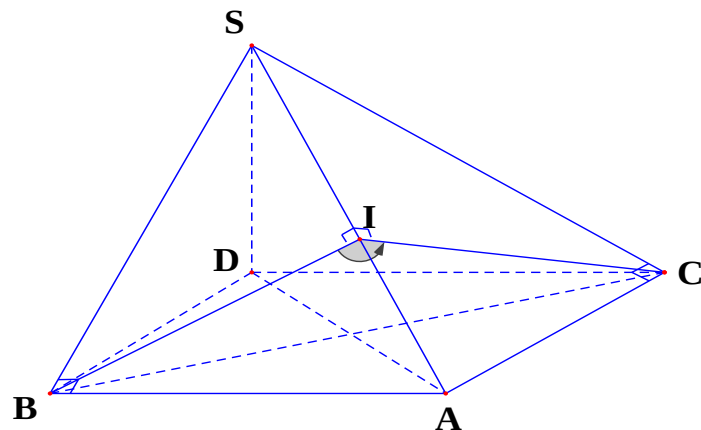
Ta dễ dàng chỉ ra được $OEB = OEC = 60^\circ$.

$$\text{Đặt } SH = x \Rightarrow SA = \sqrt{x^2 + 2a^2} \Rightarrow OE = \frac{AO.SH}{SA} = \frac{xa\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + 2a^2}}.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{xa\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + 2a^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.HBAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{6}.$$

Cách trình bày khác



Ta có $\Delta \perp SAB = \Delta \perp SAC$ và chung cạnh huyền SA . Kẻ $BI \perp (SA) \Rightarrow CI \perp (SA)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc giữa hai đường thẳng BI và $CI \Rightarrow (BI; CI) = 60^\circ$.

Có $BC = a\sqrt{2}$, ΔBIC cân tại I . Do $BI = CI < AC = a < a\sqrt{2} = BC$ nên ΔBIC không đều $\Rightarrow BIC = 120^\circ \Rightarrow BI = CI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Từ đó $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $AB^2 = AI \cdot SA \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Dựng hình vuông $ABDC \Rightarrow SD \perp (ABDC)$.

$$\text{Có: } SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = a; S_{\Delta ABC} = a^2 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SD = \frac{a^3}{6}.$$

HOẶC CÁCH KHÁC PPTHE TÍCH

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta BIC} \cdot (SI + AI) = \frac{1}{3} S_{\Delta BIC} \cdot SA.$$

$$\text{Với } S_{\Delta BIC} = \frac{1}{2} \cdot IB \cdot IC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{6}.$$

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE . Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$

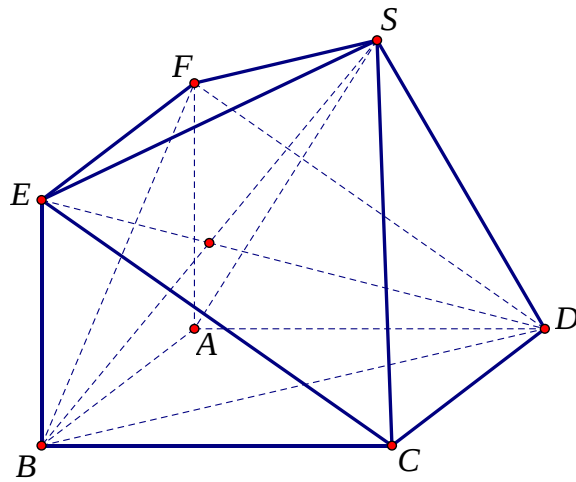
B. $\frac{11}{12}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{6}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: ADF.BCE là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân

Dựa vào hình vẽ ta có:

$$V_{ABCDSEF} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE} = V_{ADF.BCE} + V_{B.CDFE} = 2V_{ADF.BCE} - V_{BADE}$$

$$V_{ADF.BCE} = AB \cdot S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}; V_{BADE} = \frac{1}{3} AD \cdot S_{\triangle ABE} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{ABCDSEF} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Câu 14: Cho khối tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

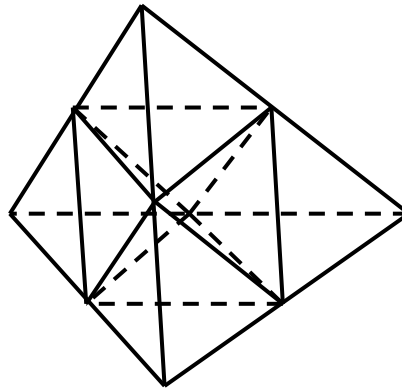
B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a . Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

Vậy $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác có cùng đáy là hình bình hành úp lại. Suy ra:

$$V' = 2V_{N.MEPF} = 4V_{N.MEP} = 4V_{P.MNE} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} V = \frac{1}{2} V$$

Cách 3. Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V}$

$$= 1 - \frac{V_{A.QEP}}{V} - \frac{V_{B.QMF}}{V} - \frac{V_{C.MNE}}{V} - \frac{V_{D.NPF}}{V} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

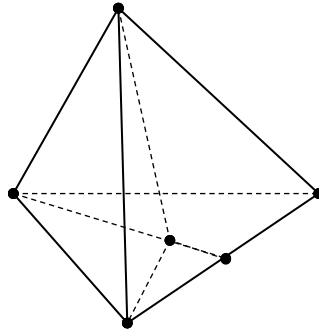
A. $V = 3$

B. $V = 4$

C. $V = 6$

D. $V = 5$

Lời giải



Chọn B

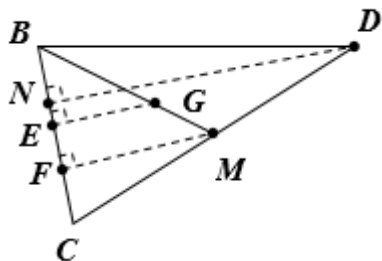
Cách 1:

