ĐỀ VDC SỐ 13 Mín max của hàm đa thức và BPT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=x^{20-m}-x^7+2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 10.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^{30-m}-x^6+1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=(m^2-3m)x^{11}-mx^6+x^3-3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=(m^3-m)x^{13}-mx^6+x^4+1$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3-(m-1)x^2+2mx+1$. Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 6: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2mx^3+4mx^2-(2m+2)x-2021$ đạt tại $x_0=2$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 12.

Câu 7: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=-x^4-2m.x^3+3m.x^2-2mx-2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=1$. Số phần tử của tập S là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 8: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4+2021$ đạt tại $x_0=0$. Số phần tử của tập S là:

A. 34 **B.** 42 **C.** 35 **D.** 37

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-ax+b)+2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S=4a+b$ tương ứng bằng:

A. 5 **B.** 0 **C.** 10 **D.** 14

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^2+bx+2a+b$, với a,b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

A. 128. **B.** 243. **C.** 81. **D.** 696.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3+ax^2+bx+b-1$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in[-20;20]$ thỏa mãn bài toán?

A. 30. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 24.

Câu 12: Cho hàm số $f\left(x\right)=(m+n-2)x^7+x^4+(m+2n-1)x^3+x^2+(2n-1)x+2.$ Với m và n là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$. Giá trị của biểu thức $T=16m+2n$ bằng:

A. 22. **B.** 38. **C.** 46. **D.** 79.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4+ax^3+2bx^2+2cx+2b$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=1$ và $x_2=2$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b+c$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^6-ax^5+2bx^4+1$ với a,b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=3a+4b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$, với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng (b). Giá trị của biểu thức $T=a+3b+c$ bằng:

A. 3. **B.** 5. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^8+ax^5+bx^4+cx+2021$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^5+bx^4+1$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2a-b$ bằng:

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** -2.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-4x^3+\left(m+1\right)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f\left(x\right)$ Giá trị lớn nhất của α bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-4x^3+\left(m+1\right)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f\left(x\right)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x=x_o;m=m_o$. Giá trị của biểu thức $\left(x_o+m_o\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=-x^4+2x^3+mx^2-\left(m+2\right)x$, với m là tham số thực. Biết rằng

$\beta=\max f\left(x\right)$. Khi β đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=x^6-6a^5x-5b,$ với a và b là hai số thực không âm. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5. Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng:

A. 1. **B.** $\frac{6}{7}$. **C.** $\frac{2}{7\sqrt{6}}$. **D.** $\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 23: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+4y^2=4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+2xy+1}{2y^2+2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T=4M-4m$ bằng:

A. $\sqrt{113}$. **B.** 36. **C.** 12. **D.** 64.

Câu 24: Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx+1$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m=\frac{a}{b}$, trong đó a,b là những số nguyên dướng và phân số $m=\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5

Câu 25: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-mx$ trên đoạn $[-1;3]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60?

A. 53. **B.** 44. **C.** 58. **D.** 8

Câu 26: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx$ trên đoạn $[1;3]$ lớn hơn hoặc bằng 40?

A. 52. **B.** 51. **C.** 49. **D.** 50

Câu 27: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ nằm trong $(6;20)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 28: Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 29: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2.

A. 3. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 33.

Câu 30: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3?

A. 35. **B.** 26. **C.** 11. **D.** 31

Câu 31: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-44;44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx-1$ trên $[0;3]$ nằm trong $[-2;0]$. Số phần tử của tập S là:

A. 41. **B.** 45. **C.** 72. **D.** 5

Câu 32: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\frac{1}{2}$. Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng:

A. $\frac{13}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$

Câu 33: Gọi S là tập chứ tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-30;30\right]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2+m}{x^2+2x+2}$ lớn hơn $-\frac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 31. **B.** 32. **C.** 11. **D.** 2

Câu 34: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2-2mx+4}{x^2+2x+3}$ nhỏ hơn $\frac{1}{4}$. Số phần tử của tập S bằng :

A. 2. **B.** 3. **C.** 59. **D.** 58

Câu 35: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2-mx+3}{x^2+2x+2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng :

A. 32. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 48

Câu 36: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 37: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-30;30\right]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

