PHƯƠNG PHÁP ABC (ĐÁNH GIÁ TÍCH)

Ta sẽ mở đầu bằng việc xét một số bài toán sau:

<u>Bài 1:</u>

Cho $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c=m, m\in\left[-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right]$. Hãy đánh giá abc .

Giải:

Xét phương trình;

$X^3-mX^2+X-abc=0$

Phương trình này phải có 3 nghiệm a,b,c.

Đặt $f(X)=X^3-mX^2+X-abc$

Ta có: $f'(X)=3X^2-2mX+1$.Phương trình có hai nghiệm

$$X_1=\frac{m+\sqrt{m^2-3}}{3};X_2=\frac{m-\sqrt{m^2-3}}{3}$$

X	$-\infty$		X_2		X_1		$+\infty$
$f'(X)$		+	0	-	0	+	
$f(X)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Phương trình có ba nghiệm khi và chỉ khi $f(X_2)\geq 0$, $f(X_1)\leq 0$

Từ đây suy ra: $\dfrac{(6+2m^2)X_2-m}{9}\leq abc\leq\dfrac{(6+2m^2)X_1-m}{9}$(1)

Bài tóan trên giúp ta rút ra hai nhận xét sau:

i) Điều kiện cần và đủ để tồn tại các số thực a,b,c khi đã biết trước các giá trị $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c=m$ là (1).

ii) Với mỗi bộ số (a_0,b_0,c_0) đều tìm được hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ sao cho

$*\, a_0+b_0+c_0=x_0+x_0+y_0=z_0+z_0+t_0$

$*\, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0=z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0$

$*\, x_0x_0y_0\leq a_0b_0c_0\leq z_0z_0t_0$

Kết quả hai được suy ra khi các dấu bằng trong (1) xảy ra và là một cơ sở quan trọng cho phương pháp của chúng ta.

Bài 2:

Mọi đa thức f đối xứng theo các biến a,b,c đều có thể biễu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$. Và $\deg(abc) \le \frac{\deg(f)}{3}$.

Phương pháp ABC được xây dựng thông qua các định lý sau:

Định lý 1: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm đơn điệu trên R theo abc cực đại và cực tiểu xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Định lý 2: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lồi trên R theo abc cực đại xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Định lý 3: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lõm trên R theo abc cực đại xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Chứng minh:

Cả ba định lý trên đều được chứng minh thông qua nhận xét hai. Thực vậy, với mỗi bộ số (a_0, b_0, c_0) đều tìm được hai bộ $(x_0, x_0, y_0);(z_0, z_0, t_0)$ sao cho

$* a_0 + b_0 + c_0 = x_0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0$

$* a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = x_0x_0 + x_0y_0 + y_0x_0 = z_0z_0 + z_0t_0 + t_0z_0$

$* x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$

Định lý 1: Do f là hàm đơn điệu theo biến $a_0b_0c_0$ nên hàm số đạt cực đại hay cực tiểu tại các điểm biên của $a_0b_0c_0$, hãy giả sử f tăng và ta cần tìm cực đại, ta có

$$f(a_0b_0c_0, a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0, a_0b_0c_0) \le f(z_0z_0t_0, a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0, a_0 + b_0 + c_0)$$
$$= f(z_0z_0t_0, z_0z_0 + z_0t_0 + z_0t_0, z_0 + z_0 + t_0)$$

Vậy nên cực đại xảy ra khi có hai biến bằng nhau. Trong trường hợp R^+, do cận dưới của abc là 0 nên có thể nhân được điểm cực trị khi $abc = 0$, tức là có một biến bằng 0.

Định lý 2 và 3 được chứng minh tương tự với các tính chất của hàm lồi và lõm, hàm số lồi đạt cực đại , hàm số lõm đạt cực tiểu khi biến đạt các giá trị ở biên.

Từ các kết quả trên ta rút ra được một số hệ quả lí thú sau:

Hệ quả 1: Hàm số $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ bậc nhất theo abc đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 2: Hàm số $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ bậc hai theo abc và hệ số bậc cao nhất dương đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 3: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 4: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 8 có hệ số bậc $6,7,8$ dương đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

- Hai hệ quả 1 và 2 được suy ra trực tiếp từ định lý với nhận xét về sự đơn điệu của hàm bậc nhất và tính lồi của tam thức bậc hai hệ số dương.
- Hai hệ quả 3 và 4 kết hợp tính chất đã suy ra từ bài tóan hai để đưa các đa thức đối xứng bậc bé hơn hay bằng 5 về đa thức bậc 1 theo abc, còn đa thức đối xứng bậc bé hơn hay bằng 8 về đa thức bậc 2 theo abc và sử dụng hai kết quả của hệ quả 3 và 4.