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) . Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\triangle BGC} = S_{\triangle BGD} = S_{\triangle CGD} \Rightarrow S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

$$\left. \begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3} h \cdot S_{\triangle BCD} \\ V_{A.GBC} &= \frac{1}{3} h \cdot S_{\triangle BGC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}} = \frac{\frac{1}{3} h \cdot S_{\triangle BCD}}{\frac{1}{3} h \cdot S_{\triangle BGC}} = \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BGC}} = 3 \Rightarrow V_{A.GBC} = \frac{1}{3} V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

Chứng minh: Đặt $DN = h$; $BC = a$.



$$+) \quad MF \parallel ND \Rightarrow \frac{MF}{DN} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MF = \frac{1}{2} DN \Rightarrow MF = \frac{h}{2}.$$

$$+) \quad GE \parallel MF \Rightarrow \frac{GE}{MF} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GE = \frac{2}{3} MF = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

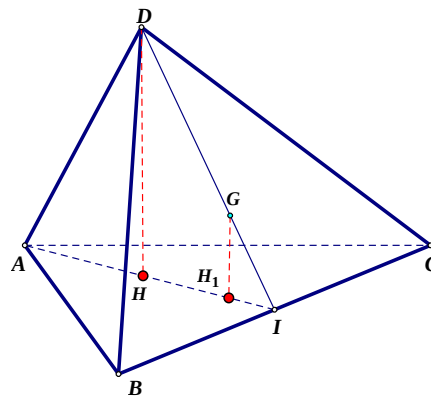
$$+) \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle GBC}} = \frac{\frac{1}{2} DN \cdot BC}{\frac{1}{2} GE \cdot BC} = \frac{\frac{1}{2} ha}{\frac{1}{2} \frac{h}{3} a} = 3 \Rightarrow S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle GBC}$$

+) Chứng minh tương tự có $S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle GBD} = 3S_{\triangle GCD} \Rightarrow S_{\triangle BGC} = S_{\triangle BGD} = S_{\triangle CGD}$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \frac{d(G; (ABC))}{d(D; (ABC))} = \frac{GI}{DI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G; (ABC)) = \frac{1}{3} d(D; (ABC)).$$

$$\text{Nên } V_{G.ABC} = \frac{1}{3} d(G; (ABC)) \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot V_{D.ABC} = 4$$

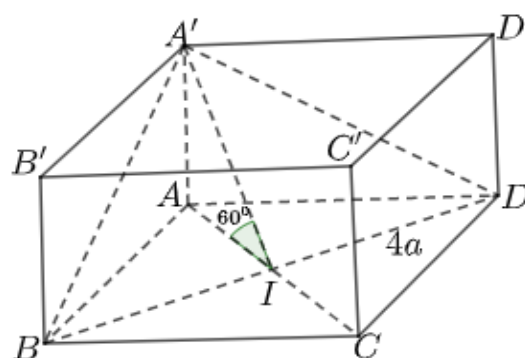


Câu 16: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $48\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. D. $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông có $BD = 4a \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}a$.

Gọi I trung điểm BD . Vì $BD = 4a \Rightarrow BI = AI = 2a$.

Tam giác $A'AI$ vuông tại A có: $\tan 60^\circ = \frac{A'A}{AI} \Rightarrow A'A = 2\sqrt{3}a$.

Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

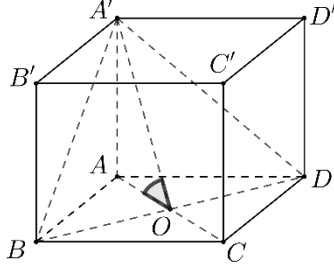
$$V = S_{ABCD} \cdot A'A = (2\sqrt{2}a)^2 \cdot 2\sqrt{3}a = 16\sqrt{3}a^3.$$

Câu 17: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. B. $6\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



+) Ta có $BD = 2a \Rightarrow AC = 2a; AB = a\sqrt{2}$.

$$+) S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2.$$

+) Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là góc $A'OA \Rightarrow AA' = AO \tan A'OA = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

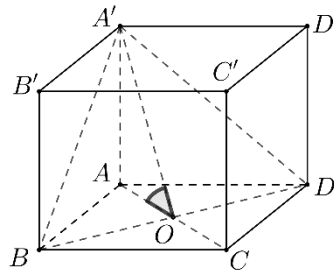
$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = a\sqrt{3} \cdot 2a^2 = 2\sqrt{3}a^3.$$

Câu 18: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD) = 30^\circ$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$ B. $48\sqrt{3}a^3$ C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$ D. $16\sqrt{3}a^3$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm của BD . Ta có: $\Delta A'AB = \Delta A'AD$ suy ra $A'B = A'D$ suy ra $\Delta A'BD$ cân.

$$\text{Mà } \begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ A'O \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((A'BD), (ABCD)) = A'OA = 30^\circ = 30^\circ.$$

$$\text{Xét } \Delta A'OA \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan 30^\circ = \frac{A'A}{AO} = \frac{A'A}{\frac{AC}{2}} = \frac{A'A}{\frac{BD}{2}} = \frac{A'A}{2a} \Rightarrow A'A = 2a \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét hình vuông $ABCD$ có: $BD = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2a\sqrt{2}$.