A. 17. **B.** 16. **C.** 43. **D.** 35.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. C	8. C	9. D	10.D
11.B	12.D	13.A	14.B	15.B	16.C	17.A	18.A	19.B	20.D
21.A	22.D	23.A	24.A	25.B	26.C	27.D	28..D	29.C	30.A
31.B	32.A	33.A	34.D	35.C	36.D	37.D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Trường hợp 1:** $m=13\Rightarrow f(x)=2\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=2$. Vậy $m=13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 13$ $(*)$

Khi đó một hàm đa thức có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải dương $\Leftrightarrow \begin{cases}20-m>7\\20-m=2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le m<13\\m=20-2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le m<13\\\dfrac{7}{2}<k\le\dfrac{19}{2}\\m=20-2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\le k\le 9\\m=20-2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in\{2;4;6;8;10;12\}$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Vậy có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 2: **Chọn C**

Trường hợp 1: $m=24\Rightarrow f(x)=1\Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$. Vậy $m=24$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 24$ $(*)$

Khi đó một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm $\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 30-m\le 6\\m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24\le m\le 30\\m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}$

Trong trường hợp này kết hợp với $(*)$ ta có $m\in\{25;26;27;28;29;30\}$.

Vậy $m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}$. Suy ra có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 3: **Chọn D**

Một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm, suy ra $m^2-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=3\end{array}\right.$.

Với $m=0\Rightarrow f(x)=x^3-3\Rightarrow$ không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $m=3\Rightarrow f(x)=-3x^6+x^3-3\Rightarrow$ tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất một giái trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: **Chọn C**

Hàm đa thức $y=f(x)$ đạt giái trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bậc cao nhất phải là bậc chẵn suy ra $m^3-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\pm1\end{array}\right.$

Với $m=0\Rightarrow f(x)=x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=0$ thỏa mãn.

Với $m=1 \Rightarrow f(x)=-x^6+x^4+1$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=1$ không thỏa mãn.

Với $m=-1 \Rightarrow f(x)=x^6+x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=-1$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị thực của m thỏa mãn bài toán.

Câu 5: **Chọn D**

Ta có: $f'(x)=4x^3+3x^2-2(m-1)x+2m,\ f''(x)=12x^2+6x-2(m-1)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=0$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=0$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(0)=2m=0 \\ f''(0)=-2m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$$

Thử lại: với $m=0 \Rightarrow f(x)=x^4+x^3+x^2+1$ và $f(0)=1$

Xét $f(x)-f(0)=x^4+x^3+x^2=x^2\left(x^2+x+1\right)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $m=0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6: **Chọn B**

$f'(x)=4x^3-6mx^2+28mx-2m-2$

$f''(x)=12x^2-12mx+8m$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=2$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=2$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(2)=30-10m=0 \\ f''(0)=48-16m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$$

Thử lại: với $m=3 \Rightarrow f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x-2021$ và $f(2)=-2021$

Xét $f(x)-f(2)=x^4-6x^3+12x^2-8x=(x-2)^2\left(x^2-2x\right)$ không thảo mãn điều kiện không âm, $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 7: **Chọn C**

Ta có: $f'(x)=-4x^3-6mx^2+6mx-2m; f''(x)=-12x^2-12mx+6m$

Hàm đa thức đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_0=1$ thì hàm số phải đạt cực đại tại $x_0=1$.Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1)=-4-2m=0 \\ f''(1)=-12-6m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$$

Thử lại:

Với $m=-2 \Rightarrow f(x)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-2021$ và $f(1)=-2020$

Xét: $f(x)-f(1)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-1=-(x-1)^4\leq 0$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra: $m=-2$ thỏa mãn bài toán.

Câu 8: **Chọn C**

Cách 1: Lập luận bản chất theo tư duy bất phương trình:

Ta có: $f(x)=x^6+(m-2)x^5+\left(m^2-11\right)x^4+2021\geq f(0)=2021$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^4.\left[x^2+(m-2)x+m^2-11\right]\geq 0 \Leftrightarrow x^2+(m-2)x+m^2-11\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2-11) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \ge \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-21;21]} \left[\begin{array}{l} -21 \le m \le -5 \\ 4 \le m \le 21 \end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 6x^5 + 5(m-2)x^4 + 4(m^2-11)x^3$; $f''(x) = 30x^4 + 20(m-2)x^3 + 12(m^2-11)x^2$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$

