

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức
$$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{với } x > 0, x \neq 1$$

2. Cho $x + \sqrt{3} = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = 7(x^2 - 4x)^{100} + (x^2 - 4x)^{50} + 2016$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^x + 3 = y^2$

2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

Bài 3: (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

Bài 4: (2,0 điểm)

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2$

$$\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P =

Bài 5: (7,0 điểm)

1. Cho đường tròn tâm O và đường thẳng d cắt đường tròn tâm O tại hai điểm B, C (d không đi qua O). Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A nằm ngoài đường tròn tâm O). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a. Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn và AK. $AI = AM^2$

b. Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

2. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 1m, trong hình vuông đó đặt 55 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\frac{1}{9}$ m. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với ít nhất bảy đường tròn.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN CHẤM

Bài 1: (4,0 đ)

Câu	Nội dung	Điểm
1. (2,0đ)	$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x} - 1}$ $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1}$ $= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (2\sqrt{x} + 1) + 2(\sqrt{x} + 1)$ $= x - \sqrt{x} + 1$	1,0 1,0
2. (2,0đ)	$x + \sqrt{3} = 2 \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{3} \Rightarrow (x - 2)^2 = 3$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -1$ $A = 7(-1)^{100} + (-1)^{50} + 2016$ $A = 2024$	1,0 1,0

Bài 2: (4,0đ)

Câu	Nội dung	Điểm
1. (2,0đ)	Với $x = 0$ thì $y = 2$ hoặc $y = -2$ Với $x = 1$ thì $y^2 = 5$ (loại) Với $x \neq 2$ thì VT chia 4 dư 3, Vì VT là số tự nhiên lẻ $\Rightarrow y$ là số tự nhiên lẻ $\Rightarrow$ VP chia 4 dư 1 $\Rightarrow$ vô lí. Vậy nghiệm tự nhiên của phương trình là $(x,y) = (0;2)$	0,5 0,5 0,5 0,25 0,25
2. (2,0đ)	Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2+12} - \sqrt{x^2+5} = 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$ $\sqrt{x^2+12} - 4 = 3x - 6 + \sqrt{x^2+5} - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2+12} + 4} = 3(x - 2) + \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2+5} + 3}$ $\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12} + 4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5} + 3} - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Dễ dàng chứng minh được $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12} + 4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5} + 3} - 3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$	0,25 0,5 0,5 0,5 0,25

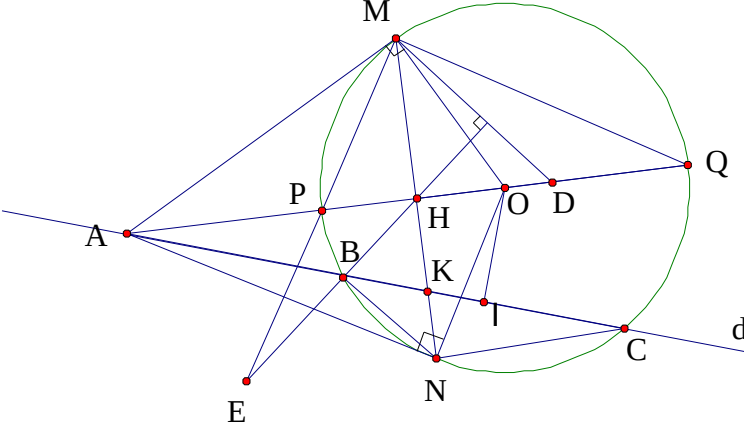
Bài 3: (3,0đ)

Câu	Nội dung	Điểm
3,0đ	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 2xy-(2-x-y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ (x-2)^2+(y-2)^2=0 \end{cases} \quad (1)$	1,0
	Từ phương trình 2 tìm được $x=2$ và $y=2$ Thay vào phương trình 1 tìm được $z=-2$	1,0

Bài 4: (2,0đ)

Câu	Nội dung	Điểm
2,0đ	Vì $x, y, z > 0$ ta có: Áp dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x \quad (1) . \text{ Tương tự ta có:}$ $\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq y \quad (2)$ $\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z \quad (3)$ Cộng (1) + (2) + (3) ta được: $P \geq \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \right) + \frac{x+y+z}{2}$ $\Rightarrow P \geq (x+y+z) - \frac{x+y+z}{2} = 1$ $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$ Vậy min $P = 1$	0,5 0,5 0,5 0,25 02,5

Bài 5: : (7,0đ)

Câu	Nội dung	Điểm
1. (5,5 đ)		
1a (2,0đ)	I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \angle OIA = 90^\circ$ $\Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính AO (1) Ta có $\angle AMO = 90^\circ$ (do AM là hai tiếp tuyến (O)) $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính AO (2) $\angle ANO = 90^\circ$ (do AN là hai tiếp tuyến (O)) $\Rightarrow$ N thuộc đường tròn đường kính AO (3) $\Rightarrow$ 5 điểm A, M, N, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính AO Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA	0,5 0,5 0,5 0,5
1,5đ	AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác $\angle MON$ mà $\triangle OMN$ cân tại O nên $OA \perp MN$ $\triangle AMO$ vuông tại M đường cao MH nên ta có $AH \cdot AO = AM^2$ $\triangle AHK$ đồng dạng với $\triangle AIO$ (vì $\angle AHK = \angle AIO = 90^\circ$ và $\angle HAI$ chung) Suy ra $AK \cdot AI = AH \cdot AO$ $\Rightarrow AK \cdot AI = AM^2$	0,5 0,5 0,5
1b (2,0đ)	Ta có M thuộc đường tròn (O) $\Rightarrow \angle PMQ = 90^\circ$ Xét $\triangle MHE$ và $\triangle QDM$ có $\angle MEH = \angle MQD$ (cùng phụ với $\angle BMP$), $\angle EMH = \angle QMD$ (cùng phụ với $\angle MPO$) $\Rightarrow \triangle MHE$ đồng dạng $\triangle QDM$ $\Rightarrow \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$ $\triangle PMH$ đồng dạng với $\triangle MQH$ $\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ}$ $\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \frac{ME}{MQ}$ $\Rightarrow ME = 2 MP \Rightarrow P$ là trung điểm ME.	1,0 0,5 0,5

(1,5 đ)	Kẻ 9 đường thẳng song song cách đều chia hình vuông thành 10 hình chữ nhật có chiều rộng là 0,1m. Vì đường kính của mỗi hình tròn lớn hơn 0,1m nên mỗi đường tròn bị ít nhất một trong 9 đường thẳng vừa kẻ cắt. Nếu mỗi đường thẳng chỉ cắt không quá 6 đường tròn thì số đường tròn không quá $9.6=54$. Vì có 55 đường tròn nên ít nhất phải có một đường thẳng cắt 7 đường tròn.	0,5 0,5 0,5
---------	--	----------------------------------

Chú yí:

- Học sinh làm cách khác nếu đúng và chặt chẽ cho điểm tương đương.
- Giám khảo khi chấm thống nhất cho điểm đến 0,25
- Nếu học sinh vận dụng kiến thức trước chương trình vẫn cho điểm.
- Điểm của học sinh tính đến 0,25 và không làm tròn.