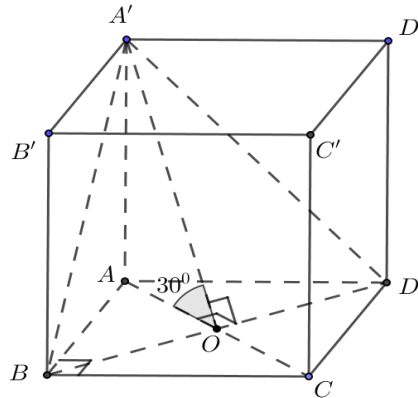
Vậy thể tích của khối hình hộp chữ nhật bằng: $V = A'A \cdot AB^2 = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot (2a\sqrt{2})^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3} a^3$.

Câu 19: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $6\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. C. $2\sqrt{3}a^3$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì $BD \perp OA$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'OA) \Rightarrow BD \perp OA'$

Lại có $(A'BD) \cap (ABCD) = BD$. Do đó $((A'BD), (ABCD)) = A'OA = 30^\circ$ (Hình vẽ trên).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có $BD = 2a$ nên $OA = a$ và $AB = AD = a\sqrt{2}$.

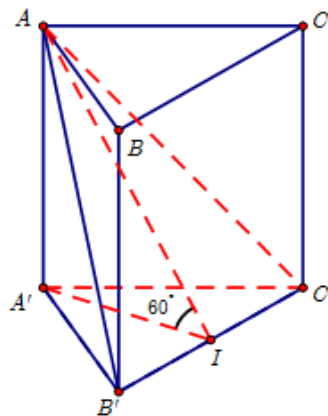
Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA = a$ và $A'OA = 30^\circ$ nên $AA' = OA \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V = AB \cdot AD \cdot AA' = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3a^3}{8}$. B. $V = \frac{9a^3}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Lời giải



Chọn A

Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

$$\text{Trong } \triangle A'B'C': B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2A'B' \cdot A'C' \cdot \cos B'A'C' = 3a^2$$

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad A'I = \frac{2S_{\triangle A'B'C'}}{B'C'} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow AIA' = 60^\circ$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AIA' \text{ có } AA' = A'I \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích } V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}.$$

Câu 21: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

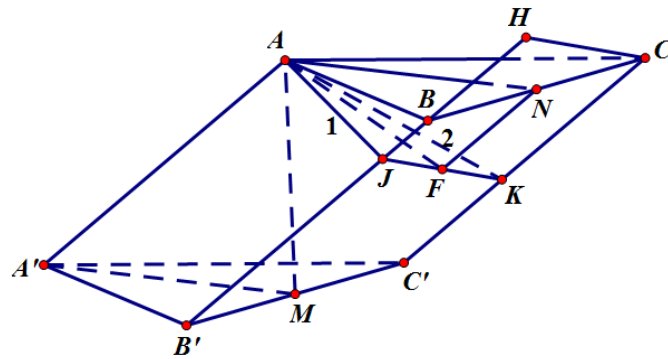
B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi J , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB' và CC' , H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'

$$\text{Ta có } AJ \perp BB' \quad (1).$$

$$AK \perp CC' \Rightarrow AK \perp BB' \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } BB' \perp (AJK) \Rightarrow BB' \perp JK \Rightarrow JK \parallel CH \Rightarrow JK = CH = \sqrt{5}.$$

$$\text{Xét } \triangle AJK \text{ có } JK^2 = AJ^2 + AK^2 = 5 \text{ suy ra } \triangle AJK \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{Gọi } F \text{ là trung điểm } JK \text{ khi đó ta có } AF = JF = FK = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Gọi N là trung điểm BC , xét tam giác vuông ANF ta có:

Suy ra $S_{ABC} = \frac{S_{AA_1A_2}}{\cos((ABC), (AA_1A_2))} = 1$. Thể tích lăng trụ là $V = AM \cdot S_{ABC} = 2$.

Nhận xét. Ý tưởng câu này là dùng diện tích hình chiếu $S' = S \cos \alpha$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