Thử lại. Xét: $f(x) - f(0) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 = x^4.\left(x^2 + (m-2)x + m^2 - 11\right) \ge 0$

$x^2 + (m-2)^2 + m^2 - 11 \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2-11) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \ge \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-21;21]} \left[\begin{array}{l} -21 \le m \le -5 \\ 4 \le m \le 21 \end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 9: Chọn D

Cách 1: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = (2x-3)(x^2-ax+b) + (x^2-3x+2)(2x-a)$

$f''(x) = 2(x^2-ax+b) + (2x-3)(2x-a) + (2x-3)(2x-a) + 2(x^2-3x+2)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại x_0 : $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \ge 0 \end{cases}$

Nhận thấy rằng $\min f(x) = 2021 = f(1) = f(2)$. Tức là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1; x = 2$

Suy ra $\begin{cases} f'(1) = a - b - 1 = 0 \\ f'(2) = 4 - 2a + b = 0 \\ f''(1) = 2b - 2 \ge 0 \\ f''(2) = 16 - 6a + 2b \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Thử lại:

Với $a = 3; b = 2 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x^2-3x+2) + 2021 = (x-1)^2(x-2)^2 + 2021 \ge 2021$ (TM)

Suy ra $a = 3; b = 2$ thỏa mãn.Suy ra: $4a + b = 14$.

Cách 2: Theo cách tư duy bất phương trình:

Ta có $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2-ax+b) + 2021 \ge 2021 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2-ax+b) \ge 0$ với $\forall x$

Suy ra: $\left.(x^2-ax+b)\right|_{x=1;x=2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ 4 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Thử lại:

Với $a = 3, b = 2$ thỏa mãn. Suy ra: $4a + b = 14$.

Câu 10: Chọn D

Có đạo hàm $f'(x) = 6x^5 + 2ax + b; f''(x) = 30x^4 + 2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$, suy ra hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x_0 = 1$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1) = 6 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 30 + 2a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 6 \\ a \ge -15 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $\begin{cases} b = -2a - 6 \\ a \ge -15 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^6 + ax^2 - 2(a+3)x - 6$ và $f(1) = -a - 11$

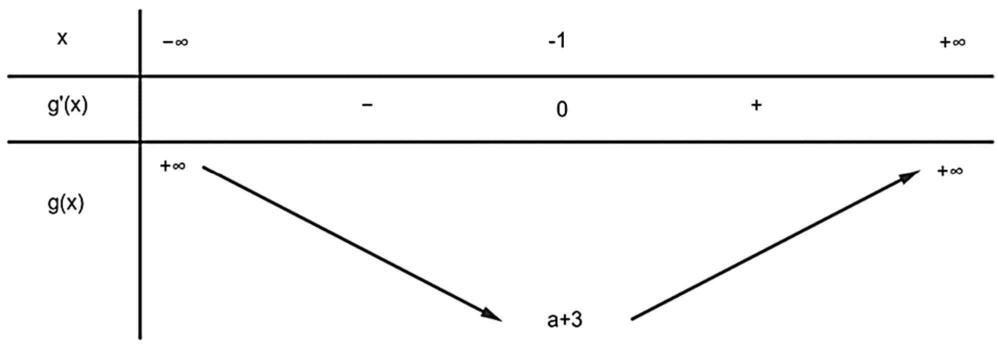
$f(x) - f(1) = x^6 + ax^2 - 2(a+3)x + a + 5 = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5) \ge 0$ với $\forall x \in R$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5 \ge 0$ với $\forall x \in R$

Xét hàm số: $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5$ có:

$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = (x+1)(4x^2 + 2x + 4)$

Khảo sát nhanh hàm số: $y = g(x)$ ta có bảng biến thiên:



Để $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5 \ge 0$ với $\forall x \in R$ thì $a + 3 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge -3$

Có $f(3) = 11a + 4b + 729 = 11a + 4(-2a - 6) + 729 = 3a + 705 \ge 3.(-3) + 705 = 696$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(3)$ là 696.