Bây giờ chúng ta hãy xét qua một số ví dụ cụ thể xem phương pháp này được vận dụng ra sao nhé J

Bài 1:
Cho $x, y, z \in R$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2(x + y + z) - xyz$

Giải:
P đã ở sẵn trong dạng $f(x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$, và điều kiện đối xứng không ràng buộc xyz. Vậy nên ta có thể đưa bài tóan về việc giải quyết:
Cho $2a^2 + b^2 = 9$
Tìm giá trị lớn nhất của $P = 4a + 2b - a^2 b$
Để tìm giá trị lớn nhất ta thay $a = \sqrt{\frac{9 - b^2}{2}}$ vào P, và cần tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = f(b) = 2\sqrt{2(9 - b^2)} + 2b - \frac{b(9 - b^2)}{2}$$

$$f'(b) = \frac{-4b}{\sqrt{2(9 - b^2)}} - \frac{5}{2} + \frac{3b^2}{2} = 0 \Rightarrow 9b^6 - 87b^2 + 87b - 9 = 0 \Leftrightarrow (b^2 - 1)(9b^4 - 78b^2 + 9) = 0$$

Thay các nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 vào f và ta nhận được $f_{\max} = 10$ khi $a = 2, b = -1$.

Bài 2:
Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$i)\ \frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$ii)\ \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} + \frac{1}{4} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}\right)^2$$

Giải:
i) Bất đẳng thức của chúng ta rõ ràng có thể viết được dưới dạng đa thức đối xứng bậc 5

$$P = abc(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3}(a^3 + b^3 + c^3) - (a^3 + b^3 + c^3)(ab + bc + ca)$$

Và ta chỉ cần xét cực tiểu khi có hai giá trị trong ba biến bằng nhau hay một biến bằng 0.
Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử $a = c$ bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a^2 b}{2a^3 + b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2 + 2ab}{2a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a - b)^2 \left[\frac{1}{2a^2 + b^2} - \frac{2a + b}{3(2a^3 + b^3)}\right] \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^4 (a + b) \geq 0.$$

Trường hợp có một số bằng 0, giả sử là c, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{3} \geq \frac{ab}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 3(a - b)^2 \geq 0.$$

ii) Một đa thức đối xứng bậc bảy, nhưng các bạn đừng lo, đó vẫn là đa thức bậc một đối với abc J.

Bài 3:

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với các số thực dương a,b,c

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

Bài tóan Iran 96 nổi tiếng, một đa thức đối xứng bậc 6 và là bậc hai đối với abc:

$$9[(a+b)(b+c)(c+a)]^2-4(ab+bc+ca)\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right]\leq 0$$

Vậy nên hàm số đạt cực đại khi có hai giá trị bằng nhau hay một số bằng 0.

Trường hợp có hai biến bằng nhau, bất đẳng thức tương đương với

$$\left(a^2+2ab\right)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{2}{(a+b)^2}\right)\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\frac{2a+b}{2a(a+b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right]\geq 0\Leftrightarrow b(a-b)^2\geq 0$$

Trường hợp có một biến bằng nhau, giả sử là c, bất đẳng thức tương đương với:

$$ab\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{4(a+b)^2}\right]\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\left(4a^2+4b^2+7ab\right)\geq 0$$

Bản chất của phương pháp là đánh giá abc, vậy nên việc gặp những bài tóan có bậc đẹp đẽ như vậy là một điều tốt đẹp nhưng không phải lúc nòa cũng như vậy, thế nên thủ sẵn các biến đổi sau để đánh giá hàm số theo abc là một điều cần thiết.