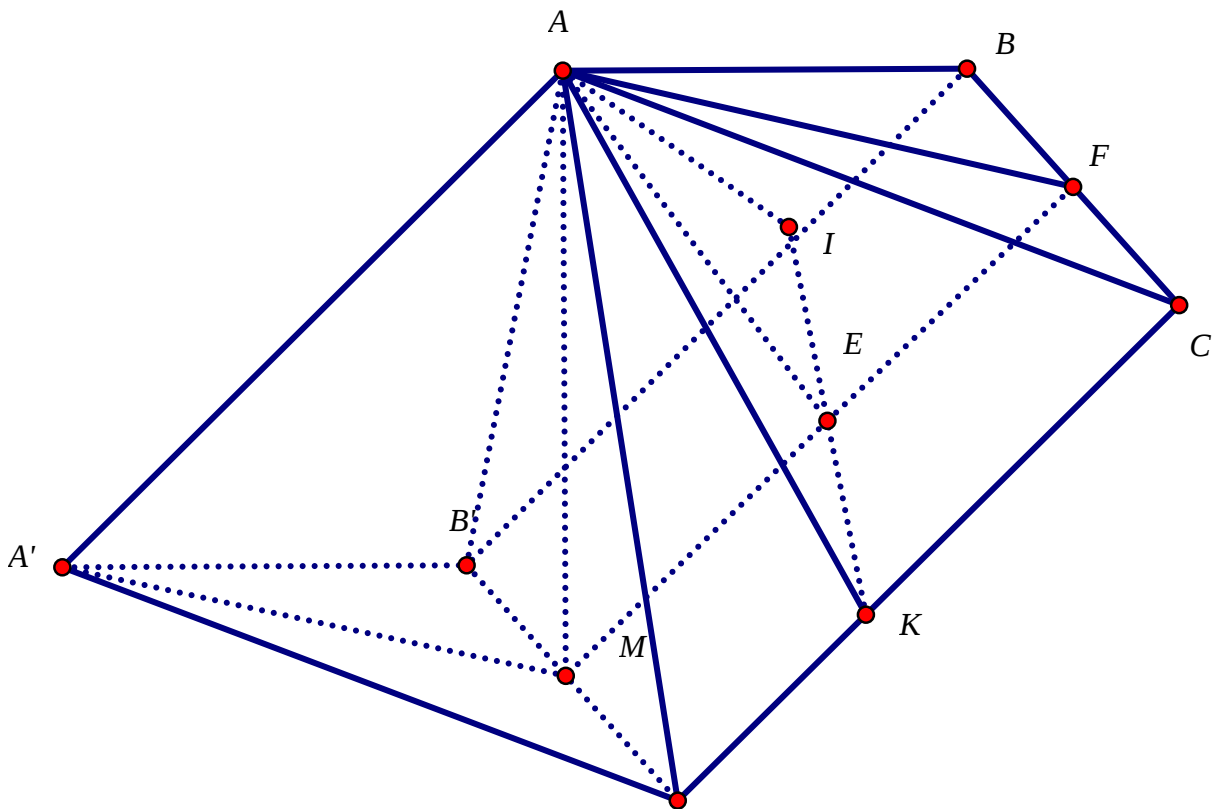
B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$ (hình vẽ).

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2 $\Rightarrow AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC . $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left. \begin{array}{l} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{array} \right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \triangle AIK$ vuông tại A .

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM

$$\text{bằng góc } \angle AME = \angle FAE. \text{ Ta có } \cos \angle FAE = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle FAE = 30^\circ.$$

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là $\triangle AIK$ nên ta có:

$$S_{AIK} = S_{ABC} \cos \angle EAF \Rightarrow 1 = S_{ABC} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}.$$

$$\text{Xét } \triangle AMF \text{ vuông tại } A: \tan \angle AMF = \frac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 24: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

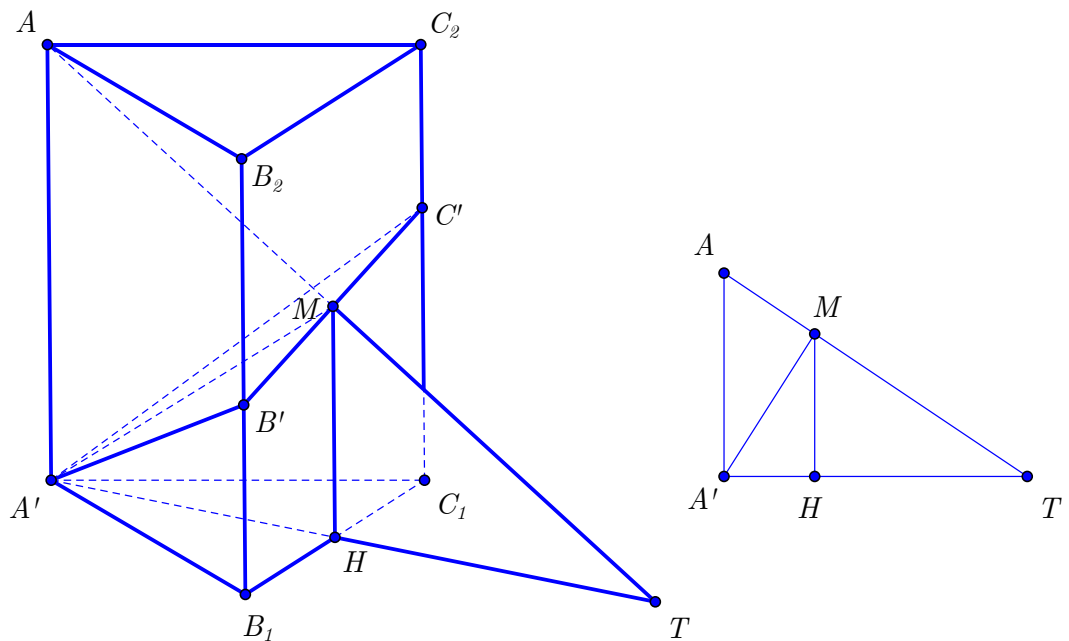
A. 2

B. 1

C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng qua A' và vuông góc với AA' ta được thiết diện là tam giác $A'B_1C_1$ có các cạnh $A'B_1 = 1$; $A'C_1 = \sqrt{3}$; $B_1C_1 = 2$.

Suy ra tam giác $A'B_1C_1$ vuông tại A' và trung tuyến $A'H$ của tam giác đó bằng 1.

Gọi giao điểm của AM và $A'H$ là T .

Ta có: $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H = 1 \Rightarrow MH = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $MA'H = 30^\circ$.

Do đó $MA'A = 60^\circ \Rightarrow AA' = \frac{A'M}{\cos MA'A} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng thể tích khối lăng trụ $A'B_1C_1.AB_2C_2$ và bằng

$$V = AA'.S_{A'B_1C_1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

Câu 25: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \frac{8}{3}$

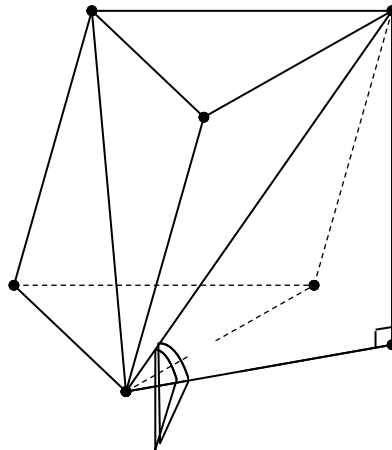
B. $V = \frac{16}{3}$

C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $C'AH = 60^\circ$.