Câu 11: Chọn B

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2ax + b; f''(x) = 12x^2 + 6x + 2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$, thì:

$$\begin{cases} f'(1) = 2a + b + 7 = 0 \\ f''(1) = 2a + 18 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 7 \\ a \ge -9 \end{cases}$$

Thử lại: Xét $\begin{cases} b = -2a - 7 \\ a \ge -9 \end{cases}$ suy ra $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + (-2a - 7)x - 2a - 8$ và $f(1) = -3a - 13$

Xét $f(x) - f(1) = x^4 + x^3 + ax^2 + (-2a - 7)x + a + 5 = (x-1)^2(x^2 + 3x + a + 5) \ge 0$ với $\forall x \in R$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + a + 5 \ge 0$ với $\forall x \in R$

$\Leftrightarrow \Delta = 3^2 - 4(a+5) \ge 0 \Leftrightarrow a \ge -\dfrac{11}{4} \xrightarrow{a \in Z; a \in [-20;20]} -2 \le a \le 20$

Vậy có tất cả 23 giá trị a nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Chọn D

Điều kiện để hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất là: $m + n - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 - n$.

$f\left(x\right)=x^4+(n+1)x^3+x^2+(2n-1)x+2.$

$f'\left(x\right)=4x^3+3(n+1)x^2+2x+2n-1; f''\left(x\right)=12x^2+6(n+1)x+2$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$, thì:

$\begin{cases} f'(2)=2n+47=0 \\ f''(1)=62+12n\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow n=-\dfrac{47}{14}.$

Thử lại: Thay $n=-\dfrac{47}{14}$ vào ta được

$f\left(x\right)-f\left(2\right)=x^4-\dfrac{33}{14}x^3+x^2-\dfrac{54}{7}x+\dfrac{100}{7}=\left(x-2\right)^2(x^2+\dfrac{23}{14}x+\dfrac{25}{7})\geq 0$ với $\forall x\in R$

Suy ra $n=-\dfrac{47}{14}; m=2-n=\dfrac{75}{14}\Rightarrow T=2n+3m=79.$

Câu 13: Chọn A

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3+3ax^2+4bx+2c$; $f''\left(x\right)=12x^2+6ax+4b$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=1$ và $x_2=2$, thì phải có:

$$\begin{cases} f\left(1\right)=f\left(2\right) \\ f'\left(1\right)=0 \\ f'\left(2\right)=0 \\ f''\left(1\right)\geq 0 \\ f''\left(2\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a+6b+2c=-15 \\ 3a+4b+2c=-4 \\ 12a+8b+2c=-32 \\ 12+6a+4b\geq 0 \\ 48+12a+4b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=\dfrac{13}{2} \\ c=-6 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a=-6; b=\dfrac{13}{2}; c=-6$ vào ta được $f\left(x\right)=x^4-6x^3+13x^2-12x+13$ và $f\left(1\right)=9$.

Xét $f\left(x\right)-f\left(1\right)=x^4-6x^3+13x^2-12x+4=\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^2\geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=a+2b=7$.

Câu 14: Chọn B

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3+3ax^2+2bx+c$; $f''\left(x\right)=12x^2+6ax+2b$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f\left(0\right)=f\left(1\right) \\ f'\left(0\right)=0 \\ f'\left(1\right)=0 \\ f''\left(0\right)\geq 0 \\ f''\left(1\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=-4 \\ 2b\geq 0 \\ 12+6a+2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a=-2; b=1; c=0$ vào ta được $f\left(x\right)=x^4-2x^3+x^2+1$ và $f\left(0\right)=1$.

Xét $f\left(x\right)-f\left(1\right)=x^4-2x^3+x^2=x^2\left(x-1\right)^2\geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=a+2b+c=0$.

Câu 15: Chọn B

Ta có: $f'\left(x\right)=6x^5-5ax^4+8bx^3$; $f''\left(x\right)=30x^4-20ax^3+24bx^2$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b=-1 \\ 0=0 \\ -5a+8b=-6 \\ 0\ge 0 \\ 30-20a+24b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a=2;b=\dfrac{1}{2}$ vào ta được $f(x)=x^6-2x^5+x^4+1$ và $f(0)=1$.

Xét $f(x)-f(1)=x^6-2x^5+x^4=x^4(x-1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=3a+4b=8$.

Câu 16: Chọn C

Dễ thấy: $\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}=b$

Ta có $\begin{cases} \min f(x)=b\le f(-1) \\ \min f(x)=b\le f(1) \end{cases} \Rightarrow b\le \dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$

Bài toán cho dấu $"="$ xảy ta nên $\min f(x)=f(-1)=f(1)$.