MOT SO DANG THUC

Để thuận tiện trong những phần tiếp theo, ta quy ước $a=x+y+z, b=xy+yz+xz, c=xyz.$

Ta sẽ xét qua các đại luợng hoán vị vòng quang của các biến x,y,z sẽ được biễu diễn qua các đại lượng trên ra sao.

$$x^2+y^2+z^2=a^2-2b$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=ab-3c$$

$$xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)=a^2b-2b^2-ac$$

$$x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c$$

$$x^4+y^4+z^4=a^4-2a^2b+2b^2+4ac$$

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}=\frac{ab-3c}{c}$$

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=b^2-2ac$$

$$(xy)^3+(yz)^3+(zx)^3=b^3-3abc+3c^2$$

$$\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)=9c^2+\left(a^3-6ab\right)c+b^3$$

Dưới đây xin cung cấp cho các bạn một số đánh giá về a,b,c trong các miền khác nhau:

Định lý 1:

Phương trình bậc ba có các nghiệm thực x,y,z khi và chỉ khi $-27c^2+\left(18ab-4a^3\right)c+a^2b^2-4b^3\geq 0(1)$

Định lý 2:

Phương trình bậc ba có các nghiệm thực dương x,y,z khi và chỉ khi có (1) và $a>0,b>0,c>0$

Định lý 3:

Phương trình bậc ba có các nghiệm là ba cạnh tam giác khi và chỉ khi có $(1),(2)$ và $a^3-4ab+8c>0.$

Ta hãy thử xét qua một số bất đẳng thức thông thuộc bằng cách áp dụng công cụ này.

Sau đây một số ví dụ ta không thể làm trực tiếp từ các hệ quả đã nêu mà phải nhờ vào một số biến đổi hay các định lý đã nêu.

Bài 1:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn:

$a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\geq 3$$

Giải:

Một bất đẳng thức đối xứng, điều kiện không ràng buột abc, việc đưa về đa thức đối xứng là dễ dàng, tuy nhiên lại lên tới bậc 9, và là bậc ba theo abc **L**. Điều này nằm ngòai kiểm sóat của các hệ quả, vậy nên ta phải có chút thủ thuậ biến đổi nho nhỏ.

Đặt $x=\frac{bc}{a};y=\frac{ac}{b};z=\frac{ab}{c}$. Bất đẳng thức tương đương với:

$xy+yz+xz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy+z}+\frac{1}{yz+x}+\frac{1}{zx+y}\geq 3(*)$$

Bây giờ thì mọi chuyện trở nên dễ dàng rồi, một đa thức bậc hai theo xyz, và ta cần tìm cực đại. Ta chỉ cần xét các trường hợp khi có hai biến bằng nhau, hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x=z$. Bât đẳng thức tương đương với:

$\frac{2}{xy+x}+\frac{1}{x^2+y}\geq 3$ với $2xy+x^2=1$.

Thay $y=\frac{1-x^2}{2x}$, và ta cần chứng minh $\frac{2}{\frac{1-x^2}{2}+x}+\frac{1}{x^2+\frac{1-x^2}{2x}}\geq 3, x\in[0,1]$

Trường hợp 2: $z=0$. Bất đẳng thức tương đương với:

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 3$ với $xy=1$.

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{xy}=3$.

Bài 2:

Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}+\sqrt{\frac{2(xy+yz+xz)}{x^2+y^2+z^2}}\geq 1+\sqrt{2}$$

Giấc mộng đưa về dạng đa thức đối xứng coi như tan vỡ. Ta đành đánh giá trực tiếp theo hàm đối với biến xyz. Vẫn với quy ước $a=x+y+z, b=xy+yz+zx, c=xyz$, sử dụng các hằng đẳng thức đã nếu ở trên ta biến bất đẳng thức về dạng:

$$\sqrt{\frac{a^4-2a^2b+2b^2+4ac}{b^2-2ac}}+\sqrt{\frac{2b}{a^2-2b}}\geq 1+\sqrt{2}$$

Hàm theo c là hàm bậc nhất nên đơn điệu. Theo định lý một, cực tiểu xảy ra khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x=z$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{2x^4+y^4}{x^4+2x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2(x^2+2xy)}{2x^2+y^2}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Trường hợp 2: $z=0$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Cuối cùng dưới đây là một số bài tập để các bạn làm quen với phương pháp này:

__Bài 1:__

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\ge\frac{6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

__Bài 2:[Darij Grinberg- Old and New Inequality]__

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$$

__Bài 3: [Mircea Lascu – Old and New Inequality]__

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

__Bài 4:[Vietnam TST, 1996]__

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a,b,c

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\ge\frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

__Bài 5:__

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}}+2\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\sqrt{6}+2$$