Ta có: $\sin 60^\circ = \frac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}$; $S_{\triangle ABC} = 4$; $V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$.

$$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} C'H.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}; V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 26: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

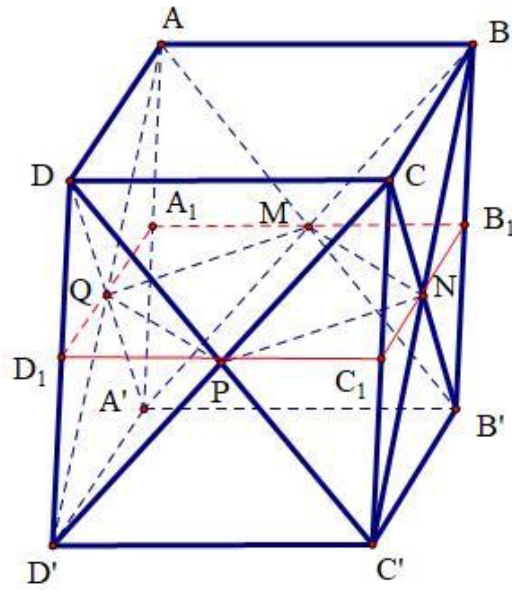
A. 27.

B. 30.

C. 18.

D. 36

Lời giải

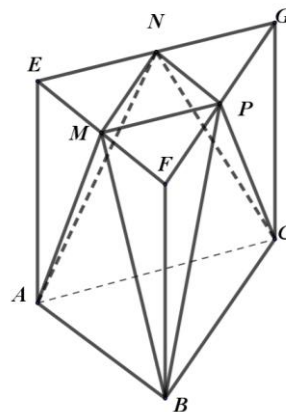
Chọn B

Mặt $(MNPQ)$ cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' tại A_1, B_1, C_1, D_1 . Thể tích khối đa diện cần tìm là V , thì:

$$\begin{aligned}
 V &= V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} - V_{A'.QMA_1} - V_{B'.MNB_1} - V_{C'.PNC_1} - V_{D'.QPD_1} \\
 &= \frac{8.9}{2} - 4 \times \frac{V}{24} \\
 \Rightarrow V &= 30
 \end{aligned}$$

Câu 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

- A. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. B. $8\sqrt{3}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải**Chọn C****Cách 1:**

Chia đôi khối lăng trụ bằng mặt phẳng (MNP) . Khi đó ta có $(MNP) \cap BB' = \{F\}$ thì

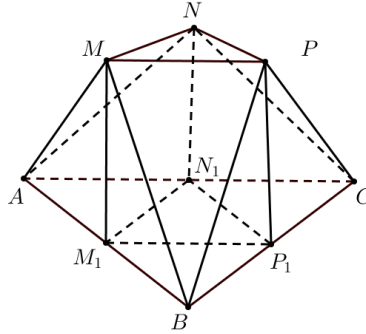
$$V_{ABC.EFG} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'}$$

Lại có $V_{ABC.MNP} = V_{ABC.EFG} - V_{B.MPF} - V_{A.EMN} - V_{C.NPG}$

Dễ thấy $V_{B.MPF} = V_{A.EMN} = V_{C.NPG} = \frac{1}{4}V_{ABC.EFG} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'}$

Tức là $V_{ABC.MNP} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4 \cdot 4^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.

Cách 2



$S_{ABC} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}; V_{ABC.A'B'C'} = V$

Hạ M_1, N_1, P_1 lần lượt vuông góc AB, AC, BC ,

khi đó M_1, N_1, P_1 lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC

Khi đó $V_{ABCMNP} = V_{MNP.M_1N_1P_1} + V_{B.MPP_1M_1} + V_{C.NPP_1N_1} + V_{A.MNN_1M_1}$

Dễ thấy $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABC}; MM_1 = \frac{1}{2}AA'$ nên $V_{MNP.M_1N_1P_1} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{8}V$

Do đáy là tam giác đều nên $V_{B.MPP_1M_1} = V_{C.NPP_1N_1} = V_{A.MNN_1M_1}$

Ta có $d(B; (MPP_1M_1)) = \frac{1}{2}d(B; (ACC'A'))$; $S_{MPP_1M_1} = \frac{1}{4}S_{ACC'A'}$ nên

$V_{B.MPP_1M_1} = \frac{1}{8}V_{B.ACC'A'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{12}V$.