Ta có $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=12x^2+6ax+2b$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=-1,x_2=1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(-1)=f(1) \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(-1)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c=a+b+c \\ -4+3a-2b+c=0 \\ 4+3a+2b+c=0 \\ 12-6a+2b\ge 0 \\ 12+6a+2b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=0,b=-2,c=0$ vào ta được $f(x)=x^4-2x^2-1$, $f(1)=b=-2$

Xét $f(x)-b=x^4-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=0,b=-2,c=0\Rightarrow T=a+3b+c=-6$.

Câu 17: Chọn A

Ta có $\min f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=2021,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(a+b)$ thì ta xét $f(1)=1+a+b+2021\ge f(0)=2021\Leftrightarrow a+b\ge -1$.

Dấu $"="$ xảy khi $f(1)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(1)$

Ta có $f'(x)=8x^7+5ax^4+4bx^3$; $f''(x)=56x^6+20ax^3+12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0,x_2=1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 0=0 \\ 5a+4b=-8 \\ 0\ge 0 \\ 56+20a+12b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=4,b=-3$ vào ta được $f(x)=x^8-4x^5+3x^4+2021$, $f(0)=2021$

Xét $f(x)-f(0)=x^8-4x^5+3x^4=x^4(x-1)^2(x^2+2x+3)\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=4, b=-3 \Rightarrow T_{\min}=(a+b)_{\min}=-1$.

Câu 18: Ta có $\min f(x)=f(0) \Rightarrow f(x) \geq f(0)=1, \forall x \in \mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(2a-b)$ thì ta xét $f(-2)=64-32a+16b+1 \geq f(0)=1 \Leftrightarrow 2a-b \leq 4$.

Dấu " = " xảy khi $f(-2)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(-2)$

Ta có $f'(x)=6x^5+5ax^4+4bx^3$; $f''(x)=30x^4+20ax^3+12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0, x_2=-2$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(-2) \\ f'(0)=0 \\ f'(-2)=0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=4 \\ 0=0 \\ 5a-2b=12 \\ 0 \geq 0 \\ 480-160a+48b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=4, b=4$ vào ta được $f(x)=x^6+4x^5+4x^4+1$, $f(0)=1$

Xét $f(x)-f(0)=x^6+4x^5+4x^4=x^4(x+2)^2 \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=4, b=4 \Rightarrow T_{\max}=(2a-b)_{\max}=4$.

Câu 19: **Chọn B**

Ta có: $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1=m(x^2-x)+(x^4-4x^3+x^2+1)$

Dễ thấy: $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Biết rằng $\alpha=\min f(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases} \alpha \leq f(0)=1 \\ \alpha \leq f(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq f(1)=-1$

Ta tìm điều kiện dấu bằng xảy ra: $\alpha=\min f(x)=f(1)=-1$

Tức là ta tìm điều kiện để hàm số *f(x)* đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_o=1$

Ta có: $f'(x)=4x^3-12x^2+2(m+1)x-m; f''(x)=12x^2-24x+2m+2$

$$\begin{cases} f'(1)=m-6=0 \\ f''(1)=2m-10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=6$$

Thay *m=6* ta được:

$f(x)=x^4-4x^3+7x^2-6x+1; f(1)=-1$

$f(x)-f(1)=x^4-4x^3+7x^2-6x+2=(x-1)^2(x^2-2x+2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy khi *m=6* thì $\alpha=\min f(x)=f(1)=-1$ là giá trị lớn nhất của α.

Câu 20: **Chọn D**

Ta có: $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1=m(-x^2+2x+3)+(x^4+x^3)$

Dễ thấy: $-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Biết rằng: $\alpha=\min f(x) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra: $\begin{cases} \alpha \leq f(-1)=0 \\ \alpha \leq f(3)=108 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq f(-1)=0$

Dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(-1) = 0$ hay hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_o = -1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2mx + 2m; f''(x) = 12x^2 + 6x - 2m$

$$\begin{cases} f'(-1) = 4m - 1 = 0 \\ f''(-1) = 6 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Thử lại: thay $m = \frac{1}{4}$ vào ta được $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}; f(-1) = 0$

Xét: $f(x) - f(-1) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = (x+1)^2\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy khi $m = \frac{1}{4} = m_o \Rightarrow \alpha = \min f(x) = f(x_o) = f(-1) = 0$ là giá trị lớn nhất của α