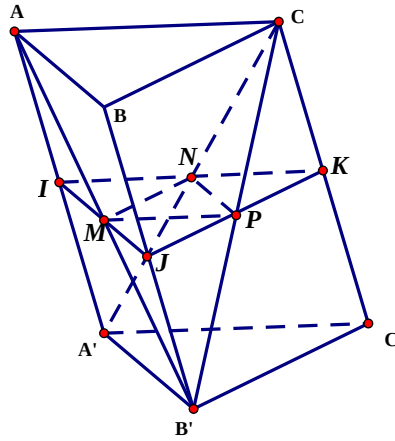
Do đó $V_{ABCMNP} = \frac{1}{8}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V = \frac{3}{8}V = \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

- A. $9\sqrt{3}$. B. $10\sqrt{3}$. C. $7\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$V_{ABC.A'B'C'} = 6.16 \frac{\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3},$$

Thể tích cần tìm là $V_1 = V_{ABC.MNP} = V_{A'B'C'.MNP}$

$$V_2 = V_{A'.AMN} = V_{B'.BMP} = V_{C'.CNP}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2V_1 + 3V_2$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{AB'C'} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{4} V_{A'.AB'C'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{12} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2V_1 + \frac{1}{4} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_1 = \frac{3}{8} V_{ABC.A'B'C'} = 9\sqrt{3}$$

Câu 29: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao là 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M , N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A , B , C , M , N , P bằng

A. $12\sqrt{3}$.

B. $16\sqrt{3}$.

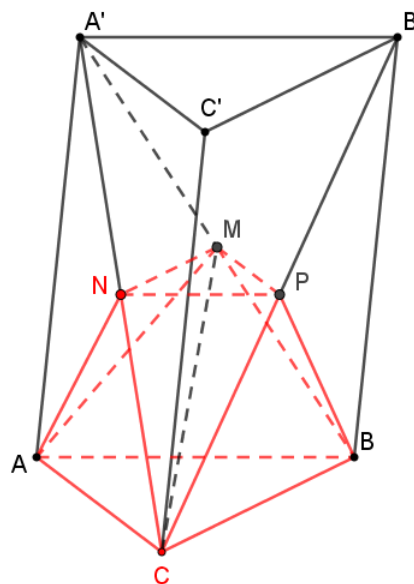
C. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Ta có $V = V_{ABCA'B'C'} = 8 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$, gọi $h = d(A', (ABC))$.

Ta có $V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot S_{ABC} = \frac{V}{6}$.

$V_{MNPC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{S_{ABC}}{4} = \frac{V}{24}$.

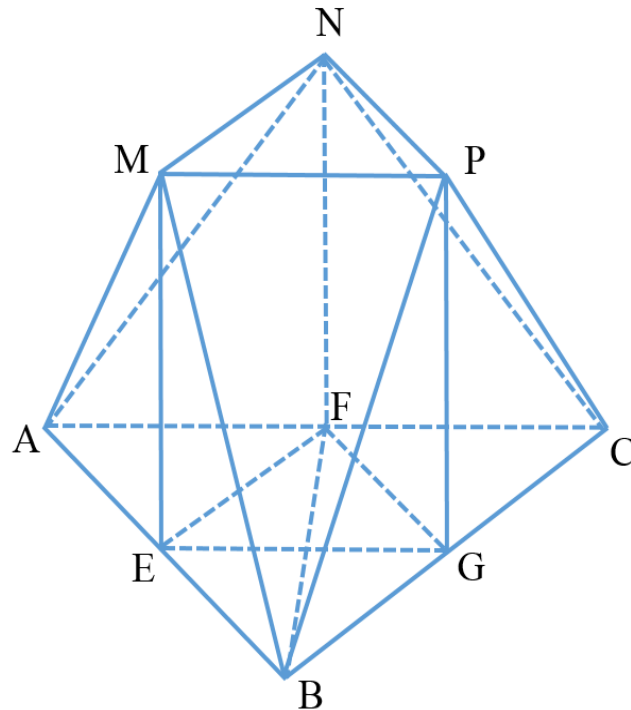
$V_{MBCP} = \frac{1}{3} \cdot d(M, (PBC)) \cdot S_{PBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d(A', (BCC'B'))}{2} \cdot \frac{S_{BCC'B'}}{4} = \frac{V_{A'.BCC'B'}}{8} = \frac{V}{12}$.

Tương tự $V_{MNAC} = \frac{V}{12}$.

Vậy $V_{MNPABC} = V_{MABC} + V_{MNAC} + V_{MNPC} + V_{MBCP} = \frac{3V}{8} = 12\sqrt{3}$.

Cách 2:

Đặc biệt hóa cho lăng trụ đứng.



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

Ta có: $V_{MNP.EFG} = ME \cdot S_{EFG} = 4\sqrt{3}$.

$V_{B.MEGP} = \frac{1}{3} d(B, (MEGP)) \cdot S_{MEGP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BF \cdot ME \cdot EG = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự: $V_{A.MNFE} = V_{C.PNFG} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{MNPABC} = V_{MNP.EFG} + V_{B.MEGP} + V_{A.MNFE} + V_{C.PNFG} = 4\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

A. $27\sqrt{3}$.

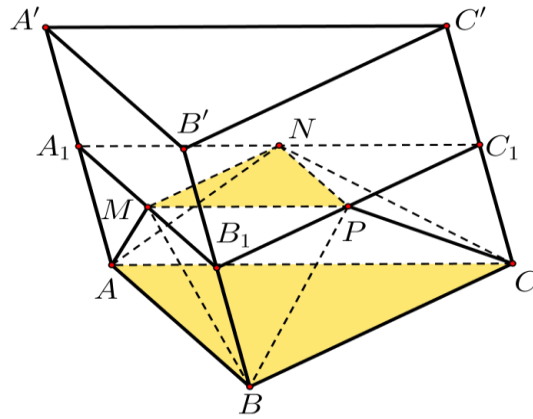
B. $21\sqrt{3}$.

C. $30\sqrt{3}$.

D. $36\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC' .

Khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có chiều cao là 4 là tam giác đều cạnh 6.

Ba khối chóp $A.A_1MN$, $B.B_1MP$, $C.C_1NP$ đều có chiều cao là 4 và cạnh là tam giác đều cạnh 3

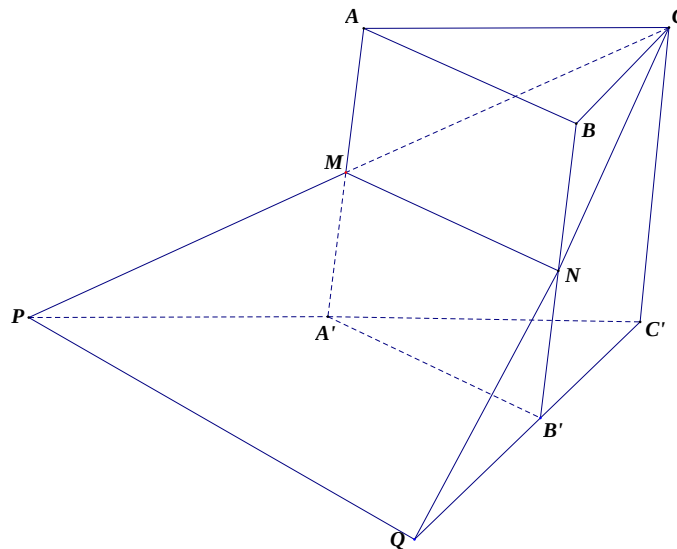
$$\text{Ta có: } V_{ABC.MNP} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - (V_{A.A_1MN} + V_{B.B_1MP} + V_{C.C_1NP}) = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 27\sqrt{3}$$

Câu 31: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



+) Ta có A' là trung điểm PC' ; B' là trung điểm QC' . Do đó $S_{CPQ} = 4S_{C'A'B'} \Rightarrow \frac{S_{CPQ}}{S_{C'A'B'}} = 4$.

$$+) V_{C.CPQ} = \frac{S_{CPQ}}{S_{C'A'B'}} \cdot V_{C.A'B'C'} = 4V_{C.A'B'C'} = 4 \left(\frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \right) = \frac{4}{3}.$$

$$+) \text{ Mặt khác } V_{A'B'C'.MNC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'N}{B'B} + \frac{C'C}{C'C} \right) V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.$$

$$+) \text{ Do đó } V_{A'MPB'NQ} = V_{C.CPQ} - V_{A'B'C'.MNC} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

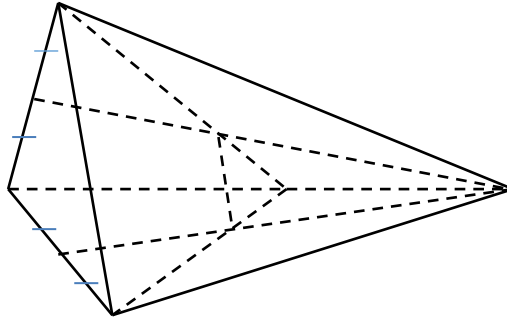
Câu 32: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$ B. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$ C. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$ D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$

Lời giải

Chọn B

(MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành 2 khối đa diện $(H_1): AC.MNPQ$ và $(H_2): BD.MNPQ$



(MNE) cắt AD tại Q , cắt CD tại P .

$$V_{AC.MNPQ} = V_{E.AMNC} - V_{E.ACPQ}$$

$$\begin{aligned} V_{E.AMNC} &= \frac{1}{3}d(E, (AMNC)) \cdot S_{AMNC} \\ &= \frac{1}{3}d(E, (ABC)) \cdot (S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BMN}) \\ &= \frac{1}{3}d(E, (ABC)) \cdot \left(S_{\triangle ABC} - \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot d(D, (ABC)) \cdot \frac{3}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2}V_{ABCD} \end{aligned}$$

$$V_{E.ACPQ} = \frac{1}{3}d(E, (ACPQ)) \cdot S_{ACPQ} = \frac{1}{3}d(B, (ACD)) \cdot (S_{\triangle ACD} - S_{\triangle DPQ}) = \frac{1}{3}d(B, (ACD)) \cdot \frac{8}{9}S_{\triangle ACD} = \frac{8}{9}V_{ABCD}$$

$$V_{AC.MNPQ} = \frac{3}{2}V_{ABCD} - \frac{8}{9}V_{ABCD} = \frac{11}{18}V_{ABCD} = \frac{11}{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{11\sqrt{2}}{216}a^3$$

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{2}$ B. $V = a^3$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ D. $V = \frac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D

Kẻ AH vuông góc SB .

Ta có $AH \perp (SBC)$ nên AH chính là khoảng cách từ A đến mp (SBC) .

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Suy ra $SA = a$. Thể tích cần tính là $V = \frac{1}{3}a.a.a = \frac{a^3}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h = \frac{2}{3}a$

B. $h = \frac{4}{3}a$

C. $h = \frac{8}{3}a$

D. $h = \frac{3}{4}a$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của AD . Tam giác SAD cân tại S

$$\Rightarrow SI \perp AD$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

$\Rightarrow SI$ là đường cao của hình chóp.

Theo

giả

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = \frac{1}{3}SI \cdot 2a^2 \Leftrightarrow SI = 2a$$

Vì AB song song với (SCD)

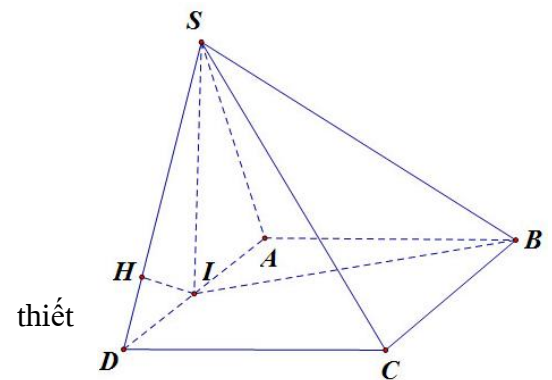
$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SD .