Suy ra $(x_o + m_o) = -\frac{3}{4}$

Câu 21: Chọn A

Ta có: $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + m(x^2 - x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) \geq 0$. Ta chỉ ra tồn tại m để $\max f(x) = 0$ tại $x = 0$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow m = -2.$

Thử lại với $m = -2$ thì $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 4x$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

Vậy với $m = -2$ thì $\max f(x) = 0$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $f(x) = x^6 - 6a^5x - 5b \Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 6a^5; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$-5a^6 - 5b$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bài ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-5 \Leftrightarrow -5a^6 - 5b = -5 \Leftrightarrow b = 1 - a^6$.

Giả sử $h(a) = a.b = a(1 - a^6) = a - a^7 \Rightarrow h'(a) = 1 - 7a^6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$.

Ta có bảng biến thiên

a	0		$\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$		$+\infty$
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$	$\searrow$	$+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức ab bằng $\dfrac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 23: Chọn A

Nếu $y = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ khi đó $P = \dfrac{5}{2}$.

Nếu $y \neq 0$ ta có: $P = \dfrac{4x^2 + 8xy + 4}{8y^2 + 8} = \dfrac{5x^2 + 8xy + 4y^2}{2x^2 + 16y^2} = \dfrac{5\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 8\left(\dfrac{x}{y}\right) + 4}{2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 16}$.

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$ ta được: $P = \dfrac{5t^2 + 8t + 4}{2t^2 + 16} \Leftrightarrow (5 - 2P)t^2 + 8t + 4 - 16P = 0 \ (2)$.

Nếu $P = \dfrac{5}{2}$ thì $t = \dfrac{9}{2}$.

Nếu $P \neq \dfrac{5}{2}$ thì phương trình (2) là phương trình bậc hai.

$\Delta = 4^2 - (5 - 2P)(4 - 16P) = 16 - (20 - 88P + 32P^2) = -32P^2 + 88P - 4$

$-32P^2 + 88P - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dfrac{11 - \sqrt{113}}{8} \leq y \leq \dfrac{11 + \sqrt{113}}{8}$

$\Rightarrow \text{Max}P = \dfrac{11 + \sqrt{113}}{8} = M$, $\text{Min}P = \dfrac{11 - \sqrt{113}}{8} = m \Rightarrow T = 4M - 4m = \sqrt{113}$.

Câu 24: Chọn A

Ta có: $\underset{[1;2]}{Max}\{x^2 - mx + 1\} = 4 \Leftrightarrow x^3 - mx + 1 \leq 4, \forall x \in [1;2]$

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{x^3 - 3}{x}, \forall x \in [1;2]$; $m \geq \underset{[1;2]}{Max}\left\{\dfrac{x^3 - 3}{x}\right\} = \dfrac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $m = \dfrac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2 \Rightarrow T = a + b = 5 + 2 = 7.$

Câu 25: Chọn B

Ta có: $\underset{[1;2]}{Max}\{x^4 - mx\} \leq 60 \Leftrightarrow x^4 - mx + 1 \leq 60, \forall x \in [-1;3] \Leftrightarrow mx \geq x^4 - 60, \forall x \in [-1;3]$

Với $x = 0,$ thỏa mãn.

Với $x \neq 0$ ta xét

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m\in[-1;0) \\ mx\ge x^4-60\end{cases} \Leftrightarrow m\le \dfrac{x^4-60}{x}, \forall x\in[-1;0) \Leftrightarrow m\le \min\limits_{[-1;0)}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\} \Leftrightarrow m\le 59 \\ \begin{cases} m\in(0;2] \\ mx\ge x^4-60\end{cases} \Leftrightarrow m\ge \dfrac{x^4-60}{x}, \forall x\in(0;2] \Leftrightarrow m\ge \min\limits_{(0;2]}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\} \Leftrightarrow m\ge 7\end{array}\right. \Leftrightarrow 7\le m\le 59$$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z}, m\in[-50;50] \Rightarrow m\in\{7;8;...;50\}$

Có 44 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 26: Chọn C

Ta có: $\underset{[1;3]}{max}\{x^3-3mx\} <\Leftrightarrow 40x^3-3mx<40, \forall x\in[1;3]$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{x^3-40}{3x}, \forall x\in[1;3] \Leftrightarrow m> \underset{[1;3]}{Max}\left\{\dfrac{x^3-40}{3x}\right\}=-\dfrac{13}{9}$

Suy ra, để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 40 thì $m\le -\dfrac{13}{9}$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}, m\in[-50;50] \Rightarrow m\in\{-50;-49;...;-2\}$ có 49 số thỏa mãn.