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} SI \perp DC \\ ID \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp DC. \text{ Ta có } \begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I, (SCD)) = IH$$

$$\text{Xét tam giác } SID \text{ vuông tại } I: \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD)) = \frac{4}{3}a.$$



Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72

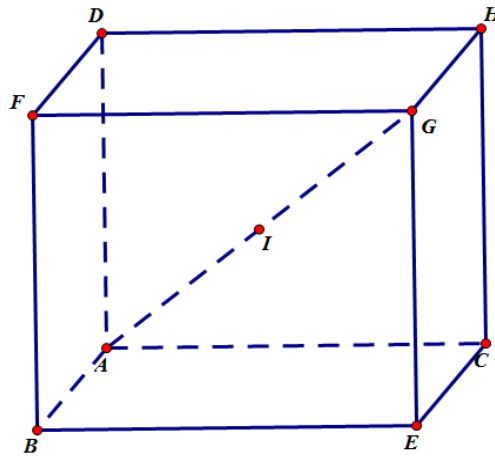
B. 216

C. 108

D. 36

Lời giải

Chọn D



Ta có: $AI = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$.

Dựng hình hộp chữ nhật $ABEC.DFGH$

I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD \Rightarrow I$ là trung điểm của $AG \Rightarrow AG = 2AI = 6\sqrt{3}$.

Đặt $AB = x, AC = y, AD = z$, ta có: $AG^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2$

$$\Rightarrow 108 = x^2 + y^2 + z^2 \stackrel{\text{Co-si}}{\geq} 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \Rightarrow xyz \leq \sqrt{36^3} = 216.$$

$$\text{Lại có: } V_{ABCD} = \frac{1}{6}xyz \leq \frac{1}{6}.216 = 36.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 6$.

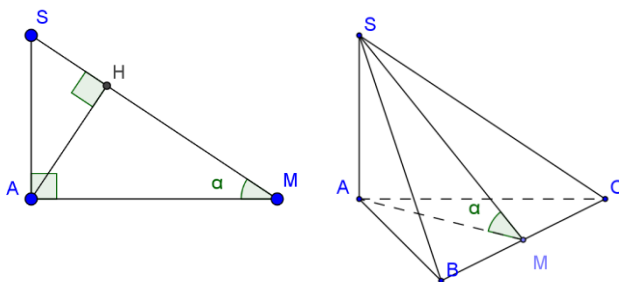
Vậy $\max V_{ABCD} = 36$.

Câu 36: Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC , H là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với SM . Ta được:

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là SMA .

$$AM = \frac{3}{\sin \alpha}; SA = \frac{3}{\cos \alpha}; AM = \frac{1}{2}BC.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.AM^2.SA = \frac{9}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

Thể tích khối chóp nhỏ nhất khi $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - \cos^3 x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = -\sin x + 3\cos x \cdot \sin x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Suy ra $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất khi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 37: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$

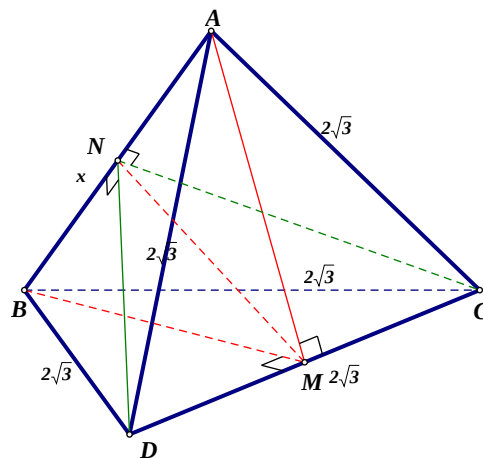
B. $x = \sqrt{14}$

C. $x = 3\sqrt{2}$

D. $x = 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB .

$$\left. \begin{matrix} CD \perp MB \\ CD \perp MA \end{matrix} \right\} \Rightarrow CD \perp (MAB) \Rightarrow \begin{cases} CD \perp MN \\ CD \perp AB \end{cases}$$

Tam giác MAB cân tại M nên $MN \perp AB$.

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) = \frac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot MN \cdot \sin 90^\circ \\ &= \frac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} x \cdot \sqrt{36 - x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left[\frac{x^2 + (36 - x^2)}{2} \right] = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

Vậy với $x = 3\sqrt{2}$ thì V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{1}{8}a^3$.

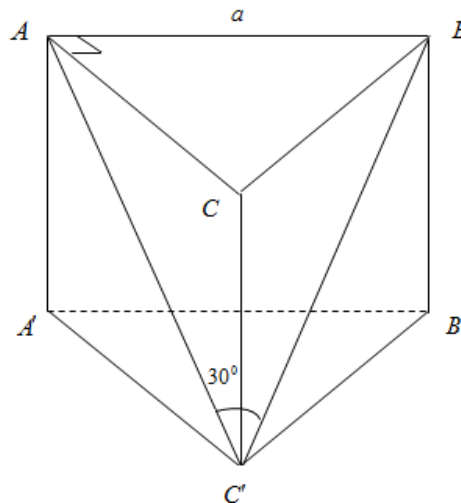
B. $\frac{3}{8}a^3$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích đáy: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow (BC', (ACC'A')) = BC'A = 30^\circ$.

Khi đó $AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^3$.