Câu 27: Chọn D

Đặt M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $[1;2]$. Ta có: $6<M<20$

Để $M<20$ thì $x^3+mx^2<20 \ \ \forall x\in[1;2]$.

Từ đó suy ra: $m<\dfrac{20-x^3}{x^2} \ \forall x\in[1;2] \Rightarrow m<\min\limits_{[1;2]}\dfrac{20-x^3}{x^2}=3$.

Tương tự để $M\le 6$ thì $x^3+mx^2\le 6 \ \forall x\in[1;2] \Rightarrow m\le \underset{[1;2]}{\text{Min}}\dfrac{6-x^3}{x^2}=\dfrac{-1}{2}$.

Do đó để $M>6$ thì $m>\dfrac{-1}{2}$. Vậy $\dfrac{-1}{2}<m<3$, do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 28: Chọn D

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì:

$x^3-mx^2\ge 1 \ \forall x\in[1;2]$ và dấu "=" phải xảy ra. Khi đó ta có: $m=\min\limits_{[1;2]}\dfrac{x^3-1}{x^2}=0$.

Câu 29: Chọn C

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2 thì:

$\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}\ge 2 \ \forall x\in[1;4] \Rightarrow mx\le x\sqrt{x}-2x-2 \ \forall x\in[1;4]$

$\Rightarrow m\le \dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x} \ \forall x\in[1;4] \Rightarrow m\le \min\limits_{[1;4]}\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}$.

Lại có: đặt $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}$ thì $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^2}>0 \ \forall x\in[1;4]$.

Do đó: $m\le \underset{[1;4]}{\text{Min}}\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}=g(1)=-3$. Vậy có tất cả 28 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 30: Chọn A

Vì $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}$ là hàm liên tục trên $\left[1;2\right]$ nên $f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\left[1;2\right]$.

Ta có: $\min\limits_{\left[1;2\right]} f\left(x\right)\le 3\Leftrightarrow \exists x\in\left[1;2\right]:\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}\le 3\Leftrightarrow \exists x\in\left[1;2\right]:m\le\dfrac{-x^2+3x+2}{x}\left(1\right)$

Đặt: $g\left(x\right)=\dfrac{-x^2+3x+2}{x}$. Khi đó $\left(1\right)\Leftrightarrow m\le \underset{\left[1;2\right]}{Max}\, g\left(x\right)\Leftrightarrow m\le 4$.

Như vậy có 35 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Chọn B

Vì hàm số $f\left(x\right)=x^3+mx-1$ là hàm liên tục trên $\left[0;3\right]$ nên $f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;3\right]$.

Ta có: $\min\limits_{\left[0;3\right]} f\left(x\right)\in\left[-2;0\right]\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{\left[0;3\right]} f\left(x\right)\le 0\left(1\right)$.

Ta thấy: $f\left(0\right)=-1<0\forall m$ nên $\min\limits_{\left[0;3\right]} f\left(x\right)\le 0\forall m$. Suy ra:

$\left(1\right)\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{\left[0;3\right]} f\left(x\right)\Leftrightarrow -2\le f\left(x\right)\forall x\in\left[0;3\right]\Leftrightarrow x^3+mx-1\ge -2\forall x\in\left[0;3\right]$

$\Leftrightarrow m\ge -x^2-\dfrac{1}{x}\forall x\in\left(0;3\right]\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{\left(0;3\right]}\left(-x^2-\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-\sqrt[3]{2}$

Vậy số giá trị nguyên của m thuộc $\left(-44;44\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là 45.

Câu 32: Chọn A

Ta có : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge -\dfrac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3x^2+\left(4m+1\right)x+1\ge 0\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $3x^2+\left(4m+1\right)x+1=0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left(4m+1\right)^2-12\le 0\\ \Delta=\left(4m+1\right)^2-12\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \Delta=\left(4m+1\right)^2-12=0\Leftrightarrow 16m^2+8m-11=0$$

Theo định lý Vi-et, ta có phương trình $16m^2+8m-11=0$ có hai nghiệm phân biệt m_1,m_2 thỏa mãn: $\begin{cases}m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}\\ m_1.m_2=-\dfrac{11}{16}\end{cases}\Rightarrow {m_1}^2+{m_2}^2=\left(m_1+m_2\right)^2-2m_1.m_2=\dfrac{13}{8}$.

Vậy tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng $\dfrac{13}{8}$

Câu 33: Chọn A

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\ge\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$. Dễ thấy $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}$ nên hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+m}{x^2+2x+2}\ge \min f\left(x\right)>-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2+3m>-x^2-2x-2$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 4x^2+2x+3m+2\geq 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta'=1-12m-8<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{7}{12}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},\ m\in[-30;30]}0\leq m\leq 30$.

Vậy có 31 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 34: Chọn D

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\geq\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Ta có $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}>\dfrac{c}{c'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}=\dfrac{-2m}{2}>\dfrac{4}{3}$ nên vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-2m}{2}\Leftrightarrow m\neq -1$. Khi đó hàm số có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ đi tìm điều kiện để $\min f(x)\geq\dfrac{1}{4}$

Khi đó $f(x)=\dfrac{x^2-2mx+4}{x^2+2x+3}\geq\min f(x)\geq\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x^2-8mx+16\geq x^2+2x+3$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$
.

Suy ra $3x^2-2(4m+1)x+13\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta'=(4m+1)^2-39\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{39}}{4}\leq m\leq\dfrac{-1+\sqrt{39}}{4}$

Suy ra để $\min f(x)<\dfrac{1}{4}$ thì $\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{-1+\sqrt{39}}{4}\\ m<\dfrac{-1-\sqrt{39}}{4}\end{array}\right.\xrightarrow{m\neq 1,m\in[-30;30],m\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}-30\leq m\leq -2\\ 2\leq m\leq 30\end{array}\right.$

Có tất cả 58 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 35: Chọn C

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\leq\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\leq\dfrac{c}{c'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}=\dfrac{-m}{2}\leq\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=-2$.

Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\Rightarrow m\neq -2$.

Khi đó ta tìm điều kiện để $\max f(x)=2$.

Mặt khác : $f(x)=\dfrac{x^2-mx+3}{x^2+2x+2}\leq\max f(x)=2$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Phải có điều kiện dấu bằng xảy ra.

Ta suy ra $x^2+(m+4)x+1\geq 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta=(m+4)^2-4\leq 0\Leftrightarrow -6\leq m\leq -2$. Kết hợp điều kiện suy ra $m=-6$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra $m=\{-6;-2\}\Rightarrow S=\{-6;-2\}$.

Tổng bình phương các giá trị của S bằng 40.

Câu 36: Chọn D

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{1}=\dfrac{-m}{1}\le\dfrac{2}{1}\\ \dfrac{1}{1}\ne\dfrac{-m}{1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m\ne-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\forall m$.

Ta có: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}\le\max f\left(x\right)<4$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+2\le4\left(x^2+x+1\right)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3x^2+\left(m+4\right)x+2\ge0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le0\Leftrightarrow\left(m+4\right)^2-24\le0\Leftrightarrow-4-2\sqrt{6}\le m\le-4+2\sqrt{6}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\right\}$

Vậy có tất cả 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 37: Chọn D

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{1}=\dfrac{-m}{-2}\le\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2}{1}\ne\dfrac{-m}{-2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}VN\\ m\ne-4\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ne-4$.

Để tìm điều kiện của m để $\max f\left(x\right)>6$ ta đi tìm điều kện để $\max f\left(x\right)\le6$

Ta có: $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}\le\max f\left(x\right)\le6$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x^2-mx+3\le6\left(x^2-2x+2\right)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4x^2+\left(m-12\right)x+9\ge0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le0\Leftrightarrow\left(m-12\right)^2-144\le0\Leftrightarrow0\le m\le24$

Vậy để $\max f\left(x\right)>6$ thì $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>24\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\ne-4,m\in\left[-30;30\right]}\left\{\begin{array}{l}m\ne-4\\ \left[\begin{array}{l}-30\le m\le-1\\ 25\le m\le30\end{array}\right.\end{array}\right.$

Vậy có tất cả 35